

2. zárthelyi

A csoport

1. (13 pont) Adj meg olyan C invertálható és D diagonális mátrixot, amikkel a lenti A mátrixra teljesül, hogy $A = CDC^{-1}$! Amennyiben nincsenek ilyen mátrixok, akkor azt röviden indokold meg!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Megoldás A karakterisztikus polinom

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) - 2 \cdot 4 = \lambda^2 - 4\lambda - 5.$$

A sajátértékek $p(\lambda)$ gyökei:

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 4\lambda - 5 &= 0 \\ (\lambda - 2)^2 - 4 - 5 &= 0 \\ (\lambda - 2)^2 &= 9 \\ \lambda - 2 &= \pm 3 \\ \lambda &= 2 \pm 3. \end{aligned}$$

A sajátértékek tehát

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{és} \quad \lambda_2 = 5.$$

A sajátvektortok:

- $\lambda_1 = -1$ -hez:

$$\begin{bmatrix} 1 - (-1) & 4 \\ 2 & 3 - (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_1} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- $\lambda_2 = 5$ -höz

$$\begin{bmatrix} 1 - 5 & 4 \\ 2 & 3 - 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mivel A egy 2×2 -es mátrix és van 2 független sajátvektora, így diagonalizálható és egy jó választás

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Egy másik jó választás

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. (12 pont) Határozd meg a következő kétváltozós $f(x, y)$ függvény $P_0(0, 2)$ pontbeli érintősíkját!

$$f(x, y) = \sin(2xy) + \frac{e^{x+y-2}}{1+x^2} - y^2$$

Megoldás A parciális deriváltak:

$$f'_x(x, y) = \cos(2xy) \cdot 2y + \frac{(1+x^2) \cdot e^{x+y-2} - 2x \cdot e^{x+y-2}}{(1+x^2)^2},$$
$$f'_y(x, y) = \cos(2xy) \cdot 2x + \frac{e^{x+y-2}}{1+x^2} - 2y.$$

A parciális deriváltak a $P_0(0, 2)$ pontban:

$$f'_x(0, 2) = \cos(0) \cdot 4 + \frac{1 \cdot e^0 - 0 \cdot e^0}{1} = 5,$$
$$f'_y(0, 2) = \cos(0) \cdot 0 + \frac{e^0}{1} - 4 = -3.$$

Innen a normálvektor:

$$\underline{n} = (5, -3, -1).$$

A függvény értéke a $P_0(0, 2)$ pontban:

$$f(0, 2) = \sin(0) + \frac{e^0}{1} - 4 = -3.$$

Innen egy pont a síkon:

$$P(0, 2, -3).$$

A sík egyenlete:

$$5(x-0) - 3(y-2) - (z-(-3)) = 0$$
$$5x - 3y - z + 3 = 0$$
$$5x - 3y - z = -3.$$

3. (13 pont) Keresd meg a következő kétváltozós $f(x, y)$ függvény lokális szélsőértékeit és nyereg-pontjait, ha vannak!

$$f(x, y) = 6xy - 2x^3 - y^2 - 10$$

Megoldás Keressük meg azokat a pontokat, ahol az elsőrendű parciális deriváltak nullák lesznek:

$$\begin{aligned} 0 &= f'_x(x, y) = 6y - 6x^2, \\ 0 &= f'_y(x, y) = 6x - 2y. \end{aligned}$$

A második egyenletből

$$y = 3x.$$

Amit az első egyenletbe visszaírva:

$$\begin{aligned} 18x - 6x^2 &= 0 \\ 6x(3 - x) &= 0, \end{aligned}$$

aminek a megoldásai $x = 0, 3$. A kritikus pontok tehát:

$$(0, 0) \quad \text{és} \quad (3, 9).$$

A másodrendű deriváltak

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x, y) &= -12x, \\ f''_{xy}(x, y) &= f''_{yx}(x, y) = 6, \\ f''_{yy}(x, y) &= -2. \end{aligned}$$

Innen a Hesse-mátrix tetszőleges (x, y) pontban.

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} -12x & 6 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

Most vizsgáljuk meg a kritikus pontokban:

- A $(0, 0)$ pontban:

$$\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 0 - 36 = -36 < 0,$$

így itt nyeregpontja van a függvénynek.

