

Fontos! Ez a segédlet igyekszik összefoglalni a gyakorlaton felhasznált legtöbb definíciót és állítást. Mindenki saját felelősségre használja! Semmilyen formában nem helyettesíti az előadásra és gyakorlatra járást, illetve a jegyzetet.

1. gyakorlat

Események és valószínűség

Definíció $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ struktúrát **valószínűségi mezőnek** nevezzük, amennyiben

- Ω egy tetszőleges nemüres halmaz, aminek a neve **eseménytér**.
- $\mathcal{F}$ az Ω részhalmazainak egy olyan rendszere, amelyre teljesülnek az alábbiak (ezt idén nem kell tudni, de az érdekesség kedvéért leírtam):

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. Amennyiben $A \in \mathcal{F}$, akkor $\bar{A} \in \mathcal{F}$.
3. Amennyiben $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ megszámlálhatóan végtelen események sorozata, akkor $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Ez az **események halmaza**.

- $\mathbb{P}$ egy olyan $\mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ függvény, amire teljesül, hogy
1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
 2. Amennyiben $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ páronként kizáró események (vagyis minden $i \neq j$ esetén $A_i \cap A_j = \emptyset$), akkor $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$

Ez a függvény a **valószínűség**.

Példa Dobjunk egy szabályos dobókockával. Ekkor egy megfelelő modell:

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ (az Ω összes részhalmazainak a halmaza)
- $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{6}$ (minden $A \subseteq \Omega$ esetén)

Ezt szoktuk klasszikus valószínűségi mezőnek hívni, ahol az eseménytér véges és minden elemi esemény (egy elemű halmazok) valószínűsége azonos.

Legyenek például az alábbi események

$$A = \{a \text{ dobás páros}\} = \{2, 4, 6\}, \quad B = \{a \text{ dobás legfeljebb kettő}\} = \{1, 2\}.$$

Az események közötti műveletek ekkor

- **Metszet** Az az esemény, ami pontosan akkor következik be, ha A és B közül mindkettő bekövetkezik.

$$A \cap B = \{2\} = \{a \text{ dobás páros ÉS } a \text{ dobás legfeljebb kettő}\}$$

- **Unió** Az az esemény, ami pontosan akkor következik be, ha A és B közül legalább az egyik bekövetkezik.

$$A \cup B = \{2\} = \{a \text{ dobás páros VAGY } a \text{ dobás legfeljebb kettő}\}$$

- **Komplementer** Az az esemény, ami pontosan akkor következik be, ha A nem következik be.

$$\bar{A} = \{1, 3, 5\} = \{a \text{ dobás NEM páros}\} = \{a \text{ dobás páratlan}\}$$

Megjegyzés Néhány hasznos azonosság:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$A \setminus B = A \cap \bar{B}$$

Geometriai valószínűségi mező

Definíció Legyenek az alábbiak:

- Ω : Egy tetszőleges mérhető (meg tudjuk határozni a területét), véges területű halmaz a síkon.
- $\mathcal{F}$: Az Ω mérhető részhalmazai.
- $\mathbb{P}$: Egy $\mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ függvény, ami a következő módon van definiálva

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{terület}(A)}{\text{terület}(\Omega)}$$

Ekkor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőt alkot (be lehet látni). Ezt geometriai **valószínűségi mezőnek** hívjuk.

Megjegyzés Ezt tipikusan olyan feladatoknál használjuk, ahol a síkon adott egy halmaz és abból választunk egyenletesen egy pontot. Amennyiben az a kérdés, hogy mekkora valószínűséggel esik egy előre kijelölt részhalmazába a pont, akkor ez a megfelelő területek aránya lesz.

Poincaré-formula

Állítás Legyenek $A_1, A_2, \dots, A_n$ tetszőleges események, ekkor

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}\right)$$

Ez speciálisan az $n = 2$ és $n = 3$ esetekre

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2),$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

2. gyakorlat

Függetlenség és feltételes valószínűség

Definíció Az $A_1, A_2, \dots, A_n$ események **függetlenek**, ha bármilyen $1 \leq k \leq n$ esetén teljesül, hogy

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2}) \dots \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

Vagyis tetszőleges véges sok esemény metszetének a valószínűsége az események valószínűségeinek a szorzata lesz.

Definíció Legyenek A, B tetszőleges események úgy, hogy $\mathbb{P}(B) > 0$. Ekkor

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)},$$

annak a valószínűsége, hogy **A** bekövetkezik feltéve, hogy **B** már bekövetkezett.

Következmény Amennyiben $A_1, A_2, \dots, A_n$ tetszőleges pozitív valószínűségű események. Ekkor

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_n | A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \dots \mathbb{P}(A_1 | A_2) \mathbb{P}(A_1).$$

Megjegyzés Az A és B pozitív valószínűségű események pontosan akkor függetlenek, ha $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ (ekkor nyilván $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$ is igaz).

