

## 7. feladatsor

### Kétváltozós függvények iránymenti deriváltja és szélsőérték-számítása

1. Határozd meg a következő függvények adott irány szerinti iránymenti deriváltját a megadott pontban!

- (a)  $f(x, y) = \frac{x^2 \ln y}{x^2 + 3y^2}$ ,  $\underline{v} = (-3, 4)$ ,  $P_0(-1, 1)$       (b)  $f(x, y) = \frac{xy(1+y)}{x^2 + y^2}$ ,  $\underline{v} = (-4, 3)$ ,  $P_0(3, 1)$   
 (c)  $f(x, y) = x^4[2 - \ln(1+y^2)]$ ,  $\underline{v} = (1, 3)$ ,  $P_0(1, 0)$  (d)  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ ,  $\underline{v} = (1, 3)$ ,  $P_0(-3, -4)$

#### Megoldás

(a)

$$f(x, y) = \frac{x^2 \ln y}{x^2 + 3y^2} \quad P_0(-1, 1) \quad \underline{v} = (-3, 4)$$

Számítsuk ki először a parciális deriváltakat.

$$f'_x(x, y) = \frac{2x \ln y (x^2 + 3y^2) - x^2 \ln y \cdot 2x}{(x^2 + 3y^2)^2} \rightsquigarrow f'_x(-1, 1) = 0$$

$$f'_y(x, y) = \frac{\frac{x^2}{y} (x^2 + 3y^2) - x^2 \ln y \cdot 6y}{(x^2 + 3y^2)^2} \rightsquigarrow f'_y(-1, 1) = \frac{1}{4},$$

amiből a gradiens

$$\nabla f(-1, 1) = \left(0, \frac{1}{4}\right).$$

Most számítsuk ki a  $\underline{v} = (-3, 4)$  vektor normáltját.

$$\frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} = \frac{1}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} (-3, 4) = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

Az iránymenti deriváltat innen megkaphatjuk a két vektor skaláris szorzataként.

$$f'_{\underline{v}}(-1, 1) = \left\langle \nabla f(-1, 1), \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} \right\rangle = 0 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{5}.$$

(b)

$$f(x, y) = \frac{xy(1+y)}{x^2 + y^2} \quad P_0(3, 1) \quad \underline{v} = (-4, 3)$$

Számítsuk ki először a parciális deriváltakat.

$$f'_x(x, y) = \frac{y(1+y)(-x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \rightsquigarrow f'_x(3, 1) = -\frac{4}{25}$$

$$f'_y(x, y) = \frac{-xy^2 + x^3(1+2y)}{(x^2 + y^2)^2} \rightsquigarrow f'_y(3, 1) = \frac{39}{50},$$

amiből a gradiens

$$\nabla f(3, 1) = \left(-\frac{4}{25}, \frac{39}{50}\right).$$

Most számítsuk ki a  $\underline{v} = (-4, 3)$  vektor normáltját.

$$\frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} = \frac{1}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} (-4, 3) = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

Az iránymenti deriváltat innen megkaphatjuk a két vektor skaláris szorzataként.

$$f'_{\underline{v}}(3, 1) = \left\langle \nabla f(3, 1), \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} \right\rangle = -\frac{4}{25} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{39}{50} \cdot \frac{3}{5} = \frac{17}{25}.$$

(c)

$$f(x, y) = x^4 (2 - \ln(1 + y^2)) \quad P_0(1, 0) \quad \underline{v} = (1, 3)$$

Számítsuk ki először a parciális deriváltakat.

$$f'_x(x, y) = 4x^3(2 - \ln(1 + y^2)) \rightsquigarrow f'_x(1, 0) = 8$$

$$f'_y(x, y) = -\frac{8x^3y}{1 + y^2} \rightsquigarrow f'_y(1, 0) = 0,$$

amiből a gradiens

$$\nabla f(1, 0) = (8, 0).$$

Most számítsuk ki a  $\underline{v} = (1, 3)$  vektor normáltját.