- A $(3, 9)$ pontban:

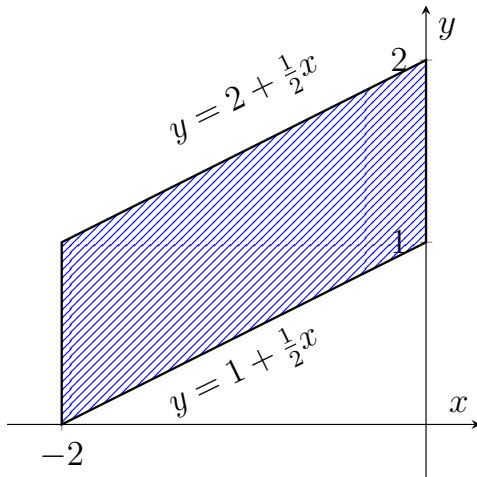
$$\begin{vmatrix} -36 & 6 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 72 - 36 = 36 > 0 \quad \text{és} \quad f''_{xx}(3, 9) = -36 < 0,$$

így itt lokális maximuma lesz a függvénynek.

4. (12 pont) Határozd meg az alábbi integrál értékét, ha T az $A(-2, 0)$, $B(-2, 1)$, $C(0, 2)$, $D(0, 1)$ csúcsú paralelogramma!

$$\iint_T 2(xy - 1) \, dA$$

Megoldás A feladatban szereplő paralelogramma által meghatározott normál tartomány:



$$T = \left\{ (x, y) : -2 \leq x \leq 0, 1 + \frac{1}{2}x \leq y \leq 2 + \frac{1}{2}x \right\}.$$

Innen a keresett integrál:

$$\begin{aligned} \iint_T 2(xy - 1) \, dA &= \int_{-2}^0 \int_{1+\frac{1}{2}x}^{2+\frac{1}{2}x} 2(xy - 1) \, dy \, dx \\ &= \int_{-2}^0 \left[xy^2 - 2y \right]_{y=1+\frac{1}{2}x}^{y=2+\frac{1}{2}x} dx \\ &= \int_{-2}^0 \left(x \left(2 + \frac{1}{2}x \right)^2 - 2 \left(2 + \frac{1}{2}x \right) - x \left(1 + \frac{1}{2}x \right)^2 + 2 \left(1 + \frac{1}{2}x \right) \right) dx \\ &= \int_{-2}^0 (x^2 + 3x - 2) \, dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x \right]_{x=-2}^{x=0} \\ &= 0 - \frac{1}{3} \cdot (-8) - \frac{3}{2} \cdot 4 + 2 \cdot (-2) \\ &= -\frac{22}{3}. \end{aligned}$$

2. zárthelyi

B csoport

1. (13 pont) Adj meg olyan C invertálható és D diagonális mátrixot, amikkel a lenti A mátrixra teljesül, hogy $A = CDC^{-1}$! Amennyiben nincsenek ilyen mátrixok, akkor azt röviden indokold meg!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Megoldás A karakterisztikus polinom

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda) - (-2) \cdot 1 = \lambda^2 - 7\lambda + 12.$$

A sajátértékek $p(\lambda)$ gyökei:

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 7\lambda + 12 &= 0 \\ \left(\lambda - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + 12 &= 0 \\ \left(\lambda - \frac{7}{2}\right)^2 &= \frac{1}{4} \\ \lambda - \frac{7}{2} &= \pm \frac{1}{2} \\ \lambda &= \frac{7 \pm 1}{2}. \end{aligned}$$

A sajátértékek tehát

$$\lambda_1 = 3 \quad \text{és} \quad \lambda_2 = 4.$$

A sajátvektorok:

- $\lambda_1 = 3$ -hoz:

$$\begin{bmatrix} 2-3 & 1 \\ -2 & 5-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- $\lambda_2 = 4$ -hez:

$$\begin{bmatrix} 2-4 & 1 \\ -2 & 5-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Mivel A egy 2×2 -es mátrix és van 2 független sajátvektora, így diagonalizálható és egy jó választás

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Egy másik jó választás

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. (12 pont) Határozd meg a következő kétváltozós $f(x, y)$ függvény $P_0(-2, 0)$ pontbeli érintősíkját!

$$f(x, y) = \cos(2xy) + \frac{e^{x+y+2}}{1+y^2} + x^2$$

Megoldás A parciális deriváltak:

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= -\sin(2xy) \cdot 2y + \frac{e^{x+y+2}}{1+y^2} + 2x, \\ f'_y(x, y) &= -\sin(2xy) \cdot 2x + \frac{(1+y^2) \cdot e^{x+y+2} - 2y \cdot e^{x+y+2}}{(1+y^2)^2}. \end{aligned}$$

