

8. feladatsor

Kétváltozós függvények integrálása

1. Határozd meg a következő kettős integrálok értékét a megadott téglalap tartományokon!

(a) $\iint_T (12x - 6y - 5) dA =$, ahol $T = \{0 \leq x \leq 2 \text{ és } -3 \leq y \leq 3\}$;

(b) $\iint_T \sin(x + y) dA =$, ahol $T = \{0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ és } 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$;

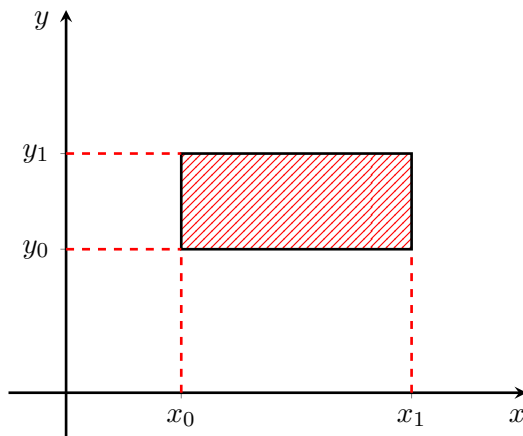
(c) $\iint_T (x^2 + 4y) dA =$, ahol $T = \{0 \leq x \leq 1 \text{ és } 0 \leq y \leq 1\}$;

(d) $\iint_T e^{3x+4y} dA =$, ahol $T = \{0 \leq x \leq \ln 2 \text{ és } 0 \leq y \leq \ln 3\}$;

(e) $\iint_T xy e^{x^2+y^2} dA =$, ahol $T = \{0 \leq x \leq 1 \text{ és } 0 \leq y \leq 1\}$;

(f) $\iint_T xy \sin(x^2 + y^2) dA =$, ahol $T = \{0 \leq x \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ és } 0 \leq y \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}\}$;

Megoldás A feladatban a T halmaz egy téglalap, vagyis felírható az alábbi alakban



$$T = \{(x, y) : x_0 \leq x \leq x_1 \text{ és } y_0 \leq y \leq y_1\}.$$

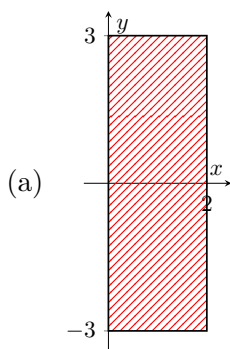
Vagyis a vízszintes oldalai a $[x_0, x_1]$ a függőlegesek pedig a $[y_0, y_1]$ intervallummal párhuzamosak. Ilyenkor egy kétváltozós $f(x, y)$ függvény T halmazon vett integrálját az alábbi módon kaphatjuk meg

$$\int \int_T f(x, y) dA = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} f(x, y) dy dx,$$

vagy a sorrend felcserélésével

$$\int \int_T f(x, y) dA = \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} f(x, y) dx dy$$

ugyanazt az eredményt kapjuk.



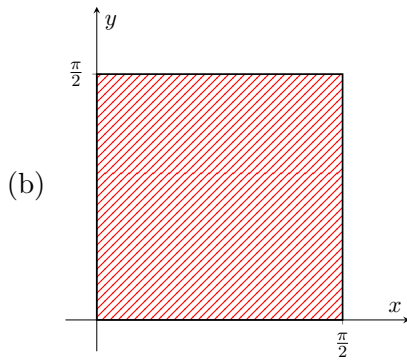
$$\iint_T (12x - 6y - 5) dA = \int_0^2 \int_{-3}^3 (12x - 6y - 5) dy dx =$$

Belső integrál y -szerint:

$$\int_0^2 \left[12xy - 3y^2 - 5y \right]_{y=-3}^3 dx = \int_0^2 (72x - 30) dx =$$

Külső integrál x -szerint:

$$\left[36x^2 - 30x \right]_0^2 = 144 - 60 = 84.$$



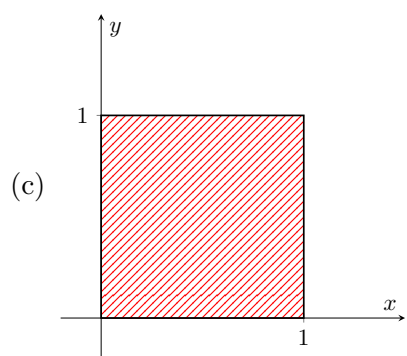
$$\iint_T \sin(x+y) dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin(x+y) dy dx =$$

Belső integrál y -szerint:

$$\int_0^{\pi/2} [-\cos(x+y)]_0^{\pi/2} dx = \int_0^{\pi/2} (\cos x - \cos(x+\pi/2)) dx =$$