$$\frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 3^2}} (1, 3) = \left( \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}} \right)$$

Az iránymenti deriváltat innen megkaphatjuk a két vektor skaláris szorzataként.

$$f'_{\underline{v}}(1, 0) = \left\langle \nabla f(1, 0), \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} \right\rangle = 8 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} + 0 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{8}{\sqrt{10}}.$$

(d)

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) \quad P_0(-3, -4) \quad \underline{v} = (1, 3)$$

Számítsuk ki először a parciális deriváltakat.

$$f'_x(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2} \rightsquigarrow f'_x(-3, -4) = -\frac{6}{25}$$

$$f'_y(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2} \rightsquigarrow f'_y(-3, -4) = -\frac{8}{25},$$

amiből a gradiens

$$\nabla f(-3, -4) = \left( -\frac{6}{25}, -\frac{8}{25} \right).$$

Most számítsuk ki a  $\underline{v} = (1, 3)$  vektor normáltját.

$$\frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 3^2}} (1, 3) = \left( \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}} \right)$$

Az iránymenti deriváltat innen megkaphatjuk a két vektor skaláris szorzataként.

$$f'_{\underline{v}}(-3, -4) = \left\langle \nabla f(-3, -4), \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} \right\rangle = -\frac{6}{25} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} + \left( -\frac{8}{25} \right) \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} = -\frac{6}{5\sqrt{10}}.$$

- Határozd meg, mely irány esetén lesz nulla az  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + e^y$  függvény  $P_0(2, 0)$  pontbeli iránymenti deriváltja! És mely irány esetén lesz maximális az iránymenti derivált?
- Milyen irányban lesz az  $f(x, y) = y^3 e^{-2x-1}$  függvény  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$  pontbeli iránymenti deriváltja maximális, illetve minimális?
- Vizsgáld meg, hogy az alábbi függvényeknek hol lehet lokális szélsőértéke, van-e, s ha létezik, akkor minimum vagy maximum!

(a)  $f(x, y) = x^2 + y^2$

(b)  $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + 3x - y + 5$

(c)  $f(x, y) = (x^2 - 6x)(y^2 - 4y)$

(d)  $f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2 - 1$

(e)  $f(x, y) = x^2 y^3 (6 - x - y)$

(f)  $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

(g)  $f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

(h)  $f(x, y) = (x - y + 1)^2 - (x^2 - 2)^2$

(i)  $f(x, y) = xy(x + 8)(y - 6)$

(j)  $f(x, y) = (x^3 - 9)(y^2 + 4y)$

(k)  $f(x, y) = x^3 y^2 (4 - x - y)$

(l)  $f(x, y) = \frac{x^2}{2} + 3xy + \frac{y^3}{3} + \frac{5y^2}{2} - 5x - 12y + 2$

(m)  $f(x, y) = \cos x \cos y \cos(x + y)$

(n)  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + \frac{8}{x} + \frac{8}{y}$

**Megoldás**

(a)

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

A parciális deriváltak

$$f'_x(x, y) = 2x \quad f'_y(x, y) = 2y.$$

Azt kell megkeresni, hogy milyen pontpárookra lesz mindkettő értéke nulla.

$$2x = 0$$

$$2y = 0$$

Ez akkor teljesül, ha

$$(x, y) = (0, 0).$$

Számítsuk ki a másodrendű parciális deriváltakat

$$f'_{xx}(x, y) = 2 \quad f'_{xy}(x, y) = 0$$

$$f'_{yx}(x, y) = 0 \quad f'_{yy}(x, y) = 2$$

Ekkor a Hesse-mátrix a  $(0, 0)$  pontban.

