

2. Gyakorlat

Események függetlensége, feltételes valószínűség, teljes valószínűség tétele, Bayes-formula
Végeredmények és megoldások

1. A és C pontosan akkor függetlenek, ha $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C)$. Számoljuk ki az egyes valószínűségeket. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, minden elemi esemény valószínűsége $\frac{1}{6}$, klasszikus valószínűségi mezőnk van, tehát a valószínűségeket *kedvező esetek száma/összes esetek száma* alakban számoljuk.

$$A = \{x \text{ prím}\} = \{2, 3, 5\} \implies \mathbb{P}(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$C = \{x \leq 4\} = \{1, 2, 3, 4\} \implies \mathbb{P}(C) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$A \cap C = \{x \text{ prím és } x \leq 4\} = \{2, 3\} \implies \mathbb{P}(A \cap C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Mivel $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, így az A és C események függetlenek.

Definíció szerint $\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$. A fentiekhez hasonlóan számolhatjuk a valószínűségeket:

$$B = \{x \text{ páros}\} = \{2, 4, 6\} \implies \mathbb{P}(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$A \cap B = \{x \text{ prím és páros}\} = \{2\} \implies \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{6} \implies \mathbb{P}(A | B) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

(Megjegyzés: A második kérdésnél úgy is gondolkodhatnánk, hogy ha tudjuk, hogy x páros, akkor megváltozik az eseményterünk, leszűkül B -re: $\Omega' = B = \{2, 4, 6\}$. Ezen az új eseménytérén számoljuk az A esemény valószínűségét ugyanúgy kedvező/összes formában. Ebben az eseménytérben 1 kedvező elemi esemény van A tekintetében, a 2, míg az összes elemi események száma 3, tehát a valószínűség $\frac{1}{3}$.)

2. a) A feladat szerint $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{a\}$, $\mathbb{P}(\{a\}) = \frac{1}{27}$, továbbá $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_3) = \frac{1}{3}$.
 b) Ellenpélda: $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(\{a, e\}) = \frac{5}{27} \neq \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) = \frac{81}{729} = \frac{1}{9}$.
3. Jelölje p annak a valószínűségét, hogy egy adott lottószelvény pontosan négytalálatos. Egy lottószelvényt $\binom{90}{5}$ különböző módon lehet kitölteni, ebből a négytalálatosok száma $\binom{5}{4} \binom{85}{1}$ hiszen ennyiféleképpen választhatjuk ki, hogy a szelvény melyik négy számot találja el, illetve, hogy mi az ötödik szám (egy a ki nem húzott 85 szám közül). Klasszikus valószínűségi mezőnk van, így $p = \frac{\binom{5}{4} \binom{85}{1}}{\binom{90}{5}} = \frac{5 \cdot 85}{\binom{90}{5}}$.

Különböztessük meg a feladatban szereplő két lottószelvényt. Legyen

$A = \{\text{az első lottószelvény pontosan négytalálatos}\}$, $B = \{\text{a másik lottószelvény pontosan négytalálatos}\}$. Ekkor nyilván $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = p$. Mivel a két lottószelvényt a feladat szövege szerint függetlenül töltik ki, ezért az A és B események függetlenek. A kért valószínűség pedig az $A \cup B$ esemény valószínűsége.

Többféleképp is gondolkodhatunk

- Poincaré-formulából: $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
 A függetlenség miatt $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = p^2$
 Tehát a keresett valószínűség: $2 \cdot p - p^2 = 0,00001934$
- vagy: $\mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A \cup B})$, a de Morgan azonosságokból $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. Tudjuk, hogy mivel A és B függetlenek, ezért $\overline{A}$ és $\overline{B}$ is függetlenek, ezért $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(\overline{A}) \cdot \mathbb{P}(\overline{B})$. Valamint az ellentett eseményekre vonatkozóan $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - p$, és ugyanígy $\mathbb{P}(\overline{B}) = 1 - \mathbb{P}(B) = 1 - p$.
 Tehát a keresett valószínűség: $1 - (1 - p)^2 = 0,00001934$

(Megjegyzés: nyilván ugyanazt kaptuk mindkét úton, hiszen $1 - (1 - p)^2 = 1 - (1 - 2p + p^2) = 2p - p^2$)