Külső integrál x -szerint:

$$[\sin x - \sin(x+\pi/2)]_0^{\pi/2} = (1-0) - (0-1) = 2.$$



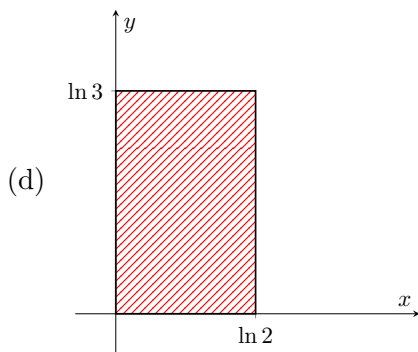
$$\iint_T (x^2 + 4y) dA = \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + 4y) dy dx =$$

Belső integrál y -szerint:

$$\int_0^1 [x^2 y + 2y^2]_0^1 dx = \int_0^1 (x^2 + 2) dx =$$

Külső integrál x -szerint:

$$\left[\frac{1}{3}x^3 + 2x \right]_0^1 = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}.$$

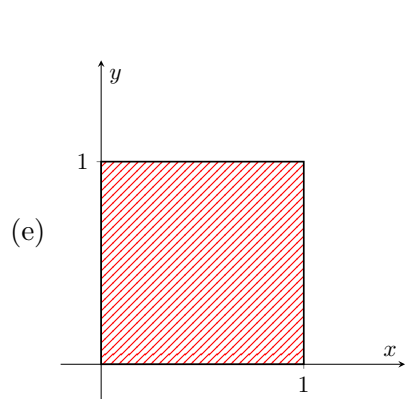


A függvény szorzat alakú, így az integrál is szétbontható:

$$\iint_T e^{3x} \cdot e^{4y} dA = \left(\int_0^{\ln 2} e^{3x} dx \right) \cdot \left(\int_0^{\ln 3} e^{4y} dy \right) =$$

A két integrál kiszámítása:

$$\left[\frac{1}{3}e^{3x} \right]_0^{\ln 2} \cdot \left[\frac{1}{4}e^{4y} \right]_0^{\ln 3} = \frac{2^3 - 1}{3} \cdot \frac{3^4 - 1}{4} = \frac{7}{3} \cdot 20 = \frac{140}{3}.$$



$$\iint_T xy e^{x^2+y^2} dA = \int_0^1 \int_0^1 xy e^{x^2} e^{y^2} dy dx =$$

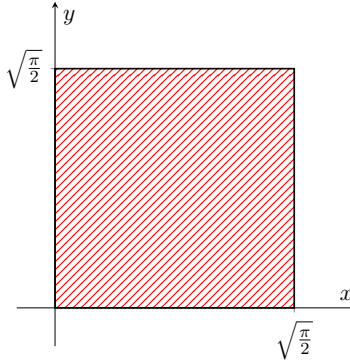
A szétbontható integrál:

$$\left(\int_0^1 x e^{x^2} dx \right) \cdot \left(\int_0^1 y e^{y^2} dy \right) =$$

A primitív függvény $\frac{1}{2}e^u$ alakú:

$$\left[\frac{1}{2}e^{x^2} \right]_0^1 \cdot \left[\frac{1}{2}e^{y^2} \right]_0^1 = \frac{e-1}{2} \cdot \frac{e-1}{2} = \frac{(e-1)^2}{4}.$$

(f)



$$\iint_T xy \sin(x^2 + y^2) dA = \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_0^{\sqrt{\pi/2}} xy \sin(x^2 + y^2) dy dx =$$

Belső integrál y -szerint:

$$\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \left[-\frac{1}{2} x \cos(x^2 + y^2) \right]_0^{\sqrt{\pi/2}} dx =$$

$$= \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \left(\frac{1}{2} x \cos(x^2) + \frac{1}{2} x \sin(x^2) \right) dx =$$

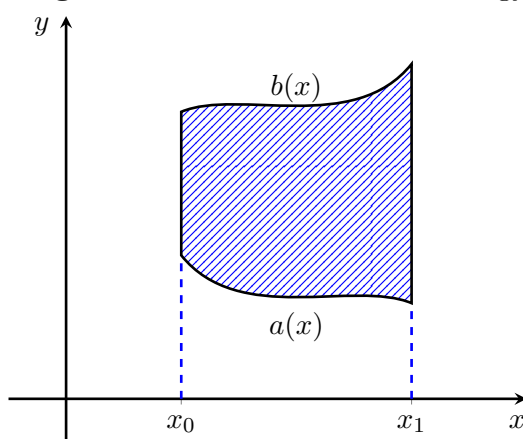
Külső integrál x -szerint:

$$\left[\frac{1}{4} \sin(x^2) - \frac{1}{4} \cos(x^2) \right]_0^{\sqrt{\pi/2}} = \left(\frac{1}{4} - 0 \right) - \left(0 - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2}.$$

