

Néhány kombinatorika feladat:

K1 Hányféle (nem feltétlenül értelmes) szó rakható ki az ABRACADABRA betűinek a felhannálásával?

A következő betűk állnak rendelkezésre:

betű	darab
A	5
B	2
R	2
C	1
D	1
összesen	11

Ekkor az összes különböző mó:

$11!$ ← sorba rendezni az összes betűt

$$\frac{11!}{5! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!}$$

mivel az azonos betűk között nem teszünk különbséget, minden móit ennyiszor többször számoltunk meg

Az összes lehetséges szó száma tehát

$$\frac{11!}{5! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = 27720.$$

(Ez nem más, mint ismétléses permutáció.)

K2 Egy fagyizóban 5féle fagyalaltot árulnak.
Kétféleképpen tudunk 3 gombócot vásárolni,
amennyiben őket behelybe vagy töltésbe kerjük.

a Minden ízt csak egyszer választva.

b Egy ízt akár többször is választva.

Amennyiben behelybe kerjük a fagyalaltok
sorrendje nem számít, míg töltésbe kéne számítani.

a Behelybe: $\binom{5}{3} = 10$ (ismétlés nélküli kombináció)

Töltésbe: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ (ismétlés nélküli variáció)

b Behelybe: $\binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3} = 35$ (ismétléses kombináció)

Töltésbe: $5^3 = 125$ (ismétléses variáció)

Továbbhaladva a 4. feladatsorral:

① Legyen X a dobott számok maximuma.

Ekkor $\text{Ran}(X) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Továbbá

$$p_X(1) = \frac{1}{36},$$

$$p_X(4) = \frac{1+2 \cdot 3}{36},$$

$$p_X(2) = \frac{1+2 \cdot 1}{36},$$

$$p_X(5) = \frac{1+2 \cdot 4}{36},$$

$$p_X(3) = \frac{1+2 \cdot 2}{36},$$

$$p_X(6) = \frac{1+2 \cdot 5}{36}.$$

Összesen 36 lehetőség. Továbbá $k=1, \dots, 6$ úgy len a maximum, ha mindkét kockán k szerepel (1 lehetőség), illetve, ha az egyik kockán egy nála kisebb szám ($2(k-1)$ lehetőség). Általánosan: $p_X(k) = \frac{1}{36} (1 + 2(k-1))$.

A várható érték:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^6 k \cdot p_X(k) = \sum_{k=1}^6 k \cdot \frac{1}{36} (1 + 2(k-1)) = \frac{161}{36}.$$

2) Legyen X a hibás írások száma. Ekkor láttuk, hogy

$$X \sim \text{Bin}(n, p),$$

$$\text{ahol } n=100 \text{ és } p=\frac{1}{100}.$$

Innen

$$\mathbb{E}(X) = n \cdot p = 100 \cdot \frac{1}{100} = 1,$$

illetve

$$\mathbb{D}(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{100 \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{99}{100}}$$

