

8. Gyakorlat

Kovariancia, együttes sűrűségfüggvény

Végeredmények

1. a) Mivel mindkét valószínűségi változó egyenletes eloszlású, ezért az, hogy egy adott értéket felvesznek, megfelel a $(0, 3) \times (-1, 4)$ téglalap egy pontjának véletlenszerű kiválasztásának. Az $\{X < Y\}$ esemény annak az eseménynek felel meg, hogy az (x, y) pont a $(0, 3) \times (-1, 4)$ téglalap $x = y$ egyenes feletti részébe esik. Ennek valószínűségét, mivel geometriai valószínűségi mezőt használhatunk, a kedvező rész területének és az egész Ω eseménytér területének hányadosa adja meg.

$$\mathbb{P}(X < Y) = \frac{\frac{3 \cdot 3}{2} + 1 \cdot 3}{3 \cdot 5} = \frac{7.5}{15} = \frac{1}{2}$$

b) Az $\{X + Y = 1\}$ esemény annak az eseménynek felel meg, hogy az (x, y) pont az $x + y = 1$, azaz $y = 1 - x$ egyenesre esik. Egy egyenes területe azonban 0, így a kért valószínűség 0.

c) A valószínűséget most is a kedvező rész területének és az egész téglalap területének hányadosa adja meg. A kedvező terület most a $(0, 3) \times (-1, 4)$ téglalapnak az $x \cdot y = 1$, azaz az $y = \frac{1}{x}$ hiperbola alatti része. Ez három részből áll: $(0, 3) \times (-1, 0)$ téglalap, $(0, \frac{1}{4}) \times (0, 4)$ téglalap és a maradék $(\frac{1}{4}, 3) \times (0, 4)$ téglalapnak a hiperbola alatti része, amelynek területét integrálással kaphatjuk meg.

$$\mathbb{P}(XY < 1) = \frac{3 \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 4 + \int_{\frac{1}{4}}^3 \frac{1}{x} dx}{3 \cdot 5} = \frac{3 + 1 + [\ln x]_{\frac{1}{4}}^3}{15} = \frac{4 + \ln 3 - \ln \frac{1}{4}}{15} = \frac{4 + \ln 12}{15} \approx 0,4323.$$

2. A $\{V < Z\}$ eseményt megfogalmazhatjuk az eredeti két valószínűségi változónk segítségével, ha behelyettesítjük a $Z = 2X + 1$ és $V = 3Y$ kifejezéseket:

$$\{V < Z\} \equiv \{3Y < 2X + 1\} \equiv \left\{Y < \frac{2}{3}X + \frac{1}{3}\right\}$$

Az X és Y valószínűségi változó független és egyenletes eloszlású a $(0, 1)$ intervallumon, ezért az, hogy egy adott értéket felvesznek, megfelel az egységnégyszet egy pontjának véletlenszerű kiválasztásának. Tehát geometriai valószínűségi mezőnk van, így a kapcsolódó események valószínűségeit a kedvező terület és a teljes eseménytér, jelen esetben az egységnégyszet, területének hányadosaként kapjuk.

A fentiek alapján a kedvező rész most az egységnégyszet $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ egyenes alatti része. Ez egy trapéz, amelynek területe $(\frac{1}{3} + 1) \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$.

Ez egyben a valószínűség is, hiszen az egységnégyszetnek (az aktuális eseménytérnek) a területe 1, így ezzel osztjuk a fenti kedvező területet.

$$\text{Tehát } \mathbb{P}(V < Z) = \frac{2}{3}.$$

3. a) $\mathbb{P}(X + Y < 1) = \mathbb{P}(Y < 1 - X)$ -et az együttes sűrűségfüggvénynek az $\{(x, y) \in (0, 1)^2 : y < 1 - x\}$ halmazon való integrálásával kapjuk, vagyis az integrálási határok: $x = 0 \dots 1$ és $y < 1 - x$, azaz $y = 0 \dots 1 - x$. (Lehet fordított sorrendben is: $y = 0 \dots 1$, $x = 1 - y \dots 1$.) Tehát

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X + Y < 1) &= \mathbb{P}(Y < 1 - X) = \int_0^1 \int_0^{1-x} f_{X,Y}(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} 2(x^3 + y^3) dy dx \\ &= \left[2 \frac{y^4}{4} + 2x^3 y \right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \int_0^1 \frac{2(1-x)^4}{4} + 2x^3 - 2x^4 dx = \left[\frac{1}{2} \frac{(1-x)^5}{-5} + \frac{2x^4}{4} - \frac{2x^5}{5} \right]_{x=0}^1 \\ &= 0 + \frac{1}{2} - \frac{2}{5} + \frac{1}{10} - 0 + 0 - 0 = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

(Gyorstalpaló azoknak, akik még nem járatosak az Analízis 2-ben: két változóban az egyik változó szerint úgy integrálunk, mintha a másik változó egy konstans lenne, belülről kifelé elvégezve az integrálásokat.)

