Valószínűségszámítás
1. rész
Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók
—
FOGALMAK ÉS KIDOLGOZOTT PÉLDÁK

Vetier András

2019. december 12.

Tartalomjegyzék

Tisztelt Hallgatók!

Kérem, hogy a könyvben talált hibákat a **vetier@math.bme.hu** email címen jelezzék nekem. A levél tárgya legyen: **Hibát találtam** . Egy hatékony módszer a hibák rögzítésére, ha valaki számítógépen olvassa a könyvet:

- nyom egy PRINT SCREEN-t
- behívja a PAINT programot
- nyom egy PASTE (ctrl-V) utasítást
- pirossal bekarikázza a hibát, esetleg valamit oda ír
- elmenti a JPG fájlt, a fájl neve legyen a hiba helyének az oldalszáma, vagy a nevében legyen benne az oldalszám
- a JPG fájlokat csatolt fájlként elküldi a fent megadott címre

Természetesen minden más módszerrel küldött hibajelzést is köszönök.

Az *"Extra tananyag"*, *"Extra feladat"* cimkékkel megjelölt anyagrészek és feladatok nem részei a kötelező vizsga anyagának. Ezeket a vizsgákon nem kérdezzük. Viszont ha valaki ezekbőlaz anyagrészekből és feladatokból

- szépen, okosan megtanul annyit, amennyit a tárgy aktuális honlapján kérünk, és
- szándékát a honlapon megadott email címen a megadott határidőig jelzi, és
- a szóbeli beszámoló elején írásban bemutatja, hogy mik azok az anyagrészek, melyekből felkészült, és
- utána a vizsgáztató által feltett kérdésekre szépen, okosan válaszol, akkor

a vizsgán már elért közepes (3) vagy jó (4) osztályzatát egy jeggyel javíthatja.

Kedves Kollégák!

Itt hívom fel figyelmüket, hogy egy oktatási félév során a könyv egyes fejezeteit a leírt sorrendtől eltérően a következő oldalon megadott ütemezésben is lehet tanítani, tanulni.

Ennek az ütemezésnek előnye, hogy a nehezebb, bonyolultabb folytonos eset nem tolódik a félév második felére. Azt tapasztaltam, hogy a hallgatóink is nagyobb érdeklődéssel fordulnak a folytonos modellek felé, hiszen a diszkrét esetről sokan már tanultak a középiskolában is.

Eredményes, örömteli, jó munkát kívánok kollégáimnak is, diákjainknak is! Üdvözlettel,

2019. február 25.

Vetier András

1 – 2. hét	1. rész	1. Esemény, valószínűség
		2. Diszkrét eloszlás
		3. Folytonos egyenletes eloszlás
	3. rész	1. Folytonos eloszlások
		2. Folytonos eloszlások szemléltetése festékkel, pontfelhővel
		3.1. Random szám négyzete, négyzetgyöke, reciproka
		3.2. Összeg, szorzat, hányados
		3.3. A sűrűségfüggvény képletének közvetlen levezetése
		3.3. Egyenletes körmozgásból származtatott eloszlások
3 – 4. hét	1. rész	4. További fogalmak és szabályok
		5. Feltételes valószínűség és eloszlás
		6. Függetlenség
	3. rész	3.4. Monoton transzformációk
		3.5. Folytonos szimuláció
	4. rész	1. Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók
		2. Kétdimenziós egyenletes eloszlás
5 – 6. hét	2. rész	1. Nevezetes eloszlások
		2. Módusz megkeresése
		3. Szimuláció
	3. rész	3.6. Béta eloszlások
	4. rész	3. Béta eloszlások kétdimenzióban
7 – 8. hét	2. rész	4. Tömegpont rendszerek súlypontja és tehetetlenségi nyomatéka
		5. Egydimenziós adatrendszerek
		6. Valószínűségi változók és eloszlások várható értéke, varianciája, szórása
		7. Nagy számok törvényei
		8. A várható érték, variancia és szórás általános tulajdonságai
		9. Nevezetes eloszlások várható értéke, varianciája, szórása - formulák
		10. Nevezetes eloszlások várható értékei - bizonyítások
		11. Binomiális eloszlással kapcsolatos levezetések
	3. rész	4. Várható érték, variancia, szórás (folytonos eset)
	4. rész	4. Kísérleti eredmények függvényének a várható értéke
		5. NSZT a kísérleti eredmények függvényének az átlagára
9 – 10. hét	1. rész	7. Sok független tag összegének eloszlása harang alakot ölt
	3. rész	5. A várható érték, variancia és szórás általános tulajdonságai (diszkrét és folytonos eset)
		6. Nevezetes folytonos eloszlások
		7. Közelítések normális eloszlással
11. hét	1. rész	8. Általános formulák kétdimenziós eloszlásokkal kapcsolatban
	2. rész	12. Feltételes várható érték, variancia, szórás
	4. rész	6. Vetület- és feltételes eloszlások
12. hét	3. rész	8. Eloszlások transzformációi
	4. rész	7. Transzformáció síkról síkra
		8. Lineáris transzformáció síkról síkra
		9. Transzformáció síkról egyenesre
13. hét	4. rész	10. Regresszió a mediánnal és a várható értékkel
14. hét	4. rész	11. Normális eloszlások a síkon

1. Esemény, valószínűség

1.1. Kimenetelek

Véletlen jelenség: Adott körülmények között valami történik. Például két szabályos dobódobókockát szabályosan feldobunk.

Kísérlet: A jelenség önmagától vagy az én szándékom miatt lezajlik. Például korrekt módon gurítom a két dobókockát.

Megfigyelés: Megmondjuk, kijelentjük, hogy mi érdekel minket, mire figylünk oda. Például megfigyelhetjük két dobókocka kapcsán a dobott számok összegét, vagy szorzatát, hányadosát, de megfigyelhetném azt is, hogy a dobókocka mennyi ideig gurul, hogy hol áll meg, stb.

Kimenetelek, más néven: **lehetséges kimenetelek, elemi események:** A megfigyelésünk lehetséges eredményei. Például két dobókockával dobva az összeg lehetséges eredményei: $2, 3, ..., 12$.

Eseménytér: Az összes lehetséges kimenetelek halmaza. A példánkban az eseménytér a 11 elemű $\{2, 3, ., 12\}$ halmaz.

1.2. Esemény

Esemény: Állítás a jelenséggel kapcsolatban, ami minden kísérletnél
vagy IGAZ – másképpen mondva – BEKÖVETKEZIK,
vagy HAMIS – másképpen mondva – NEM KÖVETKEZIK BE.
Például az az állítás, hogy két kocka esetén *a dobott számok összege nagyobb, mint* 7 , egy eseményt definiál.

Siker és kudarc: A bekövetkezést az esemény szempontjából SIKER-nek, a nem bekövetkezést KUDARC-nak is szokás hívni.

Események egyenlősége: Egy eseményt általában többféleképpen is körül lehet írni. A két állítás, hogy két dobókockával
az összeg 10 *vagy* 11 *vagy* 12 , illetve
az összeg kilencnél nagyobb,
másképpen hangzanak, de ugyanazt jelentik. Ez a két állítás egy és ugyanazon eseménynek két különböző megfogalmazása. Két eseményt – különböző megfogalmazásuk ellenére is – **egyenlőek**nek tekintünk, ha mindig egyidejűleg kövekezhetnek be: akkor és csak akkor következik be az egyik, ha a másik is bekövetkezik.

Kísérletsorozat: Több (egymásra semmi hatást kifejtő) kísérletet hajtunk végre. Például a két kockát, vagyis a kockapárt – mondjuk – 10 -szer szabályosan elgurítom.

1.3. Valószínűség

Gyakoriság: Ahányszor bekövetkezik az esemény az elvégzett valahány kisérlet során. Másképpen mondva a gyakoriság a sikeres kísérletek számát jelenti.

Relatív gyakoriság: Gyakoriság (= sikerek száma) osztva az összes kísérletek számával. Például ha 10 kísérletből 4 -szer következik be a szóbanforgó esemény, akkor az elvégzett kiísérletsorozatban az esemény relatív gyakorisága 0.4 . A relatív gyakoriság azt mutatja, hogy az összes kísérlet hányad részében következett be az esemény. Van aki ezt az arányt százaléákokban szereti kifejezni, és azért a 0.4 helyett 40% -ot mond, ami teljesen rendben is van, hiszen a 40% igazából 0.4 -et jelent.

Valószínűség: Egy adott eseményt vizsgálva azt tapasztaljuk, hogy sok kísérlet esetén a relatív gyakoriság közel van egy olyan értékhez, ami nem függ a véletlentől, hanem az eseményre jellemző. Ezt az értéket nevezzük az esemény valószínűségének. A relatív gyakoriság kevés kísérlet esetén erősen eltérhet a valószínűségtől, de a kísérletszám növekedtével egyre közelebb kerül hozzá.

Egy esemény valószínűségét általában úgy jelöljük, hogy egy P betű mögé zárójelek közé írjuk az eseményt definiáló állítást szavakkal vagy jelekkel, vagy bármi módon, ami az adott környezetben világosan utal az eseményre. Például annak a valószínűségét, hogy egy szabályos dobókockával 4 -nél nagyobb számot dobunk, így jelölhetjük:

- $P($ négynél nagyobbat dobunk $)$
- $P($ ötöst vagy hatost dobunk $)$
- $P(\, 5, 6 \,)$
- $P(\; X > 4 \;)$, ahol X jelenti a kockával dobott számot
- $P(\; A \;)$, ahol A jelenti azt az eseményt, hogy a kockával ötöst vagy hatost dobunk
- stb.

A valószínűségszámítás megtanít arra, hogy a valószínűségeket kísérletek elvégzése nélkül, elméleti módszerekkel meghatározzuk.

1.4. Műveletek eseményekkel

Események – halmazok: Az eseményeket az eseménytér (mint "alaphalmaz") részhalmazaival reprezentáljuk. Minden egyes esemény megfelel annak a halmaznak, mely a (szóban forgó eseményre nézve) kedvező kimenetelekből áll.

Biztos esemény: Mindig bekövetkezik. Az alaphalmazzal reprezentáljuk, amit S -sel jelölünk. Más jelölések: U , I , Ω .

Lehetetlen esemény: Sohase következik be. Az üres halmazzal reprezentáljuk. A $\emptyset$ jellel jelöljük.

Ellentett esemény – másképpen mondva – **komplementer esemény, "tagadás", "nem"**: Pontosan akkor következik be, amikor az eredeti esemény nem. Felülvonással jelöljük, pl.: $\overline{A}$.

Események "és" kapcsolata – másképpen mondva –**metszete, közös része, szorzata**: A szóban forgó események mindegyike bekövetkezik. Jelölések:
Két esemény metszete: $A \cap B$

Véges sok $A_1, A_2, \ldots, A_n$ esemény metszete: $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$
Végtelen sok $A_1, A_2, \ldots$ esemény metszete: $A_1 \cap A_2 \cap \ldots$

Kizáró események: A szóban forgó események közül legfeljebb egy következhet be. Bármely kettő kizárja egymást, egyidejű bekövetkezésük lehetetlen.
Két eseményre: $A \cap B = \emptyset$
Több (véges vagy végtelen sok) eseményre: ha $i \neq j$, akkor $A_i \cap A_j = \emptyset$

Események "vagy" kapcsolata – másképpen mondva – **úniója, egyesítése, összege**: A szóban forgó események közül legalább egy bekövetkezik. Jelölések:
Két esemény úniója: $A \cup B$
Véges sok $A_1, A_2, \ldots, A_n$ esemény úniója: $A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n$
Végtelen sok $A_1, A_2, \ldots$ esemény úniója: $A_1 \cup A_2 \cup \ldots$

Kizáró események "vagy" kapcsolata – másképpen mondva – **úniója, egyesítése, összege**: A szóban forgó események közül pontosan egy bekövetkezik. A jelölések általában nem különböznek a korábbi jelölésektől:
Két kizáró esemény úniója: $A \cup B$
Véges sok kizáró esemény úniója: $A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n$
Végtelen sok kizáró esemény úniója: $A_1 \cup A_2 \cup \ldots$

Kizáró eseménykre bizonyos szabályok egyszerűbbek az általános szabályoknál. Ezért egyes könyvek a * jellel hívják fel a figyelmet arra a tényre, hogy műveletben szereplő események kizáróak:
Két kizáró esemény úniója: $A \cup^* B$
Véges sok kizáró esemény úniója: $A_1 \cup^* A_2 \ldots \cup^* A_n$
Végtelen sok kizáró esemény úniója: $A_1 \cup^* A_2 \cup^* \ldots$

"Maga után vonja": Azt mondjuk, hogy a B esemény maga után vonja az A eseményt, ha teljesül az, hogy amikor a B esemény bekövetkezik, akkor szükségképpen az A esemény is bekövetkezik, azaz a B halmaz része az A halmaznak. Jelölés: $B \subset A$ vagy $A \supset B$.

Események különbsége: Ha A, B tetszőleges események, akkor A mínusz B -nek (avagy A és B különbségének) nevezzük, és $A \backslash B$ -vel jelöljük azt az eseményt, ami akkor következik be, ha A bekövetkezik, de B nem következik be. A különbség jelölése: $A \backslash B$. Tehát $A \backslash B = A \cap \overline{B}$.

1.5. A valószínűség alapvető tulajdonságai

Ebben az alfejeztben valószínűség alapvető tulajdonságait soroljuk fel, melyek – a relatív gyakoriság ugyanilyen tulajdonságai alalpján – kézenfekvőek. Fontos, hogy az olvasó ne csak memorizálja ezeket a tulajdonságokat, hanem értse, lássa, hogy *a valószínűségnek ezek a tulajdonságai a relatív gyakoriság (triviális!) hasonló tulajdonságai miatt igazak*. Néhány bonyolultabb szabályt egy későbbi fejezetben sorolunk fel. Megjegyezzük, hogy az első, a második és az ötödik tulajdonságból logikai úton le lehet vezetni a valószínűség összes többi tuldajdonságát, ezért a valószínűségszámítás axiomatikus felépítésekor ezek szolgálnak axiómákként. Ebben a könyvben nem célunk az axiomatikus tárgyalás. A technikásabb bizonyításokat is leegyszerűsítve, a szemléletre támaszkodva mutatjuk majd be. Fő célunk az elmélet és a valóság kapcsolatátának világos tálalása.

1. **Minden esemény valószínűsége 0 és 1 közé esik:**

$$0 \leq \mathrm{P}(A) \leq 1$$

2. **A biztos esemény valószínűsége** 1 **:**

$$\mathrm{P}(\ S\ )\ =\ 1$$

3. **A lehetetlen esemény valószínűsége** 0 **:**

$$P(\ \emptyset\ )\ =\ 0$$

4. **Komplementer szabály**:
Minden A eseményre igaz, hogy

$$\mathrm{P}(\ A\ ) + \mathrm{P}(\ \overline{A}\ )\ =\ 1 \qquad \mathrm{P}(\ A\ )\ =\ 1 - \mathrm{P}(\ \overline{A}\ ) \qquad \mathrm{P}(\ \overline{A}\ )\ =\ 1 - \mathrm{P}(\ A\ )$$

5. **Összegzési szabály *kizáró* eseményekre:**
Ha A, B kizáró események, és $C = A \cup B$, akkor

$$\mathrm{P}(\ C\ )\ =\ \mathrm{P}(\ A\ ) + \mathrm{P}(\ B\ )$$

Ha $A_1, A_2, \ldots, A_n$ véges sok kizáró esemény, és $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, akkor

$$\mathrm{P}(\ A\ )\ =\ \mathrm{P}(\ A_1\ ) + \mathrm{P}(\ A_2\ ) + \ldots + \mathrm{P}(\ A_n\ )$$

Ha $A_1, A_2, A_3, \ldots$ végtelen sok kizáró esemény, és $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots$, akkor

$$\mathrm{P}(\ A\ )\ =\ \mathrm{P}(\ A_1\ ) + \mathrm{P}(\ A_2\ ) + \mathrm{P}(\ A_3\ ) + \ldots$$

6. **Általános összegzési szabály** (még csak) **két eseményre**:
Ha A, B tetszőleges események, akkor

$$\mathrm{P}(\ A \cup B\ )\ =\ \mathrm{P}(\ A\ ) + \mathrm{P}(\ B\ ) - \mathrm{P}(\ A \cap B\ )$$

7. **Általános kivonási szabály**:
Ha a A, B tetszőleges események, akkor

$$\mathrm{P}(\ A \backslash B\ )\ =\ \mathrm{P}(\ A\ ) - \mathrm{P}(\ A \cap B\ )$$

8. **Speciális kivonási szabály**:
Ha a B esemény maga után vonja az A eseményt, vagyis $B \subseteq A$, akkor

$$\mathrm{P}(\ A \backslash B\ )\ =\ \mathrm{P}(\ A\ ) - \mathrm{P}(\ B\ )$$

Feladat: Páros vagy páratlan? Egy érmét dobálunk az első fejig. Megfigyeljük az ehhez szükséges dobások számát. Mi a valószínűsége annak, hogy az ehhez szükséges dobások száma páros szám?

Megoldás: A lehetséges kimenetelek: $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$, *"soha"* , ahol a *"soha"* akkor következik be, ha mindig csak írást dobunk, vagyis sohase dobunk fejet. Az alábbi valószínűségek triviálisak:

$$\begin{aligned}
&\text{P(az első fej a 2. dobásra adódik)} \;=\; \tfrac{1}{2^2} \;=\; \tfrac{1}{4} \\
&\text{P(az első fej a 4. dobásra adódik)} \;=\; \tfrac{1}{2^4} \;=\; \tfrac{1}{16} \\
&\text{P(az első fej a 6. dobásra adódik)} \;=\; \tfrac{1}{2^6} \;=\; \tfrac{1}{64} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Ezekből a feladat kérdésére a válasz összegzéssel adódik:

$$\begin{aligned}
&\text{P(az első fej eléréséhez páros sok dobás kell)} \;= \\
&= \;\text{P(az első fej a 2. dobásra adódik)} + \\
&+ \text{P(az első fej a 4. dobásra adódik)} + \\
&+ \text{P(az első fej a 6. dobásra adódik)} + \\
&\vdots \\
&= \;\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{64} + \ldots \;=\; \tfrac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \tfrac{\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{3}{4}\right)} \;=\; \tfrac{1}{3}
\end{aligned}$$

Az utolsó sorban, a végtelen sor összegzésénél, felhasználtuk a jól ismert tényt, hogy egy végtelen mértani sor összegére igaz:

$$\text{összeg} \;=\; \frac{\text{első tag}}{1 - \text{kvóciens}}$$

1.6. Klasszikus problémák

Gyakran megesik, hogy a megfigyelésünknek véges sok kimenetele van, melyek (valamilyen szimmetria) miatt érezhetően egyforma valószínűségűek. Ilyenkor minden kimenetel valószínűsége a lehetséges kimenetelek számának a reciproka, és egy esemény valószínűsége egyenlő az eseményre nézve kedvező kimenetelek száma osztva az összes események számával:

$$\mathrm{P}(A) \;=\; \frac{\textit{az eseményre nézve kedvező kimenetelek száma}}{\textit{az összes kimenetelek száma}}$$

Mivel a "klaszikus időkben" ilyen jelegű problémák kapcsán indult el a valószínűségszámítás felfedezése, az ilyen problémákat "klasszikus problámák"-nak nevezzük.

1.7. Számlálási alapszabályok

Ezek a szabályok teljesen nyilvánvalóak, mindenki ismeri őket. Mégis felsoroljuk őket, hogy amikor kell, lehessen hivatkozni rájuk.

Összegzés: Ha egy halmaz egymást kizáró részhalmazokra bomlik (a halmazt particionáljuk, a halmaz partíciókra bomlik), akkor *a halmaz elemszáma egyenlő a részhalmazok elemszámainak összegével*.

Kivonás: Ha egy halmaznak elhagyjuk egy részhalmazát, akkor *a megmaradó halmaz elemeinek száma egyenlő az eredeti halmaz elemszáma mínusz az elhagyott részhalmaz elemszáma*.

Szorzás: Ha két halmazt tekintünk, és az egyiket "első"-nek nevezzük, a másikat "második"-nak, és rendezett párokat képezünk az elemeikből úgy, hogy az első halmazból vesszük a párok első elemeit, a másodikból a párok második elemeit, akkor *a párok darabszáma egyenlő a két halmaz elemszámának a szorzatával.*

Több tényezős szorzás: Ha n halmazt tekintünk, és az egyiket "első"-nek nevezzük, a másikat "második"-nak, és így tovább kapjuk az $(n-1)$ -ik, n -ik halmazokat, és rendezett n -eseket képezünk az elemeikből úgy, hogy az első halmazból vesszük az első elemet, a másodikból a másodikat, és így tovább az n -ik halmazból vesszük az n -ik elemet, akkor *a rendezett n -esek darabszáma egyenlő a halmazok elemszámainak a szorzatával*.

Több tényezős szorzás fa-gráfokkal: Képzeljünk el egy fa-gráfot, mely "felfelé nő", és
gyökeréből k_1 él indul ki (ezek az elsőrendű élek),
az elsőrendű élek mindegyikének a felső végpontjából k_2 él indul ki (ezek a másodrendű élek),
a másodrendű élek mindegyikének a felső végpontjából k_3 él indul ki (ezek a harmadrendű élek),
és így tovább,
az $(n-1)$ -ed rendű élek mindegyikének a felső végpontjából k_n él indul ki.
E fa-gráf tetején a végpontok száma: $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot \ldots \cdot k_n$.

Hatványozás: Ha egy halmazt n példányban tekintünk, és az egyiket "első"-nek nevezzük, a másikat "második"-nak, és így tovább kapjuk az $(n-1)$ -ik n -ik példányát a halmaznak, és rendezett n -eseket képezünk az elemeikből úgy, hogy az első halmazból vesszük az első elemet, a másodikból a másodikat, és így tovább az n -ik halmazból vesszük az n -ik elemet, akkor *a rendezett n -esek darabszáma egyenlő a halmaz elemszámának n -ik hatványával.*

Osztás: Ha egy halmazt úgy particionálunk (bontunk diszjunkt részhalmazokra), hogy minden partició (részhalmaz) ugyanannyi elemből áll, akkor *a particiók (részhalmazok) darabszáma egyenlő a halmaz elemszáma osztva a partíciók (részhalmazok) közös elemszámával.*

1.8. Kombinatorikus alapképletek

Az alábbi táblázatba folgalt képleteket ismertnek feltételezzük. Egy-egy példával világítunk rá jelentésükre.

	ismétlés nélküli	ismétléses
permutáció	$n!$ n futó beérkezésének sorrendje	$\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_r!}$ n golyót ennyiféleképpen állíthatunk sorba, ha $k_1, k_2, \ldots k_r$ db külön-külön egyszínű
variáció	$\frac{n!}{(n-k)!}$ n futó beérkezésének sorrendje ha csak az első k helyet tekintjük	l^k l darab betűből készíthető k hosszú szavak száma (egy-egy betű többször is felhasználható)
kombináció	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ n golyóból kiválasztunk k darabot (nem számít a kiválasztás sorrendje)	$\binom{k+l-1}{l}$ k féle sütiből (sok van belőlük) hazaviszünk l -et, ennyiféleképpen tehetjük meg *(Extra tananyag)*

Táblázat: *Kombinatorikus alapképletek*

Megjegyzés: Az ismétléses kombináció képletét meg lehet említeni, de nem kell foglalkozni vele.

1. Példa: Lottó öt találat. Az ötös lottón 90 szám közül húznak ki 5 -öt. A nyerés szempontjából a sorrend nem számít, ezért a lehetséges kombinációkat vizsgáljuk. Az összes kombinációk száma

$$\binom{90}{5} = 43\,949\,268 \approx 44 \text{ millió}$$

A biztos teli találat eléréséhez ennyi szelvényt kellene kitöltenünk. Megemlítjük, hogy ha 44 millió lottószelvényt egymásra raknánk, akkor ez a torony a Föld legmasabb csúcsáig, a Mount Everest tetejéig érne fel. Ha egyetlen szelvénnyel játszom, akkor az öt találatom valószínűsége

$$\frac{1}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{43\,949\,268} \approx 0.000\,000\,023$$

hiszen a $43,949,268$ egyformán valószínű kombináció között az az egyetlen a kedvező, ahogyan én töltöm ki a szelvényt.

2. Példa: Lottó találatok. Annak az eseményeknek a valósznűsége, hogy egy szelvénnyel játszva az ötös lottón, a találataim száma k, az alábbi törttel adható meg:

$$\frac{\binom{5}{k}\binom{85}{5-k}}{\binom{90}{5}}$$

ahol $k = 0, 1, \ldots, 5$. A valószínűségek numerikus értéke:

$$\text{P(5 találatos lesz a szelvényem)} = \frac{\binom{5}{5}\binom{85}{0}}{\binom{90}{5}} \approx 0.000\,000\,023$$

$$\text{P(4 találatos lesz a szelvényem)} = \frac{\binom{5}{4}\binom{85}{1}}{\binom{90}{5}} \approx 0.000\,009\,7$$

$$\text{P(3 találatos lesz a szelvényem)} = \frac{\binom{5}{3}\binom{85}{2}}{\binom{90}{5}} \approx 0.000\,81$$

$$\text{P(2 találatos lesz a szelvényem)} = \frac{\binom{5}{2}\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}} \approx 0.022$$

$$\text{P(1 találatos lesz a szelvényem)} = \frac{\binom{5}{1}\binom{85}{4}}{\binom{90}{5}} \approx 0.23$$

$$\text{P(0 találatos lesz a szelvényem)} = \frac{\binom{5}{0}\binom{85}{5}}{\binom{90}{5}} \approx 0.75$$

3. Példa: Hány piros? (Általános eset) A lottó probléma általánosítása: tegyük fel, hogy egy dobozban N darab golyó van. Közülük K darab piros, $N-K$ darab fehér. Kiveszünk n darab golyót visszatevés nélkül. Mi a valószínűsége annak, hogy a kivett golyók között pontosan k darab piros lesz?

Válasz:

$$\frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

4. Példa: Hány piros? (Speciális eset) Az előző általános problémát most konkrét értékek mellett vizsgáljuk: 50 darab golyó, közülük 30 piros, 20 fehér. Kiveszünk 12 golyót visszatevés nélkül. Mi a valószínége annak, hogy a kivett golyók között pontosan k darab piros lesz?

Válasz:

$$p(x) = \frac{\binom{30}{x}\binom{20}{n-x}}{\binom{50}{12}} \qquad (x = 0, 1, 2, \dots 12)$$

A

$$p(0) = \frac{\binom{30}{0}\binom{20}{12}}{\binom{50}{12}} \quad p(1) = \frac{\binom{30}{1}\binom{20}{11}}{\binom{50}{12}} \quad p(2) = \frac{\binom{30}{2}\binom{20}{10}}{\binom{50}{12}} \quad \dots \quad p(11) = \frac{\binom{30}{11}\binom{20}{1}}{\binom{50}{12}} \quad p(12) = \frac{\binom{30}{12}\binom{20}{0}}{\binom{50}{12}}$$

valószínűséget Excellel (két tizedes pontossággal) kiszámítottuk minden szóbajövő k -ra, és azokat táblázatba rendeztük. Íme a táblázat:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x valószínűsége	0.00	0.00	0.00	0.01	0.03	0.09	0.19	0.26	0.23	0.13	0.05	0.01	0.00

Táblázat: *A valószínűségek numerikus értékei*

A táblázatból sokmindent ki lehet olvasni:

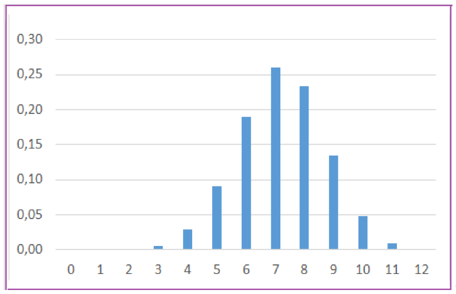
- Annak a valószínűsége, hogy pontosan 10 piros lesz a a kihúzottak között: 0.05 .
- Annak a valószínűsége, hogy pontosan 9 piros lesz a a kihúzottak között: 0.13 .
- Annak a valószínűsége, hogy legalább 9 piros lesz a a kihúzottak között: $0.13 + 0.05 + 0.01 + 0.00 = 0.19$.

- Annak a valószínűsége, hogy legfeljebb 9 piros lesz a a kihúzottta között:

$$0.00 + 0.00 + 0.00 + 0.01 + 0.03 + 0.09 + 0.19 + 0.26 + 0.23 + 0,13 \;=\; 0.94$$

- A valószínűségek $x = 7$ előtt nőnek, utána csökkennek.
- A 7 piros a legvalószínűbb. A második legvalószínűbb a 8 , a harmadik a 6 , stb.

A súlyfüggvény ábráját is megadjuk, sokat lehet leolvasni róla.



1. ábra. *Valószínűségek szemléltetése*

5. Példa: Hány piros, hány kék? Az előző probléma általánosítása: tegyük fel, hogy egy dobozban N darab golyó van. Közülük K_1 darab piros, K_2 darab kék, $N - K_1 - K_2$ darab fehér. Kiveszünk n darab golyót visszatevés nélkül. Mi a valószínége annak, hogy a kivett golyók között pontosan k_1 darab piros és pontosan k_2 darab kék lesz?

Válasz:

$$\frac{\binom{K_1}{k_1}\binom{K_2}{k_2}\binom{N-K_1-K_2}{n-k_1-k_2}}{\binom{N}{n}}$$

6. Példa: Nyolcszor húzunk. Az előző példában feltett általános kérdést most egy speciális esetben alaposabban megvizsgáljuk. Tegyük fel, hogy 45 darab golyó van egy dobozban. Közülük 10 darab piros, 15 darab kék, 20 darab fehér. Kiveszünk 8 darab golyót visszatevés nélkül. Mi a valószínége annak, hogy a kivett golyók között pontosan x darab piros és pontosan y darab kék lesz?

Válasz:

$$\frac{\binom{10}{x}\binom{15}{y}\binom{20}{8-x-y}}{\binom{45}{8}}$$

minden olyan x -re és y -ra, melyek eleget tesznek a következő egyenlőtlenségeknek:

$$0 \;\leq\; x \;\leq\; 8$$

$$0 \;\leq\; y \;\leq\; 8$$

$$0 \;\leq\; 8 - x - y \;\leq\; 8$$

A valószínűségek numerikus értékei segítségével többször fogunk majd a későbbiekben dolgozni, ezért Excellel kiszámoltuk, és táblázatba rendezve itt megadjuk őket:

y										
8	0.000									
7	0.001	0.000								
6	0.004	0.005	0.001							
5	0.016	0.026	0.013	0.002						
4	0.0317	0.072	0.054	0.015	0.001					
3	0.033	0.102	0.108	0.048	0.009	0.001				
2	0.019	0.076	0.106	0.067	0.019	0.002	0.000			
1	0.005	0.027	0.049	0.040	0.017	0.003	0.000	0.000		
0	0.001	0.004	0.008	0.009	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	x

Táblázat: *A valószínűségek numerikus értékei*

7. Példa: Tíz érmével három fej. Valaki feldob 10 szabályos érmét. Mi a valószínűsége annak, hogy 3 érmén lesz fej felül? (És akkor természetesen 7 érmén az írás lesz felül.)

Válasz: Megfigyelvén mindegyik érmét, hogy melyik oldaluk van felül – mivel mindegyik érme 2 lehetőséget kínál – nyilván

$$2^{10} \;=\; 1\,024$$

egyformán valószínű variáció kínálkozik. Mindegy, hogy 10 érme közül melyik az a 3, amelyiken a fej van felül. A 10 érme közül

$$\binom{10}{3}$$

féle módon lehet kivalasztani azt a 3 -at, amilyeken a fej van felül, tehát az összes variáció között ennyi a kedvezőek száma. Ezért a valószínűség:

$$\text{P}(\;3\;\text{érmén van fej}\;) \;=\; \frac{\binom{10}{3}}{2^{10}}$$

8. Példa: Tíz érmével hány fej? Valaki feldob 10 szabályos érmét. Mi a valószínűsége annak, hogy x darab érmén lesz fej felül? (És akkor természetesen $10-x$ érmén az írás lesz felül.)

