

Numerikus módszerek

Matematika EP2

Urbán Ákos

BME TTK, Sztochasztika Tanszék

2026. május 22.

Differenciálegyenletek numerikus megoldása

Közönséges elsőrendű explicit differenciálegyenlet

$$\begin{aligned}y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0\end{aligned}$$

Példa

$$\begin{aligned}y' &= x - y^2 \\ y(0) &= 1\end{aligned}$$

Probléma

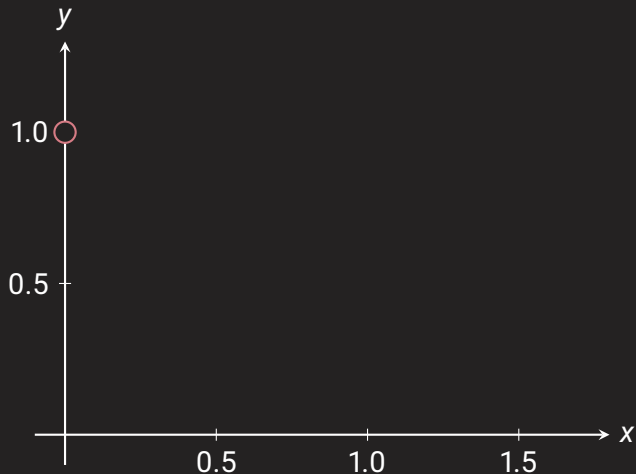
A megoldás nem minden esetben fejezhető ki "szépen". Sok esetben azonban szükségünk van a megoldás numerikus értékére.

Euler-módszer

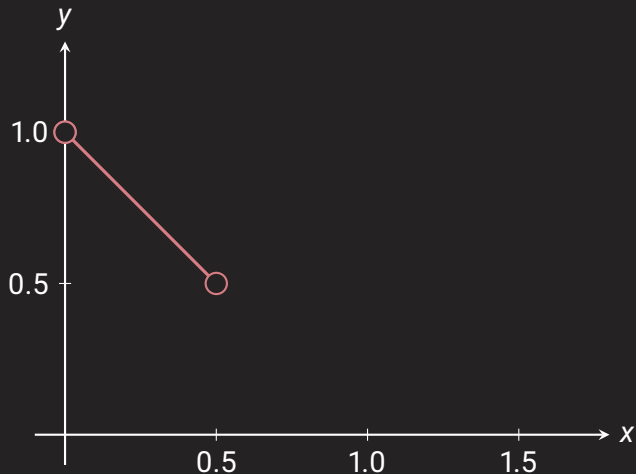
Az (x_0, y_0) pontpárból kiindulva fix $h > 0$ lépésközzel haladva a következő $x_{n+1} = x_n + h$ pontban a becslésünk a függvény értékére:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