Mindig írjuk ki, hogy melyik változó szerint vesszük a primitív függvényt.)

b) Mivel $Y > 0$ egy valószínűséggel igaz, ezért

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X^2 < Y) &= \mathbb{P}(X < \sqrt{Y}) = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} f_{X,Y}(x,y) dx dy = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} 2(x^3 + y^3) dx dy = \int_0^1 \left[\frac{2x^4}{4} + 2y^3 x \right]_{x=0}^{\sqrt{y}} dy \\ &= \int_0^1 \frac{2y^2}{4} + 2y^{7/2} dy = \left[\frac{y^3}{6} + \frac{4}{9} y^{9/2} \right]_{y=0}^1 = \frac{1}{6} + \frac{4}{9} = \frac{11}{18}.\end{aligned}$$

c) A marginális sűrűségfüggvényt úgy kapjuk, hogy az együttes sűrűségfüggvényt a másik változó szerint $-\infty$ -tól ∞ -ig kiintegráljuk (pontosabban lásd lentebb). Mivel $f_{X,Y}(x,y)$ mindenhol nulla, ahol $x \notin (0,1)$, ezért $f_X(x)$ is 0, ha $x \leq 0$ vagy $x \geq 1$. Továbbá $0 < x < 1$ esetén

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy = \int_0^1 2(x^3 + y^3) dy = \left[2x^3 y + \frac{2}{4} y^4 \right]_{y=0}^1 = 2x^3 + \frac{1}{2}.$$

Összefoglalva:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x^3 + \frac{1}{2} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

d) A szimmetria miatt

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2y^3 + \frac{1}{2} & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

(Most x szerint integráljuk $-\infty$ -tól ∞ -ig az együttes sűrűségfüggvényt, ami ugyanaz a számolás, mint $f_X(x)$ -nél csak X és Y , illetve x és y szerepe felcserélődik.)

$$\text{e) } \mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 2x^4 + \frac{1}{2} x dx = \left[\frac{2x^5}{5} + \frac{1}{4} x^2 \right]_0^1 = \frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{13}{20}.$$

Ki lehet számolni $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X,Y}(x,y) dx dy$ képlettel is, ami lényegében X marginális sűrűségfüggvényének újbóli kiszámolását és a fenti várhatóérték-számítást jelenti.

f) Mivel (X,Y) folytonos val. vektorváltozó (avagy: X és Y együttesen folytonosak), pontosan akkor függetlenek, ha $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ minden $x,y \in \mathbb{R}$ esetén teljesül. Tehát nem függetlenek, mert pl. ha $x = y = \frac{1}{2}$, akkor

$$f_X(x)f_Y(y) = (2x^3 + \frac{1}{2})(2y^3 + \frac{1}{2}) \neq 2(x^3 + y^3) = f_{X,Y}(x,y).$$

Azzal is lehet érvelni, hogy van olyan x,y , amelyre $f_{Y|X}(y|x) \neq f_Y(y)$ (pl. megint $x = y = 1/2$).

4. A kért valószínűséget úgy kapjuk meg, ha az együttes sűrűségfüggvényt integráljuk a kedvező terület felett. Ehhez először deriváljuk x és y szerint is az együttes eloszlásfüggvényt, hogy megkapjuk az együttes sűrűségfüggvényt:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \frac{xy^3+x}{2}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \frac{y^3+1}{2}}{\partial y} = \frac{3y^2}{2}$$

Az A , B és C csúcspontok által meghatározott háromszög az x tengely, az $x = \frac{1}{2}$ és az $y = -\frac{1}{2}x$ egyenesek által körülhatárolt terület, azaz $0 < x < \frac{1}{2}$, miközben $-\frac{1}{2}x < y < 0$. Így tehát annak a valószínűsége, hogy az (X,Y) pár az adott háromszög belsejébe esik, az együttes sűrűségfüggvény ezen határok közötti integrálja:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}x}^0 \frac{3y^2}{2} dy dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{y^3}{2} \right]_{-\frac{1}{2}x}^0 dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{8}x^3}{2} dx = \left[\frac{x^4}{64} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{1024}$$

(Megjegyzés: figyeljünk oda, hogy mivel az y kedvező értékeire vonatkozó határok függenek x -től, ezért először y szerint kell integrálnunk, és az x szerinti a külső integrál.)