2. Határozd meg a következő kettős integrálok értékét a megadott normál tartományokon!

- (a) $\iint_T 2xy dA =$, ahol T az $y = x^2$ és $y = \sqrt{x}$ görbék által határolt korlátos síkrész;
- (b) $\iint_T y \sin x dA =$, ahol $T = \{0 \leq x \leq y \text{ és } 0 \leq y \leq 1\}$ háromszög;
- (c) $\iint_T (x^2 + y) dA =$, ahol $T = \{y^2 \leq x \leq \sqrt{y} \text{ és } 0 \leq y \leq 1\}$;
- (d) $\iint_T x dA =$, ahol T az $A(0, 0)$, $B(1, 1)$, $C(3, 1)$ és $D(4, 0)$ csúcspontú trapéz;
- (e) $\iint_T (x^2 + 2y) dA =$, ahol T az $A(1, 1)$, $B(0, 3)$ és $C(3, 0)$ csúcspontú háromszög;
- (f) $\iint_T x e^y dA =$, ahol T az $y = x^2$ és $y = x$ görbék által határolt korlátos síkrész;
- (g) $\iint_T (1 - y) dA =$, ahol T az $y = x^2 - 4$ és $y = 0$ görbék által határolt korlátos síkrész;
- (h) $\iint_T (x^2 + y^2) dA =$, ahol T az $A(0, 0)$, $B(3, 0)$ és $C(0, 2)$ csúcspontú háromszög;

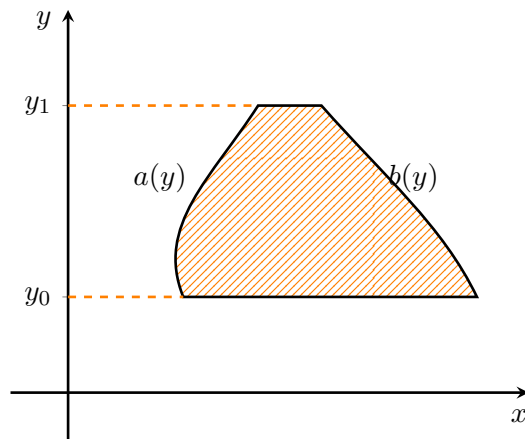
Megoldás A feladatban a T halmaz egy normál tartomány, vagyis felírható az alábbi alakban



$$T_x = \{(x, y) : x_0 \leq x \leq x_1 \text{ és } a(x) \leq y \leq b(x)\},$$

ekkor x -szerinti normál tartomány.

A másik lehetőség, hogy



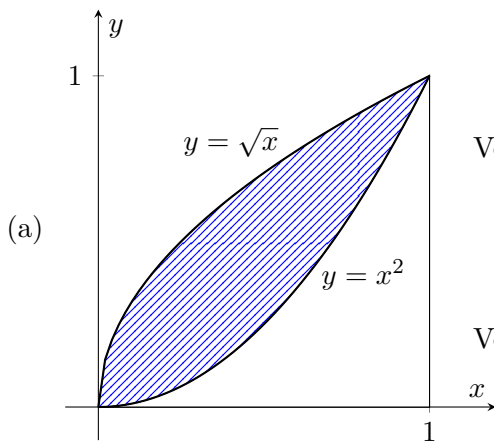
$T_y = \{(x, y) : y_0 \leq y \leq y_1 \text{ és } a(y) \leq x \leq b(y)\},$
 ekkor y -szerinti normál tartomány.

Ez azt jelenti, hogy az egyik koordináta befut egy intervallumot, míg a másik koordináta az előző koordinátának két függvénye között helyezkedik el. Ilyenkor egy kétváltozós $f(x, y)$ függvény T halmazon vett integrálját az alábbi módon kaphatjuk meg

$$\int \int_{T_x} f(x, y) dA = \int_{x_0}^{x_1} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y) dy dx,$$

vagy a második esetben

$$\int \int_{T_y} f(x, y) dA = \int_{y_0}^{y_1} \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx dy.$$