Euler-módszer grafikusan



Euler-módszer grafikusan



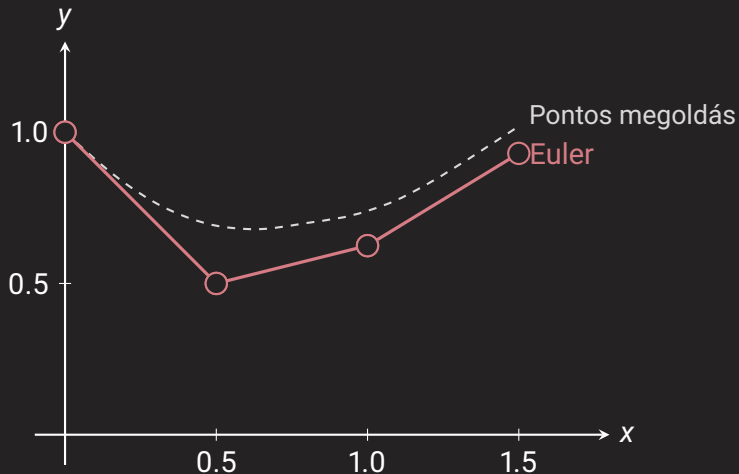
Euler-módszer grafikusan



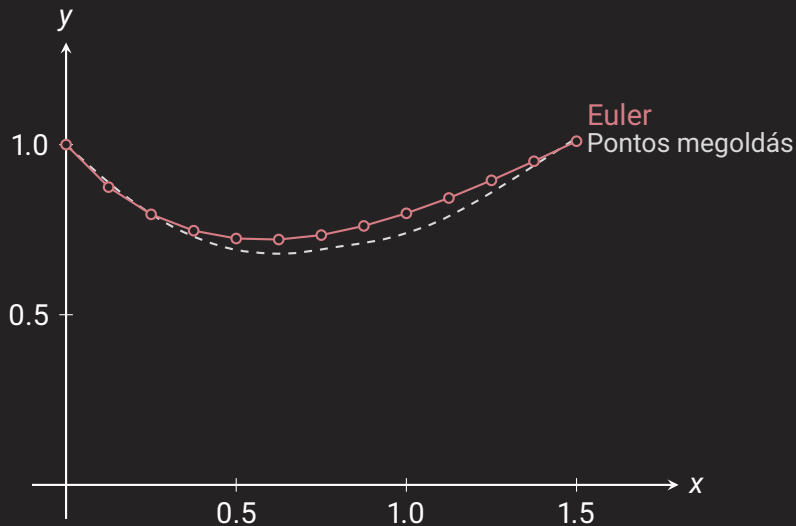
Euler-módszer grafikusan



Euler-módszer grafikusan



Euler-módszer kisebb lépésközzel



Runge-Kutta-módszer (RK2 - másodrendű)

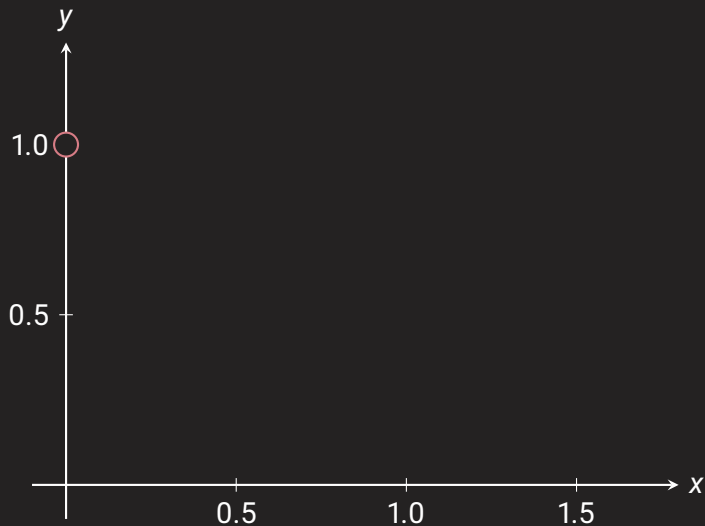
Az (x_0, y_0) pontpárból kiindulva fix $h > 0$ lépésközzel haladva a következő $x_{n+1} = x_n + h$ pontban a becslésünk a függvény értékére:

$$k_1 = h \cdot f(x_n, y_n)$$

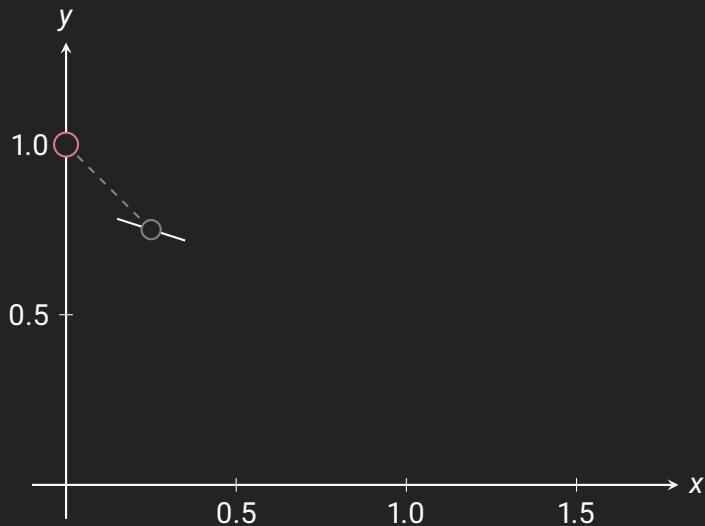
$$k_2 = h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$y_{n+1} = y_n + k_2$$