5. (10 pont)

(1 pont) $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$,

(1 pont) ha $f_X(x) > 0$ (az $f_X(x) = 0$ esetre a megoldás során később visszatérünk).

(1 pont) Határozzuk meg először $f_X(x)$ -et, $f_X(x) = 0$, ha $x \leq 1$ vagy $x \geq 3$,

(1 pont) és ha $1 < x < 3$, akkor $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy$

(1 pont) $= \int_2^{2x} \frac{1}{4}dy$ (az előző lépéssel összevonható, elég, ha az utóbbi képlet szerepel, de az fontos, hogy $1 < x < 3$)

(1 pont) $\left[\frac{1}{4}y\right]_{y=2}^{y=2x}$

(1 pont) $= x/2 - 1/2$.

(1 pont) Tehát ha $1 < x < 3$ (vagy: ha $f_X(x) > 0$), akkor: ha $2 < y < 2x$, akkor $f_{Y|X}(y|x) = \frac{1/4}{x/2-1/2} = \frac{1}{2x-2}$,

(1 pont) ha pedig $y \leq 2$ vagy $y \geq 2$, akkor $f_{Y|X}(y|x) = 0$.

(1 pont) Továbbá $f_{Y|X}(y|x) = 0$ [minden y -ra, de nem baj, ha ezt nem hangsúlyozza], ha $f_X(x) = 0$, azaz ha $x \leq 1$ vagy $x \geq 3$.

6. A függetlenség akkor és csak akkor teljesül, ha $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ minden $x, y \in \mathbb{R}$ -re, mivel X és Y együttesen folytonosak. Nyilván elég az $x, y \in (0,1)$ esettel foglalkozni, mert mindenhol máshol 0 az együttes sűrűségfüggvény értéke és legalább az egyik marginális sűrűségfüggvényé is. A marginális sűrűségfüggvényeket ebben az esetben (is) az együttes sűrűségfüggvény másik változó szerinti kiintegrálásával kapjuk:

$$f_X(x) = \int_0^1 f_{X,Y}(x,y)dy = \int_0^1 a(4x+y) + bxy + \frac{2}{5}dy = [4axy + \frac{ay^2}{2} + bx\frac{y^2}{2} + \frac{2}{5}y]_{y=0}^1 = 4ax + \frac{a}{2} + \frac{bx}{2} + \frac{2}{5}$$

és

$$f_Y(y) = \int_0^1 f_{X,Y}(x,y)dx = \int_0^1 a(4x+y) + bxy + \frac{2}{5}dx = [2ax^2 + axy + bx^2y + \frac{2}{5}x]_{x=0}^1 = 2a + ay + \frac{by}{2} + \frac{2}{5}.$$

Tehát a függetlenség akkor és csak akkor teljesül, ha

$$a(4x+y) + bxy + \frac{2}{5} = (4ax + \frac{a}{2} + \frac{bx}{2} + \frac{2}{5})(2a + ay + \frac{by}{2} + \frac{2}{5}).$$

Nézzük például a konstans tagokat mindkét oldalon, ezekre annak kell teljesülnie, hogy

$$\frac{2}{5} = a^2 + \frac{1}{5}a + \frac{4}{5}a + \frac{4}{25},$$

tehát

$$a^2 + a - \frac{6}{25} = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldásai

$$a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \frac{24}{25}}}{2} = \frac{-1 \pm \frac{7}{5}}{2},$$

tehát $a_1 = 1/5$ és $a_2 = -6/5$. Utóbbi nem lesz jó megoldás, mert $f_X(x)$ -nek minden $x \in (0,1)$ -re nemnegatívnak kell lennie, 0-hoz tetszőlegesen közel is, viszont

