

## 1. pót-pótzárthelyi

1. (12 pont) Add meg az alábbi művelet összes komplex eredményét algebrai alakban és ábrázold őket a komplex síkon!

$$\sqrt[3]{-27i}$$

**Megoldás** Legyen  $z = -27i$ . Írjuk át a  $z$  számot trigonometrikus alakba. Mivel a negatív képzetes tengelyen fekszik,  $r = 27$ , a szöge pedig  $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ .

$$-27i = 27 \left( \cos \left( \frac{3\pi}{2} \right) + i \sin \left( \frac{3\pi}{2} \right) \right)$$

A köbgyökök ( $w_k$ , ahol  $k = 0, 1, 2$ ) képlete:

$$w_k = \sqrt[3]{27} \left( \cos \left( \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} \right) \right)$$

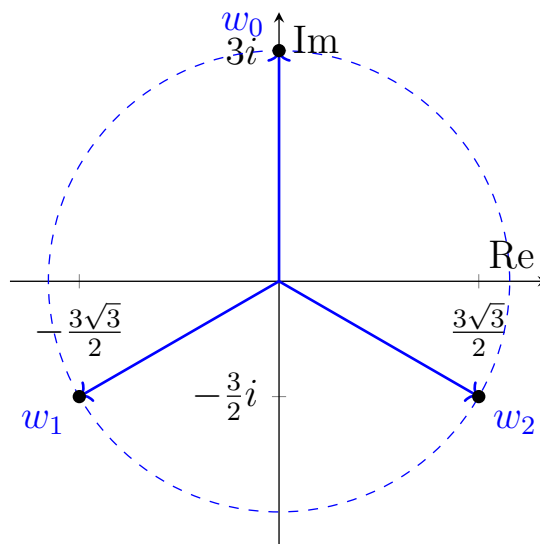
Mivel  $\sqrt[3]{27} = 3$ , az eredmények algebrai alakban:

$$k = 0 : \quad w_0 = 3 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 3(0 + i) = 3i$$

$$k = 1 : \quad w_1 = 3 \left( \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) = 3 \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$$

$$k = 2 : \quad w_2 = 3 \left( \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) = 3 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$$

A gyökök a komplex síkon egy origó középpontú,  $r = 3$  sugarú körön elhelyezkedő szabályos háromszög csúcsait alkotják.



2. (13 pont) Határozd meg a következő Cauchy probléma megoldásaként adódó  $y(x)$  függvényt!

$$y' = \frac{2}{x}y + x^2e^x$$
$$y(1) = 1$$

**Megoldás** Az egyenlet átrendezve:  $y' - \frac{2}{x}y = x^2e^x$ . Először oldjuk meg a homogén egyenletet:

$$y'_h = \frac{2}{x}y_h$$
$$\frac{1}{y_h}y'_h = \frac{2}{x}$$
$$\int \frac{1}{y_h} dy_h = \int \frac{2}{x} dx$$
$$\ln |y_h| = 2 \ln |x| + c$$
$$\ln |y_h| = \ln(x^2) + c$$
$$|y_h| = c \cdot x^2$$
$$y_h = cx^2.$$

Keressünk egy partikuláris megoldást  $y_p = c(x)x^2$  alakban (az állandók variálásával). Ekkor:

$$y_p = c(x)x^2$$
$$y'_p = c'(x)x^2 + 2xc(x),$$

amit visszahelyettesítve az eredeti inhomogén egyenletbe kapjuk:

$$c'(x)x^2 + 2xc(x) = \frac{2}{x}(c(x)x^2) + x^2e^x$$
$$c'(x)x^2 + 2xc(x) = 2xc(x) + x^2e^x$$
$$c'(x)x^2 = x^2e^x$$
$$c'(x) = e^x$$
$$c(x) = e^x.$$

Az inhomogén egyenlet egy jó megoldása tehát:

$$y_p = x^2e^x.$$

Az általános megoldás innen:

$$y = y_p + y_h = x^2e^x + cx^2 = x^2(e^x + c).$$

Most használjuk az  $y(1) = 1$  feltételt a konstans meghatározásához.

$$1 = 1^2(e^1 + c)$$
$$1 = e + c$$
$$c = 1 - e.$$

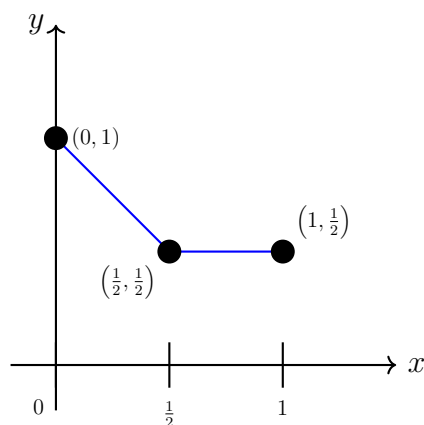
A feladat megoldása tehát:

$$y(x) = x^2(e^x + 1 - e).$$

3. (12 pont) Használd az Euler-módszert  $y(1)$  becslésére  $\frac{1}{2}$ -es részintervallum hosszal, ha

$$\begin{aligned}y' &= x^2 - y^2 \\ y(0) &= 1\end{aligned}$$

**Megoldás** A becsléseink az Euler-módszert alkalmazva:



$$\begin{aligned}\hat{y}\left(\frac{1}{2}\right) &= 1 + (0^2 - 1^2) \cdot \frac{1}{2} \\ &= 1 + (0 - 1) \cdot \frac{1}{2} \\ &= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{y}(1) &= \frac{1}{2} + \left( \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right) \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