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |H| = 4 > 0 \quad \text{és} \quad f'_{xx}(0, 0) = 2 > 0,$$

ezért a függvénynek lokális minimuma van a  $(0, 0)$  pontban. Ennek az értéke

$$f(0, 0) = 0.$$

(b)

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + 3x - y + 5$$

A parciális deriváltak

$$f'_x(x, y) = 2x + y + 3 \quad f'_y(x, y) = 2y + x - 1.$$

Azt kell megkeresni, hogy milyen pontpárookra lesz mindkettő értéke nulla.

$$2x + y = -3$$

$$x + 2y = 1$$

Ez akkor teljesül, ha

$$(x, y) = \left(-\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}\right).$$

Számítsuk ki a másodrendű parciális deriváltakat

$$f'_{xx}(x, y) = 2 \quad f'_{xy}(x, y) = 1$$

$$f'_{yx}(x, y) = 1 \quad f'_{yy}(x, y) = 2$$

Ekkor a Hesse-mátrix az  $\left(-\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}\right)$  pontban.

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |H| = 3 > 0 \quad \text{és} \quad f'_{xx}\left(-\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}\right) = 2 > 0,$$

ezért a függvénynek lokális minimuma van a  $\left(-\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}\right)$  pontban. Ennek az értéke

$$f\left(-\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

(c)

$$f(x, y) = (x^2 - 6x)(y^2 - 4y)$$

A parciális deriváltak

$$f'_x(x, y) = 2(x - 3)(y - 4)y \quad f'_y(x, y) = 2(x - 6)x(y - 2).$$

Azt kell megkeresni, hogy milyen pontpárookra lesz mindkettő értéke nulla.

$$\begin{aligned} 2(x - 3)(y - 4)y &= 0 \\ 2(x - 6)x(y - 2) &= 0 \end{aligned}$$

Ez akkor teljesül, ha

$$(x, y) = (0, 0), (6, 0), (0, 4), (6, 4), (3, 2).$$

Számítsuk ki a másodrendű parciális deriváltakat

$$\begin{aligned} f'_{xx}(x, y) &= 2y(y - 4) & f'_{xy}(x, y) &= 4(x - 3)(y - 2) \\ f'_{yx}(x, y) &= 4(x - 3)(y - 2) & f'_{yy}(x, y) &= 2x(x - 6) \end{aligned}$$

A Hesse-mátrix a  $(0, 0)$  pontban.

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 24 \\ 24 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |H| = -576 < 0,$$

ezért a függvénynek nyeregpontja van a  $(0, 0)$  pontban.A Hesse-mátrix a  $(6, 0)$  pontban.

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -24 \\ -24 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |H| = -576 < 0,$$

ezért a függvénynek nyeregpontja van a  $(6, 0)$  pontban.A Hesse-mátrix a  $(0, 4)$  pontban.

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -24 \\ -24 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |H| = -576 < 0,$$

ezért a függvénynek nyeregpontja van a  $(0, 4)$  pontban.A Hesse-mátrix a  $(6, 4)$  pontban.

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 24 \\ 24 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |H| = -576 < 0,$$

ezért a függvénynek nyeregpontja van a  $(6, 4)$  pontban.A Hesse-mátrix a  $(3, 2)$  pontban.

$$H = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -18 \end{bmatrix} \Rightarrow |H| = 144 > 0 \quad \text{és} \quad f'_{xx}(3, 2) = -8 < 0,$$

ezért a függvénynek lokális maximuma van a  $(3, 2)$  pontban. Ennek az értéke

$$f(3, 2) = 36.$$

(d)

$$f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2 - 1$$

A parciális deriváltak

$$f'_x(x, y) = 2x - 3y \quad f'_y(x, y) = -3x + 2y.$$

Azt kell megkeresni, hogy milyen pontpárookra lesz mindkettő értéke nulla.

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 0 \\ -2x + 2y &= 0 \end{aligned}$$

Ez akkor teljesül, ha

$$(x, y) = (0, 0).$$

Számítsuk ki a másodrendű parciális deriváltakat

$$\begin{aligned} f'_{xx}(x, y) &= 2 & f'_{xy}(x, y) &= -3 \\ f'_{yx}(x, y) &= -3 & f'_{yy}(x, y) &= 2 \end{aligned}$$

Ekkor a Hesse-mátrix az  $(0, 0)$  pontban.

$$H = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |H| = -5 < 0,$$

ezért a függvénynek nyeregponja van a  $(0, 0)$  pontban.