Válasz: Megfigyelvén mindegyik érmét, hogy melyik oldaluk van felül – mivel mindegyik érme 2 lehetőséget kínál – nyilván

$$2^{10} \;=\; 1\,024$$

egyformán valószínű variáció kínálkozik. Mindegy, hogy a 10 érme közül melyik az az x darab, amelyiken a fej van felül. A 10 érme közül

$$\binom{10}{x}$$

féle módon lehet kivalasztani azt az x -t, amilyeken a fej van felül, tehát az összes variáció között ennyi a kedvezőek száma. Ezért a valószínűség:

$$\text{P}(\;x\;\text{érmén van fej}\;) \;=\; \frac{\binom{10}{x}}{2^{10}} \qquad (x=0,1,2,\ldots,10)$$

A valószínűségek numerikus értékét 3 tizedes pontossággal tábázatba rendezve adjuk meg:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x fej valószínűsége	0.001	0.010	0.044	0.117	0.205	0.246	0.205	0.117	0.044	0.010	0.001

Táblázat: *A valószínűségek numerikus értékei*

1.9. Az eseménytér megválasztása nem egyértelmű

Ennek az alfejezetnek nem az a célja, hogy új fogalmakat vagy módszereket taníson. Arra szeretnénk felhívni a figyelmet, hogy az eseménytér megválasztása nem feltétlenül egyértelmű. Erre mutatunk most egy példát.

1. Példa: Melyik pár megy a moziba? Két fiú (András és Bálint) és három lány (Cili, Dóri és Emese) szívességből felásták Jóska bácsi veteményes kertjét, aki szerényen meghálálta a segítséget: két mozijegyet ajándokozott a társaságnak a Szép szerelem c. filmre. (Az öt jegy ára már túl sok lett volna szerény nyugdíjához mérten.) A jegyek az utolsó sor 1. és 2. székére szólnak. A társaság igazságos sorsolással dönti el, hogy kik menjenek el a moziba: az öt nevet egy-egy cédulára írják, majd egymás után húznak (természetesen visszatevés nélkül) kétszer. Mennyi a valószínűsége annak, hogy fiú-lány páros lesz a szerencsés pár?

1. Megoldás: Az 5 cédula közül kettő ; $\binom{5}{2} = 10$ -féleképpen választható ki. Fel is sorljuk ezt a 10 kombinációt. A nevek helyett csak a kezdőbetűket íjuk ki, a fiúk kezdőbetűit **vastag**-, a lányokét *dőlt* betűvel. A kapcsos zárójelen belül a nevek sorrendje nem játszik szerepet, ezért az ABC-sorrendet használjuk. Íme:

{ **A**, **B** }
{ **A**, *C* }
{ **A**, *D* }
{ **A**, *E* }
{ **B**, *C* }
{ **B**, *D* }
{ **B**, *E* }
{ *C*, *D* }
{ *C*, *E* }
{ *D*, *E* }

A 10 kombináció között fiú-lány páros $2 \cdot 3 = 6$ darab van. Ezek az alábbiak:

{ **A**, *C* }
{ **A**, *D* }
{ **A**, *E* }
{ **B**, *C* }
{ **B**, *D* }
{ **B**, *E* }

A keresett valószínűség:

$$\frac{6}{10} = 0.6$$

2. Megoldás: Mondjuk, abban egyezik meg a társaság, hogy akit először húznak ki, az ül az 1 -es székre, akit másodszor húznak ki, az ül a 2 -es székre. Ez a választási mód $5 \cdot 4 = 20$ lehetőséget ad. Ezeket a variációkat is felsoroljuk (a zárójeleken belül elől szerepel annak a jele, aki az 1. székre ül):

$(\mathbf{A}, \mathbf{B})$	$(\mathbf{B}, \mathbf{A})$
$(\mathbf{A}, C)$	$(C, \mathbf{A})$
$(\mathbf{A}, D)$	$(D, \mathbf{A})$
$(\mathbf{A}, E)$	$(E, \mathbf{A})$
$(\mathbf{B}, C)$	$(C, \mathbf{B})$
$(\mathbf{B}, D)$	$(D, \mathbf{B})$
$(\mathbf{B}, E)$	$(E, \mathbf{B})$
(C, D)	(D, C)
(C, E)	(E, C)
(D, E)	(E, D)

Kedvezőek azok a variációk, melyekben egy fiút egy lány követ, ezek száma $2 \cdot 3 = 6$, és azok, melyekben egy lányt egy fiú követ, ezek száma szintén $3 \cdot 2 = 6$. Ez összesen $6 + 6 = 12$ kedvező esetet ad. Ezek az alábbiak:

$(\mathbf{A}, C)$	$(C, \mathbf{A})$
$(\mathbf{A}, D)$	$(D, \mathbf{A})$
$(\mathbf{A}, E)$	$(E, \mathbf{A})$
$(\mathbf{B}, C)$	$(C, \mathbf{B})$
$(\mathbf{B}, D)$	$(D, \mathbf{B})$
$(\mathbf{B}, E)$	$(E, \mathbf{B})$

Ezért a keresett valószínűség:

$$\frac{12}{20} = 0.6$$

Megjegyzések:

- Mindkét megoldás jó.
- A második megoldásban az eseménytér kétszer annyi elemet tartalmaz, mint az első megoldás eseménytere, és a kedvező kimenetelekre is igaz ugyanez. Ezért a két megoldásban ugyanaz a valószínűség érték adódik.
- Ha valaki két jó megoldás közül előnyben részesíti az egyszerűbbet, akkor ebben a versenyben az első megoldás a nyertes.
- A második megoldás eseménytere viszonyt olyasmi vizsgálatára is alkalmas, amire az első megoldás technikája nem. Ezt mutatjuk be a következő példával.

Aki a sor szélén ül, oldalra kinyújthatja a lábait. Ezért azon túl, hogy kik mennek a moziba, arra is oda lehet figyelni, hogy ki ül a sor szélén az 1. széken, és ki a 2. széken.

2. Példa: ***(Az előző példa folytatása:)*** **Mennyi a valószínűsége annak, hogy az 1. széken fiú ül, a 2. széken lány?**

Megoldás: A társaság abban egyezett meg, hogy akit először húznak ki, az ül az 1-es székre, akit másodszor húznak ki, az ül a 2-es székre. Mint az előző feladat második megoldásában leszögeztük, ez a választási mód $5 \cdot 4 = 20$ lehetőséget ad. Most csak azok a kedvező esetek, melyekben egy fiút egy lány követ:

$(\mathbf{A}, C)$
$(\mathbf{A}, D)$
$(\mathbf{A}, E)$
$(\mathbf{B}, C)$
$(\mathbf{B}, D)$
$(\mathbf{B}, E)$

Ezek száma $2 \cdot 3 = 6$. Ezért a keresett valószínűség:

$$\frac{6}{20} = 0.3.$$

Megjegyzés: Az előző feladat első megoldása nem foglalkozik azzal, hogy ki hol ül. Ennek a megoldásnak az eseménytere nem alkalmas ennek a feladatnak a megoldására.

Íme egy banálisan egyszerű példa:

3. Példa: Piros és kék dobókocka - mi van a piros kockán? Egy piros és egy kék dobókockával dobunk. Mi a valószínűsége annak, hogy a pirossal 6 -ost dobunk?

Megoldás: Triviális okoskodás: a piros dobókockán 6 egyforma valószínűségű szám közül egy kedvező, ezért a válasz $\frac{1}{6}$. Nem kevésbé nyilvánvaló ez a megoldás is: a lehetséges 36 (piros, kék) pár közül a hat darab $(6,1); (6,2); (6,3); (6,4); (6,5); (6,6)$ pár kedvező, ezért a válasz $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Mindkét megoldás jó, az elsőben az eseménytér 6 elemű, a másodikban 36 .

És végül ismét az ötös lottó:

4. Példa: Az ötös lottón 90 szám közül húznak ki 5 -öt. Igaz, hogy a nyerés szempontjából a számok kihúzásának a sorrendje nem számít. Mivel a nyerő számok egy bizonyos sorrendben születnek, sokak számára az a természetes, hogy ha az eseménytér felvételénél a sorrendre is odafigyelünk. Ekkor a lehetséges kimenetelek száma

$$90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86$$

Ezzel az eseménytérrel dolgozva - például – annak a valószínűsége, hogy 2 találatos lesz a szelvényem, természetesen ugyanannyinak adódik, mint azt néhány oldallal feljebb a sorendtől eltekintve kiszámoltuk. Arra kell nagyon odafigyelni, hogy a kedvező kimeneteleket az eseménytéren belül helyesen értelmezzük, és a számukat is helyesen írjuk fel:

$$\binom{5}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 85 \cdot 84 \cdot 83 =$$

$$= \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 85 \cdot 84 \cdot 83$$

Ebből a valószínűség:

$$\text{P(2 találatos lesz a szelvényem)} = \frac{\frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 85 \cdot 84 \cdot 83}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86} =$$

$$= \frac{\frac{5 \cdot 4}{2!} \cdot \frac{85 \cdot 84 \cdot 83}{3!}}{\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{5!}} = \frac{\binom{5}{2}\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}} \qquad (\approx 0.022)$$

1.10. RAND.BETWEEN (magyarul: VÉLETLEN.KÖZÖTT) utasítás

Az Excelben az egész értékeket felvevő

`RAND.BETWEEN(A;B),    magyarul VÉLETLEN.KÖZÖTT(A;B)`

utasítás olyan véletlen számot állít elő, mely egyenletes eloszlást követ az $\{A, A+1, \ldots, B-1, B\}$ halmazon.

1. Példa: Száz cédula. A

`RAND.BETWEEN(1;100)`

utasítással azt szimulálhatjuk, mintha az $\{1, 2, \ldots, 99, 100\}$ számokat egy-egy cédulára írnánk, a cédulákat egy dobozba tennénk, és a dobozból kihúznánk egy cédulát, és megnéznénk a rajta lévő számot. Annak a valószínűsége, hogy `RAND.BETWEEN(1;100)` értéke pontosan 55 , egyenlő $1/100$ -dal

kisebb vagy egyenlő, mint 55 , egyenlő $55/100 = 0.55$ -dal

nagyobb 50 -nél, de kisebb 60 -nál, egyenlő $9/100 = 0.09$ -dal

2. Példa: Dobókocka. A

```
RAND.BETWEEN(1;6)
```

utasítással azt szimulálhatjuk, mintha egy szabályos dobókockával dobnánk, és tekintenénk a dobott számot. A 6 lehetséges eset mindegyike $\frac{1}{6}$ valószínűségű.

Fontos, hogy az Olvasó tisztában legyen azzal, hogy ha a `RAND.BETWEEN(1;6)` utasítást többször leírjuk, akkor minden alkalmazás a többitől független eredményt ad. Ha az utasítást ahhoz hasonlóan, ahogy most ideírjuk:

```
RAND.BETWEEN(1;6)     RAND.BETWEEN(1;6)
```

két külön Excel-cellába is beírjuk, azt szimulálhatjuk, mintha két szabályos dobókockával dobnánk.

3. Példa: Két dobókocka. Két szabályos dobókockával dobunk. A két dobókockát (még akkor is, ha teljesen egyformának tűnnek) meg tudjuk különböztetni, ha az egyiket a bal, a másikat a jobb kezünkből gurítjuk. A két dobókocka ily módon való dobását szimulálhatjuk a

```
RAND.BETWEEN(1;6)     RAND.BETWEEN(1;6)
```

utasításpárral. Nyilván 36 lehetséges kimenetel kínálkozik. Ezt a 36 esetet – egymás után leírva – fel is sorolhatjuk, de előnyös, ha táblázatba rendezve adjuk meg őket. Íme:

jobb bal	1	2	3	4	5	6
1	$1;1$	$1;2$	$1;3$	$1;4$	$1;5$	$1;6$
2	$2;1$	$2;2$	$2;3$	$2;4$	$2;5$	$2;6$
3	$3;1$	$3;2$	$3;3$	$3;4$	$3;5$	$3;6$
4	$4;1$	$4;2$	$4;3$	$4;4$	$4;5$	$4;6$
5	$5;1$	$5;2$	$5;3$	$5;4$	$5;5$	$5;6$
6	$6;1$	$6;2$	$6;3$	$6;4$	$6;5$	$6;6$

Táblázat: *A lehetséges kimeneteleket négyzet alakú táblázatba rendeztük*

A 36 eset mindegyike $\frac{1}{36}$ valószínűségű:

bal \ jobb	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
3	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
4	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
5	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

Táblázat: *A lehetséges kimenetelek helyére a valószínűségeiket írtuk*

4. Példa: Két dobókockával dobott számok összege. Egyes társasjátékokban két dobókockával dobunk, és a játékban a dobott számok összege, azaz – a szimuláció nyelvén mondva – a

```
RAND.BETWEEN(1;6)+ RAND.BETWEEN(1;6)
```

utasítás értéke számít. A következő táblázatban at összeg értékeit tüntetjük fel:

bal \ jobb	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Táblázat: *Az összeg értékeit írtuk a táblázatba*

A táblázat 36 cellájában

2 -es érték 1 -szer

3 -as érték 2 -szer

4 -es érték 3 -szor

5 -ös érték 4 -szer

6 -os érték 5 -ször

7 -es érték 6 -szor

8 -as érték 5 -ször

9 -es érték 4 -szer

10 -es érték 3 -szor

11 -es érték 2 -szer

12 -es érték 1 -szer

szerepel. Ezért annak a valószínűsége, hogy az összeg értéke

2 , egyenlő $1/36$ -dal

3 , egyenlő $2/36$ -dal

4 , egyenlő $3/36$ -dal

5 , egyenlő $4/36$ -dal

6 , egyenlő $5/36$ -dal

7 , egyenlő $6/36$ -dal

8 , egyenlő $5/36$ -dal

9 , egyenlő $4/36$ -dal

10 , egyenlő $3/36$ -dal

11 , egyenlő $2/36$ -dal

12 , egyenlő $1/36$ -dal

Ha az összeg lehetséges értékeit és a kapott valószínűségeket táblázatba rendezzük, az alábbi táblázatot kapjuk:

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Táblázat: *Az összeg eloszlása*

5. Példa: Két dobókockával dobott számok szorzata. Ha valakit a dobott számok szorzata érdekel, akkor az elméleti okoskodáshoz olyan táblázatra van szüksége, mely a szorzatokat tartalmazza:

bal \ jobb	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Táblázat: *A szorzat értékeit írtuk a táblázatba*

A táblázat 36 cellájában

1 -es érték	1 -szer
2 -es érték	2 -szer
3 -as érték	2 -szer
4 -es érték	3 -szor
5 -ös érték	2 -szer
6 -os érték	4 -szer
8 -as érték	2 -szer
9 -es érték	1 -szer
10 -es érték	2 -szer
12 -es érték	4 -szer
15 -ös érték	2 -szer
16 -es érték	1 -szer
18 -as érték	2 -szer
20 -as érték	2 -szer
24 -es érték	2 -szer
25 -es érték	1 -szer
30 -es érték	2 -szer
36 -es érték	1 -szer

szerepel. Ezért annak a valószínűsége, hogy a szorzat értéke

1 , 1/36 -dal egyenlő

2 , 2/36 -dal egyenlő

3 , 2/36 -dal egyenlő

4 , 3/36 -dal egyenlő

5 , 2/36 -dal egyenlő

6 , 4/36 -dal egyenlő

8 , 2/36 -dal egyenlő

9 , 1/36 -dal egyenlő

10 , 2/36 -dal egyenlő

12 , 4/36 -dal egyenlő

15 , 2/36 -dal egyenlő

16 , 1/36 -dal egyenlő

18 , 2/36 -dal egyenlő

20 , 2/36 -dal egyenlő

24 , 2/36 -dal egyenlő

25 , 1/36 -dal egyenlő

30 , 2/36 -dal egyenlő

36 , 1/36 -dal egyenlő

Ha a szorzat lehetséges értékeit és a kapott valószínűségeket táblázatba rendezzük, az alábbi táblázatot kapjuk:

1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36
$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Táblázat: *A szorzat eloszlása*

6. Példa: Két dobókockával dobott számok hányadosa. Ha valakit a dobott számok hányadosa (mondjuk, a bal kézből gutított dobókockán lévő szám osztva a jobb kézből gurított dobókockán lévő szám) érdekel, akkor az elméleti okoskodáshoz olyan táblázatra van szüksége, mely a hányadosokat tartalmazza:

bal \ jobb	1	2	3	4	5	6
1	1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6
2	2	1	2/3	1/2	2/5	1/3
3	3	3/2	1	3/4	3/5	1/2
4	4	2	4/3	1	4/5	2/3
5	5	5/2	5/3	5/4	1	5/6
6	6	3	2	3/2	6/5	1

Táblázat: *A hányados értékeit írtuk a táblázatba*

A táblázat 36 cellájában az

$1/6$	érték	1 -szer
$1/5$	érték	1 -szer
$1/4$	érték	1 -szer
$1/3$	érték	2 -szer
$2/5$	érték	1 -szer
$1/2$	érték	3 -szor
$3/5$	érték	1 -szer
$2/3$	érték	2 -szer
$3/4$	érték	1 -szer
$4/5$	érték	1 -szer
$5/6$	érték	1 -szer
1	érték	6 -szor
$6/5$	érték	1 -szer
$5/4$	érték	1 -szer
$4/3$	érték	1 -szer
$3/2$	érték	2 -szer
$5/3$	érték	1 -szer
2	érték	3 -szor
$5/2$	érték	1 -szer
3	érték	2 -szer
4	érték	1 -szer
5	érték	1 -szer
6	érték	1 -szer

szerepel. Ezért annak a valószínűsége, hogy a hányados értéke

1/6 , egyenlő 1/36 -dal

1/5 , egyenlő 1/36 -dal

1/4 , egyenlő 1/36 -dal

1/3 , egyenlő 2/36 -dal

2/5 , egyenlő 1/36 -dal

1/2 , egyenlő 3/36 -dal

3/5 , egyenlő 1/36 -dal

2/3 , egyenlő 2/36 -dal

3/4 , egyenlő 1/36 -dal

4/5 , egyenlő 1/36 -dal

5/6 , egyenlő 1/36 -dal

1 , egyenlő 6/36 -dal

6/5 , egyenlő 1/36 -dal

5/4 , egyenlő 1/36 -dal

4/3 , egyenlő 1/36 -dal

3/2 , egyenlő 2/36 -dal

5/3 , egyenlő 1/36 -dal

2 , egyenlő 3/36 -dal

5/2 , egyenlő 1/36 -dal

3 , egyenlő 2/36 -dal

4 , egyenlő 1/36 -dal

5 , egyenlő 1/36 -dal

6 , egyenlő 1/36 -dal

Ha a hányados lehetséges értékeit és a kapott valószínűségeket táblázatba rendezzük, az alábbi táblázatot kapjuk:

1/6	1/5	1/4	1/3	2/5	2/4	3/5	2/3	3/4	4/5	5/6	...
1/36	1/36	1/36	2/36	1/36	3/36	1/36	2/36	1/36	1/36	1/36	...

...	1	6/5	5/4	4/3	3/2	5/3	2	5/2	3	4	5	6
...	6/36	1/36	1/36	1/36	2/36	1/36	3/36	1/36	2/36	1/36	1/36	1/36

Táblázat: *A hányados eloszlása*

2. Diszkrét eloszlás

2.1. Valószínűségi változó

Amikor a megfigyelés eredményei, vagyis a lehetséges kimenetelek *számok*, akkor azt mondjuk, hogy **valószínűségi változó**val van dolgunk. A gyakorlati alkalmazásokban felbukkanó valószínűségi változók két fontos csoportba sorolhatók:

- A valószínűségi változónak véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok lehetséges értéke van, melyeket a valószínűségi változó pozitív valószínűséggel vesz fel. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a valószínűségi változó **diszkrét**.
- A valószínűségi változó lehetséges értékei egy véges vagy végtelen hosszúságú intervallumot tesznek ki, és a lehetséges értékek mindegyikének valószínűsége nulla. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a valószínűségi változó **folytonos**.

Valószínűségi változók jelölésére ebben a könyvben általában a latin ábécé nagybetűit fogjuk használni. Legtöbbször az X betűt vagy az Y -t, Z -t, melyeket esetleg indexekkel látunk el. (Más könyvekben a görög ábécé kisbetűit használják, leginkább a ξ -t és η -t.) Példák valószínűségi változók jelölésére:

- $X\ =$ melyik szám lesz felül, amikor egy dobókockával dobok
- $Y\ =$ ahány barátommal összefutok az utcán egy nap alatt
- $Z_1\ =$ amennyi időt várnom kell reggelente a villamosra, amikor jövök az egyetemre
- $Z_2\ =$ amennyi időt várnom kell a buszra, amikor megyek haza

Itt X és Y diszkrét, Z_1 és Z_2 folytonos valószínűségi változók.

2.2. Eloszlás és súlyfüggvény

Ha egy diszkrét valószínűségi változó minden lehetséges értékének megadjuk a valószínűségét (táblázattal, képlettel, stb.), akkor azt mondjuk, hogy megadjuk a **valószínűségi változó eloszlásá**t.

Ha (mindenféle valószínűségi változóra való tekintet nélkül) egy véges vagy megszámlálhatóan végtelen halmaz mindenegyes x eleméhez egy-egy nemnegatív $p(x)$ számot rendelünk úgy, hogy azok összege 1:

$$\sum_x p(x) \ = \ 1$$

akkor azt mondjuk, hogy megadunk egy **valószínűségi eloszlás**t (**valószínűség eloszlás**t), más kifejezéssel **normált eloszlás**t. A $p(x)$ függvényt **súlyfüggvény**nek (vagy **valószínűségi függvény**nek) nevezzük.

Egy X valószínűségi változó esetén $p(x)$ megadja annak a valószínűségét, hogy a véletlen X érték x -szel egyenlő:

$$p(x) \ = \ \mathrm{P}(\ X \ = \ x\ )$$

1. Példa: Fiatal házaspárok gyermekei. Tegyük fel, hogy egy szociológiai felmérésben fiatal házaspárok (akik 3 évnél nem régebben házasodtak) gyermekeinek számát vizsgálták. A gyermekek száma $0, 1, 2, 3$ lehet. A tapasztalatból tudhatjuk a négy lehetőség mindegyikének százalékos értékét. Tegyük fel, hogy ezek az alábbiak:

gyerekek száma	0	1	2	3
százalék	20	40	30	10

Táblázat: *Gyermekek számának eloszlása százalékokban*

(A négy darab százalék érték összege természetesen 100 .)

Ha egy fiatal házaspárt véletlenszerűen választunk, és tekintjük az alábbi valószínűségi változót:

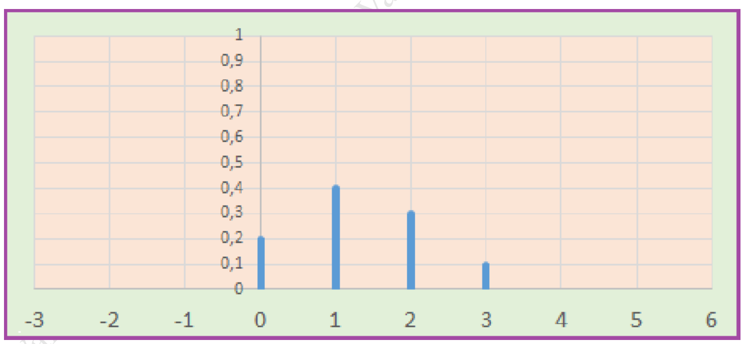
$$X = \text{gyermekek száma}$$

akkor a négy lehetséges érték mindegyikének a valószínűségét (a megfelelő százalék érték alapján) beírva a táblázatba megkapjuk az X valószínűségi változó eloszlását:

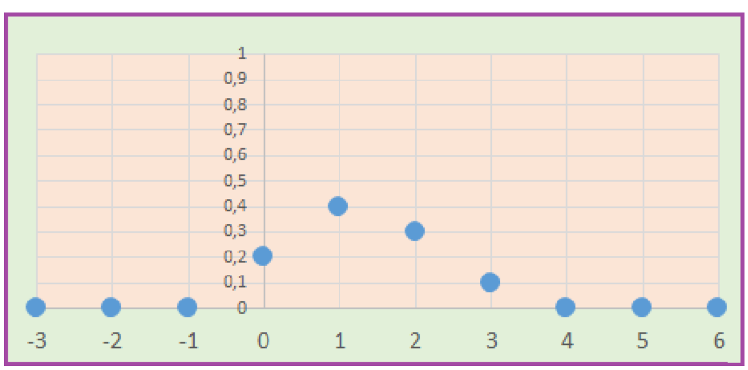
x	0	1	2	3
$p(x)$	0.2	0.4	0.3	0.1

Táblázat: *Gyermekek számának eloszlása*

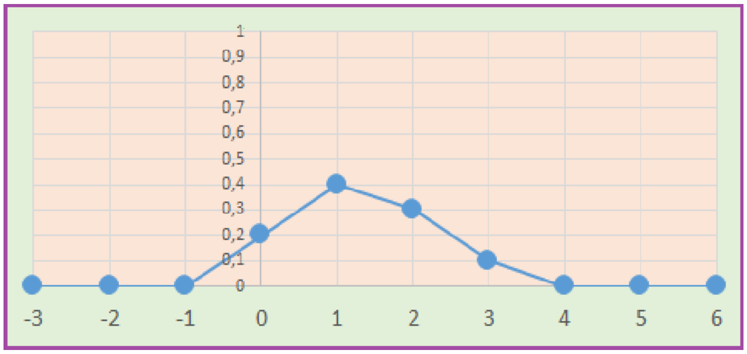
(A négy darab valószínűség érték összege természetesen 1.)



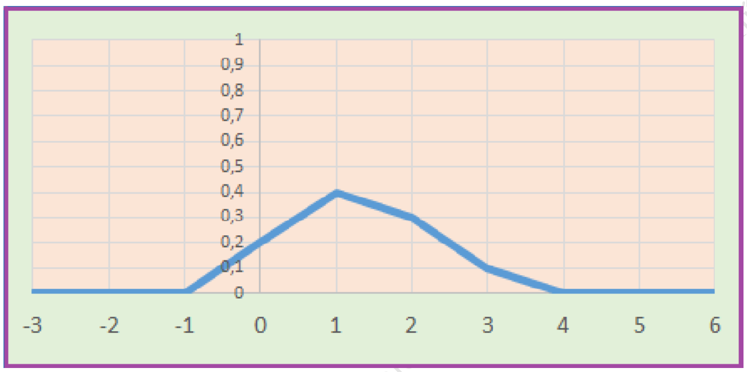
2. ábra. *Fiatal házaspárok gyermekei – súlyfüggvény pácikákkal*



3. ábra. *Fiatal házaspárok gyermekei – súlyfüggvény pontokkal*



4. ábra. *Fiatal házaspárok gyermekei – súlyfüggvény összekötött pontokkal*



5. ábra. *Fiatal házaspárok gyermekei – súlyfüggvény törött vonallal*

2. Példa: Szabályos dobókockával dobott szám. Szabályos dobókockával dobva a kapott szám az $1, 2, 3, 4, 5, 6$ számok akármelyike lehet, mindegyik ugyanakkora valószínűséggel. A dobott szám eloszlása:

x	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Táblázat: *Szabályos dobokockával dobott szám eloszlása*

Ebben a példában a lehetséges értékek mindegyike ugyanolyan valószínűségű.

Amikor a lehetséges értékek mindegyike ugyanolyan valószínűségű, akkor az eloszlást *(a lehetséges értékek halmazán vett) egyenletes eloszlás*nak nevezzük.

3. Példa: Két dobókockával dobott számok összege – ismét. Ha két dobókockával dobva a dobott számok összegét tekintjük, akkor az így kapott valószínűségi változó eloszlása:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Táblázat: *A dobott számok összegének eloszlása*

4. Példa: Két dobókockával dobott számok szorzata – ismét. Ha két dobókockával dobva a dobott számok szorzatát tekintjük, akkor az így kapott valószínűségi változó eloszlása:

x	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36
$p(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Táblázat: *A dobott számok szorzatának eloszlása*

2.3. Eloszlás szemléltetése

2.4. Eloszlásfüggvény

Egy adott normált eloszlás esetén egy x lehetséges értékkel kapcsolatban a $(-\infty, x]$ intervallum valószínűségét $F(x)$ -szel jelöljük:

$$F(x) = \mathrm{P}(\, (-\infty, x]\,)$$

Az $F(x)$ függvény neve: **eloszlásfüggvény**. Az eloszlásfüggvény értékét egy x helyen úgy kapjuk meg, hogy az x -nél kisebb vagy egyenlő összes k helyeken vesszük a súlyfüggvény értékét, és ezeket az értékeket összeadjuk:

$$F(x) = \sum_{k:\, k \le x} p(k)$$

Ha a szóban forgó eloszlás egy X valószínűségi változó eloszlása, akkor $F(x)$ jelentése nyilván annak a valószínűsége, hogy a véletlen X érték kisebb vagy egyenlő mint x :

$$F(x) = \mathrm{P}(\, X \le x\,)$$

Nyilvánvaló, hogy minden eloszlásfüggvény monoton növekedő, vagyis $x_1 < x_2$ esetén

$$F(\, x_1\,) \le F(\, x_2\,)$$

Az eloszlásfüggvény megváltozása az a és b pontok között azt mutatja, hogy mennyi a valószínűsége annak a halmaznak, mely az a -nál nagyobb, de b -t még meg nem haladó számokból áll:

$$F(\, b\,) - F(\, a\,) = \mathrm{P}(\, a < X \le b\,)$$

hiszen

$$F(\,b\,) - F(\,a\,) \;=\; \left(\sum_{k:\,k \le b} p(k) \right) \;-\; \left(\sum_{k:\,k \le a} p(k) \right) \;=\; \left(\sum_{k:\,a<k \le b} p(k) \right) \;=\; \mathrm{P}(\,a < X \le b\,)$$

Megjegyzés: A fenti definícióban az eloszlásfüggvény értelmezési tartománya a véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok lehetséges x értékek halmaza. Ilyen definíció mellett – mint alább példákat mutatunk rá – kényelmesen lehet az eloszlásfüggvényt táblázattal kezelni. Később, amikor majd folytonos eloszlásokról tanulunk, látni fogjuk, hogy folytonos eloszlásokkal kapcsolatban az eloszlásfüggvény értelmezési tartománya a teljes számegyenes lesz. Az egységes kezelés érdekében egy diszkrét eloszlás eloszlásfüggvényének definíciójában is megengedhetjük, hogy x tetszőleges valós szám legyen, hiszen az

$$F(x) \;=\; \mathrm{P}(X \le x)$$

képlet tetszőleges valós x esetén is értelmes. Könnyű meggyőződni arról, hogy ez az általánosabb definíció azt eredményezi, hogy egy diszkrét eloszlás eloszlásfüggvénye olyan monoton növekedő "lépcsős" függvény,

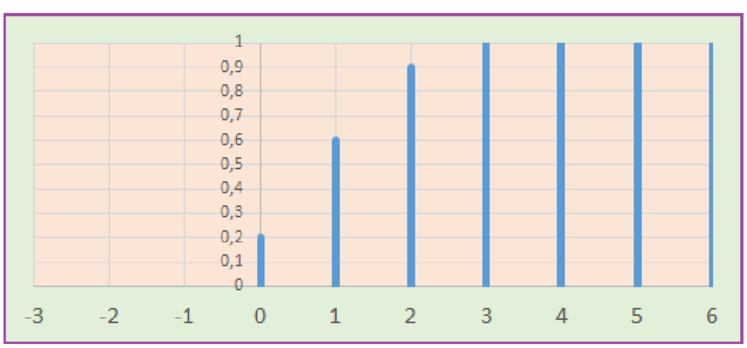
- melynek grafikonja vízszintes szakaszokból áll, és
- ahol a $p(x)$ súlyfüggvény pozitív értékkel értelmezett, ott az eloszlásfüggvénynek $p(x)$ nagyságú "ugrása" van.

1. Példa: Fiatal házaspárok gyermekei – eloszlásfüggvény. Az előző alfejeztben elképzeltük, hogy véletlenszerűen választunk egy fiatal házaspárt, és az X valószínűségi változót a gyerekeik számával definiáljuk. Ennek a valószínűségi változónak az eloszlását ott megadtuk egy táblázattal. Most a táblázatot kiegészítjük egy harmadik sorral, ami az eloszlásfüggvény értékeit tartalmazza a megadott x helyeken:

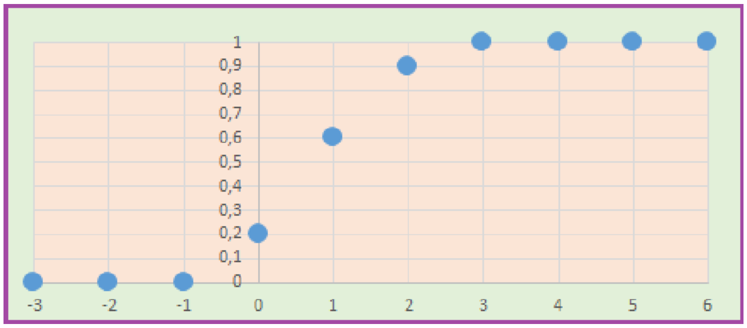
x	0	1	2	3
$p(x)$	0.2	0.4	0.3	0.1
$F(x)$	0.2	0.6	0.9	1.0

Táblázat: *Fiatal házaspárok gyermekei – súlyfüggvény és eloszlásfüggvény*

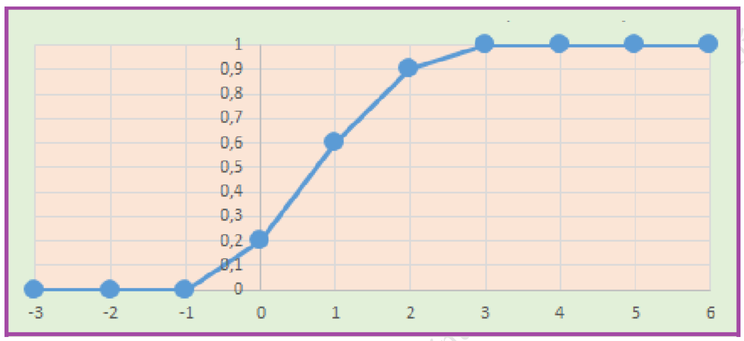
Vegyük észre, hogyan képződik a harmadik sor a másodikból: minden elem egyenlő a felette álló sorban tőle balra lévő és a felette lévő elemek összegével.