4. A feladat szövege szerint $\mathbb{P}(A \cup B) = 1$. Használjuk a Poincaré-formulát: $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$. A kifejezésben szereplő három valószínűség közötti kapcsolatot meghatározza a feladatban megadott két feltételes valószínűség, hiszen egyrészt $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A | B) \cdot \mathbb{P}(B) = 0,2 \cdot \mathbb{P}(B)$, másrészt $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B | A) \cdot \mathbb{P}(A) = 0,5 \cdot \mathbb{P}(A)$, amiből $0,2 \cdot \mathbb{P}(B) = 0,5 \cdot \mathbb{P}(A)$, azaz $\mathbb{P}(B) = \frac{0,5}{0,2} \cdot \mathbb{P}(A) = \frac{5}{2} \mathbb{P}(A)$ is következik. Helyettesítsük most a $\mathbb{P}(A)$ -val kifejezett valószínűségeket vissza Poincaré-formulába:

$$1 = \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \frac{5}{2} \mathbb{P}(A) - \frac{1}{2} \mathbb{P}(A) = 3 \cdot \mathbb{P}(A)$$

$$\text{Ebből } \mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}, \mathbb{P}(B) = \frac{5}{2} \cdot \mathbb{P}(A) = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

$$\mathbb{P}(A | \bar{B}) = \frac{\mathbb{P}(A \cap \bar{B})}{\mathbb{P}(\bar{B})} = \frac{\mathbb{P}(\bar{B} | A) \cdot \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(\bar{B})} = \frac{[1 - \mathbb{P}(B | A)] \cdot \mathbb{P}(A)}{1 - \mathbb{P}(B)} = \frac{[1 - 0,5] \cdot \frac{1}{3}}{1 - \frac{5}{6}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}} = 1.$$

Megjegyzés. Számolás nélkül is azonnal látszik, hogy $\mathbb{P}(A | \bar{B}) = 1$. Ugyanis ha $\bar{B}$ bekövetkezik, akkor B nem következik be, így mivel A és B közül legalább az egyik mindig bekövetkezik, A -nak ebben az esetben mindig (tehát 1 feltételes valószínűséggel) be kell következnie.

A és B pontosan akkor függetlenek, ha $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$. A jobboldal a fentek alapján $\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{18}$, míg a baloldal a fent leírt kifejezés miatt $0,5 \cdot \mathbb{P}(A) = 0,5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \neq \frac{5}{18}$. Tehát a két esemény nem független.

5. A feladat szövege alapján $A \cap B = A \cap C = B \cap C = A \cap B \cap C$, mert ha A, B, C közül bármelyik kettő egyszerre bekövetkezik (pl. A és B egyszerre), akkor be kell következnie a harmadiknak is ahhoz, hogy páratlan sok esemény következzen be. Így a Poincaré-formula és a feladatban megadott adatok szerint

$$1 = \mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) = 6 \mathbb{P}(C) - 2 \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 6 \mathbb{P}(C) - \frac{2}{10},$$

$$\text{amiből } \mathbb{P}(C) = \frac{12}{60} = \frac{1}{5} \text{ adódik, így } \mathbb{P}(B) = \frac{2}{5} \text{ és } \mathbb{P}(A) = \frac{3}{5}.$$

A feltételes valószínűség definíciója szerint tehát $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1/10}{2/5} = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(B|C) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{1/10}{1/5} = \frac{1}{2}$ és $\mathbb{P}(C|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{1/10}{3/5} = \frac{1}{6}$.

6. Vezessük be a következő jelöléseket:

$A = \{\text{mindkét dobott érték páros}\}$, $B = \{\text{a dobott értékek összege legalább 10}\}$

Ezekkel a jelölésekkel a keresett valószínűség: $\mathbb{P}(A | B)$

Mivel $\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$, a jobboldalon szereplő két valószínűséget kell kiszámolni.

Az eseményterünk $\Omega = \{(i, j) : i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, melynek elemszáma 36. Mindegyik elemi esemény valószínűsége ugyanakkora, így klasszikus valószínűségi mezőnk van, tehát az események valószínűségeit *kedvező esetek száma/összes esetek száma* alakban számolhatjuk.

$$B = \{(6, 4), (4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6)\} \implies |B| = 6 \implies \mathbb{P}(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$A \cap B = \{(6, 4), (4, 6), (6, 6)\} \implies |A \cap B| = 3 \implies \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$\text{Tehát } \mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{2}$$

7. Az elemi eseményeket, illetve az Ω eseményteret úgy választjuk meg, hogy az elemi események valószínűségei megegyezzenek, azaz megkülönböztetjük az egymásutáni dobásokat.

