

8. feladatsor

Kétváltozós függvények integrálása

1. Elméleti összefoglaló

Kétváltozós függvények integrálszámítása

Az egyváltozós függvények Riemann-összege általánosítható kétváltozós esetre is. Ekkor egy az xy síkban fekvő T tartományt téglalapokra osztunk fel, és ezekhez tartozó "téglalatestekkel" közelítjük a T tartományt és a $z = f(x, y)$ függvény közé eső térfogatrészt. Be lehet látni, hogy akárcsak az egyváltozós esetben, ha az $f(x, y)$ függvény folytonos a korlátos és zárt T tartományon, akkor ott integrálható is.

Tetszőleges tartományra igaz, hogy amennyiben létezik a kettős integrál a T tartományon, akkor az előjeles térfogatot jelent. Azaz amennyiben $f(x, y)$ grafikonja az xy -sík felett helyezkedik el, akkor a kettős integrál értéke nem más, mint azon T fölötti háromdimenziós testnek a térfogata, melyet alulról az xy -sík felülről pedig a $z = f(x, y)$ határol. Ha $f(x, y)$ grafikonja az xy -sík alatt helyezkedik el, akkor a

$$\iint_T f(x, y) dA$$

nem más, mint azon T alatti háromdimenziós testnek a térfogata, melyet felülről az xy -sík alulról pedig a $z = f(x, y)$ határol. Ha

$$\iint_T f(x, y) dA = 0,$$

akkor ez azt jelenti, hogy ugyanannyi térfogatrészünk van az xy -sík felett, mint alatta. Emellett természetesen a kettős integrálokra is általánosíthatóak az egyváltozós függvények Riemann-integráljában tanult tulajdonságok.

Kettős integrál téglalap tartományon

Fubini tétel: Ha $f(x, y)$ folytonos a $T = [a, b] \times [c, d]$ zárt téglalap tartományon, akkor

$$\iint_T f(x, y) dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Kettős integrál normál tartományon

x -szerinti normál tartomány: A $T_x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ és } c(x) \leq y \leq d(x)\}$, röviden az $a \leq x \leq b$ és $c(x) \leq y \leq d(x)$ tartományt x -szerinti normál tartománynak nevezzük.

y -szerinti normál tartomány: A $T_y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d \text{ és } a(y) \leq x \leq b(y)\}$, röviden az $c \leq y \leq d$ és $a(y) \leq x \leq b(y)$ tartományt y -szerinti normál tartománynak nevezzük.

Fubini tétel, erősebb alak: Legyen $f(x, y)$ folytonos függvény a T tartományon

1. Ha $T = \{a \leq x \leq b \text{ és } c(x) \leq y \leq d(x)\}$ x -szerinti normál tartomány, ahol $c(x)$ és $d(x)$ folytonos függvények, akkor

$$\iint_T f(x, y) dA = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

2. Ha $T = \{c \leq y \leq d \text{ és } a(y) \leq x \leq b(y)\}$ y -szerinti normál tartomány, ahol $a(y)$ és $b(y)$ folytonos függvények, akkor

$$\iint_T f(x, y) dA = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

3. Ha T mindkét tengelyre nézve normál tartomány, akkor a két integrál egyenlő.

Kettős integrál egyéb tartományon

Integráltranszformáció: Ha az xy -síkon minden (x, y) koordinátájú ponthoz hozzárendelünk egy $(x(u, v), y(u, v))$ pontot az uv -síkból, azaz $f(x, y) = f(x(u, v), y(u, v))$, és az xy -síkbeli T tartomány uv -síkbeli megfelelőjét G tartományként jelöljük, továbbá ha a $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}$ és $\frac{\partial y}{\partial v}$ parciális deriváltak léteznek és folytonosak, valamint a

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Jacobi determináns csak izolált pontokban vagy éppen sehol sem 0, akkor

$$\iint_T f(x, y) dx dy = \iint_G f(x(u, v), y(u, v)) \cdot |J(u, v)| du dv.$$

Ennek alkalmazása a **polárkoordinátás transzformáció**, amit akkor érdemes használni, ha a tartományunk körlap, körcikk, körgyűrű, vagy ezek valamilyen részhalmaza. Itt az xy -síkról az $r\varphi$ -síkra történik a transzformáció, ahol r jelöli az (x, y) pont origótól vett távolságát, φ pedig a pont helyvektorának az x -tengely pozitív irányával bezárt szögét. Azaz

$$x(r, \varphi) = r \cos \varphi \quad \text{és} \quad y(r, \varphi) = r \sin \varphi$$

helyettesítést használva a Jacobi-determináns:

$$J(r, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r$$

azaz $dx dy = r dr d\varphi$.