(e)

$$f(x, y) = x^2 y^3 (6 - x - y)$$

A parciális deriváltak

$$f'_x(x, y) = xy^3(12 - 3x - 2y) \quad f'_y(x, y) = x^2 y^2(18 - 3x - 4y).$$

Azt kell megkeresni, hogy milyen pontpárookra lesz mindkettő értéke nulla.

$$\begin{aligned} xy^3(12 - 3x - 2y) &= 0 \\ x^2 y^2(18 - 3x - 4y) &= 0 \end{aligned}$$

Ez akkor teljesül, ha

$$(x, y) = (0, y_0), (x_0, 0), \text{ vagy } (2, 3),$$

ahol  $x_0, y_0$  tetszőleges valós számok. Számítsuk ki a másodrendű parciális deriváltakat

$$\begin{aligned} f'_{xx}(x, y) &= 2y^3(6 - 3x - y) & f'_{xy}(x, y) &= xy^2(36 - 9x - 8y) \\ f'_{yx}(x, y) &= xy^2(36 - 9x - 8y) & f'_{yy}(x, y) &= 6x^2 y(6 - x - 2y) \end{aligned}$$

A Hesse-mátrix a  $(2, 3)$  pontban.

$$H = \begin{bmatrix} -162 & -108 \\ -108 & -144 \end{bmatrix} \Rightarrow |H| = 11664 > 0 \quad \text{és} \quad f'_{xx}(2, 3) = -162 < 0,$$

ezért a függvénynek lokális maximuma van a  $(2, 3)$  pontban. Ennek az értéke

$$f(2, 3) = 108.$$

*Megjegyzés:* A  $(0, y_0)$  és  $(x_0, 0)$  pontokban a Hesse-mátrix determinánsa 0, így a másodrendű próba alapján ezekben a pontokban nem dönthető el a szélsőérték létezése.

(f)

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$$

A parciális deriváltak

$$f'_x(x, y) = 4x^3 - 2x - 2y \quad f'_y(x, y) = 4y^3 - 2x - 2y.$$

Azt kell megkeresni, hogy milyen pontpárookra lesz mindkettő értéke nulla.

$$4x^3 - 2x - 2y = 0$$

$$4y^3 - 2x - 2y = 0$$

A két egyenletet kivonva egymásból  $4x^3 = 4y^3$  adódik, azaz  $x = y$ . Visszahelyettesítve: Ez akkor teljesül, ha

$$(x, y) = (0, 0), (1, 1), \text{ vagy } (-1, -1).$$

Számítsuk ki a másodrendű parciális deriváltakat

$$f'_{xx}(x, y) = 12x^2 - 2 \quad f'_{xy}(x, y) = -2$$

$$f'_{yx}(x, y) = -2 \quad f'_{yy}(x, y) = 12y^2 - 2$$

A Hesse-mátrix a  $(0, 0)$  pontban.

$$H = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow |H| = 0,$$

így itt a másodrendű próba alapján nem dönthető el (további vizsgálattal belátható, hogy nyeregponthoz vezet).

A Hesse-mátrix az  $(1, 1)$  pontban.

$$H = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow |H| = 96 > 0 \quad \text{és} \quad f'_{xx}(1, 1) = 10 > 0,$$

ezért a függvénynek lokális minimuma van az  $(1, 1)$  pontban. Ennek az értéke

$$f(1, 1) = -2.$$

A szimmetria miatt a Hesse-mátrix a  $(-1, -1)$  pontban is megegyezik az  $(1, 1)$  pontbelivel, így ott is lokális minimum van, melynek értéke szintén  $-2$ .