A parciális deriváltak a $P_0(-2, 0)$ pontban:

$$\begin{aligned} f'_x(-2, 0) &= 0 \cdot 0 + \frac{e^0}{1} - 4 = -3, \\ f'_y(-2, 0) &= 0 \cdot (-4) + \frac{1 \cdot e^0 - 0 \cdot e^0}{1} = 1. \end{aligned}$$

Innen a normálvektor:

$$\underline{n} = (-3, 1, -1).$$

A függvény értéke a $P_0(-2, 0)$ pontban:

$$f(-2, 0) = \cos(0) + \frac{e^0}{1} + 4 = 1 + 1 + 4 = 6.$$

Innen egy pont a síkon:

$$P(-2, 0, 6).$$

A sík egyenlete:

$$\begin{aligned} -3(x - (-2)) + 1(y - 0) - (z - 6) &= 0 \\ -3x + y - z &= 0. \end{aligned}$$

3. (13 pont) Keresd meg a következő kétváltozós $f(x, y)$ függvény lokális szélsőértékeit és nyereg-pontjait, ha vannak!

$$f(x, y) = 6xy - 2y^3 - x^2 + 8$$

Megoldás Keressük meg azokat a pontokat, ahol az elsőrendű parciális deriváltak nullák lesznek:

$$\begin{aligned} 0 &= f'_x(x, y) = 6y - 2x, \\ 0 &= f'_y(x, y) = 6x - 6y^2. \end{aligned}$$

Az első egyenletből

$$x = 3y.$$

Amit a második egyenletbe visszaírva:

$$\begin{aligned} 18y - 6y^2 &= 0 \\ 6y(3 - y) &= 0, \end{aligned}$$

aminek a megoldásai $y = 0, 3$. A kritikus pontok tehát:

$$(0, 0) \quad \text{és} \quad (9, 3).$$

A másodrendű deriváltak

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x, y) &= -2, \\ f''_{xy}(x, y) &= f''_{yx}(x, y) = 6, \\ f''_{yy}(x, y) &= -12y. \end{aligned}$$

Innen a Hesse-mátrix tetszőleges (x, y) pontban.

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 6 & -12y \end{bmatrix}.$$

Most vizsgáljuk meg a kritikus pontokban:

- A $(0, 0)$ pontban:

$$\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 36 = -36 < 0,$$

így itt nyeregpontja van a függvénynek.

- A $(9, 3)$ pontban:

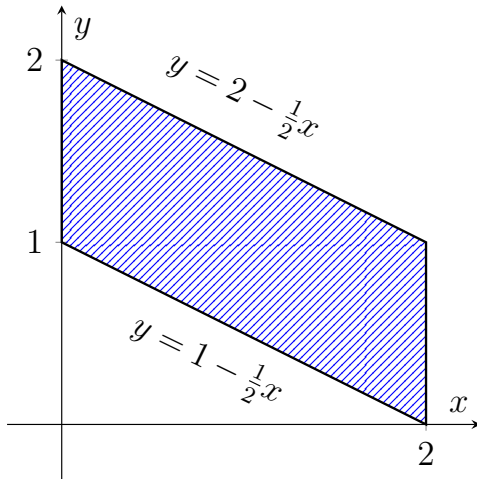
$$\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 6 & -36 \end{vmatrix} = 72 - 36 = 36 > 0 \quad \text{és} \quad f''_{xx}(9, 3) = -2 < 0,$$

így itt lokális maximuma lesz a függvénynek.

4. (12 pont) Határozd meg az alábbi integrál értékét, ha T az $A(0, 1)$, $B(0, 2)$, $C(2, 1)$, $D(2, 0)$ csúcsú paralelogramma!

$$\iint_T 2(xy + 1) \, dA$$

Megoldás A feladatban szereplő paralelogramma által meghatározott normál tartomány:



$$T = \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq 2, 1 - \frac{1}{2}x \leq y \leq 2 - \frac{1}{2}x \right\}.$$