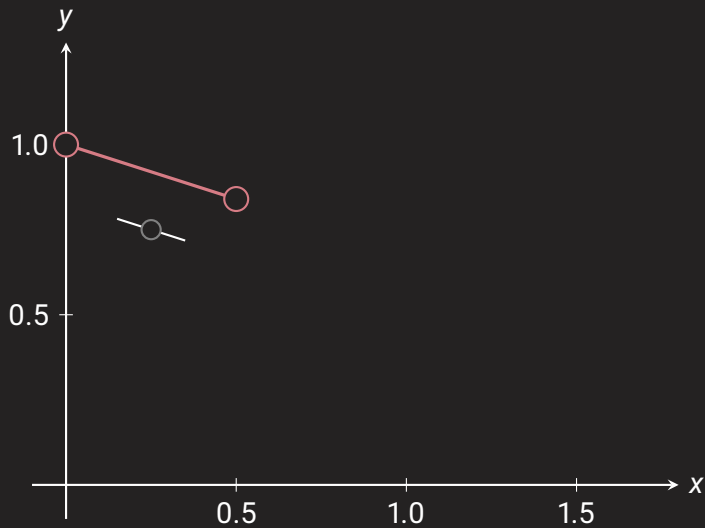
Runge-Kutta-módszer (RK2) grafikusan



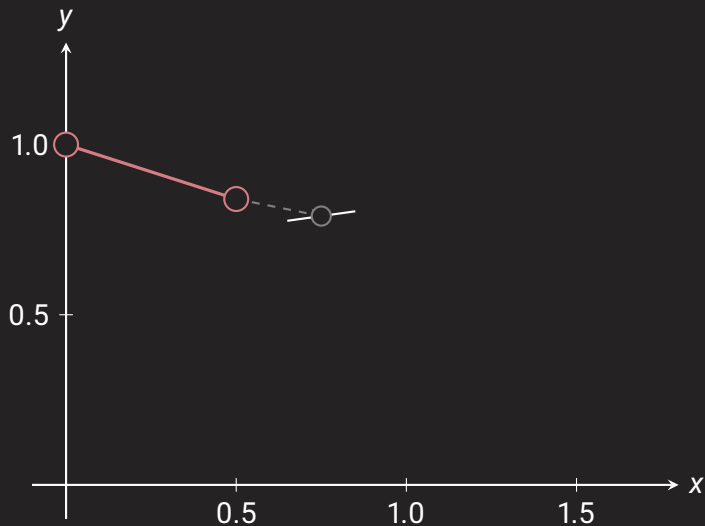
Runge-Kutta-módszer (RK2) grafikusan



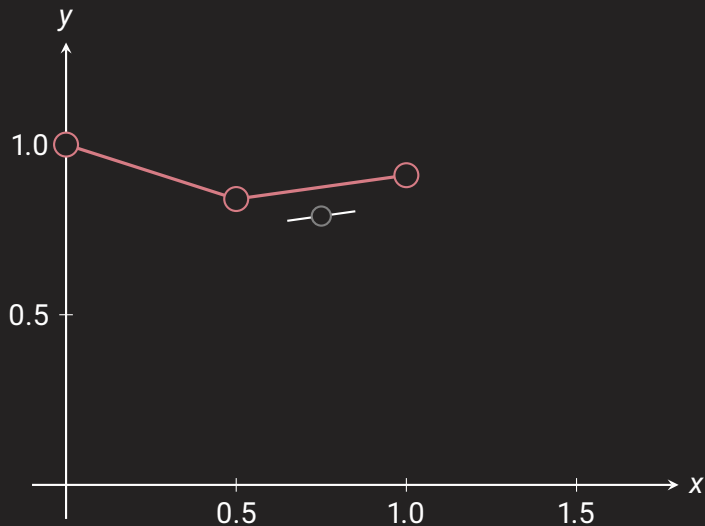
Runge-Kutta-módszer (RK2) grafikusan



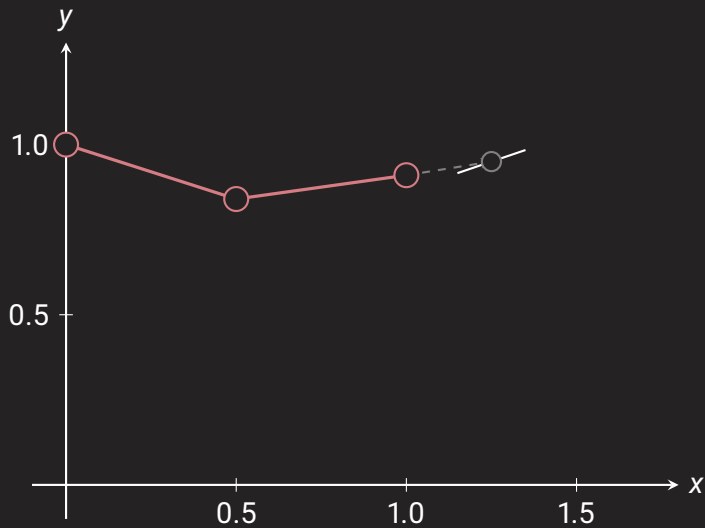
Runge-Kutta-módszer (RK2) grafikusan



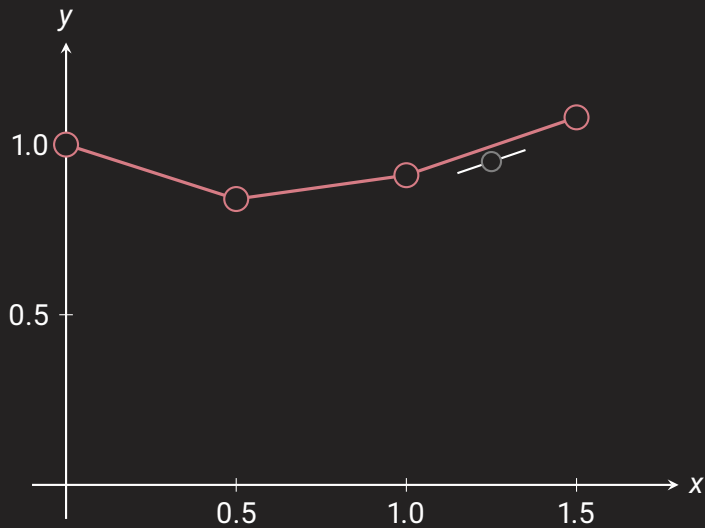
Runge-Kutta-módszer (RK2) grafikusan