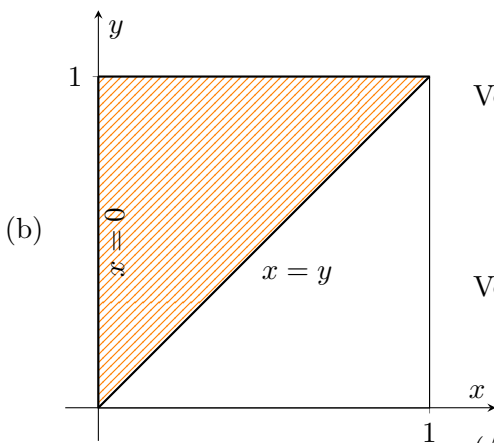
$$\iint_T 2xy dA = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 2xy dy dx =$$

Végezzük el a belső integrálást y -szerint:

$$\int_0^1 [xy^2]_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx = \int_0^1 (x^2 - x^5) dx =$$

Végül integráljunk x -szerint:

$$\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^6 \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}.$$



$$\iint_T y \sin(x) dA = \int_0^1 \int_0^y y \sin(x) dx dy =$$

Végezzük el a belső integrálást x -szerint:

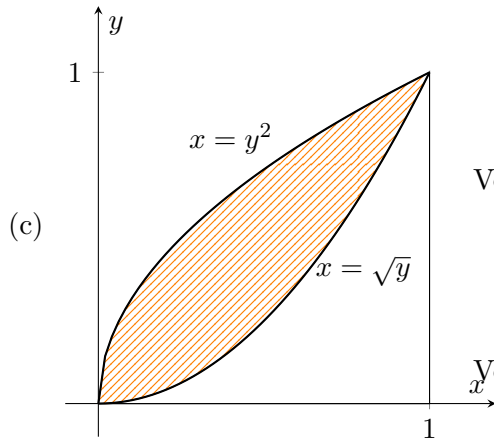
$$\int_0^1 [-y \cos(x)]_{x=0}^{x=y} dy = \int_0^1 (y - y \cos(y)) dy =$$

Végül integráljunk y -szerint:

$$\left[\frac{1}{2}y^2 - y \sin(y) - \cos(y) \right]_0^1 = \frac{3}{2} - \sin(1) - \cos(1).$$

(A parciális integrálás lépése: $\int y \cos y dy = y \sin y - \int \sin y dy = y \sin y + \cos y + c$)

Itt a tartományt célszerű y -szerinti normáltartományként kezelni:



$$\iint_T (x^2 + y) dA = \int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} (x^2 + y) dx dy =$$

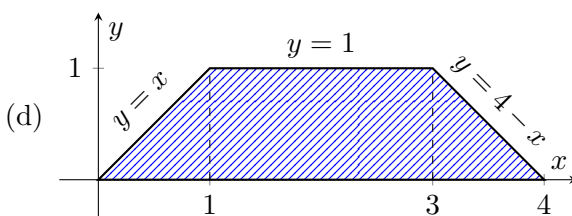
Végezzük el a belső integrálást x -szerint:

$$\int_0^1 \left[\frac{1}{3}x^3 + xy \right]_{x=y^2}^{x=\sqrt{y}} dy = \int_0^1 \left(\frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}} - y^3 - \frac{1}{3}y^6 \right) dy =$$

Végül integráljunk y -szerint:

$$\left[\frac{4}{3} \cdot \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{21}y^7 \right]_0^1 = \frac{8}{15} - \frac{1}{4} - \frac{1}{21} = \frac{33}{140}.$$

A tartományt x mentén 3 részre (háromszög, téglalap, háromszög) kell bontanunk:

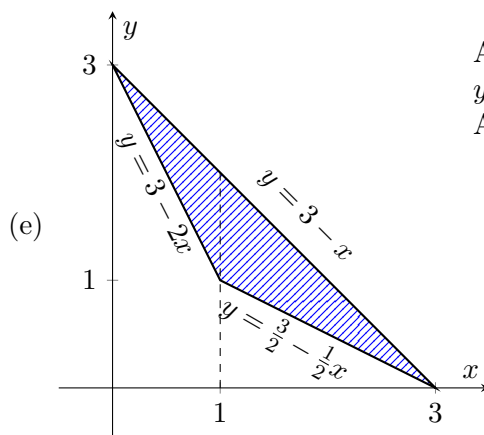


$$\int_0^1 \int_0^x x dy dx + \int_1^3 \int_0^1 x dy dx + \int_3^4 \int_0^{4-x} x dy dx$$

A belső (y -szerinti) integrálások elvégzése után:

$$\int_0^1 x^2 dx + \int_1^3 x dx + \int_3^4 (4x - x^2) dx =$$

$$\left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 + \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_1^3 + \left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_3^4 = \frac{1}{3} + 4 + \frac{5}{3} = 6.$$



