

2. pótzárthelyi

1. (13 pont) Keresd meg az alábbi A mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Megoldás A karakterisztikus polinom meghatározása (fejtsük ki a második sor vagy oszlop szerint):

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (4-\lambda) \left((2-\lambda)^2 - 4 \right) = (4-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4 - 4) \\ &= (4-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda) = -\lambda(4-\lambda)^2. \end{aligned}$$

A sajátértékek $p(\lambda) = 0$ alapján:

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{és} \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 4 \text{ (kétszeres gyök).}$$

A sajátvektorok keresése:

- $\lambda_1 = 0$ -hoz:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = -t \\ y = 0 \\ z = t \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Egy megfelelő sajátvektor tehát:

$$\underline{v_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- $\lambda_{2,3} = 4$ -hez:

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = t \\ y = s \\ z = t \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Két lineárisan független sajátvektort is fel tudunk írni:

$$\underline{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{v_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2. (12 pont) Határozd meg a következő kétváltozós $f(x, y)$ függvény $P_0(0, 0)$ pontbeli érintősíkját!

$$f(x, y) = e^{xy} + \frac{6x + 2y}{2 + y^2} - \cos(x^2 + y^2) + 1$$

Megoldás A függvény értéke a $P_0(0, 0)$ pontban:

$$f(0, 0) = e^0 + \frac{0 + 0}{2 + 0} - \cos(0) + 1 = 1 + 0 - 1 + 1 = 1.$$

Tehát a sík egy pontja: $P(0, 0, 1)$.

Számítsuk ki a parciális deriváltakat:

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= ye^{xy} + \frac{6}{2 + y^2} + 2x \sin(x^2 + y^2), \\ f'_y(x, y) &= xe^{xy} + \frac{2(2 + y^2) - (6x + 2y)2y}{(2 + y^2)^2} + 2y \sin(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Behelyettesítve a $P_0(0, 0)$ pontot:

$$\begin{aligned} f'_x(0, 0) &= 0 \cdot e^0 + \frac{6}{2} + 0 = 3, \\ f'_y(0, 0) &= 0 \cdot e^0 + \frac{2(2 + 0) - 0}{(2 + 0)^2} + 0 = \frac{4}{4} = 1. \end{aligned}$$

A normálvektor: $\underline{n} = (3, 1, -1)$.

Az érintősík egyenlete:

$$\begin{aligned} 3(x - 0) + 1(y - 0) - 1(z - 1) &= 0 \\ 3x + y - z + 1 &= 0 \\ 3y + y - z &= -1. \end{aligned}$$

3. (13 pont) Keresd meg a következő kétváltozós $f(x, y)$ függvény lokális szélsőértékeit és nyereg-pontjait, ha vannak!

$$f(x, y) = 2x^3 + 2y^3 - 18xy + 5$$

Megoldás Az elsőrendű parciális deriváltak zérushelyeit keressük:

$$\begin{aligned} 0 &= f'_x(x, y) = 6x^2 - 18y, \\ 0 &= f'_y(x, y) = 6y^2 - 18x. \end{aligned}$$

Az első egyenletből kifejezve y -t:

$$y = \frac{6x^2}{18} = \frac{x^2}{3}.$$

Ezt behelyettesítjük a második egyenletbe:

$$\begin{aligned} 6\left(\frac{x^2}{3}\right)^2 - 18x &= 0 \\ 6\left(\frac{x^4}{9}\right) - 18x &= 0 \\ \frac{2}{3}x^4 - 18x &= 0 \\ x^4 - 27x &= 0 \\ x(x^3 - 27) &= 0. \end{aligned}$$

A megoldások $x = 0$ (ekkor $y = 0$) és $x = \sqrt[3]{27} = 3$ (ekkor $y = \frac{9}{3} = 3$). A kritikus pontok tehát:

$$(0, 0) \quad \text{és} \quad (3, 3).$$

A másodrendű parciális deriváltak:

$$f''_{xx}(x, y) = 12x, \quad f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = -18, \quad f''_{yy}(x, y) = 12y.$$

A Hesse-mátrix tetszőleges (x, y) pontban:

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} 12x & -18 \\ -18 & 12y \end{bmatrix}.$$

Vizsgáljuk meg a kritikus pontokat:

- A $(0, 0)$ pontban:

$$\begin{vmatrix} 0 & -18 \\ -18 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 324 = -324 < 0,$$

így itt **nyeregpontja** van a függvénynek.

- A $(3, 3)$ pontban:

$$\begin{vmatrix} 36 & -18 \\ -18 & 36 \end{vmatrix} = 1296 - 324 = 972 > 0 \quad \text{és} \quad f''_{xx}(3, 3) = 36 > 0,$$

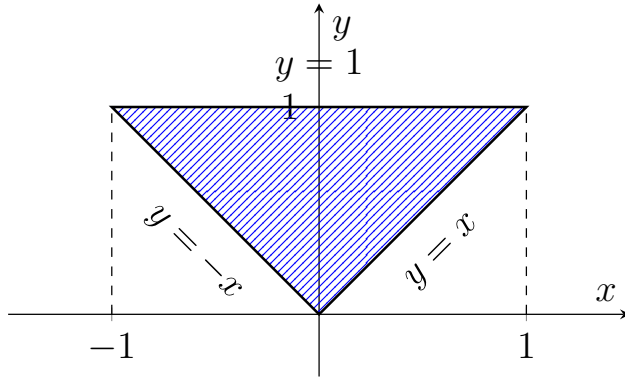
így itt **lokális minimuma** van a függvénynek. Ennek értéke:

$$f(3, 3) = 2(27) + 2(27) - 18(9) + 5 = 54 + 54 - 162 + 5 = -49.$$

4. (12 pont) Határozd meg az alábbi integrál értékét, ha T az $y = |x|$ függvény és az $y = 1$ egyenes által határolt tartomány!

$$\iint_T (3x^2 + 2y) \, dA$$

Megoldás A tartomány egy y -tengelyre szimmetrikus, csúcsával lefelé mutató háromszög. A tartományt y -szerinti normáltartományként a legcélszerűbb felírni:



$$T = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, -y \leq x \leq y\}.$$

Így az integrál a következőképpen számolható ki:

$$\begin{aligned} \iint_T (3x^2 + 2y) \, dA &= \int_0^1 \int_{-y}^y (3x^2 + 2y) \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 \left[x^3 + 2xy \right]_{x=-y}^{x=y} dy \\ &= \int_0^1 \left((y^3 + 2y^2) - ((-y)^3 + 2(-y)y) \right) dy \\ &= \int_0^1 (y^3 + 2y^2 - (-y^3 - 2y^2)) dy \\ &= \int_0^1 (2y^3 + 4y^2) dy \\ &= \left[\frac{1}{2}y^4 + \frac{4}{3}y^3 \right]_{y=0}^{y=1} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{4}{3} - 0 \\ &= \frac{3}{6} + \frac{8}{6} \\ &= \frac{11}{6}. \end{aligned}$$