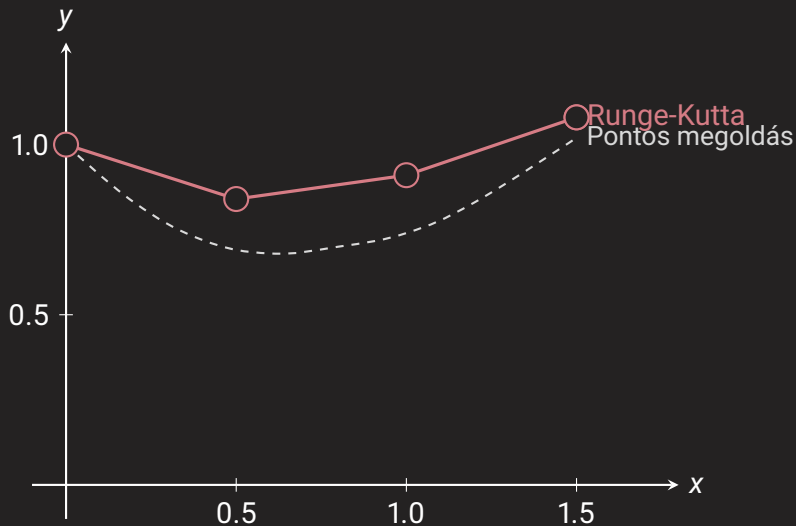
Runge-Kutta-módszer (RK2) grafikusan



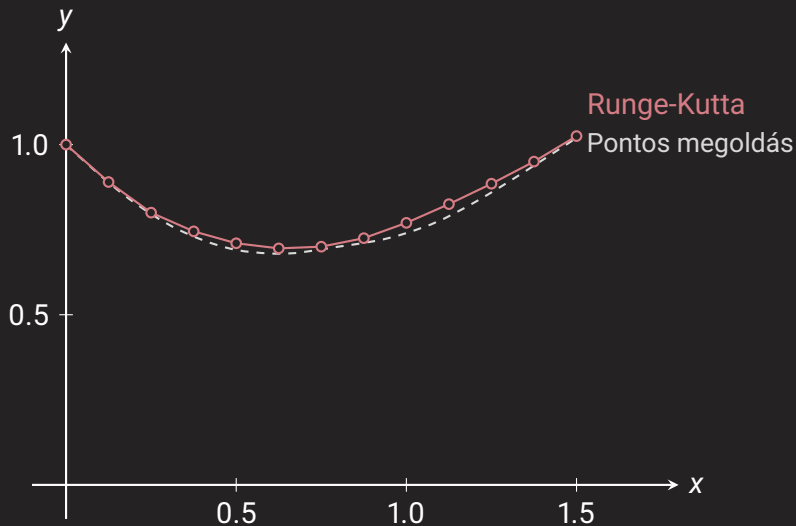
Runge-Kutta-módszer (RK2) grafikusan



Runge-Kutta-módszer (RK2) grafikusan



Runge-Kutta-módszer kisebb lépésközökkel



Beadandó az 1. zárthelyihez

Feladat (3 pont)

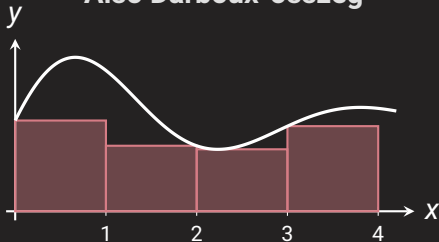
Becsüld másodrendű Runge-Kutta-módszerrel (RK2) az alábbi differenciálegyenlet megoldását a $[0, 2]$ intervallumon 0.05-ös lépésközzel.