$$= \sqrt{\frac{9 \cdot 11}{100}} = \frac{3\sqrt{11}}{100}.$$

4. Legyen X a választott pontok száma.

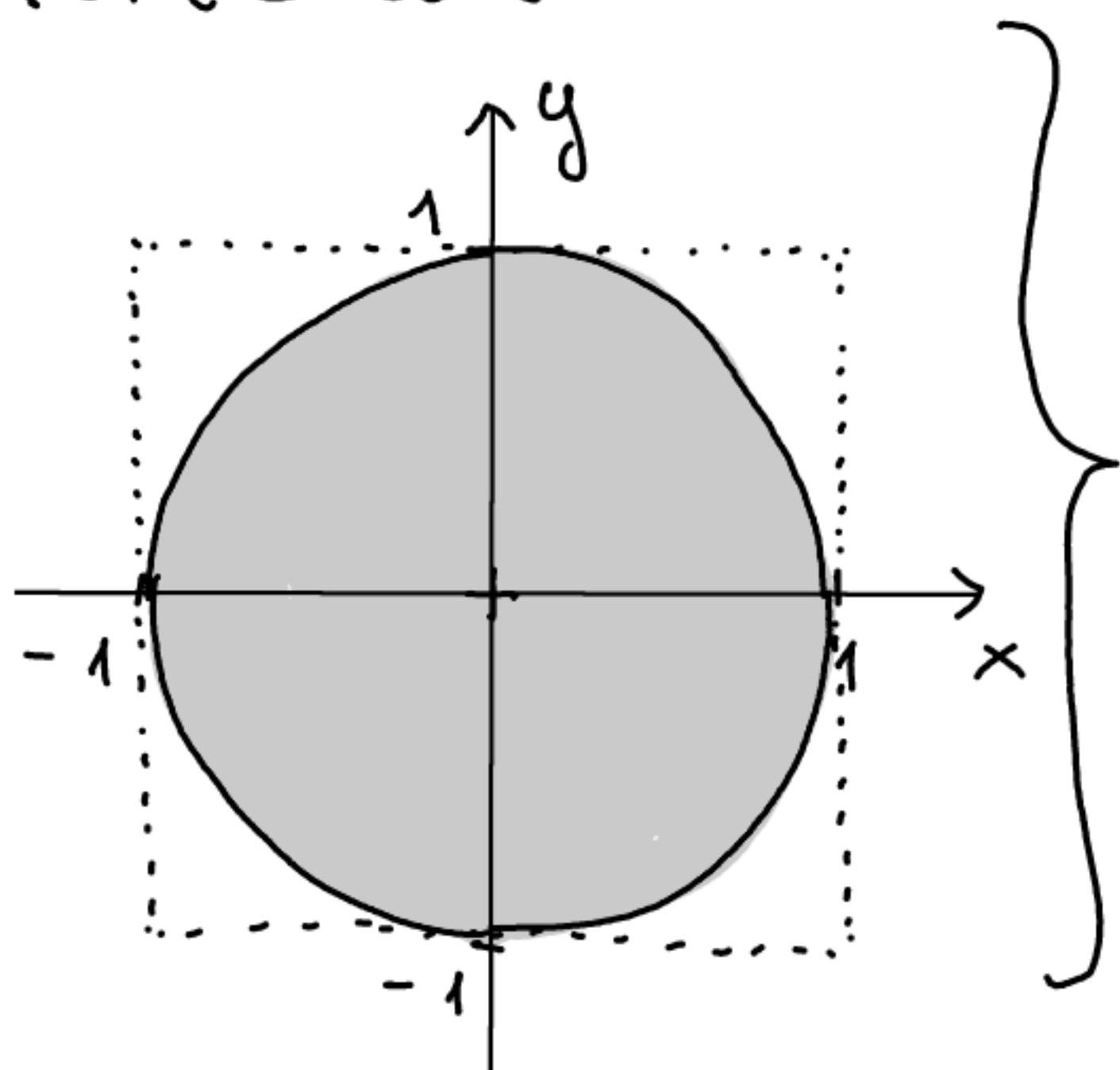
Ekkor

$$X \sim \text{Geom}(p),$$

ahol p annak a valószínűsége, hogy egy választás során a pont a körbe esik.

Vagyis egy geometriai valószínűségi mezővel kell dolgozunk, ahol $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$ és $A = \{(x, y) \in \Omega : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Ábrázolva



Ekkor

$$p = \frac{\text{terület}(A)}{\text{terület}(\Omega)} = \frac{1^2 \cdot \pi}{2 \cdot 2} = \frac{\pi}{4}.$$

Azt kaptuk, hogy mivel $X \sim \text{Geom}(p)$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \frac{1}{p} = \frac{4}{\pi} \quad \text{és} \quad \mathbb{D} = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi^2}{4}}} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{4-\pi}}{2} \\ &= \frac{2\sqrt{4-\pi}}{\pi} \end{aligned}$$