(g)

$$f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$$

A parciális deriváltak

$$f'_x(x, y) = 2x(1 - x^2 - 2y^2)e^{-(x^2+y^2)} \quad f'_y(x, y) = 2y(2 - x^2 - 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}.$$

Azt kell megkeresni, hogy milyen pontpárookra lesz mindkettő értéke nulla. Mivel  $e^{-(x^2+y^2)} > 0$ :

$$2x(1 - x^2 - 2y^2) = 0$$

$$2y(2 - x^2 - 2y^2) = 0$$

Ez akkor teljesül, ha

$$(x, y) = (0, 0), (0, 1), (0, -1), (1, 0), \text{ vagy } (-1, 0).$$

Számítsuk ki a másodrendű parciális deriváltakat.

$$f'_{xx}(x, y) = 2(1 - 3x^2 - 2y^2 - 2x^2(1 - x^2 - 2y^2))e^{-(x^2+y^2)} \quad f'_{xy}(x, y) = -4xy(3 - x^2 - 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$$

$$f'_{yx}(x, y) = -4xy(3 - x^2 - 2y^2)e^{-(x^2+y^2)} \quad f'_{yy}(x, y) = 2(2 - x^2 - 6y^2 - 2y^2(2 - x^2 - 2y^2))e^{-(x^2+y^2)}$$

A Hesse-mátrix a  $(0, 0)$  pontban.

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow |H| = 8 > 0 \quad \text{és} \quad f'_{xx}(0, 0) = 2 > 0,$$

ezért a függvénynek lokális minimuma van a  $(0, 0)$  pontban. Ennek az értéke

$$f(0, 0) = 0.$$

A Hesse-mátrix a  $(0, 1)$  és  $(0, -1)$  pontokban.

$$H = \begin{bmatrix} -\frac{2}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{8}{e} \end{bmatrix} \Rightarrow |H| = \frac{16}{e^2} > 0 \quad \text{és} \quad f'_{xx}(0, \pm 1) = -\frac{2}{e} < 0,$$

ezért a függvénynek lokális maximuma van a  $(0, 1)$  és  $(0, -1)$  pontokban. Ennek az értéke

$$f(0, \pm 1) = \frac{2}{e}.$$

A  $(1, 0)$  és  $(-1, 0)$  pontokban a Hesse-mátrix determinánsa negatív  $\left(-\frac{8}{e^2}\right)$ , így ott nyeregponatok vannak.

(h)

$$f(x, y) = (x - y + 1)^2 - (x^2 - 2)^2$$

A parciális deriváltak

$$f'_x(x, y) = 2(x - y + 1) - 4x(x^2 - 2) \quad f'_y(x, y) = -2(x - y + 1).$$

Azt kell megkeresni, hogy milyen pontpárookra lesz mindkettő értéke nulla.

$$\begin{aligned} 2(x - y + 1) - 4x(x^2 - 2) &= 0 \\ -2(x - y + 1) &= 0 \end{aligned}$$

A második egyenletből  $y = x + 1$ . Ezt beírva az elsőbe  $-4x(x^2 - 2) = 0$ . Ez akkor teljesül, ha

$$(x, y) = (0, 1), (\sqrt{2}, \sqrt{2} + 1), \text{ vagy } (-\sqrt{2}, -\sqrt{2} + 1).$$

Számítsuk ki a másodrendű parciális deriváltakat

$$\begin{aligned} f'_{xx}(x, y) &= 10 - 12x^2 & f'_{xy}(x, y) &= -2 \\ f'_{yx}(x, y) &= -2 & f'_{yy}(x, y) &= 2 \end{aligned}$$

A Hesse-mátrix a  $(0, 1)$  pontban.

$$H = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |H| = 16 > 0 \quad \text{és} \quad f'_{xx}(0, 1) = 10 > 0,$$

ezért a függvénynek lokális minimuma van a  $(0, 1)$  pontban. Ennek az értéke

$$f(0, 1) = -4.$$

A  $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2} + 1)$  pontokban a determináns negatív  $(-32)$ , így ott nyeregponatok vannak.