$$y' = \frac{4x}{y} - xy$$
$$y(0) = 1$$

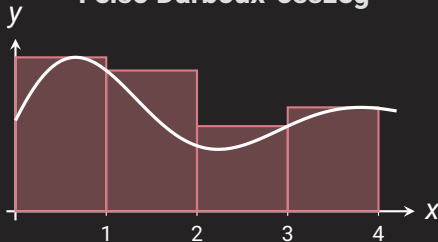
Numerikus integrálás

$$\int_0^4 (e^{-\frac{1}{2}x} \sin(2x) + 1) dx \approx 4.4641$$

Alsó Darboux-összeg



Felső Darboux-összeg



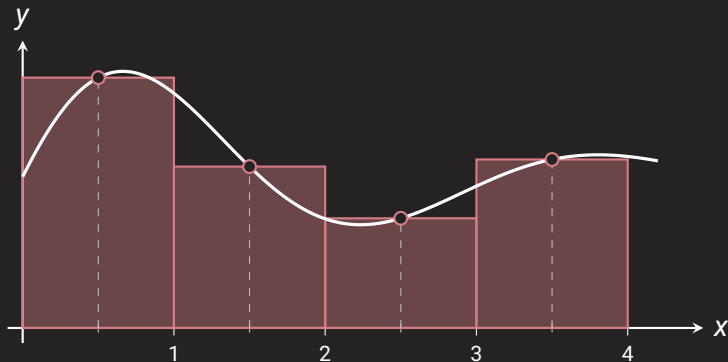
Probléma

Ha a függvény nem monoton, a lokális szélsőértékek keresése intervallumonként numerikusan nagyon "drága" művelet.

