

1. pótzárthelyi

1. (12 pont) Add meg az alábbi egyenlet összes komplex megoldását és ábrázold őket a komplex síkon!

$$z^4 + 16 = 0$$

Megoldás Az egyenletet átrendezve

$$z^4 = -16.$$

Először írjuk át a -16 számot trigonometrikus alakba. A -16 komplex szám abszolút értéke $r = 16$, szöge pedig $\varphi = \pi$, vagyis

$$-16 = 16(\cos(\pi) + i \sin(\pi)).$$

A komplex negyedik gyökök (z_k , ahol $k = 0, 1, 2, 3$) képlete:

$$z_k = \sqrt[4]{16} \left(\cos \left(\frac{\pi + 2k\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi + 2k\pi}{4} \right) \right)$$

Behelyettesítve a k értékeket megkapjuk az összes megoldást (érdeemes algebrai alakban is felírni):

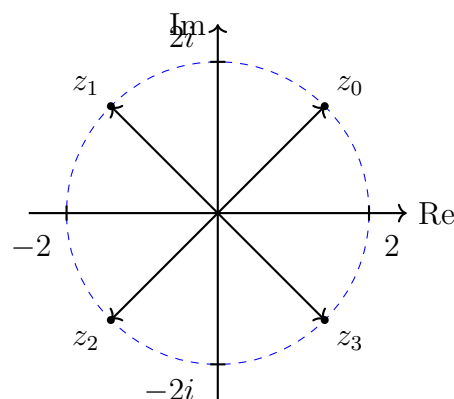
$$k = 0 : \quad z_0 = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$k = 1 : \quad z_1 = 2 \left(\cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{4} \right) \right) = 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$k = 2 : \quad z_2 = 2 \left(\cos \left(\frac{5\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{4} \right) \right) = 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

$$k = 3 : \quad z_3 = 2 \left(\cos \left(\frac{7\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{7\pi}{4} \right) \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

A gyökök ábrázolva:



2. (13 pont) Határozd meg a következő Cauchy probléma megoldásaként adódó $y(x)$ függvényt!

$$\begin{aligned}y' &= \cos(x)e^{2x} + 2y \\ y(0) &= 2\end{aligned}$$

Megoldás Az egyenlet átrendezve: $y' - 2y = \cos(x)e^{2x}$. Először oldjuk meg a homogén egyenletet

$$\begin{aligned}y_h' &= 2y_h \\ \frac{1}{y_h} y_h' &= 2 \\ \int \frac{1}{y_h} dy_h &= \int 2 dx \\ \ln |y_h| &= 2x + c \\ |y_h| &= ce^{2x} \\ y_h &= ce^{2x}.\end{aligned}$$

Keressünk egy partikuláris megoldást $y_p = c(x)e^{2x}$ alakban (az állandók variálásának módszerével). Ekkor

$$\begin{aligned}y_p &= c(x)e^{2x} \\ y_p' &= c'(x)e^{2x} + 2c(x)e^{2x},\end{aligned}$$

amit visszahelyettesítve az eredeti inhomogén egyenletbe egy jó választás $c(x)$ -nek:

$$\begin{aligned}c'(x)e^{2x} + 2c(x)e^{2x} - 2c(x)e^{2x} &= \cos(x)e^{2x} \\ c'(x)e^{2x} &= \cos(x)e^{2x} \\ c'(x) &= \cos(x) \\ c(x) &= \sin(x).\end{aligned}$$

Az inhomogén egyenlet egy jó megoldása tehát

$$y_p = \sin(x)e^{2x}.$$

Az általános megoldás innen

$$y = y_p + y_h = \sin(x)e^{2x} + ce^{2x}.$$

Most használjuk az $y(0) = 2$ feltételt a partikuláris megoldás kereséséhez.

$$\begin{aligned}2 &= \sin(0)e^0 + ce^0 \\ 2 &= 0 + c \\ c &= 2.\end{aligned}$$

A feladat megoldása tehát

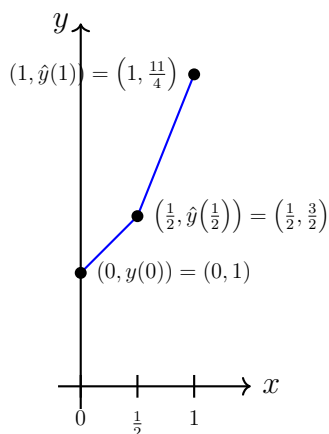
$$y = \sin(x)e^{2x} + 2e^{2x} = (\sin(x) + 2)e^{2x}.$$

3. (12 pont) Használd az Euler-módszert $y(1)$ becslésére $\frac{1}{2}$ -es részintervallum hosszal, ha

$$y' = x^2 + y^2$$

$$y(0) = 1$$

Megoldás A becsléseink az Euler-módszert alkalmazva:



$$\hat{y}\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + (0^2 + 1^2) \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 1 + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\hat{y}(1) = \frac{3}{2} + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{9}{4} \right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{10}{4} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{5}{4} = \frac{6}{4} + \frac{5}{4} = \frac{11}{4}.$$

A becslés innen

$$y(1) \approx \hat{y}(1) = \frac{11}{4}.$$

4. (13 pont) Határozd meg az összes olyan $y(x)$ függvényt, amely megoldja az alábbi differenciálegyenletet!

$$y'' + y' - 12y = 4x + 5$$

Megoldás A karakterisztikus egyenlet gyökei

$$\begin{aligned}\lambda^2 + \lambda - 12 &= 0 \\ (\lambda + 4)(\lambda - 3) &= 0 \\ \lambda_1 &= -4 \\ \lambda_2 &= 3.\end{aligned}$$

A homogén egyenlet megoldása innen

$$y_h = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{3x}.$$

Mivel az inhomogén egyenlet jobboldala $4x + 5 = P_1(x)e^{0 \cdot x} \cos(0 \cdot x)$ (ahol $P_1(x)$ egy elsőfokú polinom) és $0 + 0i = 0$ nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek, ezért keresünk egy megoldást az inhomogén egyenlethez az alábbi próbafüggvény alakjában

$$\begin{aligned}y_p &= q_1 x + q_0 \\ y_p' &= q_1 \\ y_p'' &= 0.\end{aligned}$$

Visszahelyettesítve az inhomogén egyenletbe

$$\begin{aligned}0 + q_1 - 12(q_1 x + q_0) &= 4x + 5 \\ -12q_1 x + (q_1 - 12q_0) &= 4x + 5.\end{aligned}$$

Két polinom pontosan akkor egyenlő, ha a megfelelő foksámú tagjaik együtthatói megegyeznek, így egy jó választás:

$$\begin{aligned}-12q_1 &= 4, \\ q_1 - 12q_0 &= 5.\end{aligned}$$

Az első egyenletből $q_1 = -\frac{1}{3}$. Ezt visszahelyettesítve a másodikba

$$\begin{aligned}-\frac{1}{3} - 12q_0 &= 5 \\ -12q_0 &= \frac{16}{3} \\ q_0 &= -\frac{4}{9}.\end{aligned}$$

Az inhomogén egyenlet egy megoldása tehát

$$y_p = -\frac{1}{3}x - \frac{4}{9}.$$

Az általános megoldás

$$y = y_p + y_h = -\frac{1}{3}x - \frac{4}{9} + c_1 e^{-4x} + c_2 e^{3x}.$$