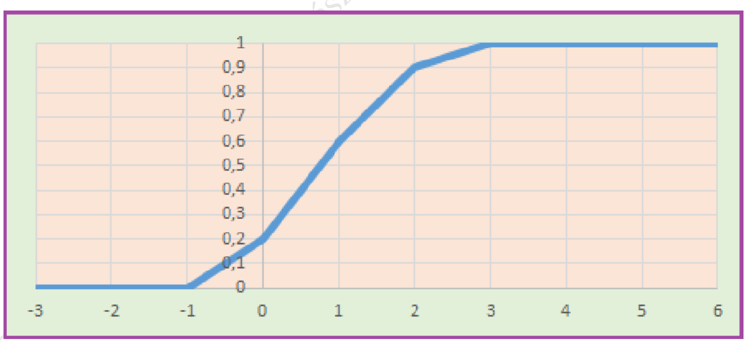
6. ábra. *Fiatal házaspárok gyermekei – eloszlásfüggvény (pálcikákkal)*



7. ábra. *Fiatal házaspárok gyermekei – eloszlásfüggvény (pontokkal)*

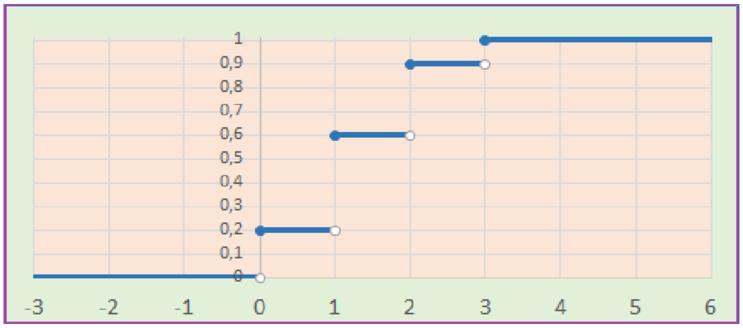


8. ábra. *Fiatal házaspárok gyermekei – eloszlásfüggvény (összekötött pontokkal)*



9. ábra. *Fiatal házaspárok gyermekei – eloszlásfüggvény (törött vonallal)*

Az eloszlásfüggvényt, mint minden x valós számra értelmezett "lépcsős" függvényt, a "Fiatal házaspárok gyermekei – eloszlásfüggvény" című ábrán grafikonjával is megadjuk. Tessék ellenőrizni, hogy a függvény ugrásai a $0,\ 1,\ 2,\ 3$ helyeken vannak, és az ugrások nagyságai $0,2$ $0.4,\ 0.3,\ 0.1$, vagyis a súlyfüggvény értékei.



10. ábra. *Fiatal házaspárok gyermekei – eloszlásfüggvény (mint lépcsős függvény)*

2. Példa: Két dobókockával dobott számok összege – eloszlásfüggvény. Ha két dobókockával dobva a dobott számok összegét tekintjük, akkor az így kapott valószínűségi változó eloszlását megadó második sor alá a harmadik sorba odaírhatjuk az eloszlásfüggvény értékeit:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$F(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{36}{36}$

Táblázat: *Az összeg súlyfüggvénye és eloszlásfüggvénye*

3. Példa: Két dobókockával dobott számok szorzata – eloszlásfüggvény. Ha két dobókockával dobva a dobott számok szorzatát tekintjük, akkor az így kapott valószínűségi változó eloszlását megadó második sor alá a harmadik sorba odaírhatjuk az eloszlásfüggvény értékeit:

x	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36
$p(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$F(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{14}{36}$	$\frac{16}{36}$	$\frac{17}{36}$	$\frac{19}{36}$	$\frac{23}{36}$	$\frac{25}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{28}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{32}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{36}{36}$

Táblázat: *A szorzat súlyfüggvénye és eloszlásfüggvénye*

2.5. Jobboldali eloszlásfüggvény

Egy adott normált eloszlás esetén egy x lehetséges értékkel kapcsolatban a $[x, \infty)$ intervallum valószínűségét $T(x)$ -szel jelöljük:

$$T(x) \ = \ \mathrm{P}(\ [x, \infty)\ )$$

A $T(x)$ függvény neve: **jobboldali eloszlásfüggvény**. A jobboldali eloszlásfüggvény értékét egy x helyen úgy kapjuk meg, hogy az x -nél nagyobb vagy egyenlő összes k helyeken vesszük a súlyfüggvény értékét, és ezeket az értékeket összeadjuk:

$$T(x) \ = \sum_{k:\, k \geq x} p(k)$$

Amikor valamilyen probléma kapcsán a most bevezetett $T(x)$ jobboldali eloszlásfüggvényt is és a korábban bevezetett $F(x)$ eloszlásfüggvényt is használjuk, akkor az $F(x)$ -et **baloldali eloszlásfüggvény**nek is nevezzük.

Ha a szóban forgó eloszlás egy X valószínűségi változó eloszlása, akkor $T(x)$ jelentése nyilván annak a valószínűsége, hogy a véletlen X nagyobb vagy egyenlő mint x :

$$T(x) \ = \ \mathrm{P}(X \geq x)$$

Nyilvánvaló, hogy minden jobboldali eloszlásfüggvény monoton csökkenő

$$T(x-1) \geq T(x)$$

Nyilvánvaló, hogy minden x -re fennáll az alábbi egyszerű összefüggés:

$$F(x) + T(x) - p(x) \ = \ 1$$

1. Példa: Fiatal házaspárok gyermekei – jobboldali eloszlásfüggvény. Egy véletlenszerűen választott fiatal házaspár gyerekeinek számával, mint valószínűségi változóval foglalkoztunk a fentiekben. Ennek a valószínűségi változónak az eloszlását és eloszlásfüggvényét megadtuk egy táblázattal. Most a táblázatot kiegészítjük egy negyedik sorral, ami a jobboldali eloszlásfüggvény értékeit tartalmazza a megadott x helyeken:

x	0	1	2	3
$p(x)$	0.2	0.4	0.3	0.1
$F(x)$	0.2	0.6	0.9	1.0
$T(x)$	1.0	0.8	0.4	0.1

Táblázat: *Gyermekek száma*
– súlyfüggvény, (baloldali) eloszlásfüggvény, jobboldali eloszlásfüggvény

2. Példa: Két dobókockával dobott számok összege – jobboldali eloszlásfüggvény. Két dobókockával dobva a dobott számok összegét vizsgáltuk. Ennek a valószínűségi változónak az eloszlását és eloszlásfüggvényét megadtuk egy táblázattal. Most a táblázatot kiegészítjük egy negyedik sorral, ami a jobboldali eloszlásfüggvény értékeit tartalmazza a megadott x helyeken:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$F(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{36}{36}$
$T(x)$	$\frac{36}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

Táblázat: *A dobott számok összege*
– súlyfüggvény, (baloldali) eloszlásfüggvény, jobboldali eloszlásfüggvény

3. Példa: Két dobókockával dobott számok szorzata – jobboldali eloszlásfüggvény. Két dobókockával dobva a dobott számok szorzatát vizsgáltuk. Ennek a valószínűségi változónak az eloszlását és eloszlásfüggvényét megadtuk egy táblázattal. Most a táblázatot kiegészítjük egy negyedik sorral, ami a jobboldali eloszlásfüggvény értékeit tartalmazza a megadott x helyeken:

x	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36
$p(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$F(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{14}{36}$	$\frac{16}{36}$	$\frac{17}{36}$	$\frac{19}{36}$	$\frac{23}{36}$	$\frac{25}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{28}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{32}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{36}{36}$
$T(x)$	$\frac{36}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{31}{36}$	$\frac{28}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{22}{36}$	$\frac{20}{36}$	$\frac{19}{36}$	$\frac{17}{36}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

Táblázat: *A dobott számok szorzata*
– súlyfüggvény, (baloldali) eloszlásfüggvény, jobboldali eloszlásfüggvény

4. Példa: Hány piros? (Korábbi feladat folytatása.) Egy dobozban 50 golyó van. Közülük 30 piros, 20 fehér. Kiveszünk 12 golyót visszatevés nélkül. Mi a valószínűsége annak, hogy a kivett golyók között pontosan k darab piros lesz? Válasz: A

$$p(x) \;=\; \frac{\binom{30}{k}\binom{20}{n-k}}{\binom{50}{12}} \qquad\qquad (\ k = 0, 1, 2, \dots 12\ )$$

valószínűséget Excellel (két tizedes pontossággal) kiszámítottuk minden szóbajövő k -ra, és azokat táblázatba rendeztük. Összegzéssel kiszámoltuk a baloldali eloszlásfüggvény értékeit is, és az értékeket a táblázat harmadik sorába írtuk. A jobboldali eloszlásfüggvény értékeit is kiszámoltuk, és a negyedik sorba raktuk. Íme a táblázat:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(x)$	0.00	0.00	0.00	0.01	0.03	0.09	0.19	0.26	0.23	0.13	0.05	0.01	0.00
$F(x)$	0.00	0.00	0.00	0.01	0.04	0.13	0.32	0.58	0.81	0.94	0.99	1.00	1.00
$T(x)$	1.00	1.00	1.00	1.00	0.99	0.96	0.87	0.68	0.42	0.19	0.06	0.01	0.00

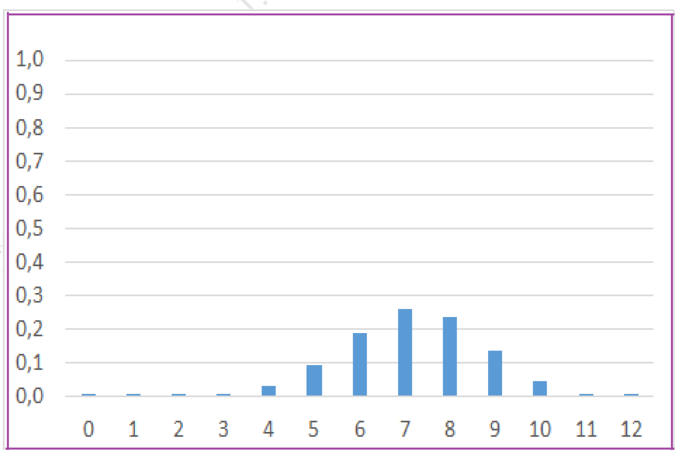
Táblázat: *Hány piros?*
– súlyfüggvény, (baloldali) eloszlásfüggvény, jobboldali eloszlásfüggvény

A táblázatból sok mindent ki lehet olvasni:

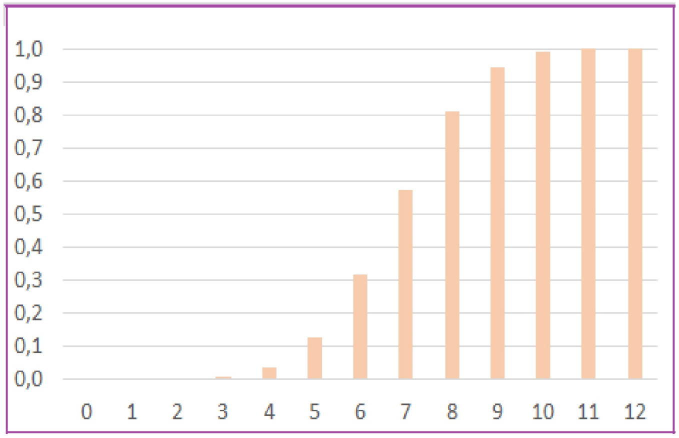
- Annak a valószínűsége, hogy legfeljebb 5 piros lesz a a kihúzottak között: $F(5) = 0.13$.
- Annak a valószínűsége, hogy legalább 5 piros lesz a a kihúzottak között: $T(5) = 0.96$.
- Annak a valószínűsége, hogy legalább 5 de legfeljebb 7 piros lesz a kihúzottak között:

$$F(7) - F(4) = 0.58 - 0.04 = 0.54 \qquad \text{avagy} \qquad T(5) - T(8) = 0.96 - 0.42 = 0.54$$

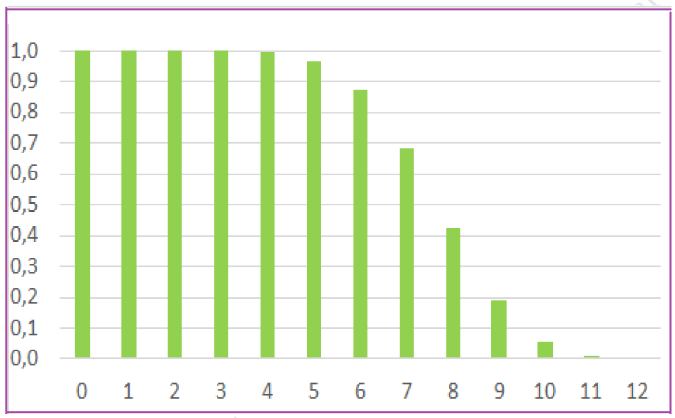
A súlyfüggvény, a (baloldali) eloszlásfüggvény és a jobboldali eloszlásfüggvény grafikonjait ábrákon is megadjuk. Jó, ha az ember az ábrákról is tud olvasni.



11. ábra. *Súlyfüggvény*



12. ábra. *(Baloldali) Eloszlásfüggvény*



13. ábra. *Jobboldali eloszlásfüggvény*

8. Példa: Tíz érmével hány fej? Valaki feldob 10 szabályos érmét. Vajon hány fej adódik az érméken?

Válasz: Mint korábban már meghatároztuk az x fej valószínűségét, és a $p(x)$ súlyfüggvény táblázatát is megadtuk.

$$\mathrm{P}(\ x\ \text{fej}\ ) = \frac{\binom{10}{x}}{2^{10}} \qquad (x = 0, 1, 2, \ldots, 10)$$

Most a táblázatot az $F(x)$ eloszlásfüggvény és a $T(x\ )$ jobboldali eloszlásfüggvény soraival is kiegészítjük:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(x)$	0.001	0.010	0.044	0.117	0.205	0.246	0.205	0.117	0.044	0.010	0.001
$F(x)$	0.001	0.011	0.055	0.172	0.377	0.623	0.828	0.945	0.989	0.999	1.000
$T(x)$	1.000	0.999	0.989	0.945	0.828	0.623	0.377	0.172	0.055	0.011	0.001

Táblázat: *Tíz érmével hány fej?*
– súlyfüggvény, (baloldali) eloszlásfüggvény, jobboldali eloszlásfüggvény

Ismét hangsúlyozzuk, hogy a tábálatból sok mindent ki lehet olvasni:

- Annak a valószínűsége, hogy legfeljebb 3 fejet dobunk: $F(3) \;=\; 0.172$.
- Annak a valószínűsége, hogy legalább 3 fejet dobunk: $T(3) \;=\; 0.945$.
- Annak a valószínűsége, hogy legalább 3 de legfeljebb 6 fejet dobunk:

$$F(6) - F(2) \;=\; 0.828 - 0.055 \;=\; 0.773 \qquad \text{avagy} \qquad T(3) - T(7) \;=\; 0.945 - 0.172 \;=\; 0.773$$

2.6. Medián

Adott diszkrét valószínűségi változó vagy eloszlás esetén az x számot **medián**nak nevezzük, ha úgy osztja ketté a számegyenest, hogy a $(-\infty; x]$ intervallum is és a $[x; +\infty)$ intervallum is legalább $\frac{1}{2}$ valószínűségű:

$$\mathrm{P}\,(\,(-\infty; x]\,)\;\geq\;\frac{1}{2} \qquad \text{és} \qquad \mathrm{P}\,(\,[x; +\infty)\,)\;\geq\;\frac{1}{2}$$

azaz

$$F(x) \geq \frac{1}{2} \qquad \text{és} \qquad T(x) \geq \frac{1}{2}$$

Megjegyzés: Előfordulhat, hogy a medián nem egyértelmű: az $1, 2, 3, 4, 5, 6$ számok halmazán az egyenletes eloszlás mediánja minden 3 és 4 közötti szám. Viszont az $1, 2, 3, 4, 5$ számok halmazán vett egyenletes eloszlásnak csak egyetlen mediánja van.

1. Példa: Fiatal házaspárok gyermekei – medián. Egy véletlenszerűen választott fiatal házaspár gyerekeinek számával, mint valószínűségi változóval foglalkoztunk a fentiekben. Ennek a valószínűségi változónak a mediánja 1. Ezt a tényt az eloszlásfüggvény és a jobboldali eloszlásfüggvény táblázatából kiolvasható:

x	0	**1**	2	3
$p(x)$	0.2	0.4	0.3	0.1
$F(x)$	0.2	0.6	0.9	1.0
$T(x)$	1.0	0.8	0.4	0.1

Táblázat: *Fiatal házaspárok gyermekei – medián*

Az

$$F(1) \;=\; 0.6 \geq \frac{1}{2} \qquad \text{és} \qquad T(1) \;=\; 0.8 \geq \frac{1}{2}$$

egyenlőtlenségekből látjuk, hogy a medián 1 .

2. Példa: Két dobókockával dobott számok összege – medián. Két dobókockával dobva a dobott számok összegét vizsgáltuk. Ennek a valószínűségi változónak a mediánja 7 . Ezt a tényt az eloszlásfüggvény és a jobboldali eloszlásfüggvény

x	2	3	4	5	6	**7**	8	9	10	11	12
$p(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$F(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{36}{36}$
$T(x)$	$\frac{36}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

Táblázat: *Dobott számok összege – medián*

táblázatából kiolvasható

$$F(7) \;=\; \frac{21}{36} \geq \frac{1}{2} \qquad \text{és} \qquad T(7) \;=\; \frac{21}{36} \geq \frac{1}{2}$$

egyenlőtlenségekből látjuk.

3. Példa: Két dobókockával dobott számok szorzata – medián. Két dobókockával dobva a dobott számok szorzatát vizsgáltuk. Ennek a valószínűségi változónak a mediánja 10 . Ezt a tényt az eloszlásfüggvény és a jobboldali eloszlásfüggvény

x	1	2	3	4	5	6	8	9	**10**	12	15	16	18	20	24	25	30	36
$p(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$F(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{14}{36}$	$\frac{16}{36}$	$\frac{17}{36}$	$\frac{19}{36}$	$\frac{23}{36}$	$\frac{25}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{28}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{32}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{36}{36}$
$T(x)$	$\frac{36}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{31}{36}$	$\frac{28}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{22}{36}$	$\frac{20}{36}$	$\frac{19}{36}$	$\frac{17}{36}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

Táblázat: *Dobott számok szorzata – medián*

táblázatából kiolvasható

$$F(10) \;=\; \frac{19}{36} \geq \frac{1}{2} \qquad \text{és} \qquad T(10) \;=\; \frac{19}{36} \geq \frac{1}{2}$$

egyenlőtlenségekből látjuk.

2.7. Kétdimenziós valószínűségi változó

Ha egy jelenséggel kapcsolatban két valószínűségi változóval van dolgunk – legyenek ezek X és Y –, akkor ezekből, mint koordinátákból összerakhatunk egy (X, Y) párt. (X, Y) -t **kétdimenziós valószínűségi változó**nak hívjuk.

1. Példa: Fiatal házaspárok – gyerekek és nagyszülők. Tegyük fel, hogy egy szociológiai felmérésben fiatal házaspárok (akik 3 évnél nem régebben házasodtak) gyerekeinek számát és az élő nagyszülők számát vizsgálták. A gyerekek száma $0, 1, 2, 3$ lehet, a nagyszülők száma pedig $0, 1, 2, 3, 4$. Ez összesen 4 -szer 5 , azaz 20 lehetőséget ad, melyeket egy táblázatba célszerű elrendezni. A tapasztalatból tudhatjuk a 20 lehetőség mindegyikének százalékos értékét. Tegyük fel, hogy ezek az alábbiak:

nagyszülők száma					
4	6.0	12.0	9.0	3.0	
3	8.0	16.0	12.0	4.0	
2	3.0	6.0	4.5	1.5	
1	2.0	4.0	3.0	1.0	
0	1.0	2.0	1.5	0.5	
	0	1	2	3	gyerekek száma

Táblázat: *Gyermekek és nagyszülők – kétdimenziós eloszlás százalékokban*
(A százalék értékek összege 100)

Ha egy fiatal házaspárt véletlenszerűen választunk, és tekintjük az alábbi két valószínűségi változót:

$$X = \text{gyerekek száma}, \quad Y = \text{nagyszülők száma}$$

akkor az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó 20 lehetséges értéke mindegyikének a valószínűségét (a megfelelő százalék érték alapján) beírva a táblázatba megkapjuk az (X, Y) **kétdimenziós valószínűségi változó eloszlásá**t:

y					
4	0.060	0.120	0.090	0.030	
3	0.080	0.160	0.120	0.040	
2	0.030	0.060	0.045	0.015	
1	0.020	0.040	0.030	0.010	
0	0.010	0.020	0.015	0.005	
	0	1	2	3	x

Táblázat: *Gyermekek és nagyszülők – kétdimenziós eloszlás*
(A valószínűségek összege 1)

2. Példa: Hány piros, hány kék? – ismét. Az 1. fejezet 5. alfejezetében az 5. példában feltettük, hogy egy dobozban 45 darab golyó van, melyek közül 10 darab piros, 15 darab kék, 20 darab fehér. Kiveszünk 8 darab golyót visszatevés nélkül, és megfigyeljük, hogy a kivett golyók között hány piros és hány kék van:

$$X = \text{ahány piros van a kivett golyók között}$$

$$Y = \text{ahány kék van a kivett golyók között}$$

Akkor ott kiszámoltuk annak a valószínűségét, hogy a kivett golyók között pontosan x darab piros és pontosan y darab kék lesz. A válasz ez volt:

$$\frac{\binom{10}{x}\binom{15}{y}\binom{20}{8-x-y}}{\binom{45}{8}}$$

minden olyan x -re és y -ra, melyek eleget tesznek a következő egyenlőtlenségeknek:

$$0 \leq x \leq 8$$
$$0 \leq y \leq 8$$
$$0 \leq 8-x-y \leq 8$$

Ezekből a valószínűségekből az alábbi táblázatot raktuk ott össze:

y										
8	0.000									
7	0.001	0.000								
6	0.004	0.005	0.001							
5	0.016	0.026	0.013	0.002						
4	0.031	0.072	0.054	0.015	0.001					
3	0.033	0.102	0.108	0.048	0.009	0.001				
2	0.019	0.076	0.106	0.067	0.019	0.002	0.000			
1	0.005	0.027	0.049	0.040	0.017	0.003	0.000	0.000		
0	0.001	0.004	0.008	0.009	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	x

Táblázat: *Hány piros, hány kék? – kétdimenziós eloszlás*

Vegyük észre, hogy a fenti képlet, illetve ez a táblázat nem más, mint az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó eloszlása matematikai képlettel, illetve táblázattal megadva..

Kérdés: Mi a valószínűsége annak, hogy $Y < 2X$, azaz a kihúzott kékek száma kevesebb mint a kihúzott pirosak számának a kétszerese?

Válasz: Ha előszedjük középiskolás tudásunkat, és meggondoljuk, hogy az $y < 2x$ egyenlőtlenség milyen (x, y) -okra teljesül, akkor könnyen ellenőrizhetjük, hogy azokra az (x, y) -okra teljesül, amilyen helyekre 1 -eket tettünk az alábbi táblázatban:

y										
8	..0..	..0..	..0..	..0..	..0..	..1..	..1..	..1..	..1..	
7	..0..	..0..	..0..	..0..	..1..	..1..	..1..	..1..	..1..	
6	..0..	..0..	..0..	..0..	..1..	..1..	..1..	..1..	..1..	
5	..0..	..0..	..0..	..1..	..1..	..1..	..1..	..1..	..1..	
4	..0..	..0..	..0..	..1..	..1..	..1..	..1..	..1..	..1..	
3	..0..	..0..	..1..	..1..	..1..	..1..	..1..	..1..	..1..	
2	..0..	..0..	..1..	..1..	..1..	..1..	..1..	..1..	..1..	
1	..0..	..1..	..1..	..1..	..1..	..1..	..1..	..1..	..1..	
0	..0..	..1..	..1..	..1..	..1..	..1..	..1..	..1..	..1..	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	x

Táblázat: *Az $y < 2x$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza*

A kérdezett valószínűséget úgy kapjuk meg, hogy összeadjuk azokat a valószínűségeket az (X, Y) eloszlásának a táblázatában, melyek az 1 -eknek megfelelő helyen vannak. Ezt az összeadást az Excelben a `SUMPRODUCT` (magyarul: `SZORZATÖSSZEG`) utasítással nagyon egyszerű végrehajtani.

2.8. Kétdimenziós eloszlás és súlyfüggvény

Ha egy kétdimenziós diszkrét valószínűségi változó minden lehetséges értékének megadjuk a valószínűségét (táblázattal, képlettel, stb.), akkor azt mondjuk, hogy megadjuk a **kétdimenziós valószínűségi változó eloszlását**.

Ha (mindenféle valószínűségi változóra való tekintet nélkül) egy véges vagy megszámlálhatóan végtelen síkbeli halmaz (x, y) elemeihez nemnegatív $p(x, y)$ számokat rendelünk úgy, hogy azok összege 1 :

$$\sum_{(x,y)} p(x, y) \; = \; 1$$

akkor azt mondjuk, hogy megadunk egy **kétdimenziós (más szóval: síkbeli) valószínűségi eloszlást**, más kifejezéssel kétdimenziós (más szóval: síkbeli) **normált eloszlást**. A $p(x, y)$ függvényt **súlyfüggvény**nek (vagy **valószínűségi függvény**nek) nevezzük.

Egy (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó esetén $p(x, y)$ annak a valószínűségét adja meg, hogy a véletlen (X, Y) érték (x, y) -szel egyenlő, vagyis a véletlen X érték x -szel egyenlő, és a véletlen Y érték pedig y -nal egyenlő:

$$p(x, y) \; = \; \mathrm{P}(\; X = x, Y = y\;)$$

2.9. Módusz

Egy diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékei közül a legvalószínűbbet a valószínűségi változó **módusz**ának nevezzük. Ha több ilyen érték is van, akkor több módusz is van. Ha egy eloszlást csak úgy önmagában – mindenféle valószínűségi változó nélkül – vizsgálunk, akkor azt az x értéket, mely(ek)re $p(x)$ maximális, **az eloszlás móduszá(i)**nak nevezzük.

1. Példa: Fiatal házaspárok gyermekei – módusz. Egy véletlenszerűen választott fiatal házaspár gyerekeinek számával, mint valószínűségi változóval foglalkoztunk a fentiekben. Ennek a valószínűségi változónak a módusza 1. Ezt a tényt a valószínűségi változó eloszlásának táblázatából kiolvashatjuk:

x	0	1	2	3
$p(x)$	0.2	0.4	0.3	0.1

Táblázat: *Fiatal házaspárok gyermekei – módusz*

2. Példa: Két dobókockával dobott számok összege – módusz. Két dobókockával dobva a dobott számok összegét vizsgáltuk. Ennek a valószínűségi változónak a módusza 7 . Ezt a tényt a valószínűségi változó eloszlásának táblázatából kiolashatjuk:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Táblázat: *Dobott számok összege – módusz*

3. Példa: Két dobókockával dobott számok szorzata – módusz. Két dobókockával dobva a dobott számok szorzatát vizsgáltuk. Ennek a valószínűségi változónak két módusza van: a 6 és a 12. Ezt a tényt a valószínűségi változó eloszlásának táblázatából kiolashatjuk:

x	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36
$p(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Táblázat: *Dobott számok szorzata – módusz*

2.10. Valószínűségek megadása súlyokkal

Ócska a pénztárcám. Egyrészt kevés benne a papírpénz (ez talán nem a pénztárca hibája), másrészt – és most erre kell odafigyelni – az aprópénz kihullik belőle, és a táskám alját nyomja. Kis unokám nagyon élvezi, ha ott turkálhat. Véletlenszerűen választ és kivesz egy érmét, aztán tanulmányozza, nézegeti. Vagy visszateszi, vagy nem. Aztán ugyanezt teszi megint, megint, és így tovább. Tegyük fel, hogy a választáskor egy-egy érme esélye arányos az érme súlyával. Ez a feltevés vitatható, de eléggé elfogadhatónak tűnik. Hogy igazából mi a valószínűség legelfogadhatóbb numerikus értéke, az kis unokámat sem érdekli, és most itt minket sem.

Eléggé érzékeny mérleggel megmértem az érméket. A tizedgrammnyi pontossággal mért tömegek és – az elfogadott arányossági elv szerinti – valószínűségek így festenek:

érme	**5 Ft**	**10 Ft**	**20 Ft**	**50 Ft**	**100 Ft**	**200 Ft**		
tömeg (g)	4.2	6.1	7.0	7.7	8.0	9.5	42.5	tömegek összege
vsz	**0.10**	**0.14**	**0.17**	**0.18**	**0.19**	**0.22**	1.00	vsz-ek összege

Táblázat: *Tömegek és valószínűségek*

Minden egyes érme valószínűségét úgy számoltuk ki, hogy a tömegét elosztottuk az érmék tömegeinek összegével. Ez az egyszerű művelet az arányokat megtartja, és garantálja azt, hogy a valószínűségek összege 1 legyen.

Más elvek szerint is felvehetjük a valószínűségeket. Lehet, hogy valakinek az a hipotézis tűnik elfogadhatóbbnak, hogy az érmék valószínűségei az átmérőikkel arányosak. Másvalaki azt gondolhatja, hogy – az érméket korongoknak tekintve – a korongok területei a meghatározóak a valószínűségeik szempontjából, és ezért a valószínűségeket a területekkel arányosnak tekinti. Tolómércével nem volt nehéz megmérni az érmék átmérőit és kiszámolni a korongok területét, majd pedig ezekből az adatokból a valószínűségeket meghatározni. Íme ezeknek az adatoknak a táblázata:

érme	**5 Ft**	**10 Ft**	**20 Ft**	**50 Ft**	**100 Ft**	**200 Ft**		
átmérő (mm)	21.2	24.5	26.3	27.5	23.8	28.3	151.6	átmérők összege
vsz	**0.14**	**0.16**	**0.17**	**0.18**	**0.16**	**0.19**	1.00	vsz-ek összege

érme	**5 Ft**	**10 Ft**	**20 Ft**	**50 Ft**	**100 Ft**	**200 Ft**		
terület (mm^2)	353.0	471.4	543.3	594.0	444.9	629.0	3035.5	területek összege
vsz	**0.12**	**0.15**	**0.18**	**0.19**	**0.15**	**0.21**	1.00	vsz-ek összege

Táblázat: *Átmérők és valószínűségek – Területek és valószínűségek*

Kicsit furcsa módon, de mégis így van: ha – mondjuk – azok az átmérők azok az adatok, melyekkel arányosan vesszük fel a valószínűségeket, akkor is **súlyok**nak nevezzük ezeket az adatokat. Tehát ilyenkor az átmérők adják a súlyokat. Ha pedig a korongok területeivel arányosan vesszük fel a valószínűségeket, akkor azt mondjuk, hogy a valószínűségek felvételéhez a korongok területei **adják a súlyokat**. Figyelem! A súly szó ilyen értelmű használata nem tévesztendő össze a valószínűségek eloszlását jellemző, korábban definiált súlyfüggvény fogalmával.

Mivel a 100 forintos érme súlyosabb, mint az 50 -es, de az 50 -es átmérője nagyobb, mint a 100 forintosé, a valószínűségek szempontjából nem mindegy, hogy miket tekintünk súlyoknak. Ha a valószínűségeket az érmék tömege alapján vesszük fel, akkor a 100 forintos érme valószínűbb, mint az 50 -es. Ha viszont az érmék átmérője vagy korongjuk területe alapján, akkor az 50 forintos érme valószínűbb, mint a 100 forintos.