Teljes valószínűség

Definíció Azt mondjuk, hogy $A_1, A_2, \dots, A_n$ **teljes eseményrendszer**, amennyiben az alábbiak teljesülnek

1. $A_1, A_2, \dots, A_n$ páronként kizáró események (minden $i \neq j$ esetén $A_i \cap A_j = \emptyset$)
2. $A_1, A_2, \dots, A_n$ közül legalább az egyik bekövetkezik ($A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$)

Másképpen $A_1, A_2, \dots, A_n$ közül pontosan az egyik következik be egyszerre.

Tétel (Teljes valószínűség tétele) Legyen $A_1, A_2, \dots, A_n$ teljes eseményrendszer úgy, hogy $\mathbb{P}(A_i) > 0$ ($1 \leq i \leq n$). Továbbá legyen B tetszőleges esemény. Ilyenkor

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(B | A_k) \mathbb{P}(A_k).$$

Bayes-tétele

Tétel (Bayes) Legyen $A_1, A_2, \dots, A_n$ teljes eseményrendszer úgy, hogy $\mathbb{P}(A_i) > 0$ ($1 \leq i \leq n$). Továbbá legyen B pozitív valószínűségű esemény. Ilyenkor tetszőleges $1 \leq i \leq n$ esetén

$$\mathbb{P}(A_i | B) = \frac{\mathbb{P}(B | A_i) \mathbb{P}(A_i)}{\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(B | A_k) \mathbb{P}(A_k)}.$$

3. gyakorlat

Valószínűségi változók

Definíció Azt mondjuk, hogy egy $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvény **valószínűségi változó**, amennyiben minden $t \in \mathbb{R}$ valós szám esetén $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < t\} \in \mathcal{F}$ (vagyis az úgynevezett nívóhalmazok ősképei események lesznek).

Megjegyzés Egy valószínűségi változó tehát egy kísérlet minden lehetséges kimeneteléhez egy valós számot rendel.

Diszkrét valószínűségi változók (binomiális, geometriai és poisson)

Definíció Azt mondjuk, hogy X **diszkrét valószínűségi változó**, amennyiben az értékkészlete megszámlálható (vagyis fel tudjuk sorolni, hogy milyen értékeket vehet fel).

Definíció Legyen X diszkrét valószínűségi változó $\text{Ran}(X) = \{x_1, x_2, \dots\}$ értékkészlettel. Ekkor a $p_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ az X súlyfüggvénye, amennyiben

$$p_X(x) = \mathbb{P}(X = x).$$

Definíció Az X valószínűségi változó $n \in \mathbb{N}^+$ és $0 \leq p \leq 1$ paraméterű **indikátor változó**, amennyiben a súlyfüggvénye

$$p_X(1) = p \quad \text{és} \quad p_X(0) = 1 - p.$$

A jelölés ekkor $X \sim \mathbb{1}(p)$.

Definíció Az X valószínűségi változó $n \in \mathbb{N}^+$ és $0 \leq p \leq 1$ paraméterű **binomiális eloszlású**, amennyiben a súlyfüggvénye

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (0 \leq k \leq n).$$

A jelölés ekkor $X \sim \text{Bin}(n, p)$.

Megjegyzés Amennyiben egy p valószínűséggel sikeres kísérletet n -szer megismétlünk egymástól függetlenül, akkor a sikeres kísérletek száma $\text{Bin}(n, p)$ eloszlást követ.

Definíció Az X valószínűségi változó $0 \leq p \leq 1$ paraméterű **geometriai eloszlású**, amennyiben a súlyfüggvénye

$$p_X(k) = (1-p)^{k-1} p \quad (1 \leq k).$$

A jelölés ekkor $X \sim \text{Geom}(p)$.

Megjegyzés Amennyiben egy p valószínűséggel sikeres kísérletet az első sikerig ismétlünk, akkor a szükséges próbálkozások száma $\text{Geom}(p)$ eloszlást követ.

Definíció Az X valószínűségi változó $0 < \lambda$ paraméterű **poisson eloszlású**, amennyiben a súlyfüggvénye

$$p_X(k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \quad (0 \leq k).$$

A jelölés ekkor $X \sim \text{Pois}(\lambda)$.

Megjegyzés Amennyiben egy valószínűségi változó eloszlása $\text{Bin}(n, p)$, ahol n elég nagy és p elég kicsi, akkor jól közelíthető $\text{Pois}(np)$ eloszlással. Erre világít rá a következő tétel.

Tétel Legyen $X_n \sim \text{Bin}(n, p_n)$, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda > 0$. Ekkor minden $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(Y = k),$$

ahol $Y \sim \text{Pois}(\lambda)$.