Innen a keresett integrál:

$$\begin{aligned} \iint_T 2(xy + 1) \, dA &= \int_0^2 \int_{1-\frac{1}{2}x}^{2-\frac{1}{2}x} 2(xy + 1) \, dy \, dx \\ &= \int_0^2 \left[xy^2 + 2y \right]_{y=1-\frac{1}{2}x}^{y=2-\frac{1}{2}x} dx \\ &= \int_0^2 \left(x \left(2 - \frac{1}{2}x \right)^2 + 2 \left(2 - \frac{1}{2}x \right) - x \left(1 - \frac{1}{2}x \right)^2 - 2 \left(1 - \frac{1}{2}x \right) \right) dx \\ &= \int_0^2 (-x^2 + 3x + 2) \, dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_{x=0}^{x=2} \\ &= -\frac{1}{3} \cdot 8 + \frac{3}{2} \cdot 4 + 2 \cdot 2 - 0 \\ &= \frac{22}{3}. \end{aligned}$$

2. zárthelyi

C csoport

1. (13 pont) Adj meg olyan C ortogonális és D diagonális mátrixot, amikkel az lenti szimmetrikus A mátrixra teljesül, hogy $A = CDC^T$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Megoldás A karakterisztikus polinom meghatározása:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 2 \cdot 2 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 - 4 = \lambda^2 - 4\lambda.$$

A sajátértékek $p(\lambda)$ gyökei:

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 4\lambda &= 0 \\ \lambda(\lambda - 4) &= 0. \end{aligned}$$

A sajátértékek tehát:

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{és} \quad \lambda_2 = 4.$$

A sajátvektorok:

- $\lambda_1 = 0$ -hoz:

$$\begin{bmatrix} 2-0 & 2 \\ 2 & 2-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

- $\lambda_2 = 4$ -hez:

$$\underline{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

mivel a mátrix szimmetrikus (ezért vannak páronként merőleges sajátvektorjai) és ez a vektor merőleges $\underline{v_1}$ -re.

Normáljuk le a sajátvektorokat:

$$\underline{u_1} = \frac{\underline{v_1}}{|\underline{v_1}|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

és

$$\underline{u_2} = \frac{\underline{v_2}}{|\underline{v_2}|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ekkor jó választás:

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Egy másik jó választás:

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. (12 pont) Határozd meg a következő kétváltozós $f(x, y)$ függvény $P_0(0, 1)$ pontbeli iránymenti deriváltját a $\underline{v} = (-6, 8)$ irány szerint.

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2)2xy + e^{xy} - 2$$

Megoldás Számítsuk ki a parciális deriváltakat:

$$\begin{aligned}f'_x(x, y) &= \frac{2x}{1 + x^2} \cdot 2xy + \ln(1 + x^2) \cdot 2y + ye^{xy}, \\f'_y(x, y) &= \ln(1 + x^2) \cdot 2x + xe^{xy}.\end{aligned}$$

Behelyettesítve a $P_0(0, 1)$ pontot (kihasználva, hogy $\ln(1) = 0$):

$$\begin{aligned}f'_x(0, 1) &= 0 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot e^0 = 1, \\f'_y(0, 1) &= 0 \cdot 0 + 0 \cdot e^0 = 0.\end{aligned}$$

A gradiens:

$$\nabla f(0, 1) = (1, 0)$$

Az irányvektor hossza és az irány normáltja:

$$|\underline{v}| = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = 10 \quad \Rightarrow \quad \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} = \left(\frac{-6}{10}, \frac{8}{10}\right) = \left(\frac{-3}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

Az iránymenti derivált a gradiens és az egységvektor skaláris szorzata:

$$f'_{\underline{v}}(0, 1) = \left\langle \nabla f(0, 1), \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} \right\rangle = 1 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + 0 \cdot \frac{4}{5} = -\frac{3}{5}.$$

3. (13 pont) Keresd meg a következő kétváltozós $f(x, y)$ függvény lokális szélsőértékeit és nyereg-pontjait, ha vannak!

$$f(x, y) = 6xy - 8x^3 - y^3 - 2$$

Megoldás Az elsőrendű parciális deriváltak:

$$f'_x(x, y) = 6y - 24x^2 = 0$$

$$f'_y(x, y) = 6x - 3y^2 = 0.$$

A második egyenletből

$$x = \frac{1}{2}y^2.$$

Amit az első egyenletbe visszaírva:

$$6y - 24\left(\frac{1}{2}y^2\right)^2 = 0$$

$$6y - 24 \cdot \frac{1}{4}y^4 = 0$$

$$6y(1 - y^3) = 0.$$

Amőből $y = 0$ vagy $y = \sqrt[3]{1} = 1$. A kritikus pontok tehát:

$$(0, 0) \quad \text{és} \quad \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

A másodrendű parciális deriváltak:

$$f''_{xx}(x, y) = -48x$$

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = 6$$

$$f''_{yy}(x, y) = -6y.$$

A Hesse-mátrix tetszőleges (x, y) pontban:

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} -48x & 6 \\ 6 & -6y \end{bmatrix}.$$

Most vizsgáljuk meg a kritikus pontokban:

- A $(0, 0)$ pontban:

$$\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 36 = -36 < 0,$$

így itt nyeregpontja van a függvénynek.