(i)

$$f(x, y) = xy(x + 8)(y - 6) = (x^2 + 8x)(y^2 - 6y)$$

A parciális deriváltak

$$f'_x(x, y) = (2x + 8)(y^2 - 6y) \quad f'_y(x, y) = (x^2 + 8x)(2y - 6).$$

Azt kell megkeresni, hogy milyen pontpárookra lesz mindkettő értéke nulla.

$$\begin{aligned} (2x + 8)(y^2 - 6y) &= 0 \\ (x^2 + 8x)(2y - 6) &= 0 \end{aligned}$$

Ez akkor teljesül, ha

$$(x, y) = (-4, 3), (0, 0), (0, 6), (-8, 0), \text{ vagy } (-8, 6).$$

Számítsuk ki a másodrendű parciális deriváltakat

$$\begin{aligned} f'_{xx}(x, y) &= 2(y^2 - 6y) & f'_{xy}(x, y) &= (2x + 8)(2y - 6) \\ f'_{yx}(x, y) &= (2x + 8)(2y - 6) & f'_{yy}(x, y) &= 2(x^2 + 8x) \end{aligned}$$

A Hesse-mátrix a  $(-4, 3)$  pontban.

$$H = \begin{bmatrix} -18 & 0 \\ 0 & -32 \end{bmatrix} \Rightarrow |H| = 576 > 0 \quad \text{és} \quad f'_{xx}(-4, 3) = -18 < 0,$$

ezért a függvénynek lokális maximuma van a  $(-4, 3)$  pontban. Ennek az értéke

$$f(-4, 3) = 144.$$

A többi kritikus pontban (a tengelyeken lévőkben) a determináns értéke negatív  $(-2304)$ , így ott nyeregpontok találhatók.

(j)

$$f(x, y) = (x^3 - 9)(y^2 + 4y)$$

A parciális deriváltak

$$f'_x(x, y) = 3x^2(y^2 + 4y) \quad f'_y(x, y) = (x^3 - 9)(2y + 4).$$

Azt kell megkeresni, hogy milyen pontpárookra lesz mindkettő értéke nulla.

$$\begin{aligned} 3x^2(y^2 + 4y) &= 0 \\ (x^3 - 9)(2y + 4) &= 0 \end{aligned}$$

Ez akkor teljesül, ha

$$(x, y) = (\sqrt[3]{9}, 0), (\sqrt[3]{9}, -4), \text{ vagy } (0, -2).$$

Számítsuk ki a másodrendű parciális deriváltakat

$$\begin{aligned} f'_{xx}(x, y) &= 6x(y^2 + 4y) & f'_{xy}(x, y) &= 3x^2(2y + 4) \\ f'_{yx}(x, y) &= 3x^2(2y + 4) & f'_{yy}(x, y) &= 2(x^3 - 9) \end{aligned}$$

Ezekben a pontokban a Hesse-mátrix determinánsa nulla vagy negatív, így a másodrendű próbával lokális szélsőérték egyértelműen egyik esetben sem igazolható (mindhárom esetben nyeregpontos jellegű viselkedést találunk).

(k)

$$f(x, y) = x^3 y^2 (4 - x - y)$$

A parciális deriváltak

$$f'_x(x, y) = x^2 y^2 (12 - 4x - 3y) \quad f'_y(x, y) = x^3 y (8 - 2x - 3y).$$

Azt kell megkeresni, hogy milyen pontpárookra lesz mindkettő értéke nulla.

$$\begin{aligned} x^2 y^2 (12 - 4x - 3y) &= 0 \\ x^3 y (8 - 2x - 3y) &= 0 \end{aligned}$$

