

1. Az együttes eloszlástáblázat

$Y \backslash X$	0	1	2	Σ
0	$\frac{9}{36}$	0	0	$\frac{9}{36}$
1	$\frac{12}{36}$	$\frac{6}{36}$	0	$\frac{18}{36}$
2	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{9}{36}$
Σ	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

Az X és Y nem függetlenek, mivel például
ul

$$\mathbb{P}(X=2, Y=0) = 0 \neq \frac{9}{36} \cdot \frac{1}{36} = \mathbb{P}(X=2) \cdot \mathbb{P}(Y=0)$$

2.

$Y \backslash X$	-1	0	1	Σ
-1	p	$3p$	$6p$	$10p$
1	$5p$	$15p$	$30p$	$50p$
Σ	$6p$	$18p$	$36p$	$60p$

a

Mivel a táblázat belsőjében szereplő elemek összege 1, így $p + 3p + 6p + 5p + 15p + 30p = 60p = 1$, így $p = \frac{1}{60}$.

b) A táblázat innen:

$Y \backslash X$	-1	0	1	Σ
-1	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$
Σ	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	1

A keresett valószínűség:

$$P(X \leq 0, Y = 1)$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{3}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

c) Vegyük észre, hogy minden valószínűség a táblázat belsőjében a megfelelő perem valószínűségek szorzata, vagyis

$$P(X=k, Y=l) = P(X=k)P(Y=l)$$

minden $k = -1, 0, 1$ és $l = -1, 1$ esetén. Ez pontosan azt jelenti, hogy X és Y független.

d) Mivel X és Y független

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y).$$

Másfelől

$$E(X) = (-1) \cdot \frac{1}{10} + 0 \cdot \frac{3}{10} + 1 \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{2},$$

$$E(Y) = (-1) \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{5}{6} = \frac{2}{3}.$$

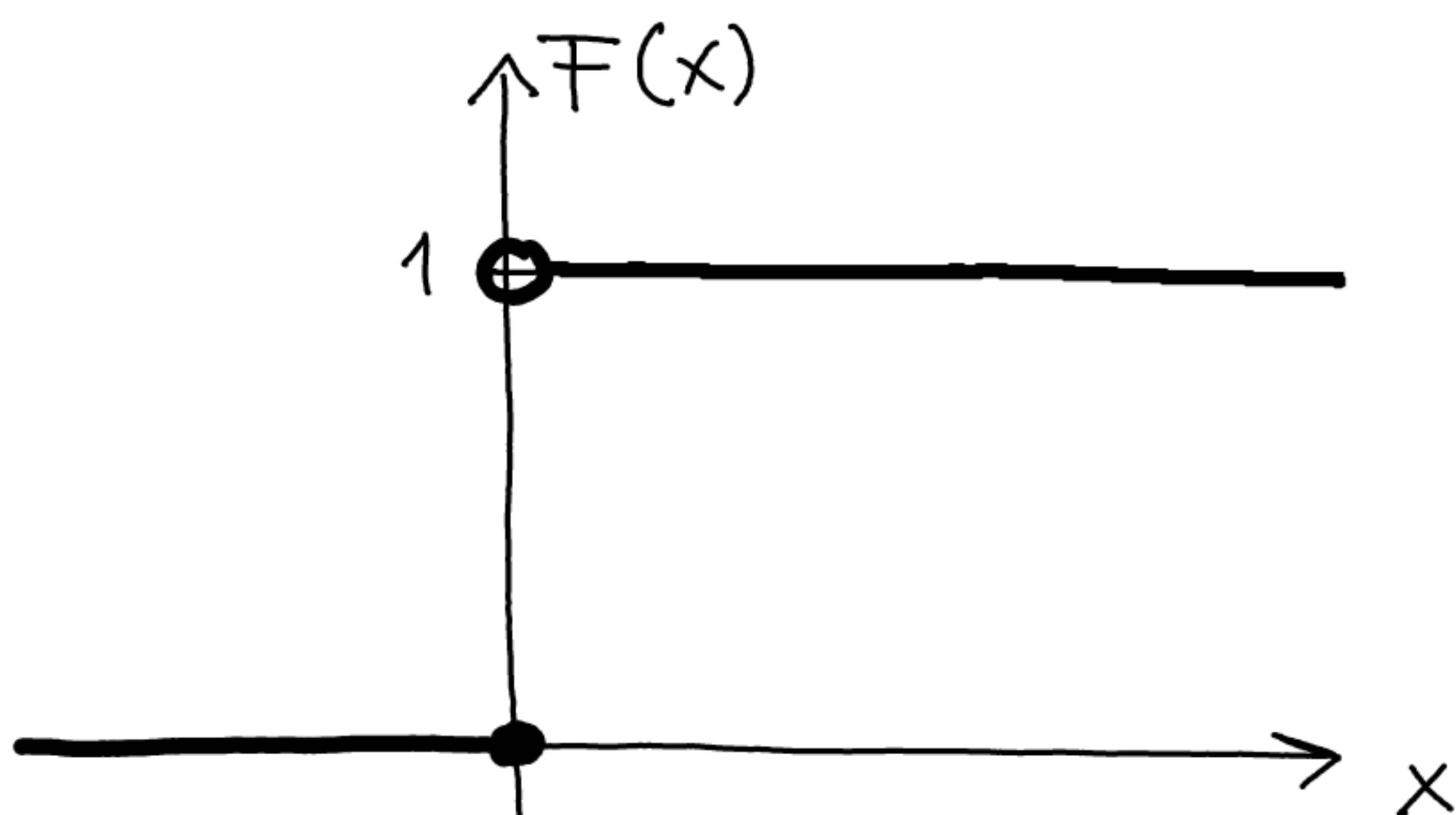
Amiből

$$E(X \cdot Y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

6.

a

$$F(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$



(i) A függvény mindenhol folytonos, kivéve a nullában, de itt is balról folytonos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = 0 = F(0).$$

(ii) A függvény látható, hogy monoton nö."

$$(iii) \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1.$$

Az F valóban elomlósfüggvény lesz.

© $F(x) = 1 - e^{-x^2}$.

(i) A függvény folytonos függvények kompozíciója, így folytonos. Vagyis balról is folytonos.

(ii) $F'(x) = -e^{-x^2}(-2x) = 2xe^{-x^2}$, így

$$F'(x) \begin{cases} < 0, & \text{ha } x < 0 \\ \geq 0, & \text{ha } 0 \leq x \end{cases}$$

Vagyis $(-\infty, 0)$ -n szigorúan monoton csökken!

(iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - e^{-x^2} = 1 - e^{-\infty} = 1 - 0 = 1$.

(iv) $\lim_{x \rightarrow \infty} 1 - e^{-x^2} = 1 - e^{-\infty} = 1 - 0 = 1$.

Látható, hogy (ii) vagy (iii) miatt sem lehet F előrelásfüggvény