A tartományt $x = 1$ -nél két részre bontjuk. A felső határoló egyenes $y = 3 - x$. Az alsók: $y = 3 - 2x$ (ha $x < 1$) és $y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x$ (ha $x > 1$). Az első rész ($0 \leq x \leq 1$):

$$\int_0^1 \int_{3-2x}^{3-x} (x^2 + 2y) dy dx = \int_0^1 \left[x^2 y + y^2 \right]_{3-2x}^{3-x} dx =$$

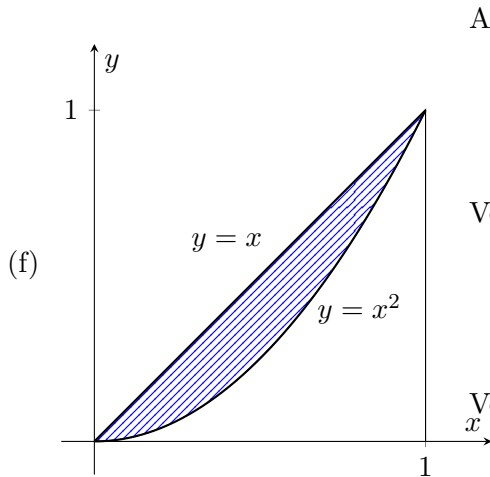
$$\int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 6x) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 3x^2 \right]_0^1 = \frac{9}{4}.$$

A második rész ($1 \leq x \leq 3$):

$$\int_1^3 \int_{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x}^{3-x} (x^2 + 2y) dy dx = \int_1^3 \left[x^2 y + y^2 \right]_{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x}^{3-x} dx =$$

$$\int_1^3 \left(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{9}{4}x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{27}{4} \right) dx = \left[-\frac{1}{8}x^4 + \frac{3}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{27}{4}x \right]_1^3 = \frac{81}{8} - \frac{41}{8} = 5.$$

A teljes integrál értéke a kettő összege: $\frac{9}{4} + 5 = \frac{29}{4}$.



A metszéspontok $x = 0$ és $x = 1$.

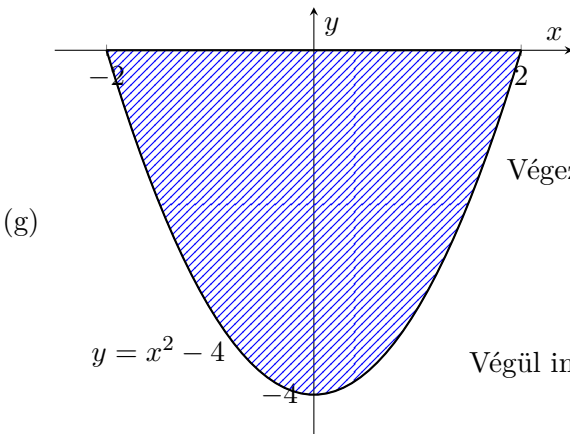
$$\iint_T x e^y dA = \int_0^1 \int_{x^2}^x x e^y dy dx =$$

Végezzük el a belső integrálást y -szerint:

$$\int_0^1 [x e^y]_{y=x^2}^{y=x} dx = \int_0^1 (x e^x - x e^{x^2}) dx =$$

Végül integráljunk x -szerint:

$$\left[(x-1)e^x - \frac{1}{2}e^{x^2} \right]_0^1 = \left(0 - \frac{1}{2}e \right) - \left(-1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{3-e}{2}.$$



A metszéspontok az x -tengellyel $x = -2$ és $x = 2$.

$$\iint_T (1-y) dA = \int_{-2}^2 \int_{x^2-4}^0 (1-y) dy dx =$$

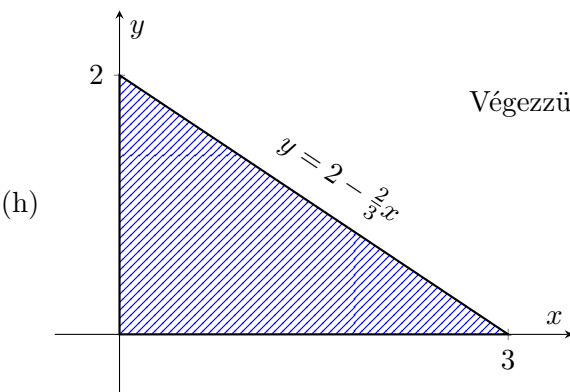
Végezzük el a belső integrálást y -szerint:

$$\int_{-2}^2 \left[y - \frac{1}{2}y^2 \right]_{y=x^2-4}^{y=0} dx = \int_{-2}^2 \left(\frac{1}{2}x^4 - 5x^2 + 12 \right) dx =$$

Végül integráljunk x -szerint:

$$\left[\frac{1}{10}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 12x \right]_{-2}^2 = 2 \left(\frac{16}{5} - \frac{40}{3} + 24 \right) = \frac{416}{15}.$$