$$\lim_{x \downarrow 0} 4ax + \frac{a}{2} + \frac{bx}{2} + \frac{2}{5} = \frac{a}{2} + \frac{2}{5} = -\frac{3}{5} + \frac{2}{5} < 0,$$

has $a = -6/5$. Tehát $a = 1/5$, és már csak b -t kell meghatároznunk. Tekintsük például az xy -os tagokat mindkét oldalon. Ezekre annak kell teljesülnie ($a = 1/5$ helyettesítéssel), hogy

$$b = \frac{b^2}{4} + \frac{4}{25} + \frac{b}{10} + \frac{2}{5}b,$$

azaz

$$\frac{b^2}{4} + \frac{4}{25} - \frac{1}{2}b = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldásai

$$b_{1,2} = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{4}{25}}}{1/2} = 2\left(\frac{1}{2} \pm \frac{3}{10}\right),$$

vagyis $b_1 = \frac{8}{5}$ és $b_2 = \frac{2}{5}$. Azt kell még eldönteni, hogy a kettő közül melyik a helyes. Ehhez ellenőrizzük pl. azt, hogy X perem-sűrűségfüggvényének integrálja 1-e:

$$\int_0^1 f_X(x) dx = \left[\frac{4ax^2}{2} + \frac{ax}{2} + \frac{bx^2}{4} + \frac{2x}{5} \right]_0^1 = 2a + \frac{a}{2} + \frac{b}{4} + \frac{2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{2}{5} = 1,$$

ha $b = 2/5$. Az előbbi számolás alapján viszont az is látszik, hogy az integrál nem 1, ha $b = 8/5$. Tehát a helyes válasz: $a = \frac{1}{5}$, $b = \frac{2}{5}$. Annak ellenőrzését, hogy ebben az esetben $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ valóban minden 0 és 1 közötti x -re és y -ra teljesül, az olvasóra bízunk (ehhez még az x -es és y -os tagokat kell ellenőrizni).

7. Mivel (X, Y) egyenletes eloszlású a megadott Ω tartományon, az együttes sűrűségfüggvénye ezen a tartományon konstans $c > 0$, mindenhol máshol pedig 0, ahol c -t úgy kell megválasztanunk, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx dy = 1$ teljesüljön, vagyis $c = 1/T_\Omega$ igaz legyen.

1. megoldás: A tartományba pontosan azok az $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pontok esnek, amelyekre teljesül, hogy $0 < x < \pi$ és $0 < y < \sin(x)$, ezért a tartomány területe $T_\Omega = \int_0^\pi \int_0^{\sin(x)} c dy dx = \int_0^\pi \sin(x) dx = [-\cos(x)]_{x=0}^\pi = -(-1) - (-1) = 2$, tehát $c = 1/2$.

2. megoldás: A tartomány területe éppen a szinuszgörbe alatti terület $x = 0$ -tól $x = \pi$ -ig, amit a szinuszgörbe integrálásával kapunk meg: $T_\Omega = \int_0^\pi \sin(x) dx = [-\cos(x)]_{x=0}^\pi = -(-1) - (-1) = 2$, tehát $c = 1/2$.

Ezért $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy = \int_0^{\sin(x)} \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2} \sin(x)$, ha $0 < x < \pi$ és $f_X(x) = 0$ egyébként.

8. a) X és Y értéke mindig két különböző, 1 és 3 közötti egész szám lesz, és ezen lehetséges kimenetek azonos valószínűségűek (az eseménytér modellezhető pl. az $\{1, 2, 3\}$ halmaz 2-edosztályú ismétlés nélküli variációinak számával), így $\mathbb{P}(X = k, Y = l) = \frac{1}{3 \cdot 2} = \frac{1}{6}$, ha $k \neq l$.

$$\mathbb{E}(XY) = 1 \cdot 2 \cdot \mathbb{P}(X = 1, Y = 2) + 1 \cdot 3 \cdot \mathbb{P}(X = 1, Y = 3) + 2 \cdot 3 \cdot \mathbb{P}(X = 2, Y = 3) + 2 \cdot 1 \cdot \mathbb{P}(X = 2, Y = 1) + 3 \cdot 1 \cdot \mathbb{P}(Y = 3, X = 1) + 3 \cdot 2 \cdot \mathbb{P}(X = 3, Y = 2) = \frac{22}{6} = \frac{11}{3}.$$

$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3) = 2$, mivel X húzása megfelel egy, a $\{1, 2, 3\}$ halmazon egyenletesen választott véletlen szám húzásának (természetesen a fenti együttes eloszlásból peremeloszlásokkal is kijön).

