

7. feladatsor

Kétváltozós függvények iránymenti deriváltja és szélsőérték-számítása

1. Elméleti összefoglaló

Iránymenti derivált

Az $f(x, y)$ függvény (x_0, y_0) pontbeli gradiens vektorának nevezzük az adott pontbeli parciális deriváltakból álló vektort:

$$\nabla f(x_0, y_0) = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0))$$

A parciális deriváltakhoz hasonlóan határértékkel definiálható a függvény (x_0, y_0) pontbeli tetszőleges $\underline{v}$ irányú iránymenti deriváltja. Ez a $\underline{v}$ irányú egységvektor és a gradiens vektor skalárszorzataként számolható:

$$f'_{\underline{v}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$$

A képletről leolvasható, hogy az iránymenti derivált a gradiens irányában a legnagyobb, és a gradienssel ellentétes irányban a legkisebb.

Lokális szélsőértékek

Legyen f függvény egy olyan tartományon definiálva, melynek (x_0, y_0) belső pontja. (x_0, y_0) lokális maximum/minimum hely, ha van olyan (x_0, y_0) középpontú nyílt körlap, melyben minden értelmezési tartománybeli pont függvényértéke kisebb vagy egyenlő / nagyobb vagy egyenlő $f(x_0, y_0)$ -nál. A továbbiakban feltételezzük, hogy f értelmezési tartománya egy nyílt T halmaz, és elsőrendű parciális deriváltjai léteznek és folytonosak a T nyílt halmazon, aminek eleme (x_0, y_0) .

Kritikus pontnak nevezzük a T értelmezési tartomány azon pontjait, melyekben mindkét elsőrendű parciális derivált nulla.

Nyeregpontnak nevezzük a T értelmezési tartomány azon (x_0, y_0) pontjait, melyekben mindkét elsőrendű parciális derivált nulla, és minden (x_0, y_0) középpontú nyílt körlapon van olyan pontja az értelmezési tartománynak, melynek függvényértéke kisebb az $f(x_0, y_0)$ értéknél, és van olyan is, melynek nagyobb.

Lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele: Ha (x_0, y_0) -ban lokális szélsőértéke van f -nek, akkor itt $f'_x(x_0, y_0) = 0$ és $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Lokális szélsőérték létezésének elégséges feltétele: Ha $f'_x(x_0, y_0) = 0$ és $f'_y(x_0, y_0) = 0$, és f második parciális deriváltjai léteznek és folytonosak az (x_0, y_0) -t tartalmazó nyílt T halmazon, akkor

1. Ha $\det \begin{bmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix} > 0$ és $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, akkor f -nek (x_0, y_0) -ban **lokális minimuma** van, és ez a minimum érték $f(x_0, y_0)$.
2. Ha $\det \begin{bmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix} > 0$ és $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, akkor f -nek (x_0, y_0) -ban **lokális maximuma** van, és ez a maximum érték $f(x_0, y_0)$.
3. Ha $\det \begin{bmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix} < 0$, akkor f -nek (x_0, y_0) -ban **nyeregpontja** van.

Abszolút szélsőértékek

Ha a folytonos $f(x, y)$ korlátos és zárt halmazon értelmezett, akkor ott felveszi a maximumát és minimumát. Ezen most abszolút maximumot, vagy abszolút minimumot értünk. Az abszolút szélsőérték megkeresésének menete a következő:

- A tartomány belsejében megnézzük a lehetséges szélsőérték helyeket.
- A tartomány határán megnézzük a lehetséges szélsőérték helyeket.
- Kiszámoljuk az előzőekre a függvényértékeket, és kiválasztjuk közülük a legnagyobbat és a legkisebbet.

