

4. Gyakorlat

Várható érték, diszkrét valószínűségi változó transzformáltja, transzformált várható értéke, szórás

1. Két kockával dobva, mennyi a dobott számok maximumának várható értéke?

2. Egy boltban izzókat árulnak. Az izzók 1%-a hibás. Ha veszünk 100 darabot, akkor várhatóan hány hibásat vettünk? Mennyi a hibás izzók számának szórása?
3. Egy érmével addig dobunk, amíg először fordul elő, hogy két egymás utáni dobás értéke azonos. Mennyi a szükséges dobások számának várható értéke és szórása?
4. A $[-1, 1] \times [-1, 1]$ négyzeten egymás után (egymástól függetlenül, egyenletesen) véletlenszerűen pontokat választunk. Akkor állunk meg, amikor az első kisorsolt pont beleesik az origó középpontú egységkörbe. Mi a pontok számának eloszlása? Mennyi a pontok számának várható értéke? Feltéve, hogy az első 100 kisorsolt pont nem esett bele az origó középpontú egységkörbe, mi a valószínűsége, hogy a 101. pont sem esik bele?
5. Az egyetemen nagyon sok telefonkészülék van, amelyek egymástól függetlenül romlanak el azonos, egyenként kis valószínűséggel. Az év 360 napjából átlagosan 12 olyan nap van, hogy egyetlen készülék sem romlik el. Várhatóan hány telefon romlik el egy nap? Várhatóan hány olyan nap lesz egy (360 napos) évben, amikor 2 vagy 2-nél több telefon romlik el?
6. Egy izzógyár mérnökei megfigyelték, hogy minél több izzót gyártanak egy napon, annál kisebb valószínűséggel lesz hibás egy-egy izzó. Ha egy napon $n \geq 1$ izzót készítenek, akkor minden izzó egymástól függetlenül $\frac{1}{2n}$ valószínűséggel lesz hibás.
 - (a) Ha egy napon $n = 10$ izzót gyártanak, akkor mennyi az aznap gyártott hibás izzók számának várható értéke és szórásnégyzete (és miért)?
 - (b) $n = 10$ esetén mi a valószínűsége, hogy 4-nél több, de 8-nál kevesebb izzó lesz hibás a 10 izzó közül? (A valószínűség pontos értékét adjuk meg.)
 - (c) Tegyük fel, hogy egy napon n izzót gyártanak, ahol n nagyon nagy. Közelítsük alkalmas approximációval annak a valószínűségét, hogy az adott napon pontosan 3 izzó lesz hibás. (A valószínűség pontos értékét itt nem kell meghatározni.)

(Vizsga, 3. feladat, 2025.01.23.)

7. Jelölje X egy kockadobás eredményét. Mennyi $\mathbb{E}((X - 3)^2)$?
8. Legyen X egy véletlenszerűen választott hónap sorszáma, áprilistól decemberig. Annak az esélye, hogy az i -edik hónapot választjuk ki $\frac{i}{72}$ ($\forall i = 4, \dots, 12$). Legyen $Y = (-1)^X$.
 - a) Határozzuk meg Y eloszlását.
 - b) Határozzuk meg $\mathbb{E}(Y)$ -t az Y eloszlásával számolva.
 - c) Vezessük le $\mathbb{E}((-1)^X)$ -et az X eloszlásával számolva is.
9. Egy szabályos tetraéder oldalaira felírtuk az első négy pozitív prímszámot. Háromszor dobunk vele. Jelölje X a dobott 7-esek számát, és legyen $Y = X^2$, $Z = X^2 + X + 1$. Határozzuk meg Y és Z várható értékét és X szórását.
10. Független kísérleteket végzünk, melyek külön-külön mind p valószínűséggel sikerülnek. Addig ismételgetjük a kísérletet, amíg 3 sikeres nem lesz. Jelölje X az ehhez szükséges sikertelen kísérletek számát. Határozzuk meg az $\mathbb{E}\left(\frac{1}{(X+2)(X+1)}\right)$ értéket (p függvényében).

11. Egy réten három szarvas legelészik gyanútlanul. Egymásról nem tudva három vadász lopakodik a tisztáshoz, és egyszerre tüzelnek a vadakra. Mindegyik lövés talál, és halálos. Mennyi a lövések után a rétről elszaladó szarvasok számának várható értéke és szórása? (Elvileg több vadász is lőhet ugyanabba a szarvasba, és mindegyik lövés minden szarvast azonos valószínűséggel talál el.)
12. Legyen X Poisson-eloszlású valószínűségi változó $\lambda > 0$ paraméterrel, és $Y = 2X + 1$. Adjuk meg Y szórásnégyzetét.
13. Ha tudjuk, hogy $\mathbb{E}X = 1$ és $\mathbb{D}^2 X = 5$, akkor mennyi a) $\mathbb{E}((2 + X)^2)$ b) $\mathbb{D}^2(4 + 3X)$?
14. Legyen $X \sim \text{Geo}(\frac{1}{3})$. Adjuk meg az $\mathbb{E}((3 - X)^2)$ és a $\mathbb{D}(5 - 2X)$ mennyiségeket.

Előadáson:

15. Tegyük fel, hogy az 5-ös lottó nyereményei rögzítettek: az 5-ös találat 1 milliárd, a 4-es 6 millió, a 3-as 35 ezer, míg a 2-es kétezer forintot nyer. Egy szelvénnel mennyi a nyereményünk várható értéke?
16. Egy kezdetben üres, 1-től $2n$ -ig indexelt tömbbe (ahol $n \geq 1$) beszúrunk $2n$ elemet úgy, hogy bármely két elem különböző helyre kerüljön (vö. 1. feladatsor, 14. feladat). Tegyük fel most, hogy az elemek fele páros, a másik fele pedig páratlan szám. A $2n - 1$ szomszédos elempár közül várhatóan hány olyan lesz, amely
- a) két páros számból áll?
- b) egy páros és egy páratlan számból áll (tetszőleges sorrendben)?
17. Legyen $X \sim \text{Pois}(3)$ és $Z = X^2 - X$. Határozzuk meg
- a) Z várható értékét,
- b) Z várható értéke és az $\mathbb{E}(X)$ -re vonatkozó ismert képlet alapján $\mathbb{D}^2(X)$ -et.

IMSc 4. Legyen X Poisson-eloszlású $\lambda > 0$ paraméterrel.

- (a) Határozzuk meg (indoklással) $e^{2025 \cdot X}$ várható értékét,
- (b) adjunk meg (indoklással) egy olyan f nemnegatív függvényt, amelyre $\mathbb{E}(f(X)) = \infty$.

Eloszlás neve	Jelölés	$\text{Ran}(X)$	$F_X(t)$	$p_X(k), f_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
indikátor Bernoulli	$\mathbb{1}_A$ $B(p)$	$\{0, 1\}$		$p_X(0)=1-p, p_X(1)=p$ $(p = \mathbb{P}(A))$	p	$p(1-p)$
binomiális	$\text{Bin}(n; p)$	$\{0, 1, \dots, n\}$		$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Poisson	$\text{Pois}(\lambda)$	$\{0, 1, 2, \dots\}$		$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	λ	λ
geometriai	$\text{Geo}(p)$	$\{1, 2, \dots\}$		$(1-p)^{k-1} p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$