$\mathbb{E}(Y) = 2$, mert Y -nak ugyanaz a peremeloszlása, mint X -nek (ez egyrészt látszik a fenti együttes eloszlásból, pl. $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(Y = 1, X = 2) + \mathbb{P}(Y = 1, X = 3) = \frac{1}{3}$, másrészt pedig az X és Y közötti szimmetriából is levezethető, amit itt nem részletezünk).

$$\text{Így } \text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{11}{3} - 4 = -\frac{1}{3}.$$

b) $\text{cov}(X, X)$ éppen $\mathbb{D}^2(X)$, ami a szokásos képlettel $\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ -nek felel meg. Mivel

$$\mathbb{E}(X^2) = 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) + 2^2 \cdot \mathbb{P}(X = 2) + 3^2 \cdot \mathbb{P}(X = 3) = \frac{14}{3},$$

$$\text{ezért } \mathbb{D}^2(X) = \frac{14}{3} - 4 = \frac{2}{3}.$$

c) Már láttuk, hogy X és Y azonos eloszlásúak (megegyeznek a súlyfüggvényeik), így a szórásnégyzeteik is azonosak, ezért $\text{cov}(Y, Y) = \mathbb{D}^2(Y) = \mathbb{D}^2(X) = \frac{2}{3}$.

d) Mivel a kovarianciájuk nem 0, biztos, hogy nem függetlenek. (Természetesen a szokásos módon az együttes eloszlás alapján is lehet érvelni.)

9. A kovariancia azonosságai alapján $\text{cov}(X, X^2 - 4X + 4) = \text{cov}(X, X^2 - 4X) = \text{cov}(X, X^2) - \text{cov}(X, 4X) = \mathbb{E}(X \cdot X^2) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X^2) - 4\text{cov}(X, X) = \mathbb{E}(X^3) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X^2) - 4\mathbb{D}^2(X) = 14 - 2 \cdot 5 - 4(\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2) =$

$14 - 10 - 4(5 - 4) = 0$. Ez a helyes válasz, amennyiben a kovariancia létezik, amihez az kell, hogy X -nek és $X^2 - 4X$ -nek is véges legyen a 2. momentuma. $\mathbb{E}(X^2)$ -ről tudjuk, hogy véges, $\mathbb{E}((X^2 - 4X)^2)$ -ről azonban nem feltétlenül, ez ugyanis $\mathbb{E}(X^4 - 8X^3 + 16X^2) = \mathbb{E}(X^4) - 8\mathbb{E}(X^3) + 16\mathbb{E}(X^2)$ -tel egyezik meg a várható érték linearitása miatt, de a feladat nem mondta ki, hogy $\mathbb{E}(X^4) < \infty$. Ha az utóbbi feltétel teljesül, akkor 0 a válasz, különben a kovariancia nem létezik.

Ha $(X - 2)^2$ 1 valószínűséggel konstans, akkor bármilyen valószínűségi változótól független, így $X - 2$ -től is. Most belátjuk, hogy ha viszont $(X - 2)^2$ nem 1 valószínűséggel konstans, akkor nem független $X - 2$ és $(X - 2)^2$. Tegyük fel (indirekt), hogy függetlenek, ekkor a 10.1.5. Lemma alapján bármilyen g és h folytonos, valós függvényre $g(X - 2)$ és $h((X - 2)^2)$ is függetlenek. Legyen $g(x) = |x|$ és $h(x) = \sqrt{x}$, ekkor $g(X - 2) = h((X - 2)^2) = |X - 2|$. Tehát $|X - 2|$ és $|X - 2|$ függetlenek. Ez viszont azt jelenti a val. változók függetlenségének definíciója alapján, hogy bármely t valós számra az $\{|X - 2| < t\}$ és az $\{|X - 2| < t\}$ események is függetlenek, azaz

$$\mathbb{P}(|X - 2| < t) = \mathbb{P}(\{|X - 2| < t\} \cap \{|X - 2| < t\}) \stackrel{\text{fgtl.}}{=} \mathbb{P}(|X - 2| < t) \mathbb{P}(|X - 2| < t) = \mathbb{P}(|X - 2| < t)^2,$$