Ez akkor teljesül, ha

$$(x, y) = (0, y_0), (x_0, 0), \text{ vagy } \left(2, \frac{4}{3}\right).$$

Számítsuk ki a másodrendű parciális deriváltakat

$$f'_{xx}(x, y) = 6xy^2(4 - 2x - y) \quad f'_{xy}(x, y) = x^2y(24 - 8x - 9y)$$

$$f'_{yx}(x, y) = x^2y(24 - 8x - 9y) \quad f'_{yy}(x, y) = 2x^3(4 - x - 3y)$$

A Hesse-mátrix a  $(2, \frac{4}{3})$  pontban.

$$H = \begin{bmatrix} -\frac{256}{9} & -\frac{64}{3} \\ -\frac{64}{3} & -32 \end{bmatrix} \Rightarrow |H| = \frac{4096}{9} > 0 \quad \text{és} \quad f'_{xx}\left(2, \frac{4}{3}\right) = -\frac{256}{9} < 0,$$

ezért a függvénynek lokális maximuma van a  $(2, \frac{4}{3})$  pontban. Ennek az értéke

$$f\left(2, \frac{4}{3}\right) = \frac{256}{27}.$$

(l)

$$f(x, y) = \frac{x^2}{2} + 3xy + \frac{y^3}{3} + \frac{5y^2}{2} - 5x - 12y + 2$$

A parciális deriváltak

$$f'_x(x, y) = x + 3y - 5 \quad f'_y(x, y) = 3x + y^2 + 5y - 12.$$

Azt kell megkeresni, hogy milyen pontpárookra lesz mindkettő értéke nulla.

$$\begin{aligned} x + 3y - 5 &= 0 \\ 3x + y^2 + 5y - 12 &= 0 \end{aligned}$$

Az elsőből kifejezett  $x$ -et a másodikba írva kapjuk az  $y^2 - 4y + 3 = 0$  egyenletet. Ez akkor teljesül, ha

$$(x, y) = (2, 1), \text{ vagy } (-4, 3).$$

Számítsuk ki a másodrendű parciális deriváltakat

$$f'_{xx}(x, y) = 1 \quad f'_{xy}(x, y) = 3$$

$$f'_{yx}(x, y) = 3 \quad f'_{yy}(x, y) = 2y + 5$$

A Hesse-mátrix a  $(-4, 3)$  pontban.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 11 \end{bmatrix} \Rightarrow |H| = 2 > 0 \quad \text{és} \quad f'_{xx}(-4, 3) = 1 > 0,$$

ezért a függvénynek lokális minimuma van a  $(-4, 3)$  pontban. Ennek az értéke

$$f(-4, 3) = -\frac{21}{2}.$$

A  $(2, 1)$  pontban a determináns negatív  $(-2)$ , így ott nyeregpont van.

(m)

$$f(x, y) = \cos x \cos y \cos(x + y)$$

A parciális deriváltak

$$f'_x(x, y) = -\cos y \sin(2x + y) \quad f'_y(x, y) = -\cos x \sin(x + 2y).$$

Azt kell megkeresni, hogy milyen pontpárookra lesz mindkettő értéke nulla.

$$\begin{aligned} -\cos y \sin(2x + y) &= 0 \\ -\cos x \sin(x + 2y) &= 0 \end{aligned}$$

Végtelen sok megoldás van, vizsgáljuk meg például a  $(0, 0)$  és a  $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$  pontokat. Számítsuk ki a másodrendű parciális deriváltakat

$$f'_{xx}(x, y) = -2 \cos y \cos(2x + y) \quad f'_{xy}(x, y) = -\cos(2x + 2y)$$

$$f'_{yx}(x, y) = -\cos(2x + 2y) \quad f'_{yy}(x, y) = -2 \cos x \cos(x + 2y)$$

A Hesse-mátrix a  $(0, 0)$  pontban.

