

3. Gyakorlat

Diszkrét valószínűségi változók, binomiális, geometriai és Poisson-eloszlás

- Dobjunk fel egy szabályos érmét háromszor. Legyen az Ω eseménytér a 3 hosszú fej-írás sorozatok halmaza, és jelöljük az elemeit értelemszerűen: $FFF, FIF, \dots$ jelsorozatokkal. Definiáljuk az $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az FFF kimenetelen 0-nak, és minden más kimenetel esetén az első "írás" jel sorszámának (pl. $X(FIF) = 2$).
 - Mekkora az esélye, hogy X páratlan?
 - Definiáljuk Y -t ugyanúgy, mint X -et, azzal az eltéréssel, hogy $Y(FFF)$ véletlenszerűen vagy 0 vagy 1 értéket vesz fel. Valószínűségi változó-e Y az Ω eseménytéren?
- Dobjunk fel egy szabályos dobókockát kétszer. Definiáljuk az X valószínűségi változót a 6-os dobások számaként (pl. ha mindkétyszer 6-ost dobunk, akkor $X = 2$). Mekkora az esélye, hogy X páros?
- Legyen A , B és C három esemény, melyek valószínűségei és metszeteinek valószínűségei a következők:
$$\mathbb{P}(A) = 0,5 \quad \mathbb{P}(B) = 0,4 \quad \mathbb{P}(C) = 0,3 \quad \mathbb{P}(A \cap B) = 0,3$$
$$\mathbb{P}(B \cap C) = 0,2 \quad \mathbb{P}(C \cap A) = 0,1 \quad \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0,1$$
Az A , B és C események közül bekövetkező események számát jelölje Y . Mennyi $\mathbb{P}(0 < Y < 3)$? Adjuk meg a $k \mapsto p_Y(k) = \mathbb{P}(Y = k)$ súlyfüggvény értékét minden olyan k -ra, amelyre ez pozitív.
- Dobjunk két 10 oldalú dobókockával, jelölje az eredményeiket X és Y . Mennyi $\mathbb{P}(X \leq Y)$?

-
- Egy boltban izzókat árulnak. Az izzók 1%-a hibás. Ha veszünk 100 darabot, akkor (a) mekkora eséllyel lesz legfeljebb három hibás? (b*) hány lesz közülük rossz a legnagyobb valószínűséggel?
 - Hányszor dobjunk egy kockával, hogyha azt akarjuk, hogy 0,5-nél ne legyen kisebb annak a valószínűsége, hogy a 6-os dobások száma legalább kettő?
 - Egy elavult weboldalt 10 microservice szolgál ki, amik egymástól függetlenül 80% valószínűséggel érhetőek el. A rendszer működése addig tekinthető optimálisnak, amíg legfeljebb 3 service nem működik. Mekkora valószínűséggel működik optimálisan a honlap?
 - Válasszunk egymástól függetlenül, véletlenszerűen pontokat az egységintervallumban. Addig folytatjuk a pontok választását, amíg valamelyik az intervallum középső harmadába nem esik. Jelölje X a kiválasztott pontok számát. Mekkora a $\mathbb{P}(X < 5)$ valószínűség?
 - Addig dobunk egy szabályos kockával, amíg 3-nál kisebb számot nem kapunk. Jelölje X az ehhez szükséges dobások számát. Melyik valószínűség a nagyobb: $\mathbb{P}(2 \leq X \leq 3)$ vagy $\mathbb{P}(X \geq 3)$?
 - Egy szabályos pénzérmét addig dobunk fel újra és újra, amíg meg nem kapjuk a második fejet is. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első fej után a második fejig ugyanannyi dobásra van szükség, mint amennyi az elsőig kellett?
 - Egy számítógépes szervizben egy hónap húsz munkanapjából átlagosan kettőn nincsen reklamáció. Poisson-eloszlást feltételezve mennyi annak a valószínűsége, hogy egy adott napon legalább három reklamáció érkezik?
 - Lovas gátversenyen a ló az akadályok mindegyikét egymástól függetlenül, azonos valószínűséggel veri le. A pályán számtalan akadály akad. Ha 5% annak a valószínűsége, hogy a lovas hibátlanul teljesít egy kört, mennyi az esélye, hogy legfeljebb három akadályt ver le?
 - Egy futóversenyen a pályát sajnos kullancsal fertőzött területen át vezették. Kiderült, hogy a versenyzők közül 300-an találtak magukban pontosan egy kullancsot, 75-en pedig kettőt. Ezek alapján becsüljük meg, hogy körülbelül hányan indultak a versenyen.

IMSc 3. n (megkülönböztethető) golyót helyezünk véletlen módon n urnába. Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan egy urna marad üresen?
(Ráth Balázs és Vető Bálint feladatsora alapján)