$\Omega = \{FFF, FFI, FIF, IFF, IIF, IFI, FII, III\}$, ahol F jelöli, hogy az adott dobás fej, I pedig, hogy írás. $A = \{FFI, FIF, IFF, IIF, IFI, FII\}$, $B = \{FFF, FFI, FIF, IFF\}$

Klasszikus valószínűségi mezőnk van, tehát

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, \mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2},$$

A és B pontosan akkor függetlenek, ha $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$.

Nézzük tehát az $A \cap B$ eseményt: $A \cap B = \{FFI, FIF, IFF\}$, így $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{3}{8}$.

$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$ teljesül, így tehát az A és B események függetlenek.

8. a) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$, ami az együttes függetlenség miatt $\mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B) \mathbb{P}(C) = 0,096$ -tal egyenlő.
b) *1. megoldás:* A keresett valószínűség $\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$. A Poincaré-formula és az együttes függetlenség miatt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B) \mathbb{P}(C) + 0,096 = 0,916. \end{aligned}$$

2. megoldás: A keresett valószínűség $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(\overline{A \cap B \cap C}) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$. Mivel A, B, C együttesen függetlenek, a komplementerek is azok, tehát $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = \mathbb{P}(\overline{A}) \mathbb{P}(\overline{B}) \mathbb{P}(\overline{C}) = (1 - \mathbb{P}(A))(1 - \mathbb{P}(B))(1 - \mathbb{P}(C)) = 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,2 = 0,084$. A keresett valószínűség tehát 0,916.

c) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(A \cap \overline{B} \cap \overline{C})$, amiről az imént megállapítottuk, hogy 0,084-gyel egyenlő.

9. Legyen A_i ($1 \leq i \leq 4$) az az esemény, hogy az i . kérésig minden kérés egy még szabad szerverhez lett kiosztva. Az könnyen látszik, hogy $\mathbb{P}(A_1) = \frac{6}{6} = 1$. A nagyobb i -kre $\mathbb{P}(A_i)$ -t viszont nehéznek tűnik kiszámolni, de észrevehetjük, hogy a feltételes valószínűségek könnyen kijönnek:

- $\mathbb{P}(A_2|A_1) = \frac{5}{6}$, hiszen már csak 5 szabad szerverünk van, ha A_1 bekövetkezett, hasonlóan
- $\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{4}{6}$ és
- $\mathbb{P}(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{3}{6}$.

A szorzási szabályt alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A_4 \cap A_3 \cap A_2 \cap A_1) = \mathbb{P}(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cdot \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_1).$$

Viszont tudjuk azt is, hogy $A_j \subseteq A_i$, ha $j > i$, így $A_j \cap A_i = A_j$. Ezt többször alkalmazva megkapjuk, hogy $\mathbb{P}(A_4 \cap A_3 \cap A_2 \cap A_1) = \mathbb{P}(A_4)$. Tehát a keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(A_4) = \frac{6}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{5}{18}.$$

10. A 6-os dobás valószínűségét könnyen ki tudjuk számolni, ha tudjuk, hogy hányszor dobtunk. A dobások száma az azt meglelező húzástól függ: pikk volt vagy nem. Így annak is könnyen számítható a valószínűsége, hogy hányszor dobtunk. A valószínűség közvetlen számolása helyett tehát érdemes a teljes valószínűség tételének segítségével felbontani a feladatot erre a két esetre:

$$\mathbb{P}(\text{Van 6-os}) = \mathbb{P}(\text{Van 6-os} \mid \text{Pikk}) \cdot \mathbb{P}(\text{Pikk}) + \mathbb{P}(\text{Van 6-os} \mid \text{nem Pikk}) \cdot \mathbb{P}(\text{nem Pikk})$$

A TVT használatához szükséges, hogy a feltételként használt események teljes eseményrendszert alkossanak: ez a $\{\text{Pikk}, \text{nem Pikk}\}$ eseményrendszerről könnyen belátható, hiszen egyik esemény komplementere a másiknak. A felbontott képletben szükséges valószínűségek:

$$\mathbb{P}(\text{Pikk}) = \frac{1}{4} \quad (4 \text{ szín van, a kártyák negyede pikk})$$

$$\mathbb{P}(\text{nem Pikk}) = 1 - \mathbb{P}(\text{Pikk}) = \frac{3}{4} \quad (\text{Pikk komplementere})$$

$$\mathbb{P}(\text{Van 6-os} \mid \text{Pikk}) = \frac{1}{6} \quad (\text{Egy dobás, az pont 6-os})$$