4. gyakorlat

Kombinatorika

- **Permutáció** n darab különböző elemet sorba rendezünk.

$$n!$$

- **Ismétléses permutáció** n darab elemet sorba rendezünk, de k darab osztály között nem teszünk különbséget.

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

(ahol $n_1, n_2, \dots, n_k$ az egyes osztályok elemszáma)

- **Variáció** n darab elem közül kiválasztunk k különböző darabot a sorrend figyelembevételével.

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

- **Ismétléses variáció** n darab elem közül kiválasztunk k darabot (egyet többször is választhatunk) a sorrend figyelembevételével.

$$n^k$$

- **Kombináció** n darab elem közül kiválasztunk k különböző darabot a sorrend figyelembevétele nélkül.

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

- **Ismétléses kombináció** n darab elem közül kiválasztunk k darabot (egyet többször is választhatunk) a sorrend figyelembevétele nélkül.

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Diszkrét valószínűségi változók várható értéke

Definíció Legyen X diszkrét valószínűségi változó $\{x_1, x_2, \dots\}$ értékészlettel. Ekkor az X változó várható értéke

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot \mathbb{P}(X = x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot p_X(x_k),$$

amennyiben a sor abszolút konvergens.

Állítás (Transzformált várható értéke) Legyen X valószínűségi változó és $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy $g(X)$ is valószínűségi változó legyen. Ekkor teljesül, hogy

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) \cdot \mathbb{P}(X = x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) \cdot p_X(x_k).$$

Állítás (A várható érték linearitása) Legyenek $X_1, X_2, \dots, X_n$ valószínűségi változók és $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$, ekkor

$$\mathbb{E}(a_1 \cdot X_1 + a_2 \cdot X_2 + \dots + a_n \cdot X_n + b) = a_1 \cdot \mathbb{E}(X_1) + a_2 \cdot \mathbb{E}(X_2) + \dots + a_n \cdot \mathbb{E}(X_n) + b$$

(Diszkrét) valószínűségi változók szórásnégyzete (és szórása)

Definíció Legyen X valószínűségi változó. Ekkor az X **szórásnégyzete**

$$\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2),$$

továbbá a **szórása**

$$\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{D}^2(X)}.$$

Állítás Legyen X valószínűségi változó, ekkor

$$\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Állítás Legyen X valószínűségi változó és $a, b \in \mathbb{R}$ tetszőlegesek. Ekkor teljesül, hogy

$$\mathbb{D}^2(aX + b) = a^2 \cdot \mathbb{D}^2(X),$$

továbbá nyilvánvaló módon

$$\mathbb{D}(aX + b) = |a| \cdot \mathbb{D}(X).$$

Diszkrét valószínűségi változók várható értéke és szórásnégyzete

Állítás Nevezetes diszkrét valószínűségi változók várható értéke és szórásnégyzete. (Ezeket nem kell fejből tudni rajta lesznek a ZH és vizsga feladatlapokon.)

$X \sim$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
$\mathbf{1}(p)$	p	$p(1-p)$
$B(n, p)$	np	$np(1-p)$
$\text{Geom}(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$\text{Pois}(\lambda)$	λ	λ

5. gyakorlat

Valószínűségi változók függetlensége

Definíció Azt mondjuk, hogy az $X_1, X_2, \dots, X_n$ valószínűségi változók függetlenek, amennyiben minden $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ esetén az

$$\{X_1 < x_1\}, \{X_2 < x_2\}, \dots, \{X_n < x_n\}$$

események függetlenek.

Példa Speciálisan X_1 és X_2 akkor független, ha minden $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathbb{P}(X_1 < t_1, X_2 < t_2) = \mathbb{P}(X_1 < t_1)\mathbb{P}(X_2 < t_2).$$

Megjegyzés Amennyiben X_i diszkrét, elég az $\{X_i < x_i\}$ helyett az $\{X_i = x_i\}$ eseményt venni a definícióban.

Állítás Legyenek X és Y együttesen definiált valószínűségi változók. Amennyiben X és Y függetlenek, akkor

$$\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y).$$

Megjegyzés A fenti állítás megfordítása nem igaz, vagyis $\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$ teljesüléséből nem következik X és Y függetlensége.

Definíció Legyen X valószínűségi változó, ekkor az $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ az X eloszlásfüggvénye, amennyiben

$$F(x) = \mathbb{P}(X < x).$$

(vagyis $F(x)$ annak a valószínűsége, hogy X kisebb x -nél).

Állítás (Az eloszlásfüggvény tulajdonságai) Legyen $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ egy tetszőleges valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, ekkor teljesülnek rá, hogy

1. F monoton növekvő függvény.
2. F balról folytonos, vagyis minden $x_0 \in \mathbb{R}$ esetén $\lim_{x \rightarrow x_0^-} F(x) = F(x_0)$.
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$.
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$.