Feladat: Érmét kotorászok a táska aljából. Táskám aljában 5 darab 50 forintos, 1 darab 100 forintos, 2 darab 200 forintos érme lapul. Az érmék tömegei:

érme	**5 Ft**	**10 Ft**	**20 Ft**	**50 Ft**	**100 Ft**	**200 Ft**
tömeg (g)	4.2	6.1	7.0	7.7	8.0	9.5

Táblázat: *Az érmék tömegei*

Feltételezzük, hogy az érmék valószínűségei arányosak a tömegeikkel. Mi a valószínűsége annak, hogy 100 forintost vagy 200 forintost húzunk?

Megoldás:

érme	**5 darab 50 Ftos**	**1 darab 100 Ftos**	**2 darab 200 Ft-os**		
	5 x 7.7 =	1 x 8.0 =	2 x 9.5 =		
tömeg (g)	38.3	8.0	19	65.3	súlyok összege
vsz	**0.59**	**0.12**	**0.29**	1.00	vsz-ek öszege

Táblázat: *Tömegek és valószínűségek*

A kérdezett valószínűség: $\mathbf{0.12} + \mathbf{0.29} = \mathbf{0.41}$, amit természetesen úgy is megkaphattunk volna, hogy a **0.59** valószínűséget 1 -ből kivonjuk.

2.11. Konstans értékű valószínűségi változók

A valószínűségi változók közé soroljuk azokat a véletlentől függő számokat is, amelyek úgy függenek a véletlentől, hogy nem függenek tőle. Ha egy dobókocka minden oldalára a 6 -os számot írjuk, akkor ezzel a dobókockával csak 6 -ost lehet dobni. Egy ilyen "konstans értékű" valószínűségi változó

- súlyfüggvénye a szóban forgó konstans helyen 1 -gyel egyenlő,
- az eloszlásfüggvénye a szóban forgó konstans előtt 0 -val, utána 1 -gyel egyenlő,
- az eloszlásáról pedig azt mondjuk, hogy a szóban forgó helyre *koncentrálódik*.

3. Folytonos egyenletes eloszlás

Bár a könyvnek az első részében diszkrét valószínűségi változókkal foglalkozunk, ebben a fejezetben folytonos valószínűségi változókkal fogunk megismerkedni. Egyelőre csak a legegyszerűbb folytonos problémákat ismerjük meg. Bonyolultabb folytonos problémákat a könyv későbbi részeiben fogunk tárgyalni.

3.1. Folytonos egyenletes eloszlás

Egyenletes eloszlás intervallumon: Tekintsünk egy véges, pozitív hosszúságú I intervallumot. Tegyük fel, hogy valaki az intervallumban választ egy véletlen pontot, vagyis a lehetséges pontok az I intervallum pontjai, azaz az eseménytér az I intervallum. Ha az I intervallum bármely részintervalluma esetén annak a valószínűsége, hogy a véletlen pont a részintervallumba esik

$$\textit{részintervallum valószínűsége} = \frac{\textit{részintervallum hossza}}{\textit{az I intervallum hossza}}$$

akkor azt mondjuk, hogy a véletlen pont egyenletes eloszlású az I intervallumon. Ilyenkor egy részintervallum valószínűsége csak a részintervallum hosszától függ, de attól, hogy maga a részintervallum, hol helyezkedik el az eseménytéren belül, attól nem függ. Ha egy részintervallumot eltolunk az eseménytéren belül, akkor ettől a részintervallum valószínűsége nem változik meg. Ez e két tény indokolja az "egyenletes eloszlás" elnevezést.

Egyenletes eloszlás síkbeli halmazon: Tekintsünk egy véges, pozitív területű S halmazt a síkon. Tegyük fel, hogy valaki a halmazban választ egy véletlen pontot, vagyis a lehetséges pontok az S halmaz pontjai, azaz az eseménytér az S halmaz. Ha az S halmaz bármely részhalmaza esetén annak a valószínűsége, hogy a véletlen pont a részhalmazba esik

$$\textit{részhalmaz valószínűsége} = \frac{\textit{részhalmaz területe}}{\textit{az S halmaz területe}}$$

akkor azt mondjuk, hogy a véletlen pont egyenletes eloszlású az S halmazon. Ilyenkor egy részhalmaz valószínűsége csak a részhalmaz területétől függ, de attól, hogy maga a részhalmaz, hol helyezkedik el az eseménytéren belül, attól nem függ. Ha egy részhalmazt eltolunk az eseménytéren belül, akkor ettől a részhalmaz valószínűsége nem változik meg.

Egyenletes eloszlás térbeli halmazon: Anélkül, hogy részleteznénk, megemlítjük, hogy egy véges, pozitív térfogatú S térrészen vett egyenletes eloszlás esetén:

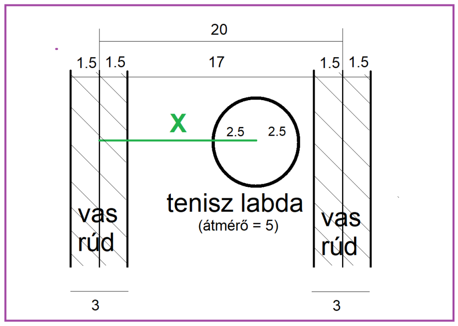
$$\textit{részhalmaz valószínűsége} = \frac{\textit{részhalmaz térfogata}}{\textit{az S halmaz térfogata}}$$

Tekinteve, hogy a hosszúság, a terület, a térfogat számítása általában a geometria körébe tartozik, az ilyen valószínűségszámítási problémákat **geometriai problémák**nak is nevezzük.

Egyenletes eloszlású, független koordináták. Megemlítjük azt a nyilvánvaló tényt, hogy ha egy síkbeli, illetve térbeli pont koordinátáit egymástól függetlenül választjuk meg egy-egy intervallumban, akkor a pont egyenletes eloszlású lesz az intervallumok által (direktszorzatként) meghatározott téglalapban, illetve téglatestben.

1. Feladat: Átrepül-e a teniszlabda a kerítésünkön? Kerítésünk 3 cm átmérőjű függőleges, hosszú rudakból áll. A rudak 20 cm periódussal ismétlődnek, a köztük lévő rések 17 cm-esek. A kerítésnek háttal állva, néhány méterről, merőlegesen nekidobok a kerítésnek egy 5 cm átmérőjű teniszlabdát. Mi a valószínűsége, hogy a teniszlabda a vasrudak érintése nélkül átrepül közöttük?

Megoldás: Amikor a teniszlabda eléri vagy elérné az oszlopok síkját, a középpontnak a tőle balra legközelebbi rúd középvonalától való távolsága véletlentől függ. Jelöljük a cm-ekben vett távolságot X -szel. X lehetséges értékei a $[\,0\,,\,20\,]$ intervallumot teszik ki, és X nyilván egyenletes eloszlást követ ezen az intervallumon.



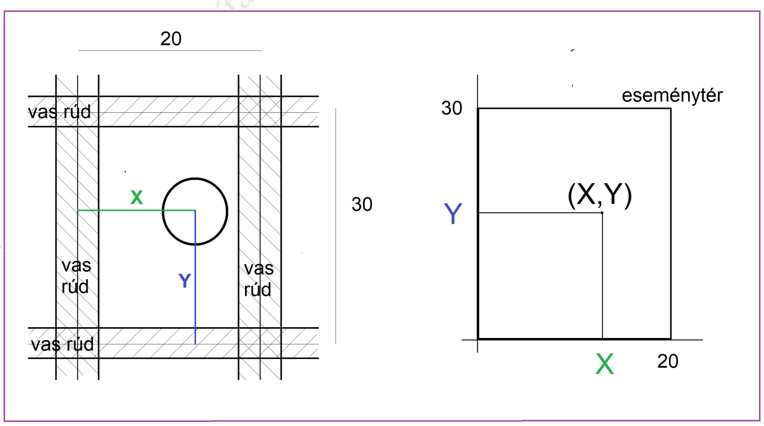
14. ábra. *Az X valószínűségi változó értelmezése*

Az érintés nélküli átrepülés feltétele, hogy a $4 < X < 16$ egyenlőtlenségek teljesüljenek. A $(\,4\,,\,16\,)$ intervallum hossza 12. Így a keresett valószínűség:

$$\mathrm{P}(\text{ érintés nélkül átrepül }) \;=\; \frac{12}{20} \;=\; 0.6$$

2. Feladat: Átrepül-e a teniszlabda a szomszéd kerítésén? A szomszéd kerítése ugyanilyen függőleges rudakbkól áll, mint a miénk, de az ő kerítésében vízszintes rudak is vannak 30 cm-es periódussal. Mi a valószínűsége, hogy a szomszéd kerítésén átrepül a teniszlabda?

Megoldás: Amikor a teniszlabda eléri vagy elérné a kerítés síkját, a középpontnak a tőle balra legközelebbi rúd középvonalától való távolsága legyen X, az alatta lévő vízszintes rúd középvonalától való távolsága legyen Y .



15. ábra. *Az X és az Y valószínűségi változók értelmezése*

Az (X,Y) lehetséges értékei a $[\,0\,,\,20\,]$ és a $[\,0\,,\,30\,]$ intervallumok által meghatározott téglalapot teszik ki, és $(\,X,Y\,)$ nyilván egyenletes eloszlást követ. Az érintés nélküli átrepülés feltétele, hogy a $4 < X < 16$, $4 < Y < 26$ egyenlőtlenségek teljesüljenek, vagyis (X,Y) egy kisebb téglalapban legyen. Ennek a téglalapnak a területe $12 \cdot 22$, ezért:

$$\mathrm{P}(\text{ érintés nélkül átrepül }) \;=\; \frac{12 \cdot 22}{600} \;=\; 0.44$$

Megjegyzés: X és Y függetlensége miatt így is okoskodhattunk volna:

$$\text{P(érintés nélkül átrepül)} =$$

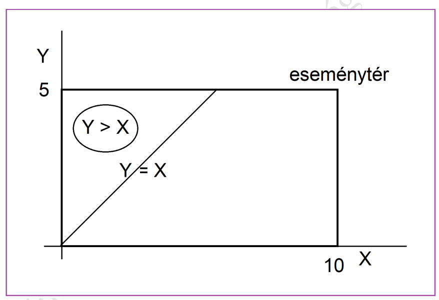
$$= \text{P}(\ 4 < X < 16 \ \text{ és } \ 4 < Y < 26\ ) = \text{P}(\ 4 < X < 16\ ) \cdot \text{P}(\ 4 < Y < 26\ ) = \frac{12}{20} \cdot \frac{22}{30} = 0.44$$

3. Feladat: Utazás busszal, metróval. Reggelente busszal és metróval megyek az egyetemre, és átszállás közben még a reggelimet is megveszem. A busz 10 percenként jár, a metró 5 percenként. Mivel az induláskor nem taktikázok, a megállóban a buszra való X várakozási időm egyenletes eloszlású 0 és 10 perc között. Kiszámíthatatlan, hogy a reggeli vásárlásom hogyan alakul, ezért a metró állomáson a várakozással eltöltött Y időm egyenletes eloszlású 0 és 5 perc között, akármennyi is az X értéke .

- Mi a valószínűsége, hogy a metróra többet kell várnom, mint a buszra?
- Mi a valószínűsége, hogy a várakozással eltöltött összes időm több, mint 4 perc?

Megoldás:

- Az (X, Y) lehetséges értékei a $[\ 0\ ,\ 10\ ]$ és a $[\ 0\ ,\ 5\ ]$ intervallumok által meghatározott téglalapot teszik ki, és ezen a téglalapon (X, Y) egyenletes eloszlást követ. Az $Y > X$ esemény ebben a téglalapban egy háromszöget jelöl ki, melynek területe a téglalap területének a negyede.

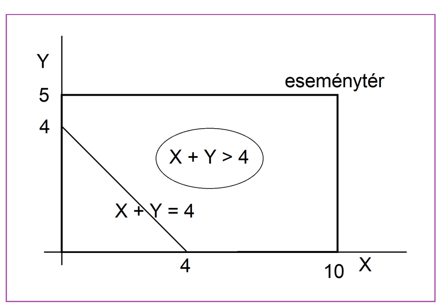


16. ábra. *Az $Y > X$ esemény a téglalapban egy háromszöget jelöl ki*

Ezért

$$\text{P(A metróra többet kell várnom, mint a buszra)} = \frac{1}{4} = 0.25$$

- Az $X + Y > 4$ esemény a téglalapban egy ötszöget határoz meg, melynek komplementere egy derékszögű háromszög.



17. ábra. *Az $X + Y > 4$ esemény a téglalapban egy ötszöget jelöl ki*

A derékszögű háromszög területe 8 terület egység, ezért az ötszögé $50 - 8 = 42$ terület egység. A keresett valószínűség:

$$\text{P(A várakozással eltöltött összes időm több, mint 4 perc)} = \frac{42}{50} = 0.84$$

4. Feladat: Randevú. Jancsi és Juliska déli 12 óra és 1 óra között randevúznak. Azonban a randevú menetébe és sikerébe beleszól a véletlen is: az 1 órás időtartam alatt egymástól független pillanatban érkeznek, mindketten egyenletes eloszlás szerint, és – megbeszélésük szerint – 20 percet várakoznak, aztán elmennek. Így aztán vagy találkoznak, vagy nem. Mi a valószínűsége, hogy találkoznak?

Megoldás folytonos modellel: Jancsi érkezési pillanatát jelöljük X -szel, Juliskáét Y -nal. Mivel X és Y függetlenek és egyenletes eloszlásúak 0 és 1 között, az (X, Y) pont egyenletes eloszlású a $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$ pontok által meghatározott négyzetben. Nyilvánvaló, hogy a találkozó létrejöttének feltétele, hogy az

$$Y \geq X - 1/3 \quad , \quad Y \leq X + 1/3$$

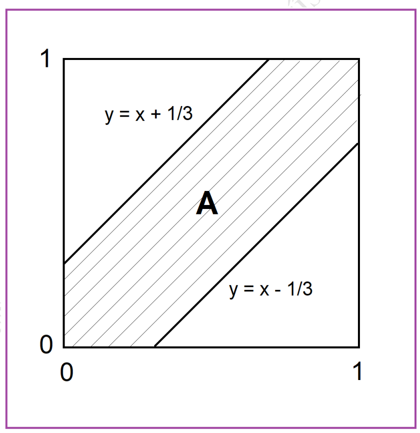
egyenlőtlenségek teljesüljenek, vagyis az (X, Y) pontnak az

$$y = x - 1/3$$

egyenletű egyenes és az

$$y = x + 1/3$$

egyenletű egyenes közötti A tartományban kell . Ez a tartomány egy hatszög.



18. ábra. *A kedvező kimenetelek halmaza az A -val jelölt hatszög*

A hatszög komplementere a négyzetben két derékszögű háromszög, melyeknek befogói $2/3$ hosszúak. A két háromszögből egy kis négyzetet lehet összerakni, melynek oldalhossza $2/3$. Ezért a két háromszög együttes területe $4/9$, hatszögé pedig $1 - 4/9 = 5/9$. A keresett valószínűség egyenlő a hatszög területe osztva a négyzet területével (ami 1), ezért:

$$\text{P(találkoznak)} = \frac{5}{9} = 0.555\,6 = 0.57$$

Közelítés diszkrét modellel: Az előző megoldásban – helyesen – folytonos modellt használtunk, most – kissé pontatlan, de tanulságos – diszkrét modellt adunk a problémára: az időt egész percekben fogjuk mérni. Ilyen szemlélet mellett a fiatalok érkezési pillanatai (jelöljük ezeket most is X -szel és Y -nal) egyenletes eloszlást követnek az $\{1, 2, \ldots, 59, 60\}$ halmazon, és az (X, Y) számpár egyenletes eloszlást követ a $3\,600$ elemből álló halmazon, melyet az alábbi ábrán szemléltetünk:

	1	2	3	4	5	6	.	.	.	55	56	57	58	59	60	X
1	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
2	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
3	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
4	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
5	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
6	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
.	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
.	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
.	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
55	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
56	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
57	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
58	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
59	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
60	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
Y																

Táblázat: *Az összes lehetséges kimenetel*

A találkozó létrejöttének feltétele most az, hogy az

$$Y \geq X - 20 \quad , \quad Y \leq X + 20$$

egyenlőtlenségek teljesüljenek, vagyis az (X, Y) pontnak az az alábbi ábrán $*$ -gal jelölt pontok halmazába kell esni.

	1	.	.	.	20	21	.	.	.	40	41	.	.	.	60	X
1	*	*	*	*	*	*										
.	*	*	*	*	*	*	*									
.	*	*	*	*	*	*	*	*								
.	*	*	*	*	*	*	*	*	*							
20	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*						
21	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*					
.		*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*				
.			*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*			
.				*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*		
40					*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
41						*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
.							*	*	*	*	*	*	*	*	*	
.								*	*	*	*	*	*	*	*	
.									*	*	*	*	*	*	*	
60										*	*	*	*	*	*	
Y																

Táblázat: *A kedvező kimenetelek*

Egyszerű elemi feladat megszámolni, hogy hány $*$ található ezen az ábrán: 2040 . Tehát a találkozó valószínűségére – ezzel a modellel – az alábbi eredményt kapjuk:

$$\mathrm{P}(\text{ találkoznak }) = \frac{2\,040}{3\,600} = 0.566\,7 = 0.57$$

Az eredményt összevetve a pontos megoldás eredményével látjuk, hogy a diszkrét modell kb. 0.01 -dal nagyobb valószínűséget ad, mint a folytonos modell. Ez a hiba nem nagy, de jelzi, hogy oda kell figyelni arra, hogy folytonos problémát folytonos modellel kezeljünk.

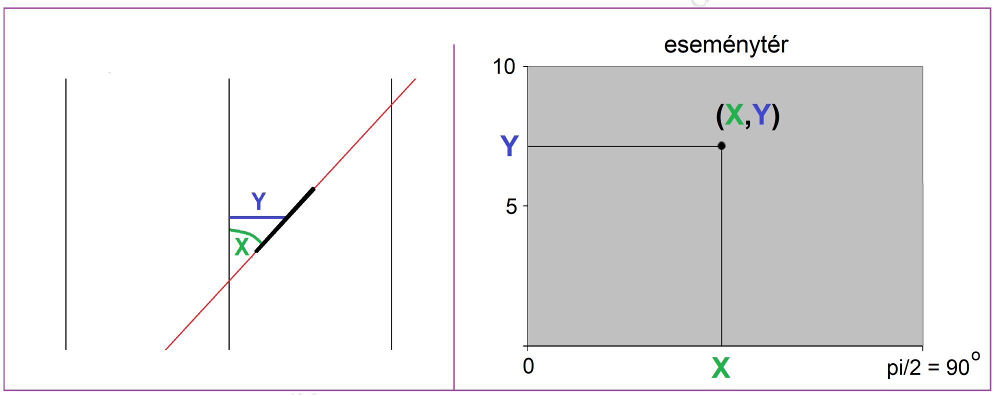
Megoldás aprólékosabb diszkrét modellel: Ha percek helyett másodpercekkel dolgozunk a modellben, akkor az összes esetek száma $3\,600$ -nak a négyzete, ami $12\,960\,000$, a kedvező esetek számára pedig $7\,202\,400$ adódik, amiből a

$$\mathrm{P}(\text{ találkoznak }) = \frac{7\,202\,400}{12\,960\,000} = 0.555\,7$$

valószínűséget kapjuk. Ezt az eredményt összevetve a folytonos megoldás eredményével látjuk, hogy ez a diszkrét modell már csak kb. 0.001 -del nagyobb valószínűséget ad mint a folytonos modell.

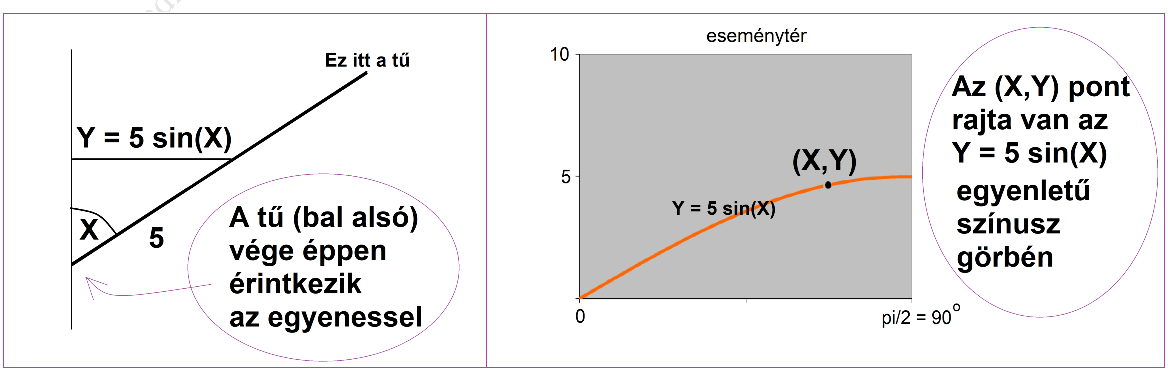
5. Feladat: Buffon féle tű probléma. Párhuzamos egyeneseket húzunk egy nagy papírra (vagy a földre) egymástól 20 cm távolságra. Egy 10 cm hosszú tűt elég magasról hetykén leejtünk. A tű vagy metszi valamelyik egyenest, vagy egyiket sem metszi. Mi a valószínűsége annak, hogy a tű metszi valamelyik egyenest?

Megoldás: Jelöljük X -szel a tű által meghatározott egyenesnek a párhuzamos egyenesekkel bezárt hegyes szögét radiánban mérve, Y -nal pedig a tű középpontjának a hozzá legközelebb lévő egyenestől való távolságát. Nyilván $0 \le X \le \pi/2$, illetve $0 \le Y \le 10$. X és Y függetlensége miatt (X, Y) egyenletes eloszlású a $[\,0\,;\,\pi/2\,]$, illetve $[\,0\,;\,10\,]$ intervallumok által meghatározott 5π területű T téglalapon:



19. ábra. *A tű minden helyzete a téglalap egyik pontjának felel meg*

Egyszerű trigonometriai probléma annak ellenőrzése, hogy ha a tű vége éppen érintkezik valamelyik egyenessel, akkor $Y = 5\sin(X)$, azaz az (X, Y) pont az $y = 5\sin(x)$ egyenletű színusz görbén van:



20. ábra. *A tű vége éppen érintkezik valamelyik egyenessel*

Ezért metszés pontosan akkor áll fenn, ha $Y < 5\sin(X)$, azaz az (X, Y) pont az

$$y \ = \ 5\sin(x)$$

egyenletű görbe alatti A tarományba esik. Ezért a keresett valószínűség egyenlő ennek az A tartománynak a területe osztva a téglalap területével:

$$\mathrm{P(\ metszés\ )} \ = \ \frac{A \text{ területe}}{T \text{ területe}} \ = \ \frac{\int_0^{\pi/2} 5\sin(x)\,dx}{5\pi} \ = \ \frac{\int_0^{\pi/2} \sin(x)\,dx}{\pi} \ = \ \frac{1}{\pi}$$

3.2. RAND utasítás

Az Excelben a 0 és 1 közötti értékeket felvevő

```
RAND(),  magyarul VÉL()
```

utasítás olyan véletlen számot állít elő, mely egyenletes eloszlást követ a $[0;1]$ intervallumon. Az üres zárójelpár nem elírás: az Excel formai szabályai szerint a `RAND` mögé oda kell írni a `()` üres zárójelpárt. A `RAND` utasítással generált véletlen számokat **random szám**oknak hívjuk. Ha valaki a `RAND.BETWEEN` utasítással generált véletlen számokat is **random szám**oknak hívja, akkor illik utalni rá, hogy 0 és 1 közötti, vagy egész értékű-e a véletlen szám.

Jelölés: Könyvünkben a `RAND` utasítás által előállított véletlen szám jelölésére RND -t írunk. Több véletlen szám használata esetén azokat – a matematika szokásai szerint – indexezéssel különböztetjük meg egymástól: az RND_1 és RND_2 jelölésekben az indexek arra utalnak, hogy két különböző véletlen számról van szó. Az Excel nem használ indexeket, az Excelben `RAND` utasítás többszöri alkalmazása különböző, független véletlen számokat jelentenek. Például a

```
2*RAND() + 3*RAND()
```

Excel utasításra könyvünkben az indexeket is tartalmazó

$$2\,\mathrm{RND}_1 + 3\,\mathrm{RND}_2$$

képlettel utalunk. Ha indexek nélkül

$$2\,\mathrm{RND} + 3\,\mathrm{RND}$$

írnánk, akkor matematikai

$$2\,\mathrm{RND} + 3\,\mathrm{RND} \ = \ 5\,\mathrm{RND}$$

összevonás miatt a

```
2*RAND() + 3*RAND()
```

Excel utasítást helytelenül összekeverhetnénk a

```
5*RAND()
```

utasítással.

3.3. Random számok tulajdonságai

A `RAND` utasítást az Excelben úgy találták ki, hogy a random számokra igazak az alábbiak:

1. Akármilyen x szám esetén annak a valószínűsége, hogy egy random szám pontosan egyenlő x -szel, nulla:

$$\mathrm{P}(\ \mathrm{RND}\ =\ x\ )\ =\ 0$$

2. $0\ \le\ a\ \le\ b\ \le\ 1$ esetén annak a valószínűsége, hogy egy random szám az a és b által meghatározott intervallumba esik, egyenlő az intervallum hosszával. Az, hogy az intervallum zárt, nyitott vagy félig zárt, félig nyitott, közömbös:

$$\mathrm{P}(\ a \le \mathrm{RND} \le b\ )\ =\ b-a$$

$$\mathrm{P}(\ a \le \mathrm{RND} < b\ )\ =\ b-a$$

$$\mathrm{P}(\ a < \mathrm{RND} \le b\ )\ =\ b-a$$

$$\mathrm{P}(\ a < \mathrm{RND} < b\ )\ =\ b-a$$

3. Bármely x számra, ami 0 és 1 között van, igaz, hogy

$$\mathrm{P}(\ \mathrm{RND} \le x\ )\ =\ \mathrm{P}(\ \mathrm{RND} < x\ )\ =\ x$$

4. A random számok fontos tulajdonsága, hogy ha két random számból, mint koordinátákból egy számpárt rakunk össze, akkor az $(\ \mathrm{RND}_1\ ,\ \mathrm{RND}_2\ )$ pont egyenletes eloszlást követ az egységnyi oldalú négyzetben. Ez – többek között – azt is jelenti, hogy ha A a négyzetnek akármilyen részhalmaza, akkor

$$\mathrm{P}\,(\ (\mathrm{RND}_1, \mathrm{RND}_2) \in A\ )\ =\ A \text{ területe}$$

5. Ha három random számból, mint koordinátákból egy $(\ \mathrm{RND}_1\ , \mathrm{RND}_2\ , \mathrm{RND}_3\ )$ pontot rakunk össze a 3 -dimenziós térben, akkor ez a pont egyenletes eloszlást követ a tér egységnyi oldalú kockájában. Ez – többek között – azt is jelenti, hogy ha A a kockának akármilyen részhalmaza, akkor

$$(\mathrm{RND}_1, \mathrm{RND}_2, \mathrm{RND}_3) \in A\ )\ =\ \text{ az } A \text{ halmaz térfogata}$$

6. Ha n random számból, mint koordinátákból egy $(\ \mathrm{RND}_1\ , \mathrm{RND}_2\ , \ldots, \mathrm{RND}_n\ )$ pontot rakunk össze az n -dimenziós térben, akkor ez a pont egyenletes eloszlást követ az n -dimenziós tér egységnyi oldalú kockájában. Ez – többek között – azt is jelenti, hogy ha A az n -dimenziós kockának akármilyen részhalmaza, akkor

$$\mathrm{P}\,(\ (\mathrm{RND}_1, \mathrm{RND}_2, \ldots, \mathrm{RND}_n) \in A\ )\ =\ \text{ az } A \text{ halmaz } n\text{-dimenziós térfogata}$$

7. Megjegyezzük, hogy azok a tulajdonságok, melyeket az előző három pontban fogalmaztunk meg, igazából azt jelentik, hogy ha több random számot állítunk elő Excellel, akkor azoknak egymáshoz semmi közük sincsen, azok egymástól függetlenek. A függetlenség matematikai definícióját később tanuljuk.

3.4. Lineáris transzformációk

1. **Nyújtás**
   Ha az RND random számot
   megszorzunk egy 1-nél nagyobb a számmal,
   akkor egy új valószínűségi változót kapunk, melyet $a\,\mathrm{RND}$ -vel szokás jelölni. Nyilvánvaló, hogy
   $a\,\mathrm{RND}$ egyenletes eloszlást követ a $[0; a]$ intervallumon.

2. **Zsugorítás**
   Ha az RND random számot
   megszorzunk egy 1 -nél kisebb pozitív a számmal,
   akkor egy új valószínűségi változót kapunk, melyet $a\,\mathrm{RND}$ -vel szokás jelölni. Nyilvánvaló, hogy
   $a\,RND$ egyenletes eloszlást követ a $[0;a]$ intervallumon.

3. **Eltolás**
   Ha az RND random számhoz
   hozzáadunk egy b számot,
   akkor egy új valószínűségi változót kapunk, melyet $(\mathrm{RND}+b)$ -vel szokás jelölni. Nyilvánvaló, hogy
   $(RND+b)$ egyenletes eloszlást követ a $[b;b+1]$ intervallumon.

4. **Nyújtás és eltolás (vagy: zsugorítás és eltolás)**
   Ha az RND random számot
   megszorzunk egy pozitív a számmal, és a szorzathoz hozzáadunk egy b számot,
   akkor egy új valószínűségi változót kapunk, melyet $(a\,\mathrm{RND}+b)$ -vel szokás jelölni. Nyilvánvaló, hogy
   $(a\,RND+b)$ egyenletes eloszlást követ a $[b;a+b]$ intervallumon.

5. **Tükrözés az origóra**
   Ha az RND random számnak
   vesszük az ellentettjét (vagyis megszorozzunk (-1) -gyel),
   akkor egy új valószínűségi változót kapunk, melyet $(-\mathrm{RND})$ -vel szokás jelölni. Nyilvánvaló, hogy
   $(-RND)$ egyenletes eloszlást követ a $[-1;0]$ intervallumon.

6. **Tükrözés és nyújtás**
   Ha az RND random számot
   megszorzunk egy 1 -nél nagyobb abszolút értékű negatív a számmal,
   akkor egy új valószínűségi változót kapunk, melyet $(a\,\mathrm{RND})$ -vel szokás jelölni. Nyilvánvaló, hogy
   $(a\,RND)$ egyenletes eloszlást követ az $[a;0]$ intervallumon $(a<0)$.

7. **Tükrözés és zsugorítás**
   Ha az RND random számot
   megszorzunk egy egy 1 -nél kisebb abszolút értékű negatív a számmal,
   akkor egy új valószínűségi változót kapunk, melyet $(a\,\mathrm{RND})$ -vel szokás jelölni. Nyilvánvaló, hogy
   $(a\,RND)$ egyenletes eloszlást követ az $[a;0]$ intervallumon $(a<0)$.

8. **Tükrözés, nyújtás és eltolás**
   Ha az RND random számot
   megszorzunk egy 1 -nél nagyobb abszolút értékű negatív a számmal, és a szorzathoz hozzáadunk egy b számot,
   akkor egy új valószínűségi változót kapunk, melyet $(a\,\mathrm{RND}+b)$ -vel szokás jelölni. Nyilvánvaló, hogy
   $(a\,RND+b)$ egyenletes eloszlást követ a $[a+b;b]$ intervallumon.

9. **Tükrözés, zsugorítás és eltolás**
   Ha az RND random számot
   megszorzunk egy 1 -nél kisebb abszolút értékű negatív a számmal, és a szorzathoz hozzáadunk egy b számot,
   akkor egy új valószínűségi változót kapunk, melyet $(a\,\mathrm{RND}+b)$ -vel szokás jelölni. Nyilvánvaló, hogy
   $(a\,RND+b)$ egyenletes eloszlást követ a $[a+b;b]$ intervallumon $(a<0)$.

4. További fogalmak és szabályok

4.1. További fogalmak eseményekre

Teljes eseményrendszer: Véges vagy végtelen sok egymást kizáró eseményeknek egy olyan rendszere, hogy ezeknek az eseményeknek az úniója a biztos esemény. Halmazelméleti nyelven mondva: az eseménytér "partíciója", azaz felbontása egymást kizáró halmazok úniójára.