Az utolsó szükséges feltételes valószínűség annak a valószínűsége, hogy van 6-os, ha nem pikkot húztunk, azaz kétszer dobtunk kockával. Ennek számítás a komplementer segítségével könnyebb: mennyi a valószínűsége, hogy egyik dobás sem volt 6-os? Mivel a két dobás független, ezért ez pedig számítható annak a szorzataként, hogy az 1., majd a második dobás nem 6-os.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{Van 6-os} \mid \text{nem Pikk}) &= 1 - \mathbb{P}(\text{Nincs 6-os} \mid \text{nem Pikk}) = \\ &= 1 - \mathbb{P}(1. \text{ nem 6-os} \cap 2. \text{ nem 6-os}) = \\ &= 1 - (\mathbb{P}(1. \text{ nem 6-os}) \cdot \mathbb{P}(2. \text{ nem 6-os})) = 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{11}{36} \end{aligned}$$

Az eredetileg keresett valószínűség tehát behelyettesítve:

$$\mathbb{P}(\text{Van 6-os}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} + \frac{11}{36} \cdot \frac{3}{4} = \frac{13}{48}$$

11. Jelölje A_i ($i = 1, 2, 3$) azt az eseményt, hogy az i . játékhoz 1 új és 2 használt labda lett kivéve. Azt viszonylag könnyen kiszámíthatjuk, hogy $\mathbb{P}(A_1) = \frac{\binom{9}{1}\binom{6}{2}}{\binom{15}{3}}$, hiszen azok a jó esetek, amikor a 9 használatlan labdából egyet, a $15 - 9 = 6$ használt labdából pedig kettőt választunk, az összes eset pedig az, hogy a 15 labdából bárhogy választunk hármat.

Észrevehetjük, hogy ahhoz, hogy a 2. játékról tudjunk valamit mondani, jó lenne tudnunk, hogy mi történt az 1. játékban, mert ettől függ, hogy mennyi használt és használatlan labdánk van. Vagyis a $\mathbb{P}(A_2)$ kiszámolása nehéznek tűnik, de a $\mathbb{P}(A_2|A_1)$ már könnyebb, hiszen tudjuk, hogy A_1 bekövetkezése után már csak 8 használatlan labdánk lesz és 7 használt. Így az előző gondolatmenethez hasonlóan kijön, hogy $\mathbb{P}(A_2|A_1) = \frac{\binom{8}{1}\binom{7}{2}}{\binom{15}{3}}$.

Ha pedig A_1 és A_2 is bekövetkezett, akkor 7 használatlan és 8 használt labdánk lesz a harmadik játékhoz, $\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{\binom{7}{1}\binom{8}{2}}{\binom{15}{3}}$.

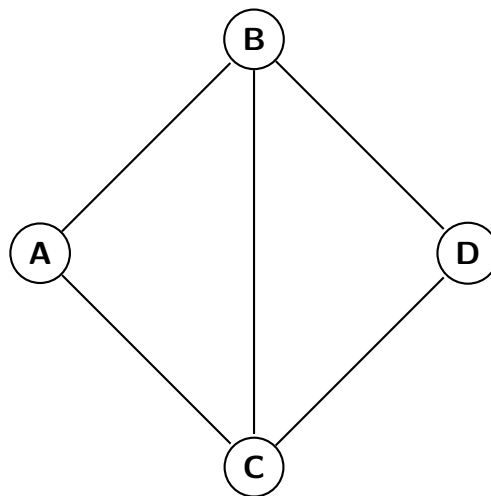
A kérdés az $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ esemény valószínűsége, amit a szorzási szabállyal könnyen megkaphatunk:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_1) = \frac{\binom{7}{1}\binom{8}{2}}{\binom{15}{3}} \cdot \frac{\binom{8}{1}\binom{7}{2}}{\binom{15}{3}} \cdot \frac{\binom{9}{1}\binom{6}{2}}{\binom{15}{3}} = 0,0472.$$

12. *Megoldások Tóth Dávid Valszám B jegyzete alapján:*

1. megoldás: a TVT használata nélkül, de viszonylag egyszerű számolással.

A városok közötti úthálózatot az alábbi gráf szemlélteti:



A feladatban leírt szituációt úgy modellezhetjük, hogy a gráf minden élét a többitől függetlenül $1/5$ valószínűséggel töröljük, és A -ból pontosan akkor lehet eljutni D -be, ha az így keletkezett gráfban vezet út A és D között.