$$H = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow |H| = 3 > 0 \quad \text{és} \quad f'_{xx}(0, 0) = -2 < 0,$$

ezért a függvénynek lokális maximuma van a  $(0, 0)$  pontban. Ennek az értéke

$$f(0, 0) = 1.$$

A Hesse-mátrix a  $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$  pontban.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |H| = \frac{3}{4} > 0 \quad \text{és} \quad f'_{xx}\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = 1 > 0,$$

ezért a függvénynek lokális minimuma van a  $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$  pontban. Ennek az értéke

$$f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{8}.$$

(n)

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + \frac{8}{x} + \frac{8}{y}$$

A parciális deriváltak

$$f'_x(x, y) = 2x + y - \frac{8}{x^2} \quad f'_y(x, y) = x + 2y - \frac{8}{y^2}.$$

Azt kell megkeresni, hogy milyen pontpárookra lesz mindkettő értéke nulla.

$$\begin{aligned} 2x + y - \frac{8}{x^2} &= 0 \\ x + 2y - \frac{8}{y^2} &= 0 \end{aligned}$$

A szimmetria miatt adódik, hogy  $x = y$ . Visszaírva:  $3x = \frac{8}{x^2}$ , amiből  $x^3 = \frac{8}{3}$ . Ez akkor teljesül, ha

$$(x, y) = \left(\frac{2}{\sqrt[3]{3}}, \frac{2}{\sqrt[3]{3}}\right).$$

Számítsuk ki a másodrendű parciális deriváltakat

$$f'_{xx}(x, y) = 2 + \frac{16}{x^3} \quad f'_{xy}(x, y) = 1$$

$$f'_{yx}(x, y) = 1 \quad f'_{yy}(x, y) = 2 + \frac{16}{y^3}$$

A Hesse-mátrix a  $(\frac{2}{\sqrt[3]{3}}, \frac{2}{\sqrt[3]{3}})$  pontban. Mivel  $x^3 = \frac{8}{3}$ , így  $\frac{16}{x^3} = 6$ .

$$H = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow |H| = 63 > 0 \quad \text{és} \quad f'_{xx}\left(\frac{2}{\sqrt[3]{3}}, \frac{2}{\sqrt[3]{3}}\right) = 8 > 0,$$

ezért a függvénynek lokális minimuma van a  $(\frac{2}{\sqrt[3]{3}}, \frac{2}{\sqrt[3]{3}})$  pontban. Ennek az értéke

$$f\left(\frac{2}{\sqrt[3]{3}}, \frac{2}{\sqrt[3]{3}}\right) = 12\sqrt[3]{3}.$$

5. Oszd fel a 12-t három részre úgy, hogy a három szám szorzata maximális legyen!
6. Egy derékszögű hasáb egy csúcsába összefutó éleinek összege 45 cm. Hogyan kell az éleket megválasztani, hogy a hasáb térfogata maximális legyen?
7. Téglatest alakú, felül nyitott  $4\text{ m}^3$  térfogatú tartályt akarunk készíteni a lehető legkevesebb anyag felhasználásával. Mekkora legyenek a téglatest élei?
8. Oszd fel a 18-at három részre úgy, hogy az első rész négyzetének, a második rész köbének és a harmadik résznek a szorzata maximális legyen!
9. Mikor a legnagyobb a 400 méter kerületű szimmetrikus trapéz alakú telek területe? (Mekkora a szárai és a hosszabbik alapon fekvő szögei?)
10. \* Határozd meg az  $f(x, y) = (x^2 - 6x)(y^2 - 4y)$  függvény legkisebb és legnagyobb értékét az  $x = 0$ ,  $y = 0$  és  $x + y = 6$  egyenesekkel határolt zárt tartományban!
11. \* Mekkora a méretei az  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ellipszisbe írható legnagyobb kerületű téglalapnak, ha az oldalai párhuzamosak a koordinátatengelyekkel?
12. \* Egy lapos körlap alakú tányér alakját a  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$  egyenlet írja le. A tányért melegítjük úgy, hogy bármely  $(x, y)$  pontban a hőmérséklet értéke  $T(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$  lesz. Keressük meg a tányér legforróbb és leghidegebb pontját!