A háromszög átfogójának egyenlete $y = 2 - \frac{2}{3}x$.



$$\iint_T (x^2 + y^2) dA = \int_0^3 \int_0^{2-\frac{2}{3}x} (x^2 + y^2) dy dx =$$

Végezzük el a belső integrálást y -szerint:

$$\int_0^3 \left[x^2 y + \frac{1}{3}y^3 \right]_{y=0}^{y=2-\frac{2}{3}x} dx =$$

$$\int_0^3 \left(-\frac{62}{81}x^3 + \frac{26}{9}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{8}{3} \right) dx =$$

Végül integráljunk x -szerint:

$$\left[-\frac{62}{324}x^4 + \frac{26}{27}x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{8}{3}x \right]_0^3 = -\frac{31}{2} + 26 - 12 + 8 = \frac{13}{2}.$$

3. Határozd meg a $\iint_T e^{y^2} dA$ kettős integrált, ahol T az $A(0,0)$, $B(0,1)$ és $C(2,1)$ csúcspontú háromszög! (Segítség: a sikeres integráláshoz elengedhetetlen, hogy a külső integrál legyen az y szerinti)

4. Határozd meg a következő kettős integrálok értékét a megadott egyéb tartományokon! (Segítség: Végezz polárkoordinátás helyettesítést!)

- (a) $\iint_T (2x - 6y + 3) dA =$, ahol T az origó középpontú 2 sugarú körlap;
- (b) $\iint_T \frac{2xy}{x^2 + y^2} dA =$, ahol $T = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$;
- (c) $\iint_T \frac{x + y}{x^2 + y^2} dA =$, ahol $T = \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0, 0 \leq y\}$;
- (d) $\iint_T (x^2 - y^2) dA =$, ahol $T = \{0 \leq r \leq 1 \text{ és } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}\}$ körcikk;
- (e) $\iint_T \sqrt{100 - x^2 - y^2} dA =$, ahol T az origó középpontú 5 sugarú kör;
- (f) $\iint_T \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} dA =$, ahol T az origó középpontú, egységsugarú kör pozitív síknegyedbe eső része;
- (g) $\iint_T \frac{y}{x^2 + y^2} dA =$, ahol T az origó körüli 1 és 2 sugarú körök közé eső körgyűrű első síknegyedbeli része;
- (h) $\iint_T xy^2 dA =$, ahol T az origó középpontú, R sugarú kör első síknegyedbe eső része

Megoldás A feladatban a T halmaz origó középpontú körök segítségével kapható meg, ami felírható az alábbi alakban

$$T = \{(x_0 + r \cdot \cos \varphi, y_0 + r \cdot \sin \varphi) : r_0 \leq r \leq r_1 \text{ és } \varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1\},$$

vagyis a halmazban szereplő vektorok kezdőpontja (x_0, y_0) (ez a kör középpontja, nekünk szinte mindig $x_0 = y_0 = 0$), hossza r_0 és r_1 közé esik, míg az x -tengellyel bezárt szögük φ_0 és φ_1 közé esik. Ilyenkor egy kétváltozós $f(x, y)$ függvény T halmazon vett integrálját úgy kaphatjuk meg, hogy áttértünk polárkoordinátákra, vagyis elvégezzük az alábbi helyettesítést

$$\begin{aligned} x &= x_0 + r \cdot \cos \varphi \\ y &= y_0 + r \cdot \sin \varphi \end{aligned}$$

majd ezeket írjuk be x és y helyére az $f(x, y)$ függvénybe végül a függvényt beszorozzuk r -el és elvégezzük az integrálás r és φ szerint, mintha egy téglán integrálnánk, vagyis

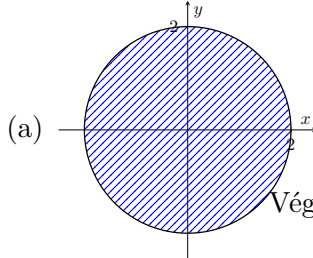
$$\iint_T f(x, y) dA = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \int_{r_0}^{r_1} f(x_0 + r \cdot \cos \varphi, y_0 + r \cdot \sin \varphi) \cdot r dr d\varphi.$$

A T halmaz az origó középpontú 2 sugarú körlap, vagyis a megfelelő helyettesítés

$$x = r \cdot \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \sin \varphi,$$

ahol $0 \leq r \leq 2$ és $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.



$$\iint_T 2x - 6y + 3 \, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (2r \cos(\varphi) - 6r \sin(\varphi) + 3) \cdot r \, dr \, d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 2r^2 \cos(\varphi) - 6r^2 \sin(\varphi) + 3r \, dr \, d\varphi =$$

Végezzük el a belső integrálást r -szerint.