Az eredeti gráfban összesen 4 különböző út vezet A és D között:

$$A \rightarrow B \rightarrow D, \quad A \rightarrow C \rightarrow D, \quad A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D, \quad A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D.$$

Jelölje rendre U_1, U_2, U_3 ill. U_4 azon eseményeket, hogy a végső (tehát az esetleges törlések után keletkezett) gráfban a fenti első, második, harmadik ill. negyedik út szerepel. A kérdéses valószínűség $\mathbb{P}(U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup U_4)$, amelyre a Poincaré-formulát felírva:

$$\mathbb{P}(U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup U_4) = \sum_{\emptyset \neq I \subset \{1,2,3,4\}} \mathbb{P}(\cap_{i \in I} U_i).$$

A jobb oldalon szereplő események úgy írhatók le, hogy a metszetekben szereplő eseményeknek megfelelő utak összes éle be van húzva a végső gráfban. Vegyük észre, hogy mind a hármas metszetek és az egy darab négyes metszet, valamint az $U_3 \cap U_4$ metszet ugyanaz az esemény, nevezetesen, hogy

a gráf összes éle be van húzva. Ennek valószínűsége $\left(\frac{4}{5}\right)^5$, mivel az éleket egymástól függetlenül $\frac{4}{5}$ valószínűséggel húzzuk be, és az előjeleket is figyelembe véve ez a valószínűség végül 2-es szorzóval szerepel a Poincaré-formulában.

Ez némiképp egyszerűsíti a fenti összeget:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup U_4) &= \mathbb{P}(U_1) + \mathbb{P}(U_2) + \mathbb{P}(U_3) + \mathbb{P}(U_4) \\ &\quad - \mathbb{P}(U_1 \cap U_2) - \mathbb{P}(U_1 \cap U_3) - \mathbb{P}(U_1 \cap U_4) \\ &\quad - \mathbb{P}(U_2 \cap U_3) - \mathbb{P}(U_2 \cap U_4) + 2 \left(\frac{4}{5}\right)^5.\end{aligned}$$

Az itt szereplő további események valószínűsége a fentiekhez hasonlóan $\left(\frac{4}{5}\right)^i$, ha a megfelelő esemény (legalább) i darab él behúzását jelenti:

$$\mathbb{P}(U_1) = \mathbb{P}(U_2) = \left(\frac{4}{5}\right)^2, \quad \mathbb{P}(U_3) = \mathbb{P}(U_4) = \left(\frac{4}{5}\right)^3,$$

minden további valószínűség pedig $\left(\frac{4}{5}\right)^4$. Azaz

$$\mathbb{P}(U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup U_4) = 2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 - 5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4 + 2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^5 = 0,9114.$$

2. megoldás: TVT-vel. A feladat előző megoldásában látott gráfos átfogalmazást és (többek közt) az ott bevezetett jelöléseket fogjuk használni.

Jelölje BC azt az eseményt, hogy az BC él be van húzva a gráfba. Vegyük észre, hogy ha BC nem teljesül (azaz $\overline{BC}$ teljesül), akkor az, hogy van A -ból D -be út, éppen azt jelenti, hogy az U_1 és U_2 utak legalább egyikének élei be vannak húzva. Vagyis

$$\mathbb{P}(\exists \text{ út } A\text{-ból } D\text{-be} \mid \overline{BC}) = \mathbb{P}(U_1 \cup U_2 \mid \overline{BC}) = \mathbb{P}(U_1 \cup U_2),$$

ahol az utolsó egyenlőség azért teljesül, mert a BC él nincs rajta az $A \rightarrow B \rightarrow D$ és az $A \rightarrow C \rightarrow D$ utakon, így ezt az élt e két út éleitől függetlenül húzzuk vagy nem húzzuk be. A Poincaré-formula szerint tehát

$$\mathbb{P}(\exists \text{ út } A\text{-ból } D\text{-be} \mid \overline{BC}) = \mathbb{P}(U_1) + \mathbb{P}(U_2) - \mathbb{P}(U_1 \cap U_2) = 2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^4,$$

hiszen a fenti események éppen azt jelentik, hogy két-két, illetve a metszet esetén négy él be van húzva a gráfba.