A becslés innen:

$$y(1) \approx \hat{y}(1) = \frac{1}{2}.$$

4. (13 pont) Határozd meg az összes olyan  $y(x)$  függvényt, amely megoldja az alábbi differenciálegyenletet!

$$y'' + 6y' + 13y = 5e^{-x}$$

**Megoldás** A homogén egyenlet:  $y'' + 6y' + 13y = 0$ . A karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 + 6\lambda + 13 = 0$$

$$(\lambda + 3)^2 + 4 = 0$$

$$(\lambda + 3)^2 = -4$$

$$\lambda + 3 = \pm 2i$$

$$\lambda = -3 \pm 2i.$$

A homogén általános megoldása:

$$y_h(x) = c_1 e^{-3x} \cos(2x) + c_2 e^{-3x} \sin(2x).$$

Az inhomogén tag  $5e^{-x} = P_0(x)e^{-1 \cdot x} \cos(0 \cdot x)$ . Mivel  $-1 \pm 0i = -1$  nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek (nincs rezonancia), a próbafüggvény:

$$y_p = Ae^{-x}$$

$$y_p' = -Ae^{-x}$$

$$y_p'' = Ae^{-x}$$

Behelyettesítve az eredeti egyenletbe:

$$Ae^{-x} + 6(-Ae^{-x}) + 13(Ae^{-x}) = 5e^{-x}$$

$$(1 - 6 + 13)Ae^{-x} = 5e^{-x}$$

$$8Ae^{-x} = 5e^{-x} \quad \Rightarrow \quad 8A = 5 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{5}{8}.$$

A partikuláris megoldás tehát  $y_p(x) = \frac{5}{8}e^{-x}$ . Az általános megoldás:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^{-3x} \cos(2x) + c_2 e^{-3x} \sin(2x) + \frac{5}{8}e^{-x}.$$

## 2. pót-pótzárthelyi

1. (13 pont) Adj meg olyan  $C$  invertálható és  $D$  diagonális mátrixot, amikkel a lenti  $A$  mátrixra teljesül, hogy  $A = CDC^{-1}$ ! Amennyiben nincsenek ilyen mátrixok, akkor azt röviden indokold meg!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

**Megoldás** A karakterisztikus polinom:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ -4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - (-3)(-4) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 - 12 = \lambda^2 - 3\lambda - 10.$$

A sajátértékek  $p(\lambda)$  gyökei:

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 3\lambda - 10 &= 0 \\ (\lambda - 5)(\lambda + 2) &= 0. \end{aligned}$$

A sajátértékek tehát:

$$\lambda_1 = 5 \quad \text{és} \quad \lambda_2 = -2.$$

A sajátvektorok meghatározása:

- $\lambda_1 = 5$ -höz:

$$\begin{bmatrix} 1-5 & -3 \\ -4 & 2-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Egy jó sajátvektor:

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

- $\lambda_2 = -2$ -höz:

$$\begin{bmatrix} 1-(-2) & -3 \\ -4 & 2-(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Egy jó sajátvektor:

$$\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Mivel  $A$  egy  $2 \times 2$ -es mátrix és van 2 független sajátvektora, így diagonalizálható. Egy jó választás:

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

2. (12 pont) Határozd meg a következő kétváltozós  $f(x, y)$  függvény  $P_0(0, 0)$  pontbeli  $\underline{v} = (3, -4)$  iránymenti deriváltját!

$$f(x, y) = e^{2x+y} + \frac{x^2 - y}{1 + x^2} + \cos(xy) + 2$$

**Megoldás** Számítsuk ki a parciális deriváltakat:

$$f'_x(x, y) = 2e^{2x+y} + \frac{2x(1+x^2) - (x^2-y)2x}{(1+x^2)^2} - y \sin(xy)$$

$$f'_y(x, y) = e^{2x+y} + \frac{-1}{1+x^2} - x \sin(xy)$$

Behelyettesítve a  $P_0(0, 0)$  pontot:

$$f'_x(0, 0) = 2 \cdot e^0 + \frac{0-0}{1} - 0 = 2$$

$$f'_y(0, 0) = 1 \cdot e^0 + \frac{-1}{1} - 0 = 1 - 1 = 0$$

A gradiensvektor:

$$\nabla f(0, 0) = (2, 0).$$

Az irányvektor hossza és az irány normáltja:

$$|\underline{v}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5 \quad \Rightarrow \quad \underline{e} = \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right).$$