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{2}{3} r^3 \cos(\varphi) - 2r^3 \sin(\varphi) + \frac{3}{2} r^2 \right]_{r=0}^{r=2} d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{16}{3} \cos(\varphi) - 16 \sin(\varphi) + 6 \, d\varphi =$$

Végül integráljunk φ -szerint.

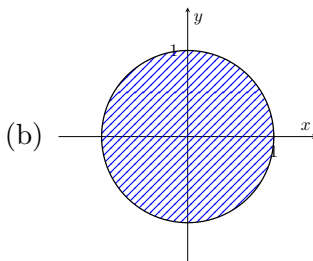
$$\left[\frac{16}{3} \sin(\varphi) + 16 \cos(\varphi) + 6\varphi \right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = (0 + 16 + 12\pi) - (0 + 16 + 0) = 12\pi.$$

A T halmaz az origó középpontú 1 sugarú körlap, vagyis a megfelelő helyettesítés

$$x = r \cdot \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \sin \varphi,$$

ahol $0 \leq r \leq 1$ és $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.



$$\iint_T \frac{2xy}{x^2 + y^2} \, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{2r^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi)}{r^2 \cos^2(\varphi) + r^2 \sin^2(\varphi)} \cdot r \, dr \, d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r^2 \sin(2\varphi)}{r^2} \cdot r \, dr \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \sin(2\varphi) \, dr \, d\varphi,$$

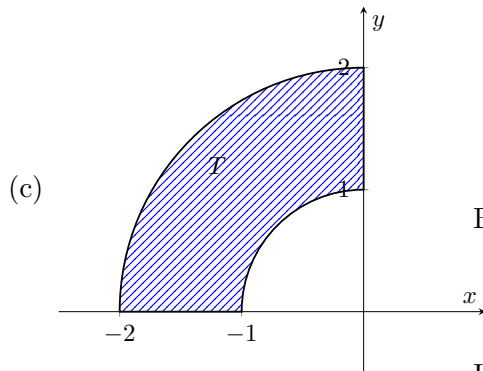
ahol kihasználtuk a trigonometrikus azonosságokat. Végezzük el a belső integrálást r -szerint.

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} r^2 \sin(2\varphi) \right]_{r=0}^{r=1} d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \, d\varphi =$$

Végül integráljunk φ -szerint.

$$\left[-\frac{1}{4} \cos(2\varphi) \right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = -\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4} \right) = 0.$$

A T halmaz a második síknegyedbe eső körgyűrű,
ahol $1 \leq r \leq 2$ és $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$.



$$\iint_T \frac{x+y}{x^2+y^2} dA = \int_{\pi/2}^{\pi} \int_1^2 \frac{r(\cos \varphi + \sin \varphi)}{r^2} \cdot r dr d\varphi =$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \int_1^2 (\cos \varphi + \sin \varphi) dr d\varphi =$$

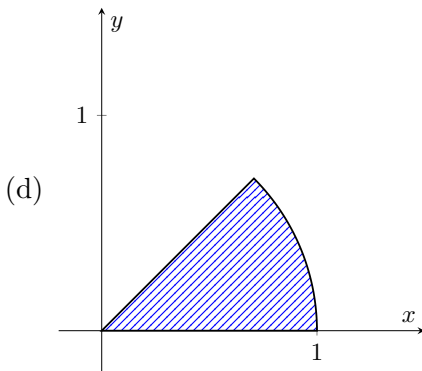
Belső integrálás r -szerint:

$$\int_{\pi/2}^{\pi} [r(\cos \varphi + \sin \varphi)]_{r=1}^2 d\varphi = \int_{\pi/2}^{\pi} (\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi =$$

Külső integrálás φ -szerint:

$$[\sin \varphi - \cos \varphi]_{\pi/2}^{\pi} = (0 - (-1)) - (1 - 0) = 0.$$

A T halmaz egy körcikk, ahol $0 \leq r \leq 1$ és $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$.