ahol az első lépésben az $A \cap A = A$ azonosságot használtuk (ami minden halmazra igaz). Vagyis $F_{|X-2|}(t) = \mathbb{P}(|X - 2| < t)$ megegyezik a saját négyzetével, azaz az értéke vagy 0, vagy 1. Ez minden t -re igaz, vagyis $|X - 2|$ eloszlásfüggvénye csak 0 és 1 értékeket vesz fel, ami csak úgy lehet, hogy a $|X - 2|$ egy valószínűséggel konstans (ekkor az eloszlásfüggvény a konstansnak megfelelő pontban (balról folytonosan) 0-ról 1-re ugrik). Mivel $|X - 2|$ egy valószínűséggel konstans, $(X - 2)^2 = |X - 2|^2$ is az, ami ellentmond a feltevésünknek. Így az indirekt feltevés hamis, ezért az eredeti állítás igaz.

Megjegyzés: $g(x) = x^2$ -tel és $h(x) = x$ -szel is működik ugyanez az érvelés.

Megjegyzés 2.: mivel $\text{cov}(X, X^2 - 4X) = \text{cov}(X - 2, X^2 - 4X + 4) = \text{cov}(X - 2, (X - 2)^2)$, a feladat újabb példákat ad arra, hogy két val. változó kovarianciája 0, de a változók nem függetlenek (feltéve, hogy találunk olyan X -et, aminek az első három momentuma pont a megadott három szám).

10. Ismét a $\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ képlettel számolunk. Vegyük észre, hogy ha $X = 2$, akkor $Y = 1$, így $XY = 2$. Az $\{X = 1\}$ eseményhez pedig az $(X, Y) = (1, 2), (1, 3), \dots, (1, 6), (2, 1), (3, 1), \dots, (6, 1)$ kimenetek tartoznak, amelyekből 10 darab van (ahol az eseménytér szokás szerint 36 elemű és a valószínűségi mező klasszikus). A $(2, 1), \dots, (6, 1)$ kimenetek esetén Y értéke 1, az $(1, 2), \dots, (1, 6)$ kimenetek esetén pedig (szintén) a másodikként dobott szám értéke. Az $\{X = 0\}$ eseményen XY mindig 0, így ezzel $\mathbb{E}(XY)$ szempontjából nem kell foglalkozni. Így

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(XY) &= 2 \cdot 1 \cdot \mathbb{P}(X = 2, Y = 1) + 1 \cdot 1 \cdot (\mathbb{P}(\{(2, 1), \dots, (6, 1)\})) \\ &\quad + 1 \cdot 2 \cdot \mathbb{P}(\{(1, 2)\}) + \dots + 1 \cdot 6 \cdot \mathbb{P}(\{(1, 6)\}) = \frac{2}{36} + \frac{5}{36} + \frac{2 + 3 + 4 + 5 + 6}{36} = \frac{27}{36}. \end{aligned}$$

Továbbá mivel $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{36}$, $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{10}{36}$ és $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{25}{36}$, ahogy a félév során már sokszor láttuk, ezért $\mathbb{E}(X) = \frac{10}{36} \cdot 1 + \frac{1}{36} \cdot 2 = \frac{1}{3}$. (Úgy is lehet érvelni, hogy összesen 2 számot dobunk és mind $1/6$ valószínűséggel egyes, így várhatóan $2/6$ darab egyest dobunk a várható érték linearitása miatt.) $\mathbb{E}(Y) = \frac{7}{2}$ (ennyi egy szabályos kockadobás eredményének várható értéke, ahogy már sokszor láttuk). Így $\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{27}{36} - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{14}{18} - \frac{27}{36} = -\frac{42}{36} = -\frac{15}{36} \approx -0,4167$.

11. A kovariancia ekvivalens definíciója és a várható érték linearitása miatt

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= \mathbb{E}((X + Y)(X - Y)) - \mathbb{E}(X + Y)\mathbb{E}(X - Y) = \mathbb{E}(X^2 - Y^2) - (\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y))(\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y)) \\ &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(X)^2 - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)^2 = \mathbb{D}^2(X) - \mathbb{D}^2(Y) = 0, \end{aligned}$$

ahol az utolsó lépésben használtuk, hogy X és Y azonos szórásúak.