Az iránymenti derivált a gradiens és az egységvektor skaláris szorzata:

$$f'_{\underline{v}}(0, 0) = \langle \nabla f(0, 0), \underline{e} \rangle = 2 \cdot \frac{3}{5} + 0 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{6}{5}.$$

3. (13 pont) Keresd meg a következő kétváltozós  $f(x, y)$  függvény lokális szélsőértékeit és nyeregpontjait, ha vannak!

$$f(x, y) = (2y - x^2)(y - 2) + 1$$

**Megoldás** Az elsőrendű parciális deriváltak nullhelyeit keressük:

$$0 = f'_x(x, y) = -2x(y - 2) \Rightarrow x = 0 \text{ vagy } y = 2$$

$$0 = f'_y(x, y) = 2(y - 2) + (2y - x^2)$$

Amennyiben  $x = 0$ , akkor a második egyenletből

$$4y - 4 = 0$$

$$y = 1.$$

Amennyiben  $y = 2$ , akkor a második egyenletből

$$4 - x^2 = 0$$

$$x = \pm 2.$$

A kritikus pontok tehát:

$$(0, 1), \quad (-2, 2) \quad \text{és} \quad (2, 2).$$

A másodrendű parciális deriváltak:

$$f''_{xx}(x, y) = -2(y - 2), \quad f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = -2x, \quad f''_{yy}(x, y) = 4.$$

A Hesse-mátrix tetszőleges  $(x, y)$  pontban:

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} -2(y - 2) & -2x \\ -2x & 4 \end{bmatrix}.$$

Most vizsgáljuk meg a kritikus pontokban:

- A  $(0, 1)$  pontban:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 > 0 \quad \text{és} \quad f''_{xx}(0, 1) = 2 > 0,$$

így itt **lokális minimuma** van a függvénynek. Értéke:  $f(0, 1) = 2 \cdot (-1) + 1 = -1$ .

- A  $(-2, 2)$  pontban:

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 16 = -16 < 0,$$

így itt **nyeregpontja** van a függvénynek.

- A  $(2, 2)$  pontban:

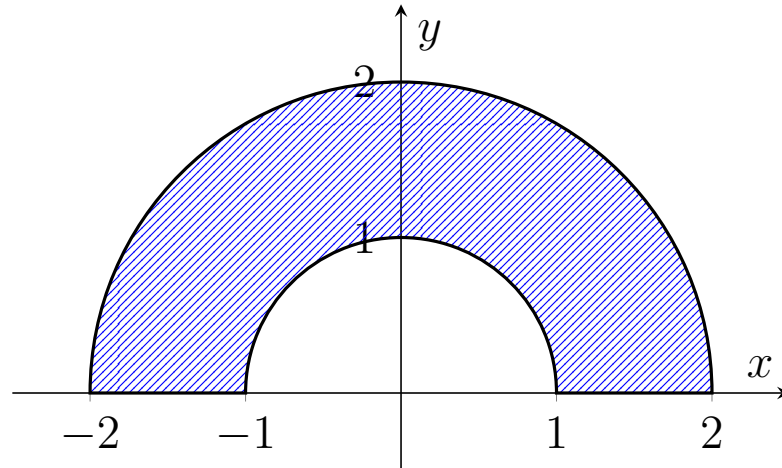
$$\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 16 = -16 < 0,$$

így itt **nyeregpontja** van a függvénynek.

4. (12 pont) Határozd meg az alábbi integrál értékét, ha  $T$  az origó középpontú 1 és 2 sugarú körök közé eső körgyűrű  $x$ -tengely feletti része!

$$\iint_T \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dA$$

**Megoldás** Polárkoordinátás helyettesítést alkalmazunk:  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ . Az integrálási tartomány a felső fél-körgyűrű:  $1 \leq r \leq 2$  és  $0 \leq \varphi \leq \pi$ .



A függvény polárkoordinátákban:

$$\frac{r \sin \varphi}{\sqrt{(r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2}} = \frac{r \sin \varphi}{r} = \sin \varphi.$$

Az integrál kiszámítása:

$$\begin{aligned} \iint_T \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dA &= \int_0^\pi \int_1^2 (\sin \varphi) \cdot r dr d\varphi \\ &= \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \cdot \int_1^2 r dr \\ &= [-\cos \varphi]_0^\pi \cdot \left[ \frac{r^2}{2} \right]_1^2 \\ &= (-\cos(\pi) - (-\cos(0))) \cdot \left( \frac{4}{2} - \frac{1}{2} \right) \\ &= (-(-1) - (-1)) \cdot \frac{3}{2} \\ &= (1 + 1) \cdot \frac{3}{2} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3. \end{aligned}$$