Események növekvő sorozata: A sorozat bármely eleme maga után vonja a későbbieket:

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset A_4 \subset \ldots$$

Események csökkenő sorozata: A sorozat bármely eleme maga után vonja a korábbiakat:

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset A_4 \supset \ldots$$

Egy növekedő sorozat esetén nyilván fennállnak az alábbiak:

$$\begin{aligned} A_1 \cup A_2 &= A_2 \\ A_1 \cup A_2 \cup A_3 &= A_3 \\ A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 &= A_4 \\ A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 &= A_5 \end{aligned}$$

Egy csökkenő sorozat esetén nyilván fennállnak az alábbiak:

$$\begin{aligned} A_1 \cap A_2 &= A_2 \\ A_1 \cap A_2 \cap A_3 &= A_3 \\ A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 &= A_4 \\ A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 &= A_5 \end{aligned}$$

4.2. További szabályok eseményekre

Komplementer szabály: Bármely esemény komlementerének komplementere nem más, mint az eredeti esemény.

A sok egyéb, hasonlóan triviális szabály felsorolásától eltekintünk. Azonban – fontossága és furcsasága miatt – felhívjuk még a figyelmet a De Morgan szabályokra:

De Morgan szabály az únióra: Események úniójának komplementere egyenlő a komplementereik metszetével.

Két eseményre:

$$\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$$

Több eseményre:

$$\overline{A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}$$

De Morgan szabály a metszetre: Események metszetének komplementere egyenlő a komplementereik úniójával:

Két eseményre:

$$\overline{A_1 \cap A_2} \;=\; \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$$

Több eseményre:

$$\overline{A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n} \;=\; \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \ldots \cup \overline{A_n}$$

Tanácsoljuk, hogy ezeket a szabályokat rajzokkal, ún. Venn diagramokkal ellenőrizze az Olvasó.

4.3. Eloszlás transzformációja

Az új eloszlás valószínűségeinek kiszámolása összegzéssel történik. Ki kell gondolni, hogy az új eloszlás egyes tagjainak valószínűségeit a régi eloszlás mely tagjainak összegeként kapjuk meg.

1. Példa: Hány tagú a nagycsalád? Korábban vizsgáltuk az a problémát, melyben egy fiatal házaspárt véletlenszerűen választottunk, és tekintettük az alábbi két valószínűségi változót:

$$X \;=\; \text{gyerekek száma}, \qquad Y \;=\; \text{nagyszülők száma}$$

Az akkor mondott feltételek mellett meghatároztuk az (X,Y) kétdimenziós valószínűségi változó eloszlását:

y					
4	0.060	0.120	0.090	0.030	
3	0.080	0.160	0.120	0.040	
2	0.030	0.060	0.045	0.015	
1	0.020	0.040	0.030	0.010	
0	0.010	0.020	0.015	0.005	
	0	1	2	3	x

Táblázat: *Gyerekek és nagyszülők – kétdimenziós eloszlás*

Nézzük, hány tagú a nagycsalád, amikor a szülők, gyerekek mellett a nagyszülők is a családdal vannak. A nagycsalád létszáma nyilván $Z \;=\; 2+X+Y$. Ha a fiatal házaspárt véletlenszerűen választjuk akkor X is, Y is valószínűségi változó. Z eloszlásának minden egyes tagját az (X,Y) kétdimenziós valószínűségi változó eloszlásából a megfelelő valószínűségek összegeként kapjuk meg:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(\ Z \;=\; 2\ ) \;=\; 0.010 \\
&\mathrm{P}(\ Z \;=\; 3\ ) \;=\; 0.040 \;=\; 0.020+0.020 \\
&\mathrm{P}(\ Z \;=\; 4\ ) \;=\; 0.085 \;=\; 0.030+0.040+0.015 \\
&\mathrm{P}(\ Z \;=\; 5\ ) \;=\; 0.175 \;=\; 0.080+0.060+0.030+0.005 \\
&\mathrm{P}(\ Z \;=\; 6\ ) \;=\; 0.275 \;=\; 0.060+0.160+0.045+0.010 \\
&\mathrm{P}(\ Z \;=\; 7\ ) \;=\; 0.255 \;=\; 0.120+0.120+0.015 \\
&\mathrm{P}(\ Z \;=\; 8\ ) \;=\; 0.130 \;=\; 0.090+0.040 \\
&\mathrm{P}(\ Z \;=\; 9\ ) \;=\; 0.030
\end{aligned}$$

Táblázat: *Valószínűségek meghatározása összegzéssel*

Ha Z lehetséges értékeit és a hozzájuk tapadó valószínűségeket egy táblázatba rendezzük, megkapjuk Z eloszlását. Ezzel az eloszlással kell modelleznünk azt a problémát, ha egy véletlenszerűen választott fiatal házaspárhoz tartozó nagycsalád létszámát akarjuk vizsgálni.

z	2	3	4	5	6	7	8	9
P($Z = z$)	0.010	0.040	0.085	0.175	0.275	0.255	0.130	0.030

Táblázat: *A nagycsalád létszámának eloszlása*

2. Példa: Mi a valószínűsége, hogy három színes (piros vagy kék) golyót húzunk? Az 1. fejezet 7. alfejezetében az 5. példában feltettük, hogy egy dobozban 45 darab golyó van, melyek közül 10 darab piros, 15 darab kék, 20 darab fehér. Kiveszünk 8 darab golyót visszatevés nélkül, és megfigyeljük, hogy a kivett golyók között hány piros és hány kék van:

$$X = \text{ ahány piros van a kivett golyók között}$$

$$Y = \text{ ahány kék van a kivett golyók között}$$

Tekintsük a $Z = X + Y$ valószínűségi változót, ami azt fejezi ki, hogy hány színes (piros vagy kék) golyó van a kihúzott 8 golyó között. **Kérdés:** Mi a valószínűsége annak, hogy $Z = 3$?

Első megoldás: Az (X, Y) eloszlását megadó

y										
8	0.000									
7	0.001	0.000								
6	0.004	0.005	0.001							
5	0.016	0.026	0.013	0.002						
4	0.032	0.072	0.054	0.015	0.001					
3	0.033	0.102	0.108	0.048	0.009	0.001				
2	0.019	0.076	0.106	0.067	0.019	0.002	0.000			
1	0.005	0.027	0.049	0.040	0.017	0.003	0.000	0.000		
0	0.001	0.004	0.008	0.009	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	x

Táblázat: *Piros és kék golyók száma – kétdimenziós eloszlás*

táblázatban azokat a cellákat, melyek olyan (x, y) értkeknek felelnek meg, melyekre $x + y = 3$, és összadjuk a cellákban található valószínűségeket:

$$\mathrm{P}(\ Z = 3\ ) = 0.033 + 0.076 + 0.049 + 0.009 = 0.167$$

Második megoldás: Mivel a dobozban a 45 golyó között 25 színes golyó van, és közülük 8 -at húzunk ki, a 3 színes golyó valószínűsége:

$$\frac{\binom{25}{3}\binom{45-25}{8-3}}{\binom{45}{8}} = 0.165$$

(A két megoldásban az utolsó tizedesjegyben az eltérés a kerekítési hibákból adódik.)

3. Példa: Színes (piros vagy kék) golyók. (Az előző példa folytatása.) Határozzuk meg a Z valószínűségi változó eloszlását!

Első megoldás: Az (X,Y) eloszlását megadó fenti táblázatban Z minden lehetséges értékével kapcsolatban egy összeg adja meg a keresett valószínűséget:

$$\begin{array}{llll}
\mathrm{P}(\ Z\ =\ 0\ ) & =\ 0.001 & = & 0.001 \\
\mathrm{P}(\ Z\ =\ 1\ ) & =\ 0.005+0.004 & = & 0.009 \\
\mathrm{P}(\ Z\ =\ 2\ ) & =\ 0.019+0.027+0.008 & = & 0.054 \\
\mathrm{P}(\ Z\ =\ 3\ ) & =\ 0.033+0.076+0.049+0.009 & = & 0.165 \\
\mathrm{P}(\ Z\ =\ 4\ ) & =\ 0.031+0.102+0.106+0.040+0.005 & = & 0.284 \\
\mathrm{P}(\ Z\ =\ 5\ ) & =\ 0.016+0.072+0.108+0.067+0.017+0.001 & = & 0.281 \\
\mathrm{P}(\ Z\ =\ 6\ ) & =\ 0.004+0.026+0.054+0.048+0.019+0.003+0.000 & = & 0.156 \\
\mathrm{P}(\ Z\ =\ 7\ ) & =\ 0.001+0.005+0.013+0.015+0.009+0.002+0.000+0.000 & = & 0.047 \\
\mathrm{P}(\ Z\ =\ 8\ ) & =\ 0.000+0.000+0.001+0.002+0.001+0.001+0.000+0.000+0.000 & = & 0.005
\end{array}$$

Táblázat: *A valószínűségek meghatározása összegzéssel*

Második megoldás: Mivel a dobozban a 45 golyó között 25 színes golyó van, és közülük 8 -at húzunk ki, a z darab színes golyó valószínűsége:

$$\frac{\binom{25}{z}\binom{45-25}{8-z}}{\binom{45}{8}} \qquad (0\ \le\ z\ \le\ 8)$$

Ha z helyére behelyettesítjük a $0,1,2,3,4,5,6,7,8$ értékeket, ugyanazt az eredményt kapjuk, mint az első megoldásban.

4.4. Síkbeli eloszlás vetületei

Az új eloszlás valószínűségeinek kiszámolása összegzéssel történik. Ki kell gondolni, hogy az új eloszlás egyes tagjainak valószínűségeit a régi eloszlás mely tagjainak összegeként kapjuk meg.

1. Példa: Vetítés. Tegyük fel, hogy az (X,Y) kétdimenziós valószínűségi változó eloszlása az alábbi táblázatban adott eloszlás:

y					
4	0.060	0.120	0.090	0.030	
3	0.080	0.160	0.120	0.040	
2	0.030	0.060	0.045	0.015	
1	0.020	0.040	0.030	0.010	
0	0.010	0.020	0.015	0.005	
	0	1	2	3	x

Táblázat: (X,Y) *eloszlása*

Nyilvánvaló, hogy az X eloszlásának minden egyes tagját a a megfelelő oszlopban található valószínűségek összegeként kapjuk meg:

$$\text{P}(\ X\ =\ 0\ )\ =\ 0.060 + 0.080 + 0.030 + 0.020 + 0.010\ =\ 0.2$$

$$\text{P}(\ X\ =\ 1\ )\ =\ 0.120 + 0.160 + 0.060 + 0.040 + 0.020\ =\ 0.4$$

$$\text{P}(\ X\ =\ 2\ )\ =\ 0.090 + 0.120 + 0.045 + 0.030 + 0.015\ =\ 0.3$$

$$\text{P}(\ X\ =\ 3\ )\ =\ 0.030 + 0.040 + 0.015 + 0.010 + 0.005\ =\ 0.1$$

vagyis X eloszlása:

x	0	1	2	3
$p(x)$	0.2	0.4	0.3	0.1

Táblázat: X *eloszlása*

Könnyű látni, hogy az Y eloszlásának minden egyes tagját az (X, Y) eloszlásából a megfelelő sorban található valószínűségek összegeként lehet megkapni:

$$\text{P}(\ Y\ =\ 4\ )\ =\ 0.060 + 0.120 + 0.090 + 0.030\ =\ 0.30$$

$$\text{P}(\ Y\ =\ 3\ )\ =\ 0.080 + 0.160 + 0.120 + 0.040\ =\ 0.40$$

$$\text{P}(\ Y\ =\ 2\ )\ =\ 0.030 + 0.060 + 0.045 + 0.015\ =\ 0.15$$

$$\text{P}(\ Y\ =\ 1\ )\ =\ 0.020 + 0.040 + 0.030 + 0.010\ =\ 0.10$$

$$\text{P}(\ Y\ =\ 0\ )\ =\ 0.010 + 0.020 + 0.015 + 0.005\ =\ 0.05$$

2. Példa: Piros és kék golyók – vetítés. Az 1. fejezet 7. alfejezetében az 5. példában feltettük, hogy egy dobozban 45 darab golyó van, melyek közül 10 darab piros, 15 darab kék, 20 darab fehér. Kiveszünk 8 darab golyót visszatevés nélkül, és megfigyeljük, hogy a kivett golyók között hány piros és hány kék van:

$$X\ =\ \text{ahány piros van a kivett golyók között}$$

$$Y\ =\ \text{ahány kék van a kivett golyók között}$$

Ott meghatároztuk az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó eloszlását, egy táblázatot kaptunk. Gondoljuk meg ennek a példának a kapcsán is, hogy hogyan lehet (X, Y) eloszlásából X, illetve Y eloszlását meghatározni!

Első megoldás: Az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó eloszlását jelentő táblázat oszlopainak összegzésével kapjuk az X eloszlását:

$$\begin{array}{lll}
\text{P}(\ X\ =\ 0\ )\ = & 0.000 + 0.001 + 0.004 + 0.016 + 0.031 + 0.033 + 0.019 + 0.005 + 0.001 & =\ 0.109 \\
\text{P}(\ X\ =\ 1\ )\ = & 0.000 + 0.005 + 0.026 + 0.072 + 0.102 + 0.076 + 0.027 + 0.004 & =\ 0.312 \\
\text{P}(\ X\ =\ 2\ )\ = & 0.001 + 0.013 + 0.054 + 0.108 + 0.106 + 0.049 + 0.008 & =\ 0.339 \\
\text{P}(\ X\ =\ 3\ )\ = & 0.002 + 0.015 + 0.048 + 0.067 + 0.040 + 0.009 & =\ 0.181 \\
\text{P}(\ X\ =\ 4\ )\ = & 0.001 + 0.009 + 0.019 + 0.017 + 0.005 & =\ 0.051 \\
\text{P}(\ X\ =\ 5\ )\ = & 0.001 + 0.002 + 0.003 + 0.001 & =\ 0.008 \\
\text{P}(\ X\ =\ 6\ )\ = & 0.000 + 0.000 + 0.000 & =\ 0.001 \\
\text{P}(\ X\ =\ 7\ )\ = & 0.000 + 0.000 & =\ 0.000 \\
\text{P}(\ X\ =\ 8\ )\ = & 0.000 & =\ 0.000
\end{array}$$

Táblázat: X *eloszlásának meghatározása*

Teljesen hasonló módon – a táblázat sorainak összegzésével – kapjuk az Y eloszlását:

$\mathrm{P}(\ Y\ =\ 8\ )$	$=$ 0.000		$=\ 0.000$
$\mathrm{P}(\ Y\ =\ 7\ )$	$=$ $0.001 + 0.000$		$=\ 0.001$
$\mathrm{P}(\ Y\ =\ 6\ )$	$=$ $0.004 + 0.005 + 0.001$		$=\ 0.010$
$\mathrm{P}(\ Y\ =\ 5\ )$	$=$ $0.016 + 0.026 + 0.013 + 0.002$		$=\ 0.057$
$\mathrm{P}(\ Y\ =\ 4\ )$	$=$ $0.031 + 0.072 + 0.054 + 0.015 + 0.001$		$=\ 0.174$
$\mathrm{P}(\ Y\ =\ 3\ )$	$=$ $0.033 + 0.102 + 0.108 + 0.048 + 0.009 + 0.001$		$=\ 0.301$
$\mathrm{P}(\ Y\ =\ 2\ )$	$=$ $0.019 + 0.076 + 0.106 + 0.067 + 0.019 + 0.002 + 0.000$		$=\ 0.289$
$\mathrm{P}(\ Y\ =\ 1\ )$	$=$ $0.005 + 0.027 + 0.049 + 0.040 + 0.017 + 0.003 + 0.000 + 0.000$		$=\ 0.142$
$\mathrm{P}(\ Y\ =\ 0\ )$	$=$ $0.001 + 0.004 + 0.008 + 0.009 + 0.005 + 0.001 + 0.000 + 0.000 + 0.000$		$=\ 0.027$

Táblázat: Y *eloszlásának meghatározása*

Második megoldás: Az X eloszlásának meghatározása közvetlenül is történhet, hiszen ha a dobozban a 45 golyó között 10 piros golyó van, és közülük 8 -at húzunk ki, akkor az x darab piros golyó valószínűsége:

$$\frac{\binom{10}{x}\binom{45-10}{8-x}}{\binom{45}{8}} \qquad (0\ \leq\ x\ \leq\ 8)$$

Ha x helyére behelyettesítjük a $0,1,2,3,4,5,6,7,8$ értékeket, ugyanazt az eredményt kapjuk, mint az első megoldásban.

Az Y eloszlásának meghatározása is hasonlóan történhet, hiszen ha a dobozban a 45 golyó között 15 kék golyó van, és közülük 8 -at húzunk ki, akkor az y darab kék golyó valószínűsége:

$$\frac{\binom{15}{y}\binom{45-15}{8-y}}{\binom{45}{8}} \qquad (0\ \leq\ y\ \leq\ 8)$$

Ha y helyére behelyettesítjük a $0,1,2,3,4,5,6,7,8$ értékeket, ugyanazt az eredményt kapjuk, mint az első megoldásban.

4.5. További szabályok valószínűségekre

1. **Összegzési szabály három tetszőleges eseményre**: Ha A, B, C tetszőleges események, akkor

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\ A \cup B \cup C\ ) \ =\ & \\ & \mathrm{P}(\ A\ ) + \mathrm{P}(\ B\ ) + \mathrm{P}(\ C\ ) \\ - \ & \mathrm{P}(\ A \cap B\ ) - \mathrm{P}(\ A \cap C\ ) - \mathrm{P}(\ B \cap C\ ) \\ + \ & \mathrm{P}(\ A \cap B \cap C\ ) \end{aligned}$$

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy az egyenlőség jobb oldalán

- az első sorban $\binom{3}{1}\ =\ 3$ tag áll, az egyes események valószínűségei $+$ jelekkel
- a második sorban $\binom{3}{2}\ =\ 3$ tag áll, az eseményekből alkotható párok metszeteinek valószínűségei $-$ jelekkel

- a harmadik sorban $\binom{3}{3} = 1$ tag áll, a három esemény metszetének valószínűsége $+$ jellel

2. **Összegzési szabály több (tetszőleges) eseményre – avagy "Poincaré" vagy "szita" formula**: Ha $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tetszőleges események, akkor

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(\ A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\ ) \ =& \\
& \mathrm{P}(\ A_1\ ) + \mathrm{P}(\ A_2\ ) + \ldots + \mathrm{P}(\ A_n\ ) \\
& -\ \mathrm{P}(\ A_1 \cap A_2\ ) - \mathrm{P}(\ A_1 \cap A_3\ ) - \ldots - \mathrm{P}(\ A_{n-1} \cap A_n\ ) \\
& +\ \mathrm{P}(\ A_1 \cap A_2 \cap A_3\ ) + \mathrm{P}(\ A_1 \cap A_2 \cap A_4\ ) + \ldots + \mathrm{P}(\ A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n\ ) \\
& \vdots \\
& +\ (-1)^{n+1}\mathrm{P}(\ A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n\ )
\end{aligned}
$$

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy az egyenlőség jobb oldalán

- az első sorban $\binom{n}{1} = n$ tag áll, az egyes események valószínűségei $+$ jelekkel
- a második sorban $\binom{n}{2}$ tag áll, az eseményekből alkotható párok metszeteinek valószínűségei $-$ jelekkel
- a harmadik sorban $\binom{n}{3}$ tag áll, az eseményekből alkotható hármasok metszeteinek valószínűségei $+$ jelekkel
- az utolsó sorban $\binom{n}{n} = 1$ tag áll, az összes esemény metszetének valószínűsége $+$ vagy $-$ jellel attól függően, hogy n páratlan vagy páros

3. **Határérték szabályok** *(Extra tananyag)*:

- **Határérték szabály események növekvő sorozatára:**
  Tegyük fel, hogy az $A_1, , A_2, \ldots$ események növekvő sorozatot alkotnak, és A az ő uniójuk:

  $$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \qquad \text{és} \qquad A \ = \ A_1 \cup A_2 \cup \ldots$$

  Ekkor a $\mathrm{P}(\ A_n\ )$ valószínűségek növekedő módon tartanak P(A) -hoz.

  Tehát *ha eseményeknek egy növekvő sorozatával van dolgunk, akkor annak a valószínűsége, hogy az események közül valamelyik is bekövetkezik, egyenlő az események növekedő valószínűségeinek a határértékével.*

- **Határérték szabály események csökkenő sorozatára:**
  Tegyük fel, hogy az $A_1, , A_2, \ldots$ események csökkenő sorozatot alkotnak, és A az ő metszetük:

  $$A_1 \supset A_2 \supset \ldots \qquad \text{és} \qquad A \ = \ A_1 \cap A_2 \cap \ldots$$

  Ekkor a $\mathrm{P}(A_n)$ valószínűségek csökkenő módon tartanak P(A) -hoz.

  Tehát *ha eseményeknek egy csökkenő sorozatával van dolgunk, akkor annak a valószínűsége, hogy az összes esemény bekövetkezik, egyenlő az események csökkenő valószínűségeinek a határértékével.*

Feladat: Annak esélye, hogy mindenki hűtlenkedik. *(Extra tananyag)*: Egy mulatságon, melyen 10 házaspár rock and roll számokra táncol, azt eszelik ki, hogy a változatosság kedvéért minden szám előtt kisorsolják, hogy ki kivel táncoljon. Minden férj nevét cédulára írják. Minden szám előtt a cédulákat kalapba teszik, minden feleség kihúz egy cédulát, és a soron következő számot azzal táncolja, akinek a nevét kihúzta. Vajon mi a valószínűsége annak, hogy minden feleség "hűtlenkedik", azaz nem a saját férjével táncol?

Megoldás: Aki elsőnek húz, az 10 cédula közül választ. Aki másodiknak húz, az 9 cédula közül választ. És így tovább, aki utolsónak húz, az csak 1 cédula közül válszt. Ezért a 10 hölgy és a 10 férfi

$$10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 1 \;=\; 10\,!$$

darab – nyilván egyformán valószínű – felállásban táncolhat. Tehát egy klasszikus problémával van dolgunk, ahol az elemi események a lehetséges felállások a táncparketten.

Definiáljuk az $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{10}$ eseményeket a következőképpen: A_1 az az esemény, hogy a legidősebb feleség a férjével táncol, A_2 az az esemény, hogy a második legidősebb feleség a férjével táncol, és így tovább. A feladat a

$$\text{minden feleség hűtlenkedik} \;=\; \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{10}}$$

esemény valószínűségét kérdezi. A De Morgan azonosság felhasználásával

$$\mathrm{P}\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{10}} \right) \;=\; 1 - \mathrm{P}\left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{10} \right)$$

A $\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{10})$ valószínűséget a Poincaré formula felhasználásával fogjuk meghatározni. A Poincaré formula jobb oldalán szereplő tagok közül először kiragadjuk a

$$\mathrm{P}(\; A_1 \cap A_2 \cap A_3 \;)$$

tagot, és a benne szereplő eseményt jellemezzük. A $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ esemény jelentése: a legidősebb, a második legidősebb, és a harmadik legidősebb feleség a saját férjével táncol, a többi feleség pedig a többi 7 férj akármelyikével. Ez $7\,!$ lehetőséget jelent, ezért

$$\mathrm{P}(\; A_1 \cap A_2 \cap A_3 \;) \;=\; \frac{7\,!}{10\,!}$$

Hasonlóképpen

$$\mathrm{P}(\; A_1 \cap A_2 \cap A_4 \;) \;=\; \frac{7\,!}{10\,!}$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{P}(\; A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n \;) \;=\; \frac{7\,!}{10\,!}$$

A Poincaré formula jobb oldalának 3 -ik sora ezeknek a tagoknak az összege:

$$\mathrm{P}(\; A_1 \cap A_2 \cap A_3 \;) + \mathrm{P}(\; A_1 \cap A_2 \cap A_4 \;) + \ldots + \mathrm{P}(\; A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n \;)$$

Mivel az összegnek minden tagja egyenlő $\frac{7\,!}{10\,!}$ -sal, és a tagok száma $\binom{10}{3}$, az összeg értéke

$$\binom{10}{3} \cdot \frac{7\,!}{10\,!} \;=\; \frac{1}{3\,!}$$

A Poincaré formula jobb oldalának r -ik sora hasonlóan meghatározható. Az értéke

$$\binom{10}{r} \cdot \frac{(10-r)\,!}{10\,!} \;=\; \frac{1}{r\,!}$$

A Poincaré formula jobb oldala ezeknek a valószínégeknek a váltakozó előjellel vett összege. Ezért

$$\mathrm{P}\left(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_{10} \right) \;=$$

$$= \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots - \frac{1}{10!}$$

A keresett valószínűséget a komplementer szabállyal kapjuk:

$$\mathrm{P}(\text{ minden feleség hűtlenkedik }) = 1 - \mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_{10}) =$$

$$= 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{10!}$$

1. Megjegyzés: A megoldás gondolatmenetéből világos, hogy ha nem 10, hanem n házaspár van a mulatságon, akkor

$$\mathrm{P}(\text{ minden feleség hűtlenkedik }) = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

Mint – a Taylor sorok elméletéből – jól ismert, ennek a kifejezésnek a határérétke $n \to \infty$ esetén e^{-1}, ahol $\mathrm{e} = 2.71...$ a természetes logaritmus alapja. Ezért sok házaspár esetén

$$\mathrm{P}(\text{ minden feleség hűtlenkedik }) \approx \frac{1}{\mathrm{e}} \quad (\approx 0.37)$$

2. Megjegyzés: Közösségekben gyakran sorsolnak – például karácsonykor – abból a célból, hogy ki kit ajándékozzon meg. Mindenki felírja a nevét egy-egy cédulára, a cédulákat kalapba teszik, aztán mindenki húz egy cédulát, hogy a kihúzott embernek adjon majd ajándékot. Meg szoktak lepődni az emberek, amikor valaki saját magát húzza! Pedig egyáltalán nem kellene ezen meglelődni, hiszen annak az esélye, hogy senki sem húzza ki önmagát (azaz mindenki "hűtlenkedik") – mint kiszámoltuk – körülbelül 0.37, a komplementer eseményé, azaz hogy legalább egy ember önmagát húzza, ennél lényegesen nagyobb, $1 - 0.37 = 0.63$.

5. Feltételes valószínűség és eloszlás

5.1. Feltételes valószínűség

Legyenek A és B események valamely véletlen jelenséggel kapcsolatban. Képzeljük el, hogy N kísérletet végzünk a jelenségre. Jelöljük N_A -val, hogy hányszor következik be az A esemény, és jelöljük $N_{A\cap B}$ -vel, hogy hányszor következik be az A -val együtt a B is. Másképpen mondva: N_A az A esemény gyakorisága, $N_{A\cap B}$ az $A\cap B$ esemény gyakorisága. A következő hányadost **feltételes relatív gyakorság**-nak nevezzük:

$$\frac{N_{A\cap B}}{N_A}$$

Részletesebben kifejezze a hányados neve: **a** B **eseménynek az** A **eseményre vonatkozó feltételes relatív gyakorsága**. A tört értéke azt mutatja, hogy azok között az esetek között, amikor A bekövetkezik, hányad részben, milyen arányban következik be A -val együtt a B is.

A számlálót is és a nevezőt is N -nel osztva, azt kapjuk, hogy

$$\frac{N_{A\cap B}}{N_A} = \frac{\frac{N_{A\cap B}}{N}}{\frac{N_A}{N}} \approx \frac{\mathrm{P}(\ A\cap B\ )}{\mathrm{P}(\ A\ )}$$

vagyis – sok kísérlet esetén – a feltételes relatív gyakorság körülbelül egyenlő az alábbi kifejezéssel:

$$\frac{\mathrm{P}(\ A\cap B\ )}{\mathrm{P}(\ A\ )}$$

Ezt az értéket nevezzük **a** B **esemény feltételes valószínűségének, feltéve, hogy** A **bekövetkezik**. A feltételes valószínűséget $\mathrm{P}(B|A)$ -vel jelöljük:

$$\mathrm{P}(\ B\mid A\ ) = \frac{\mathrm{P}(\ A\cap B\ )}{\mathrm{P}(\ A\ )}$$

Ezt a formulát a **valószínűségek osztási szabály**ának is nevezzük. Ha $\mathrm{P}(A) = 0$, akkor a a hányados nem definiált. Ilyenkor a feltételes valószínűség ezzel a hányadossal nem értelmezhető.

1. Megjegyzés: Ha B maga után vonja A -t, vagyis $B\subset A$, akkor $A\cap B = B$. Ilyenkor az osztási szabály így egyszerűsödik:

$$\mathrm{P}(\ B\mid A\ ) = \frac{\mathrm{P}(\ B\ )}{\mathrm{P}(\ A\ )} \qquad \text{ha} \quad B\subset A$$

2. Megjegyzés: Hasonlóképpen értelmezhető az A feltételes valószínűsége, feltéve, hogy a B bekövetkezik:

$$\mathrm{P}(\ A\mid B\ ) = \frac{\mathrm{P}(\ A\cap B\ )}{\mathrm{P}(\ B\ )}$$

Ha A maga után vonja B -t, vagyis $A\subset B$, akkor

$$\mathrm{P}(\ A\mid B\ ) = \frac{\mathrm{P}(\ A\ )}{\mathrm{P}(\ B\ )} \qquad \text{ha} \quad A\subset B$$

3. Megjegyzés: A $\mathrm{P}(\ A\mid B\ )$ és a $\mathrm{P}(\ B\mid A\ )$ feltételes valószínűségek lehetnek egymással egyenlők is, de általában nem egyenlőek. Pédául ha A azt jelenti, hogy a szabályos dobókockával 5 -nél kisebbet dobok, B azt, hogy 3 -nál nagyobbat, akkor $\mathrm{P}(\ B\mid A\ ) = \frac{1}{4}$, illetve $\mathrm{P}(\ A\mid B\ ) = \frac{1}{3}$. Világos, hogy $\mathrm{P}(\ A\mid B\ ) = \mathrm{P}(\ B|\ A)$ akkor és csak akkor, ha $\mathrm{P}(\ A\ ) = \mathrm{P}(\ B\ )$.

4. Megjegyzés: Nyilvánvaló, hogy ha $A = S$, vagyis A a biztos esemény, akkor $\mathrm{P}(\ B \mid S\ ) = \mathrm{P}(\ B\ )$.

5. Megjegyzés: Az is nyilvánvaló, hogy ha A és B kizáró események, akkor $\mathrm{P}(B|A) = 0$ és $\mathrm{P}(\ A \mid B\ ) = 0$.

6. Megjegyzés: Az is nyilvánvaló, hogy ha $A \subset B$, vagyis A maga után vonja B -t, akkor $\mathrm{P}(\ B \mid A\ ) = 1$.

Feladat: Ha van fiú, van-e lány is? Ha egy véletlenszerűen választott kétgyerekes családban van fiú, akkor mi a valószínűsége annak, hogy lány is van? (Feltételezzük, hogy minden gyerek, függetlenül a többi gyerektől, 0.5 valószínűséggel születik fiúnak, 0.5 valószínűséggel lánynak.)

Megoldás:

$$\mathrm{P}(\text{ van lány } \mid \text{ van fiú }) = \frac{\mathrm{P}(\text{ van fiú és van lány })}{\mathrm{P}(\text{ van fiú })} = \frac{\left(\frac{2}{4}\right)}{\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{2}{3}$$

1 . Megjegyzés: Egy véletlenszerűen választott kétgyerekes család gyerekeit – statisztikai szempontból – helyettesíthetjük két szabályos érmével: mondjuk a fej jelentsen "fiú"-t, az írás jelentsen "lány"-t. Dobjuk fel a két érmét sokszor (100 -szor, 200 -szor, még többször), és azon esetek között, amikor van fej (azaz van fiú a családban), megnézhetjük, hogy hányadrészben van írás is (azaz van lány a családban). Az arány körülbelül $2/3$ lesz.

2. Megjegyzés: Ha az érméket számítógéppel szimuláljuk, akkor a nagy számú kísérlet elvégzése sem jelent gondot. Hajrá!

5.2. Szorzási szabályok

Szorzási szabály két eseményre:

$$\mathrm{P}(\ A \cap B\ ) = \mathrm{P}(\ A\ ) \cdot \mathrm{P}(\ B \mid A\ )$$

Tehát annak a valószínűségét, hogy két esemény mindegyike bekövetkezik úgy lehet kiszámolni, hogy

- vesszük az első esemény valószínűségét,
- és szorzunk annak a valószínűségével, hogy a második bekövetkezik, feltéve, hogy az első bekövetkezett.

Szorzási szabály három eseményre:

$$\mathrm{P}(\ A \cap B \cap C\ ) = \mathrm{P}(\ A\ ) \cdot \mathrm{P}(\ B \mid A\ ) \cdot \mathrm{P}(\ C \mid A \cap B\ )$$

Tehát annak a valószínűségét, hogy három esemény mindegyike bekövetkezik úgy lehet kiszámolni, hogy

- vesszük az első esemény valószínűségét,
- ezt megszorozzuk annak a valószínűségével, hogy a második bekövetkezik, feltéve, hogy az első bekövetkezett,
- és szorzunk annak a valószínűségével, hogy a harmadik bekövetkezik, feltéve, hogy az első és a második bekövetkezett.