Ha BC teljesül, akkor az, hogy van A -ból D -be út, éppen azt jelenti, hogy mind az A , mind a D csúcsból el lehet érni a B és C csúcsok legalább egyikét. Jelölje ezeket az eseményeket S és T . Mivel ezek a BC és meglététől függetlenek, így

$$\mathbb{P}(\exists \text{ út } A\text{-ból } D\text{-be} \mid BC) = \mathbb{P}(S \cap T \mid BC) = \mathbb{P}(S \cap T) = \mathbb{P}(S) \mathbb{P}(T),$$

mert maguk az S és T események is függetlenek, hiszen diszjunkt élhalmazra vonatkoznak. Jelölje rendre AB , AC , BD és CD azt, hogy a megfelelő élek be vannak húzva a gráfban, ekkor

$$\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(AB \cup AC) = \mathbb{P}(AB) + \mathbb{P}(AC) - \mathbb{P}(AB \cap AC) = 2 \cdot \frac{4}{5} - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} = \frac{24}{25},$$

amit persze úgy is megkaphatunk, ha 1-ből kivonjuk a komplementer esemény valószínűségét (vagyis annak a valószínűségét, hogy a kettőből egyik él sincs behúzva). Hasonlóképp

$$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(BD \cup CD) = \frac{24}{25},$$

vagyis

$$\mathbb{P}(\exists \text{ út } A\text{-ból } D\text{-be} \mid BC) = \left(\frac{24}{25}\right)^2.$$

Végül a teljes valószínűség tétele szerint

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\exists \text{ út } A\text{-ból } D\text{-be}) &= \mathbb{P}(\exists \text{ út } A\text{-ból } D\text{-be} \mid BC) \mathbb{P}(BC) + \mathbb{P}(\exists \text{ út } A\text{-ból } D\text{-be} \mid \overline{BC}) \mathbb{P}(\overline{BC}) \\ &= \left(\frac{24}{25}\right)^2 \cdot \frac{4}{5} + \left[2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^4\right] \cdot \frac{1}{5} = 0,9114.\end{aligned}$$

13. Mivel itt a TVT-t és a szorzási szabályt használjuk, hasznos a többlépcsős kísérletet fa alakban ábrázolni (lásd gyakorlat).

Jelölje ZZ_1 azt az eseményt, hogy az első urnából először két zöld golyót, ZK_1 azt, hogy egy zöldet és egy kéket és KK_1 azt, hogy két kéket húzunk. Jelölje továbbá K_2 azt az eseményt, hogy a második urnából kéket és Z_2 azt, hogy zöldet húzunk. Végül jelölje K azt az eseményt, hogy az első urnából végül kéket húzunk, ekkor $\mathbb{P}(K)$ -t keressük.

Az első húzásban $\mathbb{P}(ZZ_1) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{5 \cdot 4}{12 \cdot 11} = \frac{5}{33}$ valószínűséggel húzunk két zöldet, hasonlóan

$\mathbb{P}(ZK_1) = \frac{\binom{5 \cdot 7}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{35}{66}$ valószínűséggel egy zöldet és egy kéket, végül $\mathbb{P}(KK_1) = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{21}{66}$ valószínűséggel két kéket.

Feltéve, hogy két zöldet húztunk, ezeket áttéve a 2. urnába ott 5 zöld és 8 kék golyó lesz. Így a 2. urnából $\mathbb{P}(Z_2|ZZ_1) = 5/13$ (feltételes) valószínűséggel húzunk zöldet, amit visszatéve az első urnába ott 4 zöld és 7 kék golyó lesz, tehát innen $\mathbb{P}(K|ZZ_1 \cap Z_2) = 7/11$ (feltételes) valószínűséggel húzunk kéket. Hasonlóan a 2. urnából $\mathbb{P}(K_2|ZZ_1) = 8/13$ valószínűséggel húzunk kéket, amit az első urnába rakva ott 8 kék és 3 zöld golyó lesz, tehát onnan $\mathbb{P}(K|ZZ_1 \cap K_2) = 8/11$ (feltételes) valószínűséggel húzunk kéket.

Feltéve, hogy az első urnából egy kéket és egy zöldet húztunk, ezeket áttéve a 2. urnába ott 4 zöld és 9 kék golyó lesz. Így a 2. urnából $\mathbb{P}(Z_2|ZK_1) = 4/13$ (feltételes) valószínűséggel húzunk zöldet, amit visszatéve az első urnába ott 5 zöld és 6 kék golyó lesz, tehát innen $\mathbb{P}(K|ZK_1 \cap Z_2) = 6/11$ (feltételes) valószínűséggel húzunk kéket. Hasonlóan a 2. urnából $\mathbb{P}(K_2|ZK_1) = 9/13$ valószínűséggel húzunk kéket, amit az első urnába rakva ott 7 kék és 4 zöld golyó lesz, tehát onnan $\mathbb{P}(K|ZK_1 \cap K_2) = 7/11$ (feltételes) valószínűséggel húzunk kéket.

