

1. Az események:

$$A = \{2, 3, 5\}, B = \{2, 4, 6\}, C = \{1, 2, 3, 4\}$$

• Mivel

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ és } P(C) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \text{ de}$$

$$P(A \cap C) = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = P(A) \cdot P(C),$$

így A és C nem függetlenek.

Er látható másképpen is:

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{1}{3} \neq P(A)$$

$$\bullet P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

3. Annak a valószínűsége, hogy pontosan 4 találatos lesz egy szelvény:

4-et eltalálunk az 5-ből

$$\frac{\binom{5}{4} \cdot \binom{85}{1}}{\binom{90}{5}} = p$$

1-et a nem kihúzottak közül választunk

Legyenek:

$A_1 := \{A_1 \text{ első szelvény 4-találatos}\}$

$A_2 := \{A_2 \text{ második szelvény 4-találatos}\},$

ekkor $P(A_1) = P(A_2) = p.$

legalább az egyik 4-találatos függetlenség

Poincaré

$$P(A_1 \cup A_2) = \underbrace{P(A_1)}_p + \underbrace{P(A_2)}_p - \underbrace{P(A_1 \cap A_2)}_{P(A_1) \cdot P(A_2)}$$

$$= 2p - p^2 \approx 0.000001934.$$

4. Mivel A és B közül legalább az egyik mindig bekövetkezik, így

$$\mathbb{P}(A \cup B) = 1.$$

Az egyenletek:

$$\left. \begin{aligned} 0.2 &= \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \\ 0.5 &= \mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \end{aligned} \right\},$$

amiket átrendezve

$$\left. \begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= 5 \cdot \mathbb{P}(A \cap B) \\ \mathbb{P}(A) &= 2 \cdot \mathbb{P}(A \cap B) \end{aligned} \right\}.$$

Alkalmazva a Poincaré-formulát

$$1 = \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$1 = 2 \cdot \mathbb{P}(A \cap B) + 5 \cdot \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$1 = 6 \cdot \mathbb{P}(A \cap B) \Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{6},$$

amiből

$$\left. \begin{aligned} P(A) &= 5 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \\ P(B) &= 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned} \right\}$$

Feltéve, hogy B nem következhet be A
biztosan bekövetkezik a feladat növege
számát, így

$$P(A | \bar{B}) = 1.$$

De mámmóval is kijön:

$$\begin{aligned} P(A | \bar{B}) &= \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A \setminus B)}{1 - P(B)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \\ &= \frac{\frac{5}{6} - \frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{2}{3}} = 1. \end{aligned}$$

A és B nem független, mivel

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \neq \frac{5}{18} = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} = P(A) \cdot P(B).$$

11. Legyenek az alábbi események: $j=1, 2, 3$

$A_j := \{A_j\text{-edik játékhöz 1 újat és 2 harmadikat hírnék}\}$

A keresett valószínűség:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

A szorási szabályt alkalmazva:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

$$= \underbrace{\mathbb{P}(A_3 | A_1 \cap A_2)}_{\frac{\binom{7}{1} \cdot \binom{8}{2}}{\binom{15}{3}}} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(A_2 | A_1)}_{\frac{\binom{8}{1} \cdot \binom{7}{2}}{\binom{15}{3}}} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(A_1)}_{\frac{\binom{9}{1} \cdot \binom{6}{2}}{\binom{15}{3}}}$$

$$\approx 0.0472.$$

Hiszen minden hírnél 1 újat és 2 harmadikat kell hírní, de amennyiben feltesszük, hogy a korábbi hírnél ez teljesül, úgy változik az új és harmadik labdák száma.

15.

a) Legyenek az alábbi események

$A := \{ \text{egykor sem dobunk fejet} \},$

$B_j := \{ \text{a dobókockával } j \text{ értéket dobtunk} \} \ (j=1, \dots, 6).$

Ekkor $B_1, \dots, B_6$ teljes eseményrendszer alkot, így a TVT-t használva:

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{j=1}^6 \underbrace{P(A|B_j)}_{2^{-j}} \underbrace{P(B_j)}_{\frac{1}{6}} \\ &= \frac{1}{6} \sum_{j=1}^6 2^{-j} = \frac{21}{128} \approx 0.1641. \end{aligned}$$

b) A keresett valószínűség $P(B_6|A).$

A Bayes-tételt használva

$$\begin{aligned} P(B_6|A) &= \frac{P(A|B_6)P(B_6)}{P(A)} \\ &= \frac{2^{-6} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{21}{128}} = \frac{1}{63} \approx 0.0159. \end{aligned}$$