Szorzási szabály több, pl. öt eseményre:

$$\mathrm{P}(\ A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5\ ) =$$

$$= \mathrm{P}(\ A_1\ ) \cdot \mathrm{P}(\ A_2 \mid A_1\ ) \cdot \mathrm{P}(\ A_3 \mid A_1 \cap A_2\ ) \cdot \mathrm{P}(\ A_4 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3\ ) \cdot \mathrm{P}(\ A_5 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4\ )$$

Tehát annak a valószínűségét, hogy öt esemény mindegyike bekövetkezik, úgy lehet kiszámolni, hogy

- vesszük az első esemény valószínűségét,
- ezt megszorozzuk annak a valószínűségével, hogy a második bekövetkezik, feltéve, hogy az első bekövetkezett,
- ezután szorzunk annak a valószínűségével, hogy a harmadikekövetkezik, feltéve, hogy az első, a második és a harmadik bekövetkezett,
- és végül szorzunk annak a valószínűségével, hogy az ötödik bek bekövetkezik, feltéve, hogy az első és a második bekövetkezett,
- majd szorzunk annak a valószínűségével, hogy a negyedik bövetkezik, feltéve, hogy az első, a második, a harmadik és a negyedik bekövetkezett.

Megjegyzés: A szorzási szabályokban az események sorrendje tetszőleges lehet. Például az A, B sorrend helyett lehet a sorrend B, A :

$$\mathrm{P}(\ B \cap A\ )\ =\ \mathrm{P}(\ B\ )\ \cdot\ \mathrm{P}(\ A \mid B\ )$$

Az A, B, C sorrrend helyett lehet a sorrend A, C, B :

$$\mathrm{P}(\ A \cap C \cap B\ )\ =\ \mathrm{P}(\ A\ )\ \cdot\ \mathrm{P}(\ C \mid A\ )\ \cdot\ \mathrm{P}(\ B \mid A \cap C\ )$$

De az A, B, C sorrrend helyett lehet a sorrend akár C, B, A is:

$$\mathrm{P}(\ C \cap B \cap A\ )\ =\ \mathrm{P}(\ C\ )\ \cdot\ \mathrm{P}(\ B \mid C\ )\ \cdot\ \mathrm{P}(\ A \mid B \cap C\ )$$

Feladat: Születésnapok paradoxona. Tegyük fel, hogy n embert véletlenszerűen kiválasztunk, és belőlük alkotunk társaságot. Ezek után a társaság tagjai egymás után hangosan bemondják, hogy az év melyik napján van a születésnapjuk. (Az egyszerűség kedvéért a szökőévektől eltekintünk, az éveket 365 naposnak vesszük.) Ha n értéke nagyobb, mint 365 , akkor biztos, hogy a társaság tagjai között vannak olyanok, akiknek a születésnapja egybe esik. Ha n értéke kisebb vagy egyenlő, mint 365 , akkor az is lehet, hogy a születésnapok különböző napokra esnek, de az is lehet, hogy vannak olyanok, akiknek a születésnapja egybe esik.

Első a kérdés: Mi a valószínűsége annak, hogy a társaság tagjai között vannak, akiknek a születésnapja egybe esik?

Második kérdés: Mi az a legkisebb n érték, hogy ez a valószínűség $\frac{1}{2}$ -nél már nagyobb?

Megoldás: Az A_k eseményt így definiáljuk:

$$A_k\ =\ \text{a bemondáskor az első } k \text{ ember születésnapja között nincs egybeesés} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

Nyilvánvaló, hogy $\mathrm{P}(A_1)\ =\ 1$.

Az $A_1, A_2, A_3, \ldots$ események szűkülő sorozatot alkotnak. Abból a célból, hogy az $\mathrm{P}(A_k|A_{k-1})$ feltételes valószínűséget meghatározzuk, tegyük fel, hogy az A_{k-1} esemény bekövetkezik, vagyis az első $k-1$ bemondott születésnap különbözik. Nyilvánvaló, hogy ilyen feltétel mellett az A_k esemény akkor és csak akkor következik be, ha a k -ik születésnap különbözik az korábbi $k-1$ születésnaptól, azaz a k -ik születésnap a maradék $365-(k-1)$ nap valamelyikére esik. Ezért

$$\mathrm{P}(A_k|A_{k-1})\ =\ \frac{365-(k-1)}{365} \qquad (k \geq 1)$$

azaz

$$\mathrm{P}(A_2|A_1)\ =\ \frac{364}{365}\ =\ 0.997\,3$$

$$\mathrm{P}(A_3|A_2)\ =\ \frac{363}{365}\ =\ 0.994\,5$$

$$\mathrm{P}(A_4|A_3) = \frac{362}{365} = 0.991\,8$$

$$\vdots$$

A szorzási szabállyal kapjuk, hogy

$$\begin{array}{lllllllll}
\mathrm{P}(A_1) & = & 1 & & & & & & \\
\mathrm{P}(A_2) & = & \mathrm{P}(A_1) & \cdot & \mathrm{P}(A_2|A_1) & = & 1 & \cdot\, 0.997\,3 & = & 0.997\,3 \\
\mathrm{P}(A_3) & = & \mathrm{P}(A_2) & \cdot & \mathrm{P}(A_3|A_2) & = & 0.997\,3 & \cdot\, 0.994\,5 & = & 0.991\,8 \\
\mathrm{P}(A_4) & = & \mathrm{P}(A_3) & \cdot & \mathrm{P}(A_4|A_3) & = & 0.991\,8 & \cdot\, 0.991\,8 & = & 0.983\,6 \\
\vdots & & & & & & & & &
\end{array}$$

Táblázat: *A szorzási szabály alkalmazása*

Az A_k esemény komplementere:

$$\overline{A_k} \;=\; \text{a bemondáskor az első } k \text{ ember születésnapjai között van egybeesés} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

A komplementer események valószínűségei:

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{P}\left(\,\overline{A_1}\,\right) = 1 - \mathrm{P}(A_1) = 1 - 1 & = 0 \\
\mathrm{P}\left(\,\overline{A_2}\,\right) = 1 - \mathrm{P}(A_2) = 1 - 0.997\,3 & = 0.002\,7 \\
\mathrm{P}\left(\,\overline{A_3}\,\right) = 1 - \mathrm{P}(A_3) = 1 - 0.991\,8 & = 0.008\,2 \\
\mathrm{P}\left(\,\overline{A_4}\,\right) = 1 - \mathrm{P}(A_4) = 1 - 0.983\,6 & = 0.016\,4 \\
\vdots &
\end{array}$$

Táblázat: *A komplementer szabály alkalmazása*

A képletek alapján a valószínűségek numerikus értékét kiszámoljuk, és az eredményeket táblázatba rendezzük:

n	$\mathrm{P}\left(\overline{A_n}\right)$
1	$0.000\,0$
2	$0.002\,7$
3	$0.008\,2$
4	$0.016\,4$
5	$0.027\,1$
6	$0.040\,5$
7	$0.056\,2$
8	$0.074\,3$
9	$0.094\,6$
10	$0.116\,9$
$\vdots$	$\vdots$
20	$0.411\,4$
21	$0.443\,7$
22	$0.475\,7$
23	$0.507\,3$
24	$0.538\,3$
25	$0.568\,7$
26	$0.598\,2$
27	$0.626\,9$
28	$0.654\,5$
29	$0.681\,0$
30	$0.706\,3$
$\vdots$	$\vdots$
40	$0.891\,2$
41	$0.903\,2$
42	$0.914\,0$
43	$0.923\,9$
44	$0.932\,9$
45	$0.941\,0$
46	$0.948\,3$
47	$0.954\,8$
48	$0.960\,6$
49	$0.965\,8$
50	$0.970\,4$
$\vdots$	$\vdots$

Táblázat: *Valószínűségek*

A táblázatból látjuk, hogy

$$\mathrm{P}\left(\overline{A_{22}}\right) = 0.4757$$
$$\mathrm{P}\left(\overline{A_{23}}\right) = 0.5073$$

vagyis a második kérdésre a válasz: 23.

5.3. Fa-gráf valószínűségekkel súlyozva

Feltételes valószínűségekkel kapcsolatos problémák esetén gyakran segít a gondolkodásban, számolásban, ha rajzolunk a problémához kapcsolódóan egy valószínűségekkel súlyozott fa-gráfot. Egy *valószínűségekkel súlyozott fa-gráf* valami ehhez hasonlót jelent:

- Rajzolj egy papír aljára egy pontot. Ezt a pontot *a fa gyökeré*nek nevezzük.
- Most húzzál a pontból valahány – mondjuk három – szakaszt felfelé. Ezeket a szakaszokat a *gyökérből kiinduló ágak*nak nevezzük. Írd az első ág mellé – mondjuk – a 0.2 értéket, a második ág mellé – mondjuk – a 0.3 értéket, a harmadik ág mellé – mondjuk – a 0.5 értéket. Ezeket az értékeket *súlyok*nak nevezzük. Képzeld el, hogy egy bogár a gyökérből indulva mászik felfelé, és amikor egy elágazáshoz ér, a súlyoknak megfelelő valószínűségekkel választ az egyes ágak közül, hogy aztán azon az ágon másszon tovább felfelé.
- Az első ág végénél legyen megint egy elágazás – mondjuk – két ággal. Írd az ágak mellé – mondjuk – a 0.4 , illetve a 0.6 súlyokat. Ilyen valószínűségekkel megy rá a bogár ezekre az ágakra.
- A második ág végénél legyen szintén egy elágazás – mondjuk – négy ággal. Írd minden ág mellé – mondjuk – a 0.25 súlyokat. Ilyen valószínűséggel megy a bogár minden egyes ágra.
- A harmadik ág végénél is legyen egy elágazás – mondjuk – hat ággal. Írd az ágak mellé a 0.1 ; 0.1 ; 0.1 ; 0.1 ; 0.1 ; 0.5 súlyokat. Ilyen valószínűségekkel megy a bogár ezekre az ágakra.
- Vegyük észre. hogy minden elágazásnál az odaírt súlyok összege 1.
- Elképzelhetünk még további elágazásokat és súlyokat. A bogár mindig a fa teteje felé megy (távolodik a gyökértől), és minden elágazásnál az ott megadott súlyoknak megfelelő valószínűségek szerint választja meg, hogy merre menjen tovább, amíg egyszercsak nem tud továbbmenni, mert ág már nincs tovább.
- A szorzási szabály alapján kézenfekvő, hogy milyen valószínűséggel jut el a bogár a fa egyes végződéseibe: *azokat a súlyokat kell összeszorozni, melyek a gyökérből kiindulva a szóban forgó végződéshez vezető út mentén találhatóak.*

Ha netán ez így leírva nem volt érthető vagy meggyőző, akkor – sebaj – majd órán elmondjuk, megmutatjuk, akkor szép lesz.

5.4. További szorzási szabályok

Megjegyzés: Van, amikor eseményeknek olyan sorozatával van dolgunk, hogy a sorozat bármely eleme maga után vonja a korábbiakat, azaz

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset A_4 \supset A_5 \ldots$$

Ilyenkor azt mondjuk, hogy eseményeknek egy **csökkenő sorozat**ával van dolgunk. Egy csökkenő sorozat esetén nyilván fennállnak az alábbiak:

$$\begin{aligned} A_2 &= A_1 \cap A_2 \\ A_3 &= A_1 \cap A_2 \cap A_3 \\ A_4 &= A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \\ A_5 &= A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \end{aligned}$$

Ezért a szorzási szabály pl. öt eseményre így egyszerűsödik:

$$\mathrm{P}(A_5) \;=\; \mathrm{P}(A_1) \;\cdot\; \mathrm{P}(A_2|A_1) \;\cdot\; \mathrm{P}(A_3|A_2) \;\cdot\; \mathrm{P}(A_4|A_3) \;\cdot\; \mathrm{P}(A_5|A_4)$$

Tehát csökkenő esemény sorozat esetén annak a valószínűségét, hogy ötödik esemény bekövetkezik, úgy lehet kiszámolni, hogy

- vesszük az első esemény valószínűségét,
- ezt megszorozzuk annak a valószínűségével, hogy a második bekövetkezik, feltéve, hogy az első bekövetkezett,
- ezután szorzunk annak a valószínűségével, hogy a harmadik bekövetkezik, feltéve, hogy a második bekövetkezett,
- majd szorzunk annak a valószínűségével, hogy a negyedik bekövetkezik, feltéve, hogy a harmadik bekövetkezett,
- és végül szorzunk annak a valószínűségével, hogy az ötödik bekövetkezik, feltéve, hogy a negyedik bekövetkezett.

Megjegyzés. *(Extra tananyag)*: Végtelen sok esemény csökkenő sorozata esetén a szorzási szabály így fest: Ha A -val jelöljük a végtelen sok esemény metszetét, akkor

$$P(A) \;=\; P(A_1) \;\cdot\; P(A_2|A_1) \;\cdot\; P(A_3|A_2) \ldots$$

Tehát annak az eseménynek a valószínűségét hogy

a végtelen sok $A_1, A_2, A_3, \ldots$ esemény mindegyike bekövetkezik

úgy lehet kiszámolni, hogy

- vesszük az első esemény valószínűségét,
- szorzunk a másodiknak az elsőre vonatkozó feltételes valószínűségével,
- szorzunk a harmadiknak a másodikra vonatkozó feltételes valószínűségével,
- és így tovább folytatjuk a szorozgatást a végtelenségig úgy, hogy
- mindig a soron következő eseménynek az őt megelőzőre vonatkozó feltételes valószínűségével szorzunk.

Technikailag egy ilyen végtelen sok tényezőből álló szorzatot ahhoz hasonlóan kell kezelni, mint ahogy a végtelen sok tagból álló összegeket kezeljük: a véges sok tényezőből álló

$$P(A_1) \;\cdot\; P(A_2|A_1) \;\cdot\; \ldots \;\cdot\; P(A_n|A_{n-1})$$

szorzatnak $n \to \infty$ mellett a határértéket veszünk, vagyis

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots) \;=\; \lim_{n\to\infty} P(A_1) \;\cdot\; P(A_2|A_1)v \ldots \;\cdot\; P(A_n|A_{n-1})$$

5.5. Teljes valószínűség formulája és Bayes formula

Teljes esemény rendszer: Azt mondjuk, hogy a (véges vagy végtelen sok) $A_1, A_2, \ldots$ események teljes eseményrendszert alkotnak, ha egymást kizáróak és uniójuk a biztos esemény. A teljes eseményrendszer tagjai közül a 0 valószínűségűeket eldobhatjuk, ezért feltételezzük, hogy $P(A_i) \neq 0$ minden i -re.

Teljes valószínűség formulája: Legyen $A_1, A_2, \ldots$ teljes eseményrendszer, B pedig tetszőleges esemény. Ekkor:

$$P(B) \;=\; P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + \ldots$$

Bayes formula: Ha a jelenség lezajlása során valahogyan megtudjuk, hogy egy B esemény bekövetkezett, akkor kérdezhetjük: Ez a feltétel hogyan módosítja az egyes A_i események esélyeit? A választ a $P(A_i|B)$ feltételes valószínűség adja, amit az alábbi képlettel számolhatunk ki:

$$\mathrm{P}(A_i|B) \;=\; \frac{\mathrm{P}(A_i \cap B)}{\mathrm{P}(B)} \;=\; \frac{\mathrm{P}(A_i) \cdot \mathrm{P}(B|A_i)}{\mathrm{P}(A_1) \cdot \mathrm{P}(B|A_1) + \mathrm{P}(A_2) \cdot \mathrm{P}(B|A_2) + \ldots}$$

Példa: Valószínűségek helyett százalékok. Ebben a példában semmi véletlen sincs, mégis segíthet a fenti két formula megemésztésében. Tegyük fel, hogy egy ládában sok, mondjuk 1000, fából és vasból készült színes golyó van. Tegyük fel, hogy a golyók

50%-a piros,	30%-a zöld,	20%-a kék,	továbbá, hogy
a pirosak 40%-a,	a zöldek 70%-a,	a kékek 90%-a	fából készült (a többi vasból).

1. Segítség a teljes valószínűség formulájának megemésztéséhez: Könnyű kiszámolni, hogy az összes golyó hányad része készült fából:

$$0.5 \cdot 0.4 + 0.3 \cdot 0.7 + 0.2 \cdot 0.9 \;=\; 0.59$$

2. Segítség a Bayes formula megemésztéséhez: Azt is könnyű látni, hogy a fából készült golyóknak

- hányad része piros:
$$\frac{0.5 \cdot 0.4}{0.59} \;=\; \frac{0.5 \cdot 0.4}{0.5 \cdot 0.4 + 0.3 \cdot 0.7 + 0.2 \cdot 0.9} \;=\; 0.34$$
- hányad része zöld:
$$\frac{0.3 \cdot 0.7}{0.59} \;=\; \frac{0.3 \cdot 0.7}{0.5 \cdot 0.4 + 0.3 \cdot 0.7 + 0.2 \cdot 0.9} \;=\; 0.36$$
- hányad része kék:
$$\frac{0.2 \cdot 0.9}{0.59} \;=\; \frac{0.2 \cdot 0.9}{0.5 \cdot 0.4 + 0.3 \cdot 0.7 + 0.2 \cdot 0.9} \;=\; 0.31$$

Feladat: Dobókocka, dobozok, színes golyók. Van három dobozunk. Az elsőben egy piros és egy fehér golyó van, a másodikban két piros és egy fehér, a harmadikban egy piros és három fehér. A véletlenre bízzuk, hogy melyik dobozból húzunk egy golyót. Ha a dobókockánkkal 1 -est, 2 -est vagy 3 -ast dobunk, akkor a első dobozból, ha 4 -est vagy 5 -öst, akkor másodikból, ha 6 -ost, akkor a harmadikból. Kérdés: mi a valószínűsége annak, hogy a véletlenszerűen választott dobozból kihúzott golyó piros?

Megoldás: Az alábbi valószínűségek és feltételes valószínűségek a feladat szövegéből adódnak:

$$\text{P(első doboz)} \;=\; \frac{3}{6} \qquad \text{P(második doboz)} \;=\; \frac{2}{6} \qquad \text{P(harmadik doboz)} \;=\; \frac{1}{6}$$

$$\text{P(piros | első doboz)} \;=\; \frac{1}{2} \qquad \text{P(piros | második doboz)} \;=\; \frac{2}{3} \qquad \text{P(piros | harmadik doboz)} \;=\; \frac{1}{4}$$

A teljes valószínűség formuláját alkalmazva:

$$\begin{aligned}
\text{P(piros)} \;=\; & \\
& \text{P(első doboz)} \cdot \text{P(piros | első doboz)} + \\
& \text{P(második doboz)} \cdot \text{P(piros | második doboz)} + \\
& \text{P(harmadik doboz)} \cdot \text{P(piros | harmadik doboz)} \;=\; \\
& \qquad \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \;=\; 0.514
\end{aligned}$$

Megjegyzés: A képletekkel leírt gondolatmenetet le is lehet rajzolni egy valószínűségekkel súlyozott fa-gráf segítségével. Olvasás közben tessék a rajzolni!

A fa gyökeréből kiindul három ág.

- Az első ág annak felel meg, hogy a dobókockával 1 -est, 2 -est vagy 3 -ast dobunk, azaz az első dobozhoz jutunk.
- A második ág annak felel meg, hogy a dobókockával 4 -est vagy 5 -öst dobunk, azaz a második dobozhoz jutunk.
- A harmadik ág annak felel meg, hogy a dobókockával 6 -ost dobunk, azaz a harmadik dobozhoz jutunk.

Az egyes ágakhoz súlyok tartoznak.

- Az első doboznak megfelelő ágon a súly $\frac{3}{6}$.
- A második doboznak megfelelő ágon a súly $\frac{2}{6}$.
- A harmadik doboznak megfelelő ágon a súly $\frac{1}{6}$.

Mindegyik ág kétfelé ágazik. Mindegyik elágazásnál az első ág a piros, a második ág a fehér húzásának felel meg.

- Az első doboznak megfelelő ág folytatásainál a súlyok: $\frac{1}{2}$ illetve $\frac{1}{2}$.
- A második doboznak megfelelő ág folytatásainál a súlyok: $\frac{2}{3}$ illetve $\frac{1}{3}$.
- A harmadik doboznak megfelelő ág folytatásainál a súlyok: $\frac{1}{4}$ illetve $\frac{3}{4}$.

Feladat *(az előző feladat folytatása:)* Tegyük fel, hogy valaki az előző feladatban leírtaknak megfelelően a másik szobában végrehajtja a kísérletet úgy, ahogy kell, aztán átjön a mi szobánkba, és közli, hogy piros golyót húzott. De nem mondja meg, hogy melyik dobozból húzta. Természetes módon merül fel bennünk a három kérdés:

1. Mi a valószínűsége annak, hogy a piros golyót az 1. dobozból húzta?
2. Mi a valószínűsége annak, hogy a piros golyót a 2. dobozból húzta?
3. Mi a valószínűsége annak, hogy a piros golyót a 3. dobozból húzta?

Megoldás:

1.
$$\mathrm{P}(\text{ 1. doboz } \mid \text{piros }) = \frac{\mathrm{P}(\text{ 1. doboz ÉS piros })}{\mathrm{P}(\text{piros })} = \frac{\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}} = 0.49$$

2.
$$\mathrm{P}(\text{ 2. doboz } \mid \text{piros }) = \frac{\mathrm{P}(\text{ 2. doboz ÉS piros })}{\mathrm{P}(\text{piros })} = \frac{\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}} = 0.43$$

3.
$$\mathrm{P}(\text{ 3. doboz } \mid \text{piros }) = \frac{\mathrm{P}(\text{ 3. doboz ÉS piros })}{\mathrm{P}(\text{ piros })} = \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}} = 0.08$$

Látjuk, hogy ezek a

$$\mathrm{P}(\text{ 1. doboz } \mid \text{piros }) = 0.49 \qquad \mathrm{P}(\text{ 2. doboz } \mid \text{piros }) = 0.43 \qquad \mathrm{P}(\text{ 3. doboz } \mid \text{piros }) = 0.08$$

feltételes valószínűségek különböznek a feltétel nélküli

$$\mathrm{P}(\text{ 1. doboz }) = 0.50 \qquad \mathrm{P}(\text{ 2. doboz }) = 0.33 \qquad \mathrm{P}(\text{ 3. doboz }) = 0.17$$

valószínűségektől.

Feladat *(az előző feladat folytatása:)* És mi van akkor, ha az ember azt közli, hogy fehér golyót húzott? A három kérdés most:

- Mi a valószínűsége annak, hogy a fehér golyót az 1. dobozból húzta?
- Mi a valószínűsége annak, hogy a fehér golyót a 2. dobozból húzta?
- Mi a valószínűsége annak, hogy a fehér golyót a 3. dobozból húzta?

Megoldás: Az Olvasó könnyen ellenőrizheti, hogy

$$\text{P}(\text{ 1. doboz } | \text{ fehér }) = 0.51 \qquad \text{P}(\text{ 2. doboz } | \text{ fehér }) = 0.23 \qquad \text{P}(\text{ 3. doboz } | \text{ fehér }) = 0.26$$

Ezek a valószínűség értékek is különböznek azoktól, melyeket az előző megoldás végén kiírtunk.

Az alábbi formula a teljes valószínűség formulájának egyszerű általánosítása.

Feltételes valószínűség kiszámítása a feltétel finomításával: Ha az A esemény az egymást kizáró $A_1, A_2, \ldots$ események uniójaként áll elő, B pedig tetszőleges esemény, akkor

$$\text{P}(B|A) = \text{P}(A_1|A) \cdot \text{P}(B|A_1) + \text{P}(A_2|A) \cdot \text{P}(B|A_2) + \ldots$$

Egyszerű következmény:

Amikor a finomítással nyert feltételes valószínűség nem függ a finomított feltételtől: Ha az A esemény az egymást kizáró $A_1, A_2, \ldots$ események uniójaként áll elő, B pedig tetszőleges esemény, és

$$\text{P}(B|A_1) = \text{P}(B|A_2) = \ldots = c$$

akkor

$$\text{P}(B|A) = c$$

5.6. Feladatok vizsgálatokról

1. Feladat: Barátom tényleg beteg? Tegyük fel, hogy egy bizonyos ritka betegségben az embereknek csupán 1 ezreléke szenved. A betegséget egy olyan vizsgálattal lehet kimutatni, ami sajnos mindkét irányban tévedhet: beteg emberek esetén csak 0.8 a valószínűsége annak, hogy a vizsgálat jelzi a betegséget, egészséges emberek esetében pedig csak 0.9 a valószínűsége annak, hogy az egészséges embert egészségesnek jelzi. Barátomat nemrég vizsgálták, és a vizsgálat betegnek jelezte. Ő nagyon megijedt. Nyugtassuk meg barátomat, hogy nem kell megijednie: a vizsgálat eredményének ismeretében sem túl valószínű, hogy a kérdéses betegségben szenved.

Megoldás:

$$\text{P}(\text{ beteg } | \text{ betegnek diagnosztizálják })$$

$$= \frac{\text{P}(\text{ beteg és betegnek diagnosztizálják })}{\text{P}(\text{ betegnek diagnosztizálják })}$$

$$= \frac{\text{P}(\text{ beteg és betegnek diagnosztizálják })}{\text{P}(\text{ beteg és betegnek diagnosztizálják }) + \text{P}(\text{ egészséges és betegnek diagnosztizálják })}$$

$$= \frac{\text{P}(\text{ beteg }) \cdot \text{P}(\text{ betegnek diagnosztizálják } | \text{ beteg })}{\text{P}(\text{ beteg }) \cdot \text{P}(\text{ betegnek diagnosztizálják } | \text{ beteg }) + \text{P}(\text{ egészséges }) \cdot \text{P}(\text{ betegnek diagnosztizálják } | \text{ egészséges })}$$

$$= \frac{0.001 \cdot 0.8}{0.001 \cdot 0.8 + 0.999 \cdot 0.1}$$

$$= 0.008$$

Látjuk, hogy annak az esélye, hogy a barátom beteg, ilyen információk mellett csak 8 ezred, ami még 1 százaléknál is kisebb, tehát egyáltalán nem sok.

Ilyen rosszul működő teszt esetén – ha nincs más lehetőség, és megengedhető, akkor – természetes ötlet, hogy több viszágalatot hajtsunk végre, és azok eredményéből következtessünk a helyzetre. Íme:

2. Feladat: Több vizsgálat jobb eredményt ad. Tegyük fel, hogy egy bizonyos ritka betegségben az embereknek csupán 1 ezreléke szenved. A betegséget egy olyan vizsgálattal lehet kimutatni, ami sajnos mindkét irányban tévedhet: beteg emberek esetén csak 0.8 a valószínűsége annak, hogy a vizsgálat jelzi a betegséget, egészséges emberek esetében pedig csak 0.9 a valószínűsége annak, hogy az egészséges embert egészségesnek jelzi. Barátomat nemrég többször is vizsgálták, és minden vizsgálat betegnek jelezte. A vizsgálatok számának függvényében adjuk meg, hogy mennyire jogos, hogy aggódik?

Megoldás: Tegyük fel, hogy a vizsgálatok száma n . A szorzási szabály miatt igazak az alábbiak:

$$\text{P(betegnek diagnosztizálják } n \text{ -szer | beteg)} = (\text{ P(betegnek diagnosztizálják egyszer | beteg) })^n$$

illetve

$$\text{P(betegnek diagnosztizálják } n \text{ -szer | egészséges)} = (\text{ P(betegnek diagnosztizálják egyszer | egészséges) })^n$$

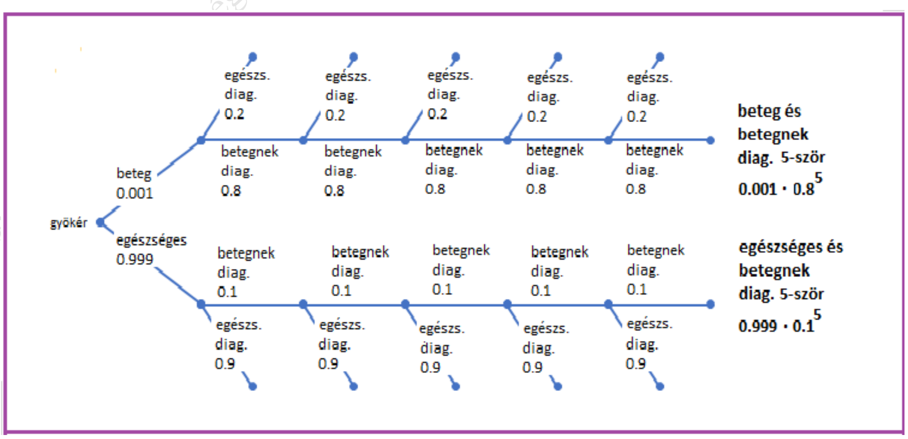
ezért

$$\text{P(beteg ÉS betegnek diagnosztizálják } n \text{ -szer)} =$$
$$= \text{P(beteg)} \cdot (\text{ P(betegnek diagnosztizálják egyszer | beteg) })^n =$$
$$= 0.001 \cdot 0.8^n$$

illetve

$$\text{P(egészséges ÉS betegnek diagnosztizálják } n \text{ -szer)} =$$
$$= \text{P(egészséges)} \cdot (\text{ P(betegnek diagnosztizálják egyszer | egészséges) })^n =$$
$$= 0.999 \cdot 0.1^n$$

A felírt képletek megértését – remélhetőleg – segíti az alábbi ábra, mely az $n = 5$ esetről szól:



21. ábra. *Fa-gráf* 5 *vizsgálat lehetőségeinek szemléltetésére*

Ezeket felhasználva, barátom esélyei így festenek:

$$\mathrm{P}(\text{ beteg } | \text{ betegnek diagnosztizálják } n \text{ -szer })$$

$$= \frac{\mathrm{P}(\text{ beteg és betegnek diagnosztizálják } n \text{ -szer })}{\mathrm{P}(\text{ betegnek diagnosztizálják } n \text{ -szer })}$$

$$= \frac{\mathrm{P}(\text{ beteg és betegnek diagnosztizálják } n \text{ -szer })}{\mathrm{P}(\text{ beteg és betegnek diagnosztizálják } n \text{ -szer }) + \mathrm{P}(\text{ egészséges és betegnek diagnosztizálják } n \text{ -szer })}$$

$$= \frac{\mathrm{P}(\text{ beteg })\cdot\mathrm{P}(\text{ betegnek diagnosztizálják } n \text{ -szer } | \text{ beteg })}{\mathrm{P}(\text{ beteg })\cdot \mathrm{P}(\text{ betegnek diagnosztizálják } n \text{ -szer } | \text{ beteg }) + \mathrm{P}(\text{ egészséges })\cdot \mathrm{P}(\text{ betegnek diagnosztizálják } n \text{ -szer } | \text{ egészséges })}$$

$$= \frac{\mathrm{P}(\text{ beteg })\cdot(\ \mathrm{P}(\text{ betegnek diagnosztizálják egyszer } | \text{ beteg })\ )^n}{\mathrm{P}(\text{ beteg })\cdot(\ \mathrm{P}(\text{ betegnek diagnosztizálják egyszer } | \text{ beteg })\ )^n + \mathrm{P}(\text{ egészséges })\cdot(\ \mathrm{P}(\text{ betegnek diagnosztizálják egyszer } | \text{ egészséges })\ )^n}$$

$$= \frac{0.001 \cdot 0.8^n}{0.001 \cdot 0.8^n + 0.999 \cdot 0.1^n}$$

Az alábbi táblázatban n függvényében adjuk meg a vizsgált feltételes valószínűség numerikus értékét:

n	P(beteg | betegnek diagnosztizálják n -szer)
1	0.008
2	0.060
3	0.339
4	0.804
5	0.970

Táblázat: *A feltételes valószínűségek numerikus értékei*

Láthatjuk, hogy ha a teszt 5-szöri ismétlése mind pozitív eredményt ad, akkor már nagy a gond!

Megjegyzés: Felmerülhet valakiben a kérdés, hogy mi az esélye a betegségnek, ha n tesztből k jelez betegséget, de $n-k$ nem. A kérdésre a választ a binomiális eloszlás segítségével tudjuk majd megadni – lásd a a binomiális eloszlásról szóló későbbi fejezetben!

5.7. Feladatok vizsgákról és bögrékről

Az alábbi három feladatban azt a problámát járjuk körbe, hogy – ***végtelen sok(!)*** *vizsga lehetőség mellett – milyen esélye van egy diáknak, hogy előbb-utóbb sikerrel vegye az akadályt, azaz elkerülje, hogy mindig csak megbukik.*

1. Feladat: Aki nem felejt, előbb-utóbb átmegy. Tegyük fel, hogy egy diák egy bizonyos tárgyból többször is vizsgázhat. Ismételt vizsgáin se többet, se kevesebbet nem tud, mint a korábbiakon – ezért minden vizsgáján ugyanazzal a fix p valószínűséggel megy át, $q = 1-p$ valószínűséggel pedig megbukik. Megmutatjuk, hogy ha p pozitív, és a diák vizsgáinak a száma nem korlátozott, akkor *biztos, hogy előbb-utóbb átmegy* (a siker előbb-utóbb bekövetkezik).