Kettős integrál alkalmazásai

Egy T korlátos zárt síktartomány területe (ha az integrál létezik és véges):

$$\text{Ter} = \iint_T dA.$$

Ha egy vékony, T tartományt borító fémlemez tömegeloszlásáról feltesszük, hogy folytonos, $\delta(x, y)$ -nal jelöljük a fémlemez anyagának sűrűségfüggvényét (az egységnyi területen lévő tömeget), akkor a fémlemez tömege, az x -, valamint y -tengelyre vonatkozó forgatónyomatékai és tömegközéppontjának koordinátái a következő képletekkel számolható ki (ha az integrálok léteznek és végesek):

- tömeg: $M = \iint_T \delta(x, y) dA$;
- forgatónyomatékok: $M_x = \iint_T y \delta(x, y) dA$; $M_y = \iint_T x \delta(x, y) dA$;
- ezek segítségével a tömegközéppont koordinátái: $\bar{x} = \frac{M_y}{M}$ és $\bar{y} = \frac{M_x}{M}$

2. Feladatok

1. Határozd meg a következő kettős integrálok értékét a megadott téglalap tartományokon!

(a) $\iint_T (12x - 6y - 5) dA =$, ahol $T = \{0 \leq x \leq 2 \text{ és } -3 \leq y \leq 3\}$;

(b) $\iint_T \sin(x + y) dA =$, ahol $T = \{0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ és } 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$;

(c) $\iint_T (x^2 + 4y) dA =$, ahol $T = \{0 \leq x \leq 1 \text{ és } 0 \leq y \leq 1\}$;

(d) $\iint_T e^{3x+4y} dA =$, ahol $T = \{0 \leq x \leq \ln 2 \text{ és } 0 \leq y \leq \ln 3\}$;

(e) $\iint_T xy e^{x^2+y^2} dA =$, ahol $T = \{0 \leq x \leq 1 \text{ és } 0 \leq y \leq 1\}$;

(f) $\iint_T xy \sin(x^2 + y^2) dA =$, ahol $T = \{0 \leq x \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ és } 0 \leq y \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}\}$;

2. Határozd meg a következő kettős integrálok értékét a megadott normál tartományokon!

(a) $\iint_T 2xy dA =$, ahol T az $y = x^2$ és $y = \sqrt{x}$ görbék által határolt korlátos síkrész;

(b) $\iint_T y \sin x dA =$, ahol $T = \{0 \leq x \leq y \text{ és } 0 \leq y \leq 1\}$ háromszög;

(c) $\iint_T (x^2 + y) dA =$, ahol $T = \{y^2 \leq x \leq \sqrt{y} \text{ és } 0 \leq y \leq 1\}$;

(d) $\iint_T x dA =$, ahol T az $A(0, 0)$, $B(1, 1)$, $C(3, 1)$ és $D(4, 0)$ csúcspontú trapéz;

(e) $\iint_T (x^2 + 2y) dA =$, ahol T az $A(1, 1)$, $B(0, 3)$ és $C(3, 0)$ csúcspontú háromszög;

(f) $\iint_T x e^y dA =$, ahol T az $y = x^2$ és $y = x$ görbék által határolt korlátos síkrész;

(g) $\iint_T (1 - y) dA =$, ahol T az $y = x^2 - 4$ és $y = 0$ görbék által határolt korlátos síkrész;

(h) $\iint_T (x^2 + y^2) dA =$, ahol T az $A(0, 0)$, $B(3, 0)$ és $C(0, 2)$ csúcspontú háromszög;

3. Határozd meg a $\iint_T e^{y^2} dA =$ kettős integrált, ahol T az $A(0, 0)$, $B(0, 1)$ és $C(2, 1)$ csúcspontú háromszög! (Segítség: a sikeres integráláshoz elengedhetetlen, hogy a külső integrál legyen az y szerinti)

4. Határozd meg a következő kettős integrálok értékét a megadott egyéb tartományokon! (Segítség: Végezz polárkoordinátás helyettesítést!)

- (a) $\iint_T (2x - 6y + 3) dA =$, ahol T az origó középpontú 2 sugarú körlap;
- (b) $\iint_T \frac{2xy}{x^2 + y^2} dA =$, ahol $T = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$;
- (c) $\iint_T \frac{x + y}{x^2 + y^2} dA =$, ahol $T = \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0, 0 \leq y\}$;
- (d) $\iint_T (x^2 - y^2) dA =$, ahol $T = \{0 \leq r \leq 1 \text{ és } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}\}$ körcikk;
- (e) $\iint_T \sqrt{100 - x^2 - y^2} dA =$, ahol T az origó középpontú 5 sugarú kör;
- (f) $\iint_T \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} dA =$, ahol T az origó középpontú, egységsugarú kör pozitív síknegyedbe eső része;
- (g) $\iint_T \frac{y}{x^2 + y^2} dA =$, ahol T az origó körüli 1 és 2 sugarú körök közé eső körgyűrű első síknegyedbeli része;
- (h) $\iint_T xy^2 dA =$, ahol T az origó középpontú, R sugarú kör első síknegyedbe eső része

5. Határozd meg az $y = x^2$ és $y = \sqrt{x}$ görbék által határolt korlátos síkrész területét!

6. Add meg számolás nélkül az $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 1 dy dx$ integrál értékét!

7. Határozd meg a $z = 25 - x^2 - y^2$ egyenletű felület és a $z \geq 0$ feltér általa határolt korlátos térrész térfogatát!

8. Határozd meg a $T = \{x^2 + y^2 \leq 25, y \geq 0\}$ félkör alakú tartományt lefedő homogén síklemez tömegközéppontjának koordinátáit!

9. Határozd meg a homogén lemezből kivágott R sugarú negyedkörlap tömegközéppontját!