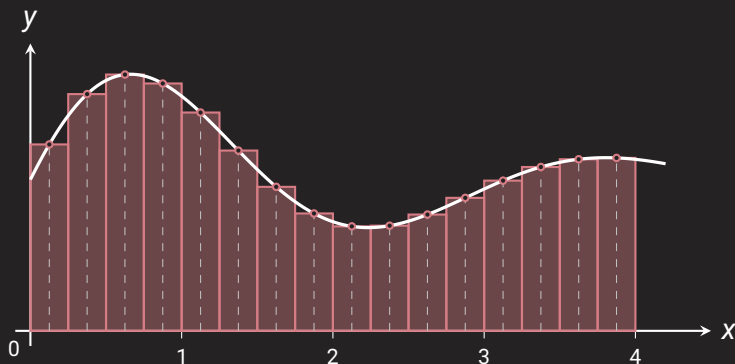
Felezőpontos módszer

Osszuk fel az $[a, b]$ intervallumot: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Az integrál közelítése:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \cdot f\left(\frac{x_k + x_{k-1}}{2}\right).$$



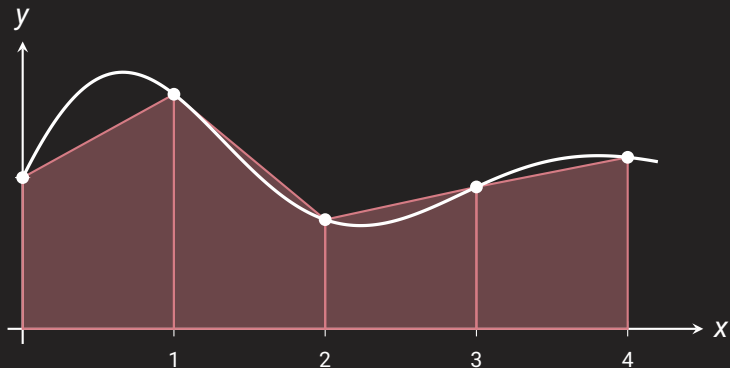
Felezőpontos módszer kisebb intervallumhosszal



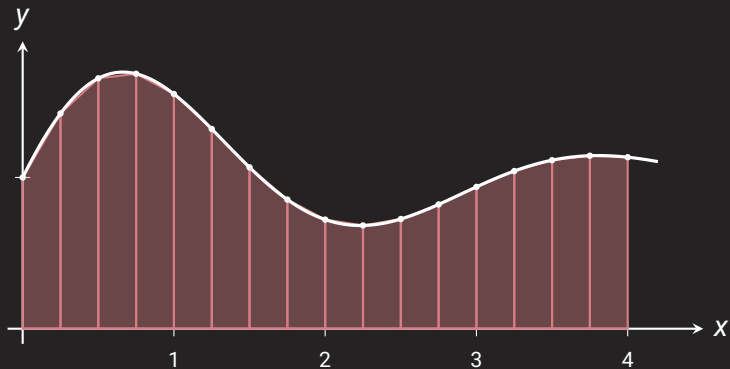
Trapézszabály

Osszuk fel az $[a, b]$ intervallumot: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Az integrál közelítése:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \cdot \frac{f(x_k) + f(x_{k-1})}{2}.$$



Trapézszabály kisebb intervallumhosszal



Beadandó a 2. zárthelyihez

Feladat (3 pont)

Becsüld az alábbi integrál értékét felezőpontos módszerrel és trapézsabállyal 0.05-ös részintervallum hosszakat használva.

$$\int_0^2 e^{-x^2} dx$$