- A $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ pontban:

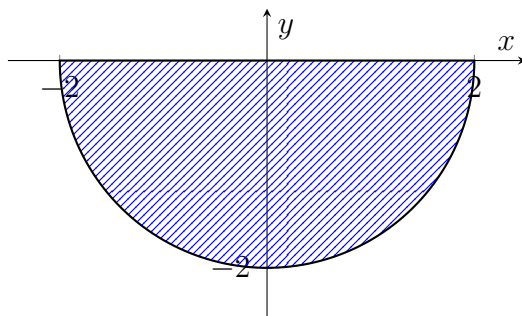
$$\begin{vmatrix} -24 & 6 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} = 144 - 36 = 108 > 0 \quad \text{és} \quad f''_{xx}\left(\frac{1}{2}, 1\right) = -24 < 0,$$

így itt lokális maximuma van a függvénynek.

4. (12 pont) Határozd meg az alábbi integrál értékét, ha T az origó körüli 2 sugarú kör x -tengely alatti része.

$$\iint_T 2e^{x^2+y^2} \, dA$$

Megoldás Polárkoordinátás helyettesítést alkalmazunk: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Az integrálási tartomány az alsó félkör: $0 \leq r \leq 2$ és $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$.



Az integrál kiszámítása:

$$\begin{aligned} \iint_T 2e^{x^2+y^2} \, dA &= \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^2 2e^{r^2} \cdot r \, dr \, d\varphi \\ &= \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^2 2re^{r^2} \, dr \, d\varphi \\ &= \int_{\pi}^{2\pi} \left[e^{r^2} \right]_{r=0}^{r=2} d\varphi \\ &= \int_{\pi}^{2\pi} (e^4 - e^0) \, d\varphi \\ &= \int_{\pi}^{2\pi} (e^4 - 1) \, d\varphi \\ &= \left[(e^4 - 1)\varphi \right]_{\pi}^{2\pi} \\ &= \pi(e^4 - 1). \end{aligned}$$

2. zárthelyi

D csoport

1. (13 pont) Adj meg olyan C ortogonális és D diagonális mátrixot, amikkel az lenti szimmetrikus A mátrixra teljesül, hogy $A = CDC^T$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Megoldás A karakterisztikus polinom meghatározása:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 3 \cdot 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 - 9 = \lambda^2 - 6\lambda.$$

A sajátértékek $p(\lambda)$ gyökei:

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 6\lambda &= 0 \\ \lambda(\lambda - 6) &= 0. \end{aligned}$$

A sajátértékek tehát:

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{és} \quad \lambda_2 = 6.$$

A sajátvektorok:

- $\lambda_1 = 0$ -hoz:

$$\begin{bmatrix} 3-0 & 3 \\ 3 & 3-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

- $\lambda_2 = 6$ -hoz:

$$\underline{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

mivel a mátrix szimmetrikus (ezért vannak páronként merőleges sajátvektorjai) és ez a vektor merőleges $\underline{v_1}$ -re.

Normáljuk le a sajátvektorokat:

$$\underline{u_1} = \frac{\underline{v_1}}{|\underline{v_1}|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

és

$$\underline{u_2} = \frac{\underline{v_2}}{|\underline{v_2}|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ekkor jó választás:

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Egy másik jó választás:

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad D = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. (12 pont) Határozd meg a következő kétváltozós $f(x, y)$ függvény $P_0(1, 0)$ pontbeli iránymenti deriváltját a $\underline{v} = (6, -8)$ irány szerint.

$$f(x, y) = \ln(1 + y^2)2xy + e^{xy} + 3$$

Megoldás Számítsuk ki a parciális deriváltakat:

$$\begin{aligned}f'_x(x, y) &= \ln(1 + y^2) \cdot 2y + ye^{xy}, \\f'_y(x, y) &= \frac{2y}{1 + y^2} \cdot 2xy + \ln(1 + y^2) \cdot 2x + xe^{xy}.\end{aligned}$$

