

1

a) Az előbbi valószínűséget keressük:

$$\mathbb{P}(X \text{ páratlan}) = \mathbb{P}(X=1 \text{ vagy } X=3)$$

$$\stackrel{\text{bizáró események}}{\Rightarrow} \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=3).$$

Továbbá  $X=1$  pontosan  $\overset{2 \cdot 2 = 4 \text{ lehetőség}}{F \square \square}$  esetén, így

$$\mathbb{P}(X=1) = \frac{4}{2^3} = \frac{1}{2}$$

Végül  $X=3$  pontosan  $\overline{F}\overline{F}I$  esetén, így

$$\mathbb{P}(X=3) = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}.$$

Azt kaptuk

$$\mathbb{P}(X \text{ páratlan}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

b) Nem valószínűségi változó, mert  $Y(\overline{F}\overline{F}\overline{F})$  nem determinisztikusan definiált.

Vagyis nem  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  függvény.

4. Szimmetria eseményekre bontással

$$\mathbb{P}(X \leq Y) = \mathbb{P}(X < Y) + \mathbb{P}(X = Y)$$

Először

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = Y) &= \mathbb{P}(\text{mindkét kockán ugyanaz szerepel}) \\ &= \frac{10}{10 \cdot 10} = \frac{1}{10}.\end{aligned}$$

Továbbá az eseményteret szimmetria eseményekre bontva

$$\begin{aligned}1 &= \underbrace{\mathbb{P}(X < Y) + \mathbb{P}(Y < X)}_{\text{egyenlők a szimmetria miatt}} + \underbrace{\mathbb{P}(X = Y)}_{= \frac{1}{10}} \\ &= 2 \cdot \mathbb{P}(X < Y) + \frac{1}{10},\end{aligned}$$

amiből

$$\mathbb{P}(X < Y) = \frac{9}{20}.$$

A végeredmény

$$\mathbb{P}(X \leq Y) = \frac{9}{20} + \frac{1}{10} = \frac{11}{20}.$$



5

- a) Mivel a 100 darab izzó közül mindegyik 0.01 valószínűséggel lesz hibás egymástól függetlenül, így amennyiben  $X$  a hibás izzók száma, akkor

$$X \sim \text{Bin}(100, 0.01).$$

A keresett valószínűség:

$$\mathbb{P}(X \leq 3) = \sum_{k=0}^3 p(k)$$

$$= \sum_{k=0}^3 \binom{100}{k} 0.01^k 0.99^{100-k}$$

$$\approx 0.9816.$$

8. Mivel minden pontot egymástól függetlenül választunk, továbbá minden esetben a siker valószínűsége:


$$\left. \begin{array}{l} \text{hossz (kedvező)} \\ \text{hossz (összes)} \end{array} \right\} = \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3},$$

így amennyiben  $X$  a kiválasztott pontok száma, akkor

$$X \sim \text{Geom}\left(\frac{1}{3}\right).$$

A keresett valószínűség:

$$\mathbb{P}(X < 5) = \mathbb{P}(X \leq 4)$$

$$= \sum_{k=1}^4 p(k)$$

$$= \sum_{k=1}^4 \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{65}{81} \approx 0.8025.$$



Másképpen:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X < 5) &= 1 - \mathbb{P}(X \geq 5) \\ &= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^4 \\ &= \frac{65}{81} \approx 0.8025.\end{aligned}$$

Mivel az, hogy legalább 5 pontot kell valantani pontosan azt jelenti, hogy az első 4 pont nem esik a középső harmadba, így  $\mathbb{P}(X \geq 5) = \left(\frac{2}{3}\right)^4$ .



12. Mivel sok akadály található a pályán és ezeket egymástól függetlenül kis valószínűséggel veri le a ló, így amennyiben  $X$  a levert akadályok száma, akkor

$$X \sim \text{Pois}(\lambda).$$

Mivel  $X=0$  pontosan azt jelenti, hogy hibátlan a kör, így

$$0.05 = \mathbb{P}(X=0) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}.$$

A két oldal logaritmusát véve

$$\ln(e^{-\lambda}) = \ln(0.05)$$

$$-\lambda = \ln(0.05)$$

$$\lambda = \ln(20).$$

A keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(X \leq 3) = \sum_{k=0}^3 p(k) = \sum_{k=0}^3 e^{-\ln(20)} \cdot \frac{\ln(20)^k}{k!} \approx 0.6472.$$