Feltételes szélsőértékek

Adott feltételek melletti lokális szélsőértékek, azaz a feltételes lokális szélsőértékek kiszámításának fontos eszköze a Lagrange-multiplikátoros módszer. Ha az $f(x, y)$ -t szeretnénk minimalizálni vagy maximalizálni egy $g(x, y) = 0$ feltétel mellett (feltesszük, hogy f és g parciális deriváltjai léteznek és folytonosak), akkor ezt megtehetjük a

$$h(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

segédfüggvény segítségével (λ a Lagrange-multiplikátor). Az eredeti probléma lokális feltételes szélsőértékeit a segédfüggvény kritikus pontjai között kell keresni.

2. Feladatok

- Határozd meg a következő függvények adott irány szerinti iránymenti deriváltját a megadott pontban!
 - $f(x, y) = \frac{x^2 \ln y}{x^2 + 3y^2}$, $\underline{v} = (-3, 4)$, $P_0(-1, 1)$
 - $f(x, y) = \frac{xy(1+y)}{x^2 + y^2}$, $\underline{v} = (-4, 3)$, $P_0(3, 1)$
 - $f(x, y) = x^4[2 - \ln(1+y^2)]$, $\underline{v} = (1, 3)$, $P_0(1, 0)$
 - $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, $\underline{v} = (1, 3)$, $P_0(-3, -4)$
- Határozd meg, mely irány esetén lesz nulla az $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + e^y$ függvény $P_0(2, 0)$ pontbeli iránymenti deriváltja! És mely irány esetén lesz maximális az iránymenti derivált?
- Milyen irányban lesz az $f(x, y) = y^3 e^{-2x-1}$ függvény $(\frac{1}{2}, 1)$ pontbeli iránymenti deriváltja maximális, illetve minimális?
- Vizsgáld meg, hogy az alábbi függvényeknek hol lehet lokális szélsőértéke, van-e, s ha létezik, akkor minimum vagy maximum!
 - $f(x, y) = x^2 + y^2$
 - $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + 3x - y + 5$
 - $f(x, y) = (x^2 - 6x)(y^2 - 4y)$
 - $f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2 - 1$
 - $f(x, y) = x^2 y^3 (6 - x - y)$
 - $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$
 - $f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$
 - $f(x, y) = (x - y + 1)^2 - (x^2 - 2)^2$
 - $f(x, y) = xy(x + 8)(y - 6)$
 - $f(x, y) = (x^3 - 9)(y^2 + 4y)$
 - $f(x, y) = \frac{x^2}{2} + 3xy + \frac{y^3}{3} + \frac{5y^2}{2} - 5x - 12y + 2$
 - $*f(x, y) = \cos x \cos y \cos(x + y)$
 - $*f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + \frac{8}{x} + \frac{8}{y}$
- Oszd fel a 12-t három részre úgy, hogy a három szám szorzata maximális legyen!
- Egy derékszögű hasáb egy csúcsába összefutó éleinek összege 45 cm. Hogyan kell az éleket megválasztani, hogy a hasáb térfogata maximális legyen?
- Téglatest alakú, felül nyitott $4 m^3$ térfogatú tartályt akarunk készíteni a lehető legkevesebb anyag felhasználásával. Mekkoraak legyenek a téglatest élei?
- Oszd fel a 18-at három részre úgy, hogy az első rész négyzetének, a második rész köbének és a harmadik résznek a szorzata maximális legyen!
- Mikor a legnagyobb a 400 méter kerületű szimmetrikus trapéz alakú telek területe? (Mekkoraak a szárjai és a hosszabbik alapon fekvő szögei?)
- * Határozd meg az $f(x, y) = (x^2 - 6x)(y^2 - 4y)$ függvény legkisebb és legnagyobb értékét az $x = 0$, $y = 0$ és $x + y = 6$ egyenesekkel határolt zárt tartományban!
- * Mekkoraak a méretei az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszisbe írható legnagyobb kerületű téglalapnak, ha az oldalai párhuzamosak a koordinátatengelyekkel?
- * Egy lapos körlap alakú tányér alakját a $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ egyenlet írja le. A tányért melegítjük úgy, hogy bármely (x, y) pontban a hőmérséklet értéke $T(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ lesz. Keressük meg a tányér legforróbb és leghidegebb pontját!