Más megfogalmazás: Jó tisztában lenni vele, hogy az életben általában, *ami be tud következni, az előbb-utóbb be is követikezik*.

Például, *ha mindig az asztalod sarkára teszed a bögrédet, akkor* – nem tudni, mikor – de *biztos, hogy a bögréd el fog törni*, mert valamikor valaki le fogja lökni! (Ebben a megfogalmazásban – kissé fanyar módon! – a bögre eltörése számít sikernek.)

Megoldás: Jelöljük A_n -nel azt az eseményt, hogy a diák az első n vizsga mindegyikén megbukik. Ennek az eseménynek a valószínűsége – a szorzási szabály miatt – nyilván:

$$\mathrm{P}(A_n) = q^n$$

Jelöljük A -val azt az eseményt, hogy a diák végtelen sok vizsga mindegyikén megbukik. Mivel az A esemény minden n esetén maga után vonja A_n -t

$$\mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(A_n) \quad \text{minden} \quad n\text{-re}$$

Mivel $n \to \infty$ esetén $\mathrm{P}(A_n) = q^n \to 0$, a jól ismert "rendőr elv" miatt $\mathrm{P}(A) = 0$, vagyis 0 a valószínűsége annak, hogy a diák végtelen sok vizsga mindegyikén megbukik, tehát 1 a valószínűsége annak, hogy előbb-utóbb átmegy.

2. Feladat: Ha a diák túl gyorsan felejt. *(Extra tananyag)*: Az alábbi, mesterségesen konstruált két példának az a célja, hogy érzékeltessék: bizony előfordulhat, hogy ha valakinek a tudása az idő múlásával nagy mértékben romlik (a siker valószínűsége nagy mértékben csökken), akkor *végtelen sok vizsga esetén sem biztos, hogy a siker valaha is bekövetkezik*, mert pozitív a valószínűsége annak a (diák számára szomorú) eseménynek, hogy a vizsgája soha sem sikerül. Sőt, az az esemény, hogy a vizsgája sosem sikerül, valószínűbb is lehet annál, hogy a vizsgája valaha is sikerül.

Más megfogalmazás: *Ha a biztonság kellő mértékben növekszik*, vagyis a törés sikerének az esélye kellő mértékben csökken (a bögrédet megfelelő módon egyre biztonságosabb helyekre teszed), *akkor pozitív a valószínűsége annak, hogy a bögre az idők végtelenségéig kitart*, azaz soha sem törik el (a törés fanyar sikere sose következik be).

Megoldás: Az alábbi két példában közös jelöléseket használunk: A_n -nel jelöljük azt az eseményt, hogy a diák az első n vizsga mindegyikén megbukik, és A -val azt az eseményt, hogy végtelen sok vizsga mindegyikén megbukik. Ekkor az $A_1, A_2, \ldots$ események csökkenő sorozatot alkotnak, és A az ő metszetük.

Első példa: Gyorsan felejtő diák: Feltesszük, hogy az idő múlásával a diák fárad, tudása hanyatlik, ezért, ha arra sor kerül, az n -ik vizsgán a bukás valószínűsége – mondjuk – az alábbi (mesterségesen kitalált) matematikai képlet szerint nő n függvényében:

$$\mathrm{P}(\text{ az } n\text{-ik vizsga sikertelen | az } n\text{-ik vizsgára sor kerül }) = \frac{0.6 + \frac{0.4}{n+1}}{0.6 + \frac{0.4}{n}} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Numerikus értékekkel kiírva ez azt jelenti, hogy

$$\mathrm{P}(\text{ az } 1\text{-ső vizsga sikertelen }) = \frac{0.6 + \frac{0.4}{2}}{0.6 + \frac{0.4}{1}} = 0.8$$

$$\mathrm{P}(\text{ a } 2\text{-ik vizsga sikertelen | a } 2\text{-ik vizsgára sor kerül}) = \frac{0.6 + \frac{0.4}{3}}{0.6 + \frac{0.4}{2}} = 0.916\,7$$

$$\mathrm{P}(\text{ a } 3\text{-ik vizsga sikertelen | a } 3\text{-ik vizsgára sor kerül}) = \frac{0.6 + \frac{0.4}{4}}{0.6 + \frac{0.4}{3}} = 0.954\,5$$

$$\mathrm{P}(\text{ a } 4\text{-ik vizsga sikertelen | a } 4\text{-ik vizsgára sor kerül}) = \frac{0.6 + \frac{0.4}{5}}{0.6 + \frac{0.4}{4}} = 0.971\,4$$

$$\vdots$$

Bár a későbbi számítások szempontjából nincs rá szükség, de azért, hogy a lentebbi ábrán könnyebb legyen eligazodni, a komplementer valószínűségek numerikus értékeit is kiszámoljuk:

$$\mathrm{P}(\text{ az } 1\text{-ső vizsga sikeres }) = 1 - 0.8 = 0.2$$

$$\mathrm{P}(\text{ a } 2\text{-ik vizsga sikeres | a } 2\text{-ik vizsgára sor kerül}) = 1 - 0.916\,7 = 0.083\,3$$

$$\mathrm{P}(\text{ a } 3\text{-ik vizsga sikeres | a } 3\text{-ik vizsgára sor kerül}) = 1 - 0.954\,5 = 0.045\,5$$

$$\mathrm{P}(\text{ a } 4\text{-ik vizsga sikeres | a } 4\text{-ik vizsgára sor kerül}) = 1 - 0.971\,4 = 0.028\,6$$

$$\vdots$$

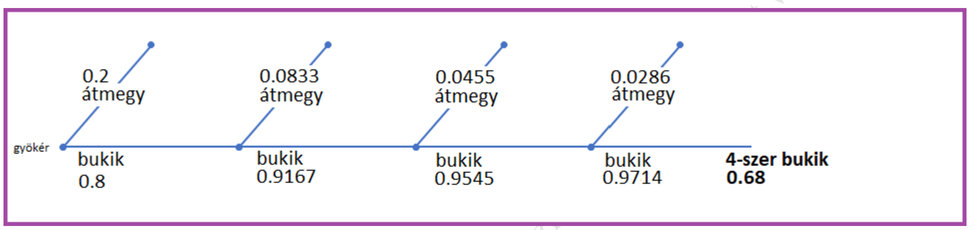
A szorzási szabály alkalmazásával és triviális egyszerűsítésekkel kapjuk, hogy a $\mathrm{P}(\ A_4\ )$ valószínűség értéke:

$$\mathrm{P}(\ A_4\ )\ =\ \mathrm{P}(\text{ az első } 4 \text{ vizsga mindegyike sikertelen })\ =$$

$$=\ \frac{0.6+\frac{0.4}{2}}{0.6+\frac{0.4}{1}}\cdot\frac{0.6+\frac{0.4}{3}}{0.6+\frac{0.4}{2}}\cdot\frac{0.6+\frac{0.4}{4}}{0.6+\frac{0.4}{3}}\cdot\frac{0.6+\frac{0.4}{5}}{0.6+\frac{0.4}{4}}\ =$$

$$=\ \frac{0.6+\frac{0.4}{5}}{0.6+\frac{0.4}{1}}\ =$$

$$=\ \frac{0.6+\frac{0.4}{5}}{1}\ =\ 0.6+\frac{0.4}{5}\quad (=\ 0.68)$$



22. ábra. *Fa-gráf az első 4 vizsga lehetőségeinek szemléltetésére*

Hasonlóan adódik, hogy annak a valószínűsége, hogy az első n vizsga mindegyike sikertelen:

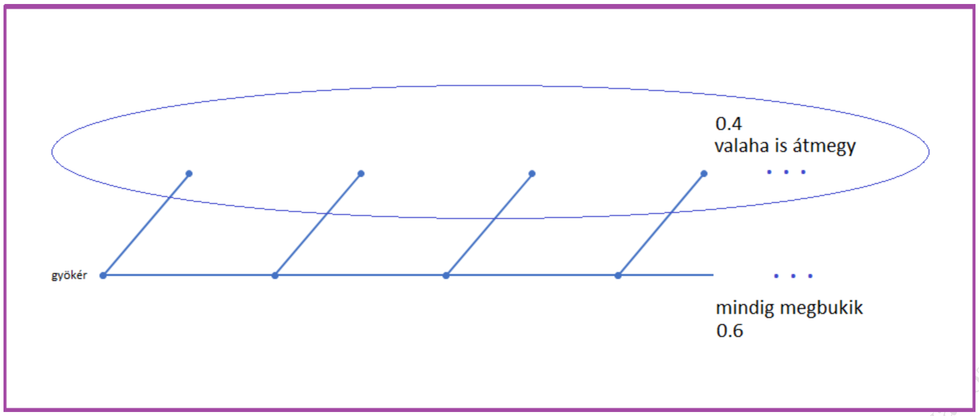
$$\mathrm{P}(\ A_n\ )\ =\ \mathrm{P}(\text{ az első } n \text{ vizsga mindegyike sikertelen })\ =\ 0.6+\frac{0.4}{n+1}$$

Mivel az $A_1, A_2, \ldots$ események csökkenő sorozatot alkotnak, ezen események A -val jelölt metszetére igaz a következő határérték reláció:

$$\mathrm{P}(\ A\ )\ =\ \lim_{n\to\infty}\mathrm{P}(A_n)\ =\ \lim_{n\to\infty}\left(0.6+\frac{0.4}{n+1}\right)\ =\ 0.6$$

vagyis $\mathrm{P}(\ A\ )\ =\ 0.6$. Tehát

- annak az esélye, hogy a vizsgája sosem sikerül, 0.6 ,
- annak pedig, hogy valaha is sikerül, csak 0.4 .



23. ábra. *Fa-gráf annak szemléltetésére, hogy "valaha is átmegy" vagy "mindig megbukik"*

Megjegyzés: Annak a valószínűsége, hogy a diák éppen az n -ik vizsgán megy át, így számolható ki:

$$\text{P(a diák éppen az } n \text{ -ik vizsgán megy át)} =$$

$$= \text{P(az első } n-1 \text{ vizsga sikertelen)} - \text{P(az első } n \text{ vizsga sikertelen)} =$$

$$= \left(0.6 + \frac{0.4}{(n-1)+1}\right) - \left(0.6 + \frac{0.4}{n+1}\right) =$$

$$= \frac{0.4}{n} - \frac{0.4}{n+1} =$$

$$= \frac{0.4}{n\,(n+1)}$$

Ez a képlet minden $n = 1, 2, \ldots$ értékre igaz.

Második példa: Még gyorsabban felejtő diák: Ez a példa semmi újat nem ad az előzőhöz képest, csak más numerikus értékekkel dogozik. A célja az, hogy a következő 3. feladat stílusát előkészítse.

Az ábrákat kedvelő Kedves Olvasónak nagyon javasoljuk, hogy olvasás közben ragadjon papírt és ceruzát, és készítsen szép, egészséges fa-gráfokat. Ha képzeletében jól látja a fa-gráf struktúrát, akkor – természetesen – a papír és a ceruza nem szükséges.

Most is feltesszük, hogy az idő múlásával a diák, fárad, tudása hanyatlik, ezért, ha arra sor kerül, az – az n -ik vizsgán a bukás valószínűsége ebben a megoldásban n függvényében az alábbi (ugyancsak mesterségesen kitalált) matematikai képlet szerint nő:

$$\text{P(az } n \text{ -ik vizsga sikertelen | az } n \text{ -ik vizsgára sor kerül)} = \mathrm{e}^{(-0.1/n^2)} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Numerikus értékekkel kiírva ez azt jelenti, hogy

$$\text{P(1. vizsga sikertelen)} = \mathrm{e}^{(-0.1/1^2)} = 0.904\,8$$

$$\text{P(2. vizsga sikertelen | a } 2 \text{ -ik vizsgára sor kerül)} = \mathrm{e}^{(-0.1/2^2)} = 0.975\,3$$

$$\text{P(3. vizsga sikertelen | a } 3 \text{ -ik vizsgára sor kerül)} = \mathrm{e}^{(-0.1/3^2)} = 0.989\,0$$

$$\text{P(4. vizsga sikertelen | a } 4 \text{ -ik vizsgára sor kerül)} = \mathrm{e}^{(-0.1/4^2)} = 0.993\,8$$

$$\vdots$$

A szorzási szabály alkalmazásával adódik, hogy annak a valószínűsége, hogy az első n vizsga mindegyike sikertelen:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\, A_n \,) \;&=\; \mathrm{P}(\text{ az első } n \text{ vizsga mindegyike sikertelen }) \;= \\ &=\; \mathrm{e}^{(-0.1/1^2)} \cdot \mathrm{e}^{(-0.1/2^2)} \cdot \ldots \cdot \mathrm{e}^{(-0.1/n^2)} \;= \\ &=\; \mathrm{e}^{-(\,0.1/1^2 + 0.1/2^2 + \ldots + 0.1/n^2\,)}\end{aligned}$$

Mint ismeretes, az

$$1/1^2 \,+\, 1/2^2 \,+ \ldots +\, 1/n^2$$

kifejezés $n \to \infty$ esetén a

$$\pi^2/6\,(\,=\; 1.6449)$$

határértéket adja. Ezért a kitevőben álló

$$-(\,0.1/1^2 \,+\, 0.1/2^2 \,+ \ldots +\, 0.1/n^2)$$

kifejezés határétéke $n \to \infty$ esetén

$$-0.1\,\left(\pi^2/6\right) \quad (\,=\; -0.1645)$$

Mivel az $A_1, A_2, \ldots$ események csökkenő sorozatot alkotnak, és A az ő metszetük, igaz a következő határérték reláció:

$$\mathrm{P}(A) \;=\; \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) \;=\; \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-(\,0.1/1^2 + 0.1/2^2 + \ldots + 0.1/n^2\,)} \;=\mathrm{e}^{-0.1\left(\pi^2/6\right)} \;=\; 0.8483$$

vagyis $\mathrm{P}(A) \;=\; 0.8483$. Tehát

- annak az esélye, hogy a vizsgája sosem sikerül, 0.8483 ,
- annak pedig, hogy valaha is sikerül, csak 0.1517 .

3. Feladat: A lassabban felejtő diák esete: *(Extra tananyag)*: Az alábbi, mesterségesen konstruált példának az a célja, hogy érzékeltesse: előfordulhat, hogy – annak ellenére, hogy valakinek a tudása az idő múlásával lassan romlik, **mégis** – végtelen sok vizsga esetén is – *biztos, hogy előbb-utóbb átmegy a vizsgán* (a siker előbb-utóbb biztos bekövetkezik).

Más megfogalmazás: Vigyázat! *Ha a biztonságot ugyan növeled, de nem kellő mértékben* (azaz a törés sikerének az esélyét nem csökkented kellő mértékben), akkor a biztonság növelése semmit sem ér, mert *biztos, hogy a bögre előbb-utóbb eltörik* (a törés sikere előbb-utóbb biztos bekövetkezik).

Most is feltesszük, hogy az idő múlásával a diák fárad, tudása hanyatlik, ezért ha – ha arra sor kerül, akkor – az n -ik vizsgán a bukás valószínűsége ebben a megoldásban n függvényében az alábbi képlet szerint nő:

$$\mathrm{P}(\text{ az } n \text{ -ik vizsga sikertelen }) \;=\; \mathrm{e}^{(-1/n)} \qquad (\,n = 1, 2, \ldots)$$

Numerikus értékekkel kiírva ez azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\text{ 1. vizsga sikertelen }) \;&=\; \mathrm{e}^{(-1/1)} \;=\; 0.3679 \\ \mathrm{P}(\text{ 2. vizsga sikertelen }) \;&=\; \mathrm{e}^{(-1/2)} \;=\; 0.6065 \\ \mathrm{P}(\text{ 3. vizsga sikertelen }) \;&=\; \mathrm{e}^{(-1/3)} \;=\; 0.7165 \\ \mathrm{P}(\text{ 4. vizsga sikertelen }) \;&=\; \mathrm{e}^{(-1/4)} \;=\; 0.7788 \\ &\;\;\vdots\end{aligned}$$

A szorzási szabály alkalmazásával adódik, hogy annak a valószínűsége, hogy az első n vizsga mindegyike sikertelen:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\ A_n\ ) \ &= \ \mathrm{P}(\text{ az első } n \text{ vizsga mindegyike sikertelen }) \ = \\ &= \ \mathrm{e}^{(-1/1)} \cdot \mathrm{e}^{(-1/2)} \cdot \ldots \cdot \mathrm{e}^{(-1/n)} \ = \\ &= \ \mathrm{e}^{-(\,1/1\,+\,1/2\,+\ldots+\,1/n\,)} \end{aligned}$$

Mint ismeretes, az

$$1/1 \ + \ 1/2 \ + \ldots + \ 1/n$$

kifejezés határértéke $n \to \infty$ esetén ∞ . Ezért a kitevőben álló

$$-(\,1/1 \ + \ 1/2 \ + \ldots + \ 1/n)$$

kifejezés határétéke $n \to \infty$ esetén $-\infty$.

Mivel az $A_1, A_2, \ldots$ események csökkenő sorozatot alkotnak, és A az ő metszetük, igaz a következő határérték reláció:

$$\mathrm{P}(\ A\ ) \ = \ \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(\ A_n\ ) \ = \ \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-(\,1/1\,+\,1/2\,+\ldots+\,1/n\,)} \ = \ \mathrm{e}^{-\infty} \ = \ 0$$

Ezért $\mathrm{P}(A) \ = \ 0$, vagyis 0 a valószínűsége annak, hogy a diák végtelen sok vizsga mindegyikén megbukik, tehát 1 a valószínűsége annak, hogy előbb-utóbb átmegy.

5.8. Elérhető-e az Örök Boldogság? *(Extra tananyag)*

Életünk során mindig újabb és újabb problémákkal szembesülünk: az egyik után jön a másik. Jó esetben a soron következő problémát megoldjuk (ez a "siker"), és akkor ez örömmel tölt el minket, rossz esetben a problémát ekbukjuk (ez a "kudarc"), és akkor elszomorodunk. Ebben a nagyon leegyszerűsített életfelfogásban az Örök Boldogság elérése azt jelenti, hogy az elénk tárulkozó végtelen sok problémával való küzdelmünk során valamikor bekövetkezik az, hogy onnantól kezdve már örökké csak sikerünk lesz, bukásunk pedig soha.

Felmerül több kérdés is:

- Tudunk-e a sikerek és a kudarcok valószínűségei segítségével olyan feltételt megfogalmazni, ami garantálja az Örök Boldogság elérését?
- Jó lenne tudni, hogy ha az Örök Boldogság elérése garantált, akkor mikor kezdődik. Természetesen nem lehet elvárni, hogy egy véletlen folyamatban pontosan és biztosan megmondjuk, hogy az Örök Boldogság mikor következik be. Meg kell elégednünk azzal, hogy meg tudjuk adni a bekövetkezés pillanatának eloszlását.
- Meg fogjuk vizsgálni azt is, hogy milyen feltételek mellett áll elő az a szomorú helyzet, hogy az Örök Boldogságot soha sem érjük el.

5.8.1. Amikor biztos, hogy elérjük

Azt az eseményt, hogy az i -ik problémát sikerrel oldjuk meg, jelöljük A_i -vel. Ennek komplementerét, vagyis azt az eseményt, hogy az i -ik problémát elbukjuk, B_i -vel. Az az esemény, hogy az n -ik problémától kezdve csak sikerünk van, nyilván az $A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots$ események metszete. Ezt az eseményt jelöljük S_n -nel:

$$S_n \;=\; \text{az } n\text{-ik problémától kezdve csak sikerünk van} \;=\; \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i$$

Ennek komplementerét K_n -nel jelöljük:

$$K_n \;=\; \text{az } n\text{-ik problémától kezdve (sajnos) adódik kudarcunk} \;=\; \bigcup_{i=n}^{\infty} B_i$$

Az az esemény, hogy elérjük az Örök Boldogságot, nyilván azt jelenti, hogy van olyan n, hogy S_n bekövetkezik:

$$\text{elérjük az Örök Boldogságot} \;=\; \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$$

Ennek komplementere:

$$\text{nem érjük el az Örök Boldogságot} \;=\; \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$$

És akkor most bebizonyítjuk, hogy

Állítás: Ha a kudarcok valószínűségei összességükben annyira kicsik, hogy a belőlük alkotott végtelen sok tagból álló szumma véges értékű, azaz

$$\sum_{i=1}^{\infty} P\left(B_i\right) \;<\; \infty$$

akkor

$$P\Big(\text{ nem érjük el az Örök Boldogságot }\Big) \;=\; 0$$

$$P\Big(\text{ elérjük az Örök Boldogságot }\Big) \;=\; 1$$

Bizonyítás: A $K_1, K_2, \ldots$ események sorozata nyilván szűkülő sorozat, hiszen K_{n+1} bekövetkezése maga után vonja K_n bekövetkezését. Ezért

$$P\Big(\text{ nem érjük el az Örök Boldogságot }\Big) \;=\; \lim_{n\to\infty} P\left(\, K_n \,\right)$$

Mivel

$$K_n \;=\; \bigcup_{i=n}^{\infty} B_i$$

K_n valószínűségére jogos a

$$P\left(\, K_n \,\right) \;\le\; \sum_{i=n}^{\infty} P\left(\, B_i \,\right)$$

becslés. Nyilvánvaló tény, hogy ha egy pozitív tagokból álló végtelen sor konvergens, akkor a maradék-összegek sorozata 0 -hoz konvergál. Ezért a

$$\sum_{i=1}^{\infty} P\left(\, B_i \,\right) \;<\; \infty$$

feltevés miatt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=n}^{\infty} P\left(B_i\right) \;=\; 0$$

Ezért

$$P\Big(\text{ nem érjük el az Örök Boldogságot }\Big) \;=\; \lim_{n\to\infty} P(\,K_n\,) \;\le\; \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n}^{\infty} P(\,B_i\,) \;=\; 0$$

vagyis

$$P\Big(\text{ nem érjük el az Örök Boldogságot }\Big) \;=\; 0$$

$$P\Big(\text{ elérjük az Örök Boldogságot }\Big) \;=\; 1$$

5.8.2. Mikor érjük el?

Ha az Örök Boldogság elérése garantált, akkor – természetesen – szeretnénk tudni, hogy mikor kezdődik. Véletlen folyamatról lévén szó, nyilván nem lehet elvárni, hogy egy pontosan és biztosan megmondjuk az Örök Boldogság kezdetét. Meg kell elégednünk azzal,hogy megadjuk a kezdőpillanat eloszlását.

Az alábbiakban szükségünk van a végtelen szorzat fogalmára:

Végtelen szorzatok: Ahogy végtelen összegeket értelmezhetünk véges összegek határértékeként, úgyanúgy végtelen szorzatokat is értelmezhetünk véges szorzatok határértékeként.

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n \;=\; \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} a_i$$

Nyilvánvaló, hogy ha az a_n számok 1 -nél kisebb pozitív számok, akkor a

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n \;=\; \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} a_i$$

határérték létezik, hiszen a $\prod_{i=1}^{n} a_i$ sorozat csökkenő és alulról korlátos.

Nyilvánvaló, hogy

$$\text{az Örök Boldogság az } n \text{-ik probléma sikerével kezdődik} \;=$$

$$=\; \text{az } (n-1) \text{-ik probléma kudarcos és az } n \text{-ik problémától kezdve mindig sikerünk van} \;=$$

$$=\; B_{n-1} \,\cap\, S_n \;=\; B_{n-1} \,\cap\, \left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i\right)$$

Így hát

$$\mathrm{P}\Big(\text{ az Örök Boldogság az } n \text{-ik probléma sikerével kezdődik }\Big) \;=\; \mathrm{P}\left(B_{n-1} \,\cap\, \left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i\right)\right)$$

Ennek a végtelen sok tényezőből álló metszetnek a valószínűségét a feltételes valószínűségek szorzási szabálya segítségével lehet felírni egy végtelen sok tényezőből álló szorzat alakjában.

Ha az A_i események függetlenek, akkor a független események metszetére vonatkozó szabály alapján ezt kapjuk:

$$\mathrm{P}\Big(\text{ az Örök Boldogság az } n \text{-ik probléma sikerével kezdődik }\Big) \;=$$

$$= \mathrm{P}(\, B_{n-1}\,) \cdot \prod_{i=n}^{\infty} \mathrm{P}(\, A_i\,) =$$

$$= (\, 1 - \mathrm{P}(\, A_{n-1}\,)\,) \cdot \prod_{i=n}^{\infty} \mathrm{P}(\, A_i\,)$$

Mostantól kezdve – ebben az egész fejezetben – feltesszük, hogy az A_i események függetlenek.

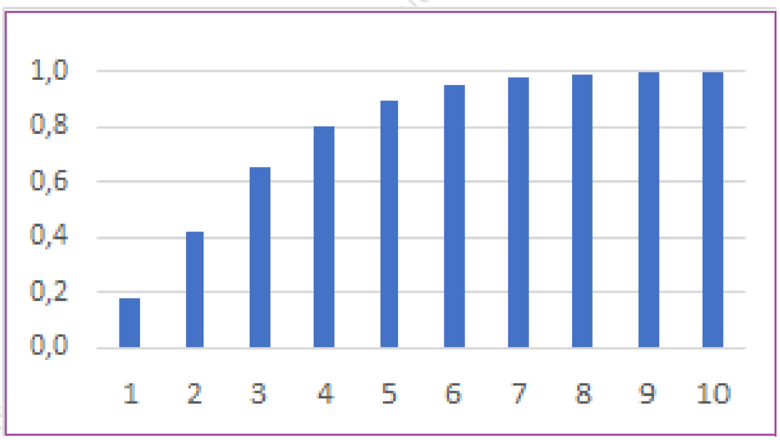
1. Példa: Tegyük fel, hogy

$$\mathrm{P}(\, A_i\,) = (\, 0.5\,)^{\frac{5}{2^i}} \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

Táblázattal és ábrával is megadjuk a $\mathrm{P}(\, A_i\,)$ siker-valószínűségeket:

probléma sorszáma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
siker valószínűsége	0.18	0.428	0.65	0.81	0.90	0.95	0.97	0.99	0.99	1.0

Táblázat: *A sikerek valószínűségei az 1. Példában*



24. ábra. *A sikerek valószínűségei az 1. Példában*

Szorzás helyett – mint jól tudjuk – a kitevőben összeget vehetünk:

$$\prod_{i=n}^{\infty} \mathrm{P}(\, A_i\,) = \prod_{i=n}^{\infty} (\, 0.5\,)^{\frac{5}{2^i}} = (\, 0.5\,)^{\sum_{i=n}^{\infty} \frac{5}{2^i}}$$

Itt a kitevőben lévő összeg zárt alakban is megadható:

$$\sum_{i=n}^{\infty} \frac{5}{2^i} = \frac{10}{2^n} = \frac{5}{2^{n-1}}$$

Ezért

$$\prod_{i=n}^{\infty} \mathrm{P}(\ A_i\ ) \ = \ (\ 0.5\ )^{\frac{5}{2^{n-1}}}$$

Tehát

$$\mathrm{P}\Big(\ \text{az Örök Boldogság az } n\text{-ik probléma sikerével kezdődik}\ \Big) \ =$$

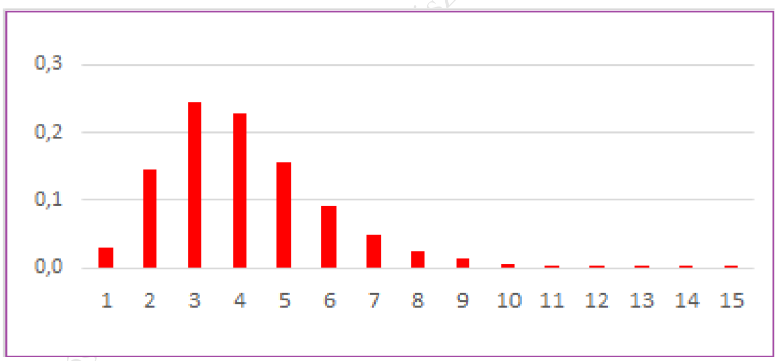
$$= \ \mathrm{P}(\ B_{n-1}\ ) \ \cdot \ \prod_{i=n}^{\infty} \mathrm{P}(\ A_i\ ) \ =$$

$$= \ \left(1 \ - \ (\ 0.5\ )^{\frac{5}{2^{n-1}}}\right) \ \cdot \ (\ 0.5\ )^{\frac{5}{2^{n-1}}}$$

Itt pedig táblázattal és ábrával is megadjuk az Örök Boldogság kezdetének eloszlását:

probléma sorszáma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
siker valószínűsége	0.03	0.15	0.24	0.23	0.16	0.09	0.05	0.03	0.01	0.01

Táblázat: *Az Örök Boldogság kezdetének az eloszlása az 1. Példában*



25. ábra. *Az Örök Boldogság kezdetének az eloszlása az 1. Példában*

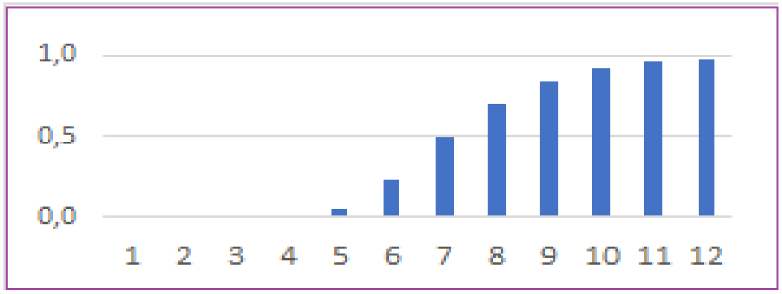
2. Példa: Tegyük fel, hogy

$$\mathrm{P}(\ A_i\ ) \ = \ (\ 0.01\ )^{\frac{20}{2^i}} \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

Táblázattal és ábrával is megadjuk a $\mathrm{P}(\ A_i\ )$ siker-valószínűségeket:

probléma sorszáma	4	5	6	7	8	9	10	11	12
siker valószínűsége	0.00	0.06	0.24	0.49	0.70	0.84	0.91	1.00	1.00

Táblázat: *A sikerek valószínűségei a 2. Példában*



26. ábra. *A sikerek valószínűségei a 2. Példában*

Szorzás helyett – mint jól tudjuk – a kitevőben összeget vehetünk:

$$\prod_{i=n}^{\infty} \mathrm{P}(\,A_i\,) \;=\; \prod_{i=n}^{\infty} (\,0.01\,)^{\frac{20}{2^i}} \;=\; (\,0.01\,)^{\sum_{i=n}^{\infty} \frac{20}{2^i}}$$

Itt a kitevőben lévő összeg zárt alakban is megadható:

$$\sum_{i=n}^{\infty} \frac{20}{2^i} = \frac{10}{2^n} = \frac{20}{2^{n-1}}$$

Ezért

$$\prod_{i=n}^{\infty} \mathrm{P}(\,A_i\,) \;=\; (\,0.01\,)^{\frac{20}{2^{n-1}}}$$

Tehát

$$\mathrm{P}\Big(\text{ az Örök Boldogság az } n \text{-ik probléma sikerével kezdődik }\Big) =$$

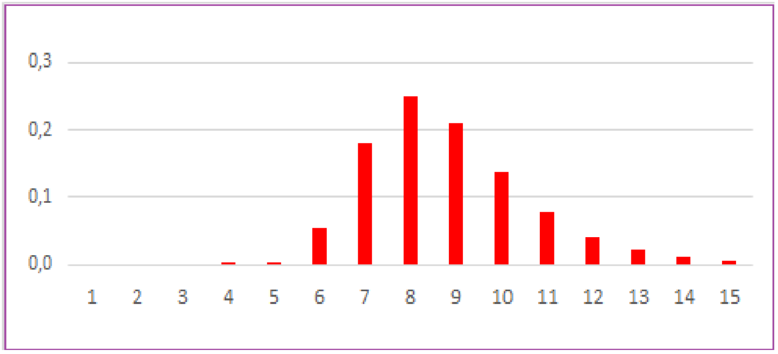
$$= \mathrm{P}(\,B_{n-1}\,)\cdot \prod_{i=n}^{\infty} \mathrm{P}(\,A_i\,) =$$

$$= \left(1 - (\,0.01\,)^{\frac{20}{2^{n-1}}}\right)\cdot(\,0.01\,)^{\frac{20}{2^{n-1}}}$$

Itt pedig táblázattal és ábrával is megadjuk az Örök Boldogság kezdetének eloszlását:

probléma sorszáma	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
siker valószínűsége	0.00	0.05	0.18	0.25	0.21	0.14	0.08	0.04	0.02	0.01	0.01

Táblázat: *Az Örök Boldogság kezdetének az eloszlása a 2. Példában*



27. ábra. *Az Örök Boldogság kezdetének az eloszlása a 2. Példában*

5.8.3. Amikor biztos, hogy nem érjük el

Végtelen szorzatokkal kapcsolatban igaz a következő egyszerű szabály:

Állítás: Ha a_n és b_n egymást 1 -re kiegészítő pozitív számok, (vagyis $a_n + b_n = 1$) minden n -re, akkor a

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n$$

végtelen szorzat értéke akkor és csak akkor egyenlő egy pozítív számmal (vagyis különbözik 0 -tól), ha a

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

végtelen sor konvergens.