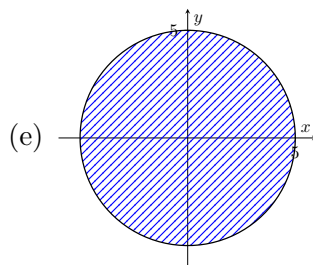
$$\iint_T (x^2 - y^2) dA = \int_0^{\pi/4} \int_0^1 r^2(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \cdot r dr d\varphi =$$

Mivel $\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = \cos(2\varphi)$:

$$\int_0^{\pi/4} \int_0^1 r^3 \cos(2\varphi) dr d\varphi = \int_0^{\pi/4} \left[\frac{1}{4} r^4 \cos(2\varphi) \right]_0^1 d\varphi =$$

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{4} \cos(2\varphi) d\varphi = \left[\frac{1}{8} \sin(2\varphi) \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{8} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0 = \frac{1}{8}.$$

A T halmaz az origó középpontú 5 sugarú kör, ahol $0 \leq r \leq 5$ és $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

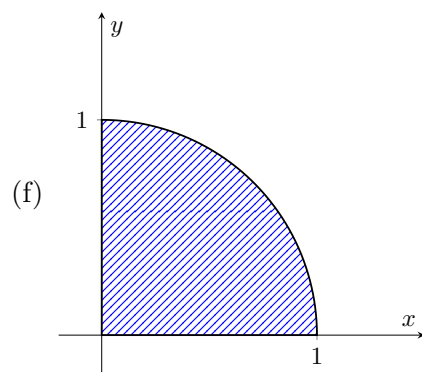


$$\iint_T \sqrt{100 - x^2 - y^2} dA = \int_0^{2\pi} \int_0^5 \sqrt{100 - r^2} \cdot r dr d\varphi =$$

Helyettesítés a belső integrálhoz: $u = 100 - r^2, du = -2r dr$.

$$\int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{3} (100 - r^2)^{3/2} \right]_0^5 d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} (1000 - 375\sqrt{3}) d\varphi =$$

$$\frac{2\pi}{3} (1000 - 375\sqrt{3}) = \frac{250\pi}{3} (8 - 3\sqrt{3}).$$

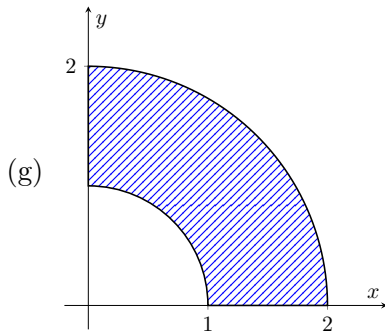


A T halmaz az első síknegyedbe eső egységsugarú negyedkörlap, ahol $0 \leq r \leq 1$ és $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

$$\iint_T \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{r^2 + 1}} dr d\varphi =$$

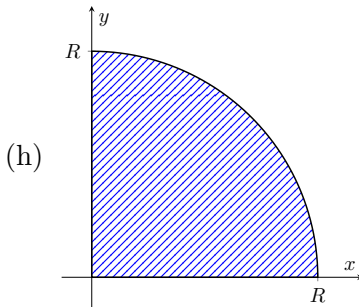
Belső integrálás ($u = r^2 + 1$ helyettesítéssel):

$$\int_0^{\pi/2} [\sqrt{r^2 + 1}]_0^1 d\varphi = \int_0^{\pi/2} (\sqrt{2} - 1) d\varphi = \frac{\pi}{2} (\sqrt{2} - 1).$$



A T halmaz az első síknegyedbe eső körgyűrű,
ahol $1 \leq r \leq 2$ és $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} \iint_T \frac{y}{x^2 + y^2} dA &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \frac{r \sin \varphi}{r^2} \cdot r dr d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \sin \varphi dr d\varphi = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [r \sin \varphi]_{r=1}^{r=2} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi = [-\cos \varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1. \end{aligned}$$



A T halmaz az origó középpontú, R sugarú kör első síknegyedbe eső része,
ahol $0 \leq r \leq R$ és $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} \iint_T xy^2 dA &= \int_0^{\pi/2} \int_0^R (r \cos \varphi)(r^2 \sin^2 \varphi) \cdot r dr d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^R r^4 \cos \varphi \sin^2 \varphi dr d\varphi = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{5} r^5 \cos \varphi \sin^2 \varphi \right]_0^R d\varphi = \\ &= \frac{R^5}{5} \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{R^5}{5} \left[\frac{1}{3} \sin^3 \varphi \right]_0^{\pi/2} = \frac{R^5}{15}. \end{aligned}$$

5. Határozd meg az $y = x^2$ és $y = \sqrt{x}$ görbék által határolt korlátos síkrész területét!

6. Add meg számolás nélkül az $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 1 dy dx$ integrál értékét!

7. Határozd meg a $z = 25 - x^2 - y^2$ egyenletű felület és a $z \geq 0$ feltétel általa határolt korlátos térrész térfogatát!

8. Határozd meg a $T = \{x^2 + y^2 \leq 25, y \geq 0\}$ félkör alakú tartományt lefedő homogén síklemez tömegközéppontjának koordinátáit!

9. Határozd meg a homogén lemezből kivágott R sugarú negyedkörlap tömegközéppontját!