Végül a következő valószínűséget keressük

$$\mathbb{P}(\bar{X} > 101 \mid \bar{X} > 100)$$

$$= \mathbb{P}(\bar{X} > 100 + 1 \mid \bar{X} > 100) \left. \vphantom{\mathbb{P}(\bar{X} > 100 + 1 \mid \bar{X} > 100)} \right\} \begin{array}{l} \text{A geometriai} \\ \text{örökifjúsága.} \end{array}$$

$$= \mathbb{P}(\bar{X} > 1)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(\bar{X} \leq 1)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(\bar{X} = 1)$$

$$= 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Mivel, ha $\bar{X}$ örökifjú, akkor

$$\mathbb{P}(\bar{X} > s+t \mid \bar{X} > s) = \mathbb{P}(\bar{X} > t).$$

5. Legyen X az egy napon elhívott telefonkérdések száma. Mivel sok telefonkérdés található az egyetemen és egy nap ezek egymástól függetlenül azonos his valószínűséggel fordulnak elő, így

$$X \sim \text{Poi}(\lambda).$$

Másfelől 360 naptól átlagosan 12 nap nem fordul elő egy kérdés sem, így

$$\frac{12}{360} = \mathbb{P}(X=0) = e^{-\lambda},$$

amiből

$$\lambda = \ln(30).$$

Ekkor

$$\mathbb{E}(X) = \lambda = \ln(30),$$

$$\mathbb{D}(X) = \sqrt{\lambda} = \sqrt{\ln(30)}.$$

7. Legyen $\bar{X}$ egy kockadobás eredménye.

Ekkor a transformált várható értékre vonatkozó képlet szerint, mivel $\text{Ran}(\bar{X}) = \{1, \dots, 6\}$

$$\mathbb{E}((\bar{X} - 3)^2) = \sum_{k=1}^6 (k-3)^2 p_{\bar{X}}(k)$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 (k-3)^2$$

$$= \frac{19}{6}.$$

9. Legyen X a hetes dobások száma.
 Kiszámoljuk X várhatóát. Ehhez előbb kell
 a variancia:

$$\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

Mivel $\text{Ran}(X) = \{0, 1, 2, 3\}$, ezért

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= 0 \cdot p_X(0) + 1 \cdot p_X(1) + 2 \cdot p_X(2) + 3 \cdot p_X(3) \\ &= \underbrace{0 \cdot \frac{3^3}{4^3}} + \underbrace{1 \cdot \frac{3^2 \cdot \binom{3}{1}}{4^3}} + \underbrace{2 \cdot \frac{3 \cdot \binom{3}{2}}{4^3}} + \underbrace{3 \cdot \frac{1}{4^3}} \\ &= \frac{0 \cdot 27 + 1 \cdot 27 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 1}{64} = \frac{48}{64} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= 0^2 \cdot p_X(0) + 1^2 \cdot p_X(1) + 2^2 \cdot p_X(2) + 3^2 \cdot p_X(3) \\ &= \frac{0 \cdot 27 + 1 \cdot 27 + 4 \cdot 9 + 9 \cdot 1}{64} = \frac{72}{64} = \frac{9}{8} \end{aligned}$$

Innen a módszer a variancia négyzetgyöke

$$\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2} = \sqrt{\frac{9}{8} - \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$$

14. Legyen $X \sim \text{Geo}(\frac{1}{3})$.

A várható érték linearitását használva

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((3-X)^2) &= \mathbb{E}(9 - 6X + X^2) \\ &= 9 - 6\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X^2). \end{aligned}$$

Másfelől, mivel $X \sim \text{Geo}(\frac{1}{3})$

$$\left. \begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3 \\ \mathbb{D}^2(X) &= \frac{1 - \frac{1}{3}}{(\frac{1}{3})^2} = \frac{2}{3} \cdot 9 = 6 \end{aligned} \right\}.$$

Azonban használjuk a variancia-ra vonatkozó képletet:

$$\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - 3^2.$$

A variancia kétféle felírásából

$$6 = \mathbb{E}(X^2) - 9 \Leftrightarrow \mathbb{E}(X^2) = 15.$$

Innen pedig

$$\mathbb{E}((3-X)^2) = 9 - 6 \cdot 3 + 15 = 6.$$

Végül használjuk a mérésre vonatkozó azonosságot

$$\mathbb{D}(5-2X) = | -2 | \mathbb{D}(X) = 2 \sqrt{\mathbb{D}^2(X)} = 2\sqrt{6}.$$