Behelyettesítve a $P_0(1, 0)$ pontot (kihasználva, hogy $\ln(1) = 0$):

$$\begin{aligned}f'_x(1, 0) &= 0 \cdot 0 + 0 \cdot e^0 = 0, \\f'_y(1, 0) &= 0 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot e^0 = 1.\end{aligned}$$

A gradiens:

$$\nabla f(1, 0) = (0, 1)$$

Az irányvektor hossza és az irány normáltja:

$$|\underline{v}| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = 10 \quad \Rightarrow \quad \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} = \left(\frac{6}{10}, \frac{-8}{10}\right) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right).$$

Az iránymenti derivált a gradiens és az egységvektor skaláris szorzata:

$$f'_{\underline{v}}(1, 0) = \left\langle \nabla f(1, 0), \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} \right\rangle = 0 \cdot \frac{3}{5} + 1 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{4}{5}.$$

3. (13 pont) Keresd meg a következő kétváltozós $f(x, y)$ függvény lokális szélsőértékeit és nyereg-pontjait, ha vannak!

$$f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$$

Megoldás Az elsőrendű parciális deriváltak:

$$f'_x(x, y) = 3x^2 - 6y = 0$$

$$f'_y(x, y) = 24y^2 - 6x = 0.$$

Az első egyenletből

$$y = \frac{1}{2}x^2.$$

Amit a második egyenletbe visszaírva:

$$24\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 - 6x = 0$$

$$24 \cdot \frac{1}{4}x^4 - 6x = 0$$

$$6x^4 - 6x = 0$$

$$6x(x^3 - 1) = 0.$$

Amiből $x = 0$ vagy $x = \sqrt[3]{1} = 1$. A kritikus pontok tehát:

$$(0, 0) \quad \text{és} \quad \left(1, \frac{1}{2}\right)$$

A másodrendű parciális deriváltak:

$$f''_{xx}(x, y) = 6x$$

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = -6$$

$$f''_{yy}(x, y) = 48y.$$

A Hesse-mátrix tetszőleges (x, y) pontban:

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 48y \end{bmatrix}.$$

Most vizsgáljuk meg a kritikus pontokban:

- A $(0, 0)$ pontban:

$$\begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 36 = -36 < 0,$$

így itt nyeregpontja van a függvénynek.

- Az $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ pontban:

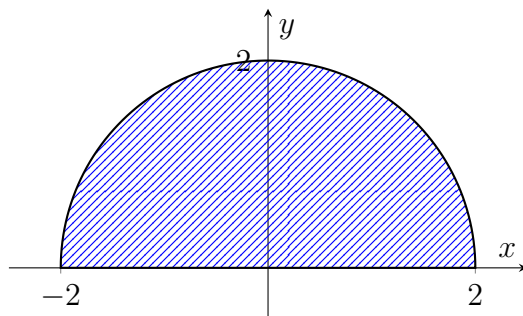
$$\begin{vmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 24 \end{vmatrix} = 144 - 36 = 108 > 0 \quad \text{és} \quad f''_{xx}(1, 1/2) = 6 > 0,$$

így itt lokális minimuma van a függvénynek.

4. (12 pont) Határozd meg az alábbi integrál értékét, ha T az origó körüli 2 sugarú kör x -tengely feletti része.

$$\iint_T 2e^{x^2+y^2} \, dA$$

Megoldás Polárkoordinátás helyettesítést alkalmazunk: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Az integrálási tartomány a felső félkör: $0 \leq r \leq 2$ és $0 \leq \varphi \leq \pi$.



Az integrál kiszámítása:

$$\begin{aligned} \iint_T 2e^{x^2+y^2} \, dA &= \int_0^\pi \int_0^2 2e^{r^2} \cdot r \, dr \, d\varphi \\ &= \int_0^\pi \int_0^2 2re^{r^2} \, dr \, d\varphi \\ &= \int_0^\pi \left[e^{r^2} \right]_{r=0}^{r=2} d\varphi \\ &= \int_0^\pi (e^4 - e^0) \, d\varphi \\ &= \int_0^\pi (e^4 - 1) \, d\varphi \\ &= \left[(e^4 - 1)\varphi \right]_0^\pi \\ &= \pi(e^4 - 1). \end{aligned}$$