Feltéve, hogy az első urnából két kéket húztunk, ezeket áttéve a 2. urnába ott 3 zöld és 10 kék golyó lesz. Így a 2. urnából $\mathbb{P}(Z_2|KK_1) = 3/13$ (feltételes) valószínűséggel húzunk zöldet, amit visszatéve az első urnába ott 6 zöld és 5 kék golyó lesz, tehát innen $\mathbb{P}(K|KK_1 \cap Z_2) = 5/11$ (feltételes) valószínűséggel húzunk kéket. Hasonlóan a 2. urnából $\mathbb{P}(K_2|KK_1) = 10/13$ valószínűséggel húzunk kéket, amit az első urnába rakva ott 6 kék és 5 zöld golyó lesz, tehát onnan $\mathbb{P}(K|KK_1 \cap K_2) = 6/11$ (feltételes) valószínűséggel húzunk kéket.

A szorzási szabályt alkalmazzuk minden lehetséges kimenetelre, ahol végül kéket húzunk az első urnából. Pl. annak a valószínűsége, hogy az első urnából két zöldet, majd a másodikból egy zöldet, és végül a harmadikból is kéket húzunk, a fentiek szerint $\mathbb{P}(ZZ_1 \cap Z_2 \cap K) = \mathbb{P}(ZZ_1) \mathbb{P}(Z_2|ZZ_1) \mathbb{P}(K|ZZ_1 \cap Z_2) = \frac{5}{33} \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{7}{11}$, és hasonlóan a többi esetben. Végül a teljes valószínűség tétele szerint ezeket a szorzatokat összeadva kapjuk annak a valószínűségét, hogy végül kéket húzunk az első urnából, amire $\mathbb{P}(K) = \frac{85}{143} \approx 0,5944$ adódik. A TVT-t azért alkalmazhatjuk, mert a $\{ZZ_1 \cap Z_2\}, \{ZZ_1 \cap K_2\}, \{ZK_1 \cap Z_2\}, \{ZK_1 \cap K_2\}, \{KK_1 \cap Z_2\}, \{KK_1 \cap K_2\}$ események teljes eseményrendszert alkotnak.

14. Legyen $H = \{\text{helyesen válaszol}\}$, $T = \{\text{tudja a választ}\}$ események. A Bayes-tétel segítségével felírhatjuk $\mathbb{P}(T|H)$ valószínűséget.

$$\mathbb{P}(T|H) = \frac{\mathbb{P}(H|T) \mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(H|T) \mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(H|\overline{T}) \mathbb{P}(\overline{T})} = \frac{1 \cdot p}{1 \cdot p + 1/3 \cdot (1 - p)} = \frac{3p}{2p + 1}.$$

Mivel annak a valószínűsége hogy tudja a választ $\mathbb{P}(T) = p$, hogy nem tudja a választ $\mathbb{P}(\bar{T}) = 1 - p$, hogy helyesen válaszol feltéve hogy tudja a választ $\mathbb{P}(H|T) = 1$, hogy helyesen válaszol feltéve hogy nem tudja a választ $\mathbb{P}(H|\bar{T}) = 1/3$. Ha $p = 1/4$ -et behelyettesítünk, akkor $\mathbb{P}(T|H) = 1/2$.

15. (a) Legyen A_i az az esemény, hogy a dobókockával i értéket dobunk és legyen B az az esemény, hogy 0 darab fejet dobunk. A feladat kérdése $\mathbb{P}(B)$. Mivel $A_1, \dots, A_6$ teljes eseményteret alkot, így a valószínűség kiszámolására használhatjuk a teljes valószínűség tételét.