Megjegyzés A fenti állítás megfordítása is igaz, vagyis amennyiben egy F függvény rendelkezik a fenti tulajdonságokkal, akkor valamilyen valószínűségi változó eloszlásfüggvénye.

Folytonos valószínűségi változók sűrűségfüggvénye

Definíció Legyen X valószínűségi változó, amennyiben létezik olyan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy

$$\mathbb{P}(X < x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt,$$

akkor azt mondjuk, hogy X **folytonos valószínűségi változó**, továbbá f az X **sűrűségfüggvénye**.

Állítás Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pontosan akkor egy valószínűségi változó sűrűségfüggvénye, ha

1. $f(x) \geq 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1$

Állítás Legyen X valószínűségi változó és $a \leq b$ valós számok vagy $\pm\infty$, ekkor

$$\mathbb{P}(a \leq x < b) = F_X(b) - F_X(a),$$

továbbá amennyiben X folytonos

$$\mathbb{P}(a \leq x < b) = \int_a^b f_X(x) dx.$$

Állítás Amennyiben az X valószínűségi változó F_X eloszlásfüggvényére teljesülnek az alábbiak

1. F_X folytonos

2. F_X véges sok pont kivételével differenciálható

akkor igaz, hogy X folytonos valószínűségi változó és a sűrűségfüggvénye megkapható mint

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x).$$

6. gyakorlat

Exponenciális és egyenletes eloszlás

Definíció Azt mondjuk, hogy az X valószínűségi változó **exponenciális eloszlást** követ $\lambda > 0$ paraméterrel, ha a sűrűségfüggvénye (illetve ennek következtében az eloszlásfüggvénye)

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } 0 \leq x \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{ha } 0 \leq x \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

A jelölés ekkor $X \sim \text{Exp}(\lambda)$

Definíció Azt mondjuk, hogy az X valószínűségi változó (folytonos) **egyenletes eloszlást** követ $a < b$ paraméterekkel, ha a sűrűségfüggvénye (illetve ennek következtében az eloszlásfüggvénye)

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{ha } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{ha } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{ha } b < x \end{cases}$$

A jelölés ekkor $X \sim U(a, b)$

Definíció Azt mondjuk, hogy az X valószínűségi változó **örökifjú** tulajdonságú, amennyiben teljesül rá, hogy minden $s, t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathbb{P}(s + t < X \mid s < X) = \mathbb{P}(t < X).$$

Példa A $\text{Geom}(p)$ és $\text{Exp}(\lambda)$ eloszlás örökifjú.

Állítás Amennyiben X folytonos valószínűségi változó rendelkezik az örökifjú tulajdonsággal, akkor $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, valamilyen $\lambda > 0$ paraméterrel.

Folytonos valószínűségi változók várható értéke

Definíció Legyen X folytonos valószínűségi változó f_X sűrűségfüggvénnyel. Ekkor az X **várható értéke**

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx,$$

amennyiben az integrál abszolút konvergens.

Állítás Legyen X folytonos valószínűségi változó f_X sűrűségfüggvénnyel és $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy $g(X)$ is valószínűségi változó. Ilyenkor teljesül, hogy amennyiben $\mathbb{E}(g(X))$ létezik, akkor

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) dx.$$

7. gyakorlat

Normális eloszlás

Definíció Azt mondjuk, hogy az X valószínűségi változó **normális eloszlást** követ $\mu \in \mathbb{R}$ és $\sigma^2 > 0$ paraméterekkel, ha a sűrűségfüggvénye

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

A jelölés ekkor $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Továbbá ekkor

$$\mathbb{E}(X) = \mu \quad \text{és} \quad \mathbb{D}^2(X) = \sigma^2.$$

Definíció Azt mondjuk, hogy az Z valószínűségi változó **standard normális eloszlást** követ, ha $Z \sim N(0, 1)$. A standard normális eloszlás sűrűség és eloszlásfüggvényének a jelölése

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad \Phi(z) = \mathbb{P}(Z < z).$$

Állítás Mivel a standard normális eloszlás a nullára szimmetrikus, ezért

$$\Phi(z) = 1 - \Phi(-z).$$

Állítás Legyen X normális eloszlású valószínűségi változó, ekkor minden $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $aX + b$ is normális eloszlású lesz.

Következmény (Standardizálás) Legyen $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, ekkor

$$\frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

Centrális határeloszlás tétel

Tétel (De Moivre-Laplace) Legyen $X_n \sim B(n, p)$, ekkor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén teljesül, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < x\right) = \Phi(x).$$

Tétel (Centrális határeloszlás tétel) Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független és azonos $X_k \sim X$ eloszlású valószínűségi változók. Amennyiben

$$\mu = \mathbb{E}(X), \quad \sigma^2 = \mathbb{D}^2(X), \quad S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n,$$

akkor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén teljesül, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} < x\right) = \Phi(x).$$