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A_1) \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(B|A_6) \mathbb{P}(A_6).$$

Bármely $i = 1, \dots, 6$ számra $\mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{6}$, továbbá igaz, hogy $\mathbb{P}(B|A_i) = \frac{1}{2^i}$, hiszen minden dobásnál egyenlő valószínűséggel lehet a dobás fej vagy írás. Ezáltal a keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^6 \frac{1}{2^i} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2^6} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{21}{128}.$$

- (b) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(A_6|B)$. A Bayes-tétel miatt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_6|B) &= \frac{\mathbb{P}(B|A_6) \mathbb{P}(A_6)}{\mathbb{P}(B)} = \\ &= \frac{\mathbb{P}(B|A_6) \mathbb{P}(A_6)}{\mathbb{P}(B|A_1) \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(B|A_6) \mathbb{P}(A_6)} = \\ &= \frac{\frac{1}{384}}{\frac{21}{128}} = \frac{1}{63}. \end{aligned}$$

16. A Bayes-tételt alkalmazzuk. Jelölje A_i azt az eseményt, hogy pontosan i forrás szerint igaz az állítás. Ekkor A_0, A_1, A_2 teljes eseményrendszert alkotnak és a függetlenség miatt $\mathbb{P}(A_2) = 1/4$, $\mathbb{P}(A_1) = 1/2$ (mert $1/4$ valószínűséggel az első forrás szerint igaz és a második szerint hamis és $1/4$ valószínűséggel fordítva), és $\mathbb{P}(A_0) = 1/4$. Jelölje B azt az eseményt, hogy a mesterséges intelligencia szerint igaz az állítás. Feltéve, hogy mindkét forrás szerint igaz, a mesterséges intelligencia szerint mindenképpen igaz lesz, azaz $\mathbb{P}(B|A_2) = 1$. Feltéve, hogy pontosan egy forrás szerint igaz, a mesterséges intelligencia szerint $1/2$ valószínűséggel lesz igaz (itt mindegy, melyik forrás szerint igaz és melyik szerint hamis), azaz $\mathbb{P}(B|A_1) = 1/2$. Végül feltéve, hogy egy forrás szerint sem igaz, a mesterséges intelligencia szerint is hamis lesz, azaz $\mathbb{P}(B|A_0) = 0$. Tehát a Bayes-tétel szerint a kért valószínűség

$$\mathbb{P}(A_2|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_2) \mathbb{P}(A_2)}{\mathbb{P}(B|A_2) \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(B|A_1) \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B|A_0) \mathbb{P}(A_0)} = \frac{1 \cdot 1/4}{1 \cdot 1/4 + 1/2 \cdot 1/2 + 0 \cdot 1/4} = \frac{1}{2}.$$

(Természetesen a $\mathbb{P}(B|A_0) \mathbb{P}(A_0)$ tagot nyugodtan el lehet hagyni a nevezőből, mert nulla.)

17. Jelölje A_k azt az eseményt, hogy k hatost dobtunk, ahol $k \in \{0, 1, 2\}$. Ekkor azt az értéket érdemes k értékére tippelni, amelyik A_k a B esemény bekövetkezésének ismeretében a legvalószínűbb, vagyis amelyekre $\mathbb{P}(A_k|B)$ a legnagyobb. A Bayes-tétel szerint $k = 0, 1, 2$ esetén

$$\mathbb{P}(A_k|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_k) \mathbb{P}(A_k)}{\mathbb{P}(B|A_0) \mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(B|A_1) \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B|A_2) \mathbb{P}(A_2)}. \quad (1)$$

Mivel két független kockadobásról van szó, $\mathbb{P}(A_0) = \frac{5^2}{36} = \frac{25}{36}$, $\mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{36}$ és így $\mathbb{P}(A_1) = 1 - \mathbb{P}(A_0) - \mathbb{P}(A_2) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$ [klasszikus valószínűségi mező, a két dobás eredménye egymástól függetlenül lesz/nem lesz 6-os].

Továbbá $\mathbb{P}(B|A_0) = 0$ (mert $k = 0$ esetén nincs piros golyó a dobozban), $\mathbb{P}(B|A_1) = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ (mert $k = 1$ esetén a dobozban a két golyóból egy piros és kétszer húzunk visszatevés nélkül, egymástól függetlenül), illetve $\mathbb{P}(B|A_2) = 1$ (mert $k = 2$ esetén csak piros golyó van a dobozban).

Így az (1) egyenlet jobb oldalán a nevező értéke $0 + \frac{1}{4} \cdot \frac{10}{36} + 1 \cdot \frac{1}{36} = \frac{14}{144} = \frac{7}{72}$. Tehát (1) alapján $\mathbb{P}(A_0|B) = 0$ a valószínűsége, hogy $k = 0$, $\mathbb{P}(A_1|B) = \frac{5}{7}$ a valószínűsége, hogy $k = 1$ és $\mathbb{P}(A_2|B) = \frac{2}{7}$ a valószínűsége, hogy $k = 2$. Tehát $k = 1$ -et érdemes tippelni és $\frac{5}{7}$ esélyünk van eltalálni.