Bizonyítás: Világos, hogy a

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_i$$

végtelen szorzat értéke akkor és csak akkor különbözik nullától, ha a logaritmusokból alkotott

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(a_n\right)$$

végtelen sor értéke különbözik mínusz végtelentől. Írjunk most a_n helyére $(1 - b_n)$ -t:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - b_n\right)$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy a

$$\frac{\ln(1+x)}{x}$$

hányados $x \to 0$ esetén 1 -hez tart. Ezért a

$$\ln\left(1 - b_n\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

sorozat aszimptotikusan egyenlő a

$$(-b_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

sorozattal, amiből következik, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - b_n\right)$$

sor és a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-b_n)$$

sor ekvikonvergens, azaz a két sor egyidejűleg konvergens vagy divergens. Tehát a

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n$$

végtelen szorzat értéke akkor és csak akkor egyenlő egy pozítív számmal (vagyis különbözik nullától), ha a

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_n$$

sor konvergens.

Heurisztikus magyarázat: Ahogy az 1-nél kisebb pozitív $a_1, a_2, a_3, \ldots$ számokat összeszorozgatjuk, egy csökkenő $\prod_{i=1}^{n} a_i$ sorozatot kapunk. Ahhoz, hogy ennek a sorozatnak ne 0 legyen a határértéke, nyilván az kell, hogy az a_n számok "közel legyenek" az 1 -hez, vagyis a b_n számok "közel legyenek" a 0 -hoz. Ez – a fenti állítás szerint – abban nyilvánul meg, hogy a b_n számokból álló végtelen sor konvergens.

Állítás: Ha életünk során elénk tárulkozó problémákkal kapcsolatban a sikereink egymástól függetlenül adódnak, azaz az A_i $(i = 1, 2, \ldots)$ események egymástól függetlenek, és a a kudarcok valószínűségeiből alkotott végtelen sor divergens, azaz

$$\sum_{i=1}^{\infty} P\left(B_i\right) \;=\; \infty$$

akkor

$$P\Big(\text{elérjük az Örök Boldogságot}\Big) \;=\; 0$$

Bizonyítás:

Ha

$$\sum_{i=1}^{\infty} P\left(B_i\right) \;=\; \infty$$

akkor bármely n -re

$$\sum_{i=n}^{\infty} P\left(B_i\right) \;=\; \infty$$

is teljesül. Ezért, az előző állítás miatt

$$\mathrm{P}(\; S_n \;) \;=\; \mathrm{P}\left(\bigcap_{i\,=\,n}^{\infty} A_i \right) \;=\; 0$$

Mivel megszámlálhatóan végtelen sok 0 valószínűségű esemény úniója is 0 valószínűségű, kapjuk, hogy

$$P\Big(\text{elérjük az Örök Boldogságot}\Big) \;=\; P\left(\bigcup_{n\,=\,1}^{\infty} S_n \right) \;=\; 0$$

5.9. Optimális taktika előre nem látható helyzetekben *(Extra tananyag)*

5.9.1. Segédfeladat

Számtalanszor fordul elő az életünkben, hogy előre nem látható helyzetekben kell döntenünk. Például amikor használt autót akarunk venni (természetesen jót és olcsót!), és meglehetősen tapasztalatlanul kezdjük nézegetni a kínálatot, akkor egy ideig csak nézegetünk, "szimatolgatunk", aztán egyszercsak ráakadunk egy olyan vételi lehetőségre, ami jobbnak tűnik, mint az összes korábbi, és akkor erre gyorsan lecsapunk, és megvesszük.

Egy ilyen probléma természtesen nagyon összetett lehet: a véletlen jelentős szerepet játszhat benne, és pszichológiai és sok egyéb tényező is beleszólhat a problémába. Mégis, egy egyszerű valószínűségszámítási modell segítségével meglepően érdekes és szép eredményre juthatunk. Ezzel a modellel foglalkozunk ebben a részben. Előkészítésként vesszük az alábbi problámát.

Tekintsünk 10 cédulát, 1-től 10 -ig számozva őket. A 10 -es cédulát, a legnagyobb számot nevezzük: *királynő*nek. Rakjuk le a cédulákat balról jobbra egymás mellé véletlenszerűen, azaz tekintsünk egy véletlenszerű permutációt. Például egy lehetséges permutáció:

$$6,\ 5,\ 7,\ 4,\ 1,\ 8,\ 2,\ 10,\ 9,\ 3$$

A királynő, ebben a permutációban a 8 -ik pozícióra került. Keressük meg most a királynő előtti legnagyobb számot! Ez most a 8 -as, ami a 6 -ik pozíción áll. A királynő előtti legnagyobb számot *szolgáló lány*nak nevezzük. Tehát most a szolgáló lány a 8-as, és ő a 6 -ik pozíción áll. Jelöljük X -szel a királynő pozícióját, Y -nal a szolgáló lány pozícióját. A fenti példában tehát $X = 8, Y = 6$. Ha $X = 1$, azaz a királynő az 1-ső pozíción áll, akkor nincs szolgálólány, ilyenkor Y értékét 0 -nak vesszük.

Segédfeladat: Rögzítsünk egy c számot, mely eleget tesz az $1 \le c \le 9$ egyenlőtlenségeknek. Kiszámoljuk a

$$\mathrm{P}(\ X > c \ \text{ és } \ Y \le c\ )$$

valószínűséget, vagyis annak az eseménynek a valószínűségét, hogy a királynő pozíciója nagyobb c -nél, és a szolgálólány pozíciója kisebb vagy egyenlő c -nél. Ez a valószínűség – természetesen – függ c -től, ezért a valószínűséget c -vel kifejezve adjuk meg.

Megoldás:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(\ X > c \ \text{ és } \ Y \le c\ ) \\
&= \sum_{k=c+1}^{10} \mathrm{P}(\ X = k \ \text{ és } \ Y \le c\ ) \\
&= \sum_{k=c+1}^{10} \mathrm{P}(\ X = k\ )\ \mathrm{P}(\ Y \le c \mid X = k\ ) \\
&= \sum_{k=c+1}^{10} \frac{1}{10}\ \frac{c}{k-1} \\
&= \frac{1}{10} \sum_{k=c+1}^{10} \frac{c}{k-1}
\end{aligned}$$

Megjegyzés: 10 cédula helyett vegyünk most 100 cédulát, megszámozva őket 1 -től 100 -ig. Most a 100 -as cédulát hívjuk királynőnek. Ha lerakjuk a 100 cédulát balról jobbra egymás mellé véletlenszerűen, azaz tekintünk egy véletlenszerű permutációt, akkor a királynő előtti számok között a legnagyobbat hívjuk szolgálólánynak. Jelöljük

X -szel a királynő pozícióját, Y -nal a szolgáló lány pozícióját. Ha $X = 1$, azaz a királynő az 1 -ső pozíción áll, akkor nincs szolgálólány, ilyenkor Y értékét 0 -nak vesszük. Válasszunk most is egy c számot, mely eleget tesz az $1 \leq c \leq 99$ egyenlőtlenségeknek.

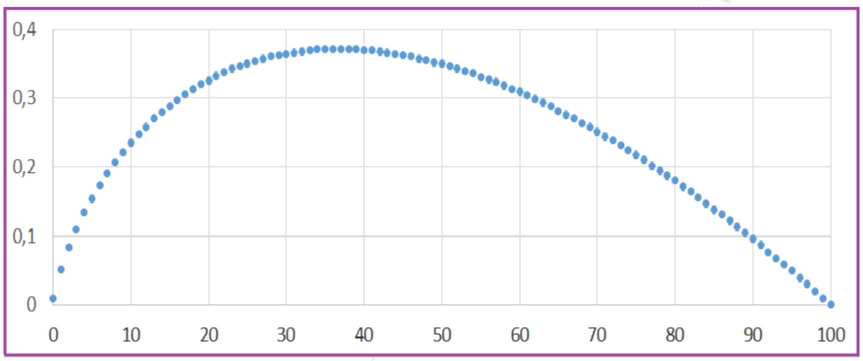
100 cédula esetén is kiszámoljuk a a hasonlóképpen értelmezett

$$\mathrm{P}(\ X > c \ \text{ és } \ Y \leq c\ )$$

valószínűséget. Az eredmény kézenfekvő:

$$\mathrm{P}(\ X > c \ \text{ és } \ Y \leq c\ ) = \frac{1}{100} \sum_{k=c+1}^{100} \frac{c}{k-1}$$

Ez a képlet fontos lesz a következő példa megoldásában, ezért minden 0 és 100 közötti c -re kiszámoltuk Excellel, és a numerikus eredményeket táblázatba foglaltuk. A táblázat alapján grafikont is készítettünk, ezt láthatjuk "A kiszámított valószínűség c függvényében" című ábrán. Magát a táblázatot – a hellyel való spórolás miatt – csak rövidítve adjuk meg. A táblázatnak csupán az elejét, a közepének egy részét és a végét mutatjuk:



28. ábra. *A kiszámított valószínűség c függvényében*

c	$\frac{1}{100}\ \sum_{k=c+1}^{100}\ \frac{c}{k-1}$
0	0.010
1	0.052
2	0.084
3	0.110
4	0.134
5	0.155
$\vdots$	$\vdots$
35	0.370 71
36	0.371 01
37	0.371 04
38	0.370 80
39	0.370 30
40	0.369 53
$\vdots$	$\vdots$
95	0.049
96	0.039
97	0.030
98	0.020
99	0.010
100	0.000

Táblázat: *Valószínűségek*

Az ábráról és a táblázatból látjuk, hogy a maximális valószínűség $c = 37$ -nél adódik, és hogy a maximális valószínűség értéke hat tizedesre kerekítve 0.371043 , két tizedesre kerekítve 0.37 . Ezt a tényt használni fogjuk a következő – világhírnek örvendő – feladatban.

5.9.2. Szindbád és a háremhölgyek

Egyszer a török szultán – jutalomképpen – felajánlotta Szindbádnak, a híres nőcsábásznak, hogy 100 gyönyörű háremhölgye közül választhat egyet, és a kiválsztott hölggyel eltölhet egy éjszakát.

Szindbád soha nem látta korábban a hölgyeket, most is csak nagyon korlátozott körülmények között találkozhat velük, és nagyon szigorú szabályok szerint választhat közülük:

- A hölgyek egyesével jelennek meg Szindbád előtt véletlenszerű sorrendben. (Minden lehetséges sorrend ugyanakkora valószínűségű – ezt a tényt Szindbádnak előre megmondták.)
- Szindbád csak egyszer mondhatja az előtte éppen mutatkozó hölgyre, hogy "őt választom".
- Akit Szindbád nem választ ki a megjelenésekor, azt már később "visszamenőleg" nem kérheti. Választását később nem módosíthatja.

Feltételezzük, hogy a háremhölgyek között létezik egy jól definiált – mindenki számára nyilvánvaló – szépség sorrend: van közöttük egy legszebb, egy második legszebb, és így tovább egy 100-ik legszebb. Bármely két hölgy esetében egyértelmű, hogy melyikük a szebb.

Szindbád, aki – ismételjük – nem ismeri a hölgyeket, és most is csak a megjelenésükkor látja őket, arra törekszik, hogy elcsípje a legszebbet. Ha a procedúra végén kiderül, hogy ez sikerült neki, akkor – hiúsága beteljesül, és akcióját sikeresnek könyveli el, ha nem, akkor az akció nem ért semmit a számára . (Szindbád ilyen. Úgy kell neki!)

Hogyan válasszon Szindbád? Úgy tűnhet, hogy a siker elérésének nagyon kicsi az esélye. Valóban, ha csak úgy véletlenszerűen választ egy hölgyet, mondjuk a legelsőt, vagy kisorsolja előre, hogy hányadikat, akkor 0.01 az esélye annak, hogy a legszebb jut neki.

Ha viszont okosan taktikázik, akkor a bölcsesség meglepően nagy valószínűséggel sikerre viheti akcióját! Ez fog kiderülni az itt következő megoldásból! Ilyen bölcsesség jól jön mindenkinek – nézzük máris a megoldást!

Megoldás: Szindbád így gondolkodhat: Képzeletben választ egy c számot $(0 \leq c \leq 99)$, és előre eldöni magában, hogy az első c hölgy közül semmiképpen sem választ, csak megfigyeli őket, és megjegyzi, milyen szép volt közülük a legszebb. Aztán a $(c+1)$ -iknek megjelenő hölgytől kezdve már csak arra figyel, hogy felbukkan-e olyan hölgy, akinek szépsége meghaladja az első c hölgy során kifigyelt maximumális szépséget. Ha felbukkan ilyen hölgy, akkor arra lecsap, ha nem, akkor nem választ senkit. Nevezzük ezt a taktikát c *-taktiká*nak!

A segédfeladatunkra támaszkodva könnyű megadni, hogy ezzel a c -taktikával mi a valószínűsége annak, hogy Szindbád elcsípi a legszebb hölgyet. Felhasználva a korábban definiált királynő és szolgálólány fogalmát, és a velük kapcsolatban bevezetett X és Y valószínűségi változókat, azt kell az Olvasónak meggondolni, hogy

az az esemény, hogy
Szindbád a c -taktikával elcsípi a legszebb hölgyet
akkor és csak akkor következik be, ha
a királynő pozíciója $> c$ *és* *a szolgálólány pozíciója* $\leq c$
esemény bekövetkezik.

Ennek az eseménynek a valószínűségét a segédfeladathoz fűzött megjegyzésben megadtuk:

$$\frac{c}{100} \sum_{k=c+1}^{100} \frac{1}{k-1}$$

A képlettel kapcsolatban készített táblázatból és ábrából világosan kiderül, hogy ha Szindbád a $c = 37$ -es taktikát alkalmazza, akkor 0.37 valószínűséggel elcsípi a legszebb hölgyet.

A 0.37 valószínűség – bizony – nincs túl közel az áhított 1 -hez, de

- lényegesen nagyobb az "ész nélküli taktika" 0.01 -es siker valószínűségénél, és
- be lehet bizonyítani, hogy nem létezik olyan taktika, ami 0.37 -nél nagyobb valószínűséggel vezetne sikerre.

Be lehet látni, hogy hasonló helyzetekben is a követendő optimális taktika így fest: a lehetőségek 37 % -át csak nézegetni kell úgy, hogy közülük nem választunk, de megjegyezzük a "szépség", "jóság" maximumát, a 37 % elengedése után viszont arra kell lecsapni, amikor a "szépség", "jóság" meghaladja a korábban kifigyelt maximumot. Ezzel a taktikával 0.37 valószínűséggel elcsípjük a lehetőségek közül a "legszebbet", "legjobbat".

5.10. Feltételes eloszlás egy eseményen belül

Példa: Fiatal házaspár egy vagy több gyerekkel. Korábbi példánk szerint, ha egy fiatal házaspárt véletlenszerűen választunk, és tekintjük az

$$X = \text{ gyerekek száma}$$

valószínűségi változót, akkor a valószínűségi változó eloszlása:

x	0	1	2	3
$p(x)$	0.2	0.4	0.3	0.1

Táblázat: *Gyerekek számának eloszlása*

Egyszerű összeadással kapjuk, hogy a $X \geq 1$ esemény valószínűsége $P(\ X \geq 1\ ) = 0.4 + 0.3 + 0.1 = 0.8$.

Ha a véletlenszerűen választott fiatal párról tudjuk, hogy van gyerekük, de nem tudjuk, hogy hány, akkor a gyerekek számának lehetséges értékei $1, 2, 3$. Ezeknek a lehetséges értékeknek a feltételes valószínűségeit táblázatba rendezve jutunk az X valószínűségi változó $X \geq 1$ **feltétel melletti (feltételen belüli) feltételes eloszlás**ához:

x	1	2	3
$p(x)$	$\frac{0.4}{0.8}$	$\frac{0.3}{0.8}$	$\frac{0.1}{0.8}$

azaz

x	1	2	3
$p(x)$	$\frac{4}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Táblázat: *A gyerekek számának eloszlása, ha van gyerek*

Általánosan is megfogalmazzuk a példában leírtakat: Egy

$$\{p(x),\ x \in S\}$$

eloszlás és egy $A \subseteq S$ halmaz esetén a

$$\{\frac{p(x)}{P(\ A\ )},\ x \in A\}$$

eloszlást **az** A **esemény bekövekezése melletti feltételes eloszlás**ának nevezzük. Ha az eredeti eloszlás egy X valószínűségi változó eloszlása, akkor a feltételes eloszlást **az** X **valószínűségi változónak az** A **-n belüli eloszlásá**nak is hívjuk.

Nyilvánvaló, hogy egyenletes eloszlás esetén minden feltételes eloszlás ugyancsak egyenletes.

Példa: Pédául ha szabályos dobókocka esetén A azt jelenti, hogy 5 -nél kisebbet dobok, akkor e feltétel melletti feltételes eloszlás így fest:

x	1	2	3	4
$p(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Táblázat: *Szabályos dobókockával dobott szám feltételes eloszlása, ha feltétel az, hogy 5-nél kisebbet kapunk*

5.11. Feltételes eloszlások rendszere síkbeli eloszlás esetén

Először konkrét példákat veszünk, aztán megismerkedünk a feltételes eloszlások rendszerének általános fogalmával.

5.11.1. Példák feltételes eloszlások meghatározására

1. Példa: Kékek számának eloszlása, ha tudjuk, hogy hány pirosat húztunk (visszatevés nélkül). Az 1. fejezet 7. alfejezetében az 5. példában feltettük, hogy egy dobozban 45 darab golyó van, melyek közül 10 darab piros, 15 darab kék, 20 darab fehér. Kiveszünk 8 darab golyót visszatevés nélkül, és megfigyeljük, hogy a kivett golyók között hány piros és hány kék van:

$$X = \text{ ahány piros van a kivett golyók között}$$

$$Y = \text{ ahány kék van a kivett golyók között}$$

Ott meghatároztuk az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó eloszlását, egy táblázatot kaptunk. Gondoljuk meg ennek a példának a kapcsán, hogy hogyan lehet (X, Y) eloszlásából meghatározni Y feltételes eloszlását olyan feltétel mellett, hogy X értéke adott konkrét x érték?

1. Megoldás (numerikus táblázattal): A feltételes eloszlások tagjai feltételes valószínűségek, melyeket hányadosként kapunk a megfelelő valószínűségekből. Az alábbi táblázat minden oszlopának minden elemét úgy kaptuk meg, hogy (X, Y) eloszlásának táblázatából (melyet korábban már megadtunk) a megfelelő $\mathrm{P}(\ X = x, Y = y\ )$ valószínűséget elosztottuk X eloszlásának táblázatából (melyet korábban szintén megadtunk) a megfelelő $\mathrm{P}(\ X = x\ )$ tagjával.

Y feltételes eloszlásai adott X értékek mellett:

y										
8	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	
7	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	
6	0.040	0.015	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	
5	0.145	0.085	0.037	0.009	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	
4	0.281	0.231	0.160	0.084	0.026	0.000	0.000	0.000	0.000	
3	0.300	0.328	0.320	0.266	0.174	0.070	0.000	0.000	0.000	
2	0.173	0.242	0.313	0.369	0.381	0.321	0.176	0.000	0.000	
1	0.049	0.086	0.143	0.224	0.327	0.435	0.504	0.429	0.000	
0	0.005	0.012	0.024	0.048	0.093	0.174	0.319	0.571	1.000	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	x

Táblázat: Y *feltételes eloszlásai adott* X *értékek mellett*

Megjegyzés: Ebben a táblázatban – természetesen – minden oszlopra igaz, hogy az oszlopban lévő számok összege 1 -gyel egyenlő.

2. Megoldás (a feltételes valószínűség definíciója alapján):

Először – a könnyebb érthetőség kedvéért – konkrét numerikus értékekkel számolunk ki egy feltételes valószínűséget:

$$\mathrm{P}(\, Y = 2 \mid X = 3 \,) = \frac{\mathrm{P}(\, X = 3 \,,\, Y = 2 \,)}{\mathrm{P}(\, X = 3 \,)} = \frac{\frac{\binom{10}{3}\binom{15}{2}\binom{20}{3}}{\binom{45}{8}}}{\frac{\binom{10}{3}\binom{35}{5}}{\binom{45}{8}}} = \frac{\binom{15}{2}\binom{20}{3}}{\binom{35}{5}} = \frac{\binom{15}{2}\binom{20}{3}}{\binom{35}{8-3}}$$

Hasonlóan, annak a valószínűsége, hogy y darab kék golyó lesz a kivett golyók között, vagyis annak a valószínűsége, hogy $Y = y$, ugyanaz a képlet, csak a 2-es helyére y -t írunk:

$$\mathrm{P}(\, Y = y \mid X = 3 \,) = \frac{\mathrm{P}(\, X = 3 \,,\, Y = y \,)}{\mathrm{P}(\, X = 3 \,)} = \frac{\frac{\binom{10}{3}\binom{15}{y}\binom{20}{8-3-y}}{\binom{45}{8}}}{\frac{\binom{10}{3}\binom{35}{8-3}}{\binom{45}{8}}} = \frac{\binom{15}{y}\binom{20}{8-3-y}}{\binom{35}{8-3}}$$

Ha az $X = 3$ feltételt kicseréljük az általánosabb $X = x$ feltételre, akkor a keresett feltételes valószínűséget így adhatjuk meg:

$$\mathrm{P}(\, Y = y \mid X = x \,) = \frac{\mathrm{P}(\, X = x \,,\, Y = y \,)}{\mathrm{P}(\, X = x \,)} = \frac{\frac{\binom{10}{x}\binom{15}{y}\binom{20}{8-x-y}}{\binom{45}{8}}}{\frac{\binom{10}{x}\binom{35}{8-x}}{\binom{45}{8}}} = \frac{\binom{15}{y}\binom{20}{8-x-y}}{\binom{35}{8-x}}$$

3. Megoldás (finomítással nyert feltételes valószínűségekkel): Először – a könnyebb érthetőség kedvéért – konkrét numerikus értékekkel számolunk ki egy feltételes valószínűséget. Például az $X = 3$ feltétel azt jelenti, hogy a kivett golyók között 3 darab piros van. Most finomítsuk a feltételt azzal, hogy megszabjuk, melyik 3 piros golyó legyen a kivettek között, és melyik 5 maradjon a dobozban. Ez a feltétel csak annyi teret hagy a véletlennek, mintha 35 darab golyó lenne a dobozban, közülük 15 darab lenne kék, 20 darab lenne fehér, és kivennénk 5 darab golyót visszatevés nélkül. Eme finomabb feltétel mellett annak a valószínűsége, hogy – mondjuk – 2 kék golyó lesz a kivett golyók között, vagyis annak a valószínűsége, hogy $Y = 2$, a jól ismert képlet:

$$\frac{\binom{15}{2}\binom{20}{5-2}}{\binom{35}{5}}$$

Mivel a felírt valószínűség nem függ attól, hogy melyik 3 piros golyó van a kihúzottak között, az $X = 3$ feltétel melletti feltételes valószínűséget is a felírt képlet adja meg. Hasonlóan, annak a valószínűsége, hogy y darab kék golyó lesz a kivett golyók között, vagyis annak a valószínűsége, hogy $Y = y$, ugyanez a képlet, csak a 2-es helyére y -t írunk:

$$\frac{\binom{15}{y}\binom{20}{5-y}}{\binom{35}{5}}$$

Ha az $X = 3$ feltételt kicseréljük az általánosabb $X = x$ feltételre, akkor a keresett feltételes valószínűségre ez adódik:

$$\frac{\binom{15}{y}\binom{20}{8-x-y}}{\binom{35}{8-x}}$$

2. Példa: Pirosak számának eloszlása, ha tudjuk, hogy hány kéket húztunk? Gondoljuk meg, hogy hogyan lehet (X, Y) eloszlásából meghatározni X feltételes eloszlását olyan feltétel mellett, hogy Y értéke adott konkrét y érték.

1. Megoldás: A feltételes eloszlások tagjai nyilván feltételes valószínűségek, melyeket hányadosként kapunk a megfelelő valószínűségekből. Az alábbi táblázat minden oszlopának minden elemét úgy kaptuk meg, hogy (X, Y) eloszlásának táblázatából a megfelelő $\mathrm{P}(\ X\ =\ x, Y\ =\ y\ )$ valószínűséget elosztottuk Y eloszlásának táblázatából a megfelelő $\mathrm{P}(Y\ =\ y)$ tagjával:

X feltételes eloszlásai adott Y értékek mellett:

y										
8	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	
7	0.667	0.333	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	
6	0.437	0.460	0.103	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	
5	0.281	0.468	0.222	0.030	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	
4	0.177	0.416	0.312	0.088	0.008	0.000	0.000	0.000	0.000	
3	0.109	0.340	0.360	0.160	0.029	0.002	0.000	0.000	0.000	
2	0.065	0.261	0.367	0.230	0.067	0.008	0.000	0.000	0.000	
1	0.038	0.190	0.343	0.286	0.118	0.024	0.002	0.000	0.000	
0	0.022	0.132	0.298	0.318	0.174	0.049	0.007	0.000	0.000	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	x

Táblázat: *X feltételes eloszlásai adott Y értékek mellett*

Megjegyzés: Ebben a táblázatban – természetesen – minden sorra igaz, hogy a sorban lévő számok összege 1.

2. Megoldás (a feltételes valószínűség definíciója alapján): Az előző feladat második megoldásához hasonlóan kapjuk, hogy az $Y\ =\ y$ feltétel mellett az $X\ =\ x$ esemény feltételes valószínűsége:

$$\mathrm{P}(\ X\ =\ x \mid Y\ =\ y\ )\ =\ \frac{\mathrm{P}(\ X\ =\ x\ ,\ Y\ =\ y\ )}{\mathrm{P}(\ Y\ =\ y\ )}\ =\ \frac{\frac{\binom{10}{x}\binom{15}{y}\binom{20}{8-x-y}}{\binom{45}{8}}}{\frac{\binom{15}{y}\binom{30}{8-y}}{\binom{45}{8}}}\ =\ \frac{\binom{10}{x}\binom{20}{8-x-y}}{\binom{30}{8-y}}$$

3. Megoldás (finomítással nyert feltételes valószínűségekkel): Először – a könnyebb érthetőség kedvéért – konkrét numerikus értékekkel számolunk ki egy feltételes valószínűséget. Például az $Y\ =\ 2$ feltétel azt jelenti, hogy a kivett golyók között 2 darab kék van. Most finomítsuk a feltételt azzal, hogy megszabjuk, melyik 2 kék golyó legyen a kivettek között, és melyik 13 maradjon a dobozban. Ez a feltétel csak annyi teret hagy a véletlennek, mintha 30 darab golyó lenne a dobozban, közülük 10 darab lenne piros, 20 darab lenne fehér, és kivennénk 6 darab golyót visszatevés nélkül. Eme finomabb feltétel mellett annak a valószínűsége, hogy – mondjuk – 3 piros golyó lesz a kivett golyók között, vagyis annak a valószínűsége, hogy $X\ =\ 3$, a jól ismert képlet:

$$\frac{\binom{10}{3}\binom{20}{6-3}}{\binom{30}{6}}$$

Mivel a felírt valószínűség nem függ attól, hogy melyik 2 kék golyó van a kihúzottak között, az $Y\ =\ 2$ feltétel melletti feltételes valószínűséget is a felírt képlet adja meg. Hasonlóan, annak a valószínűsége, hogy x darab piros golyó lesz a kivett golyók között, vagyis annak a valószínűsége, hogy $X\ =\ x$, ugyanez a képlet, csak a 3-as helyére x -t írunk:

$$\frac{\binom{10}{x}\binom{20}{6-x}}{\binom{30}{6}}$$

Ha az $Y\ =\ 2$ feltételt kicseréljük az általánosabb $Y\ =\ y$ feltételre, akkor a keresett feltételes valószínűségre ez adódik:

$$\frac{\binom{10}{x}\binom{20}{8-x-y}}{\binom{30}{8-y}}$$

5.11.2. Általános összefüggések

Ha X és Y diszkrét valószínűségi változók, akkor együttesen egy kétdimenziós diszkrét (X, Y) valószínűségi változót határoznak meg. Ennek a kétdimenziós (X, Y) valószínűségi változónak a súlyfüggvényét jelöljük $p(x, y)$ -nal, vagyis

$$p(x, y) \;=\; \mathrm{P}(\; X \;=\; x, Y \;=\; y)\;)$$

X súlyfüggvényét $p_1(x)$ -szel, Y súlyfüggvényét $p_2(y)$ -nal jelöljük.

Feltételes súlyfüggvény. Ha feltételezzük, hogy $X = x$, akkor az Y valószínűségi változó $p_{2|1}(y|x)$ feltételes súlyfüggvénye osztással adódik:

$$p_{2|1}(y|x) \;=\; \frac{p(x, y)}{p_1(x)}$$

Hasonlóan, ha feltételezzük, hogy $Y = y$, akkor az X valószínűségi változó $p_{1|2}(x|y)$ feltételes súlyfüggvénye is osztással adódik:

$$p_{1|2}(x|y) \;=\; \frac{p(x, y)}{p_2(y)}$$

Példa: Az előző oldalakon meghatároztuk az ottani problémához tartozó feltételes súlyfüggvények képleteit:

$$p_{2|1}(y|x) \;=\; \frac{\binom{15}{y}\binom{20}{8-x-y}}{\binom{35}{8-x}}$$

$$p_{1|2}(x|y) \;=\; \frac{\binom{10}{x}\binom{20}{8-x-y}}{\binom{30}{8-y}}$$

Annak a valószínűsége, hogy Y értéke egy $[y_1, y_2]$ intervallumba esik, feltéve, hogy $X = x$, nyilván így számolható ki:

$$\mathrm{P}(\; y_1 \;\leq\; Y \;\leq\; y_2 \mid X \;=\; x\;) \;=\; \sum_{y=y_1}^{y_2} p_{2|1}(y|x)$$

Hasonlóan, annak a valószínűsége, hogy X értéke egy $[x_1, x_2]$ intervallumba esik, feltéve, hogy $Y = y$, nyilván így számolható ki:

$$\mathrm{P}(\; x_1 \;\leq\; X \;\leq\; x_2 \mid Y \;=\; y\;) \;=\; \sum_{x=x_1}^{x_2} p_{1|2}(x|y)$$

Feltételes eloszlások (súlyfüggvények) rendszere

Ha minden x mellett tekintjük a $p_{2|1}(y|x)$ feltételes eloszlást (súlyfüggvényt), akkor eloszlásoknak (súlyfüggvényeknek)egy rendszerét kapjuk, amit az Y valószínűségi változó X -re vonatkozó **feltételes eloszlásai (súlyfüggvényei) rendszerének** nevezünk.

Ha minden y mellett tekintjük a $p_{1|2}(x|y)$ feltételes eloszlást (súlyfüggvényt), akkor eloszlásoknak (súlyfüggvényeknek)egy rendszerét kapjuk, amit az X valószínűségi változó Y -ra vonatkozó **feltételes eloszlásai (súlyfüggvényei) rendszerének** nevezünk.

5.12. Óvakodjunk a félreérthető feladatoktól!

A valószínűségszámítás tanulása során szinte biztos, hogy a tanuló találkozik olyan feladattal, melyben a feltételek, körülmények nincsenek pontosan megadva. Ebből persze félreértések adódnak, viták támadnak, melyek során a diák önbizalma alaposan sérülhet. Erre a kellemetlen lehetőségre mutatunk itt egy példát.

Feladat: Ha van fiú, van-e lány is? *(Ilyen címmel szerepelt már egy feladat ennek a fejezetnek az elején, az 5.1 alfejezetben. Most ennek a feladatnak egy módosításával egy másik, de a korábbihoz hasonló, eléggé elterjedt és népszerű változatával foglalkozunk. Amikor két hasonló, de mégis különböző feladatot összekevernek, összemosnak, vagy egy feladat nincs pontosan megfogalmazva, és ezért többféleképpen is lehet azt érteni, komoly nézeteltérések, viták, "élet-halál harcok" szoktak támadni még valószínűségszámításban járatos emberek között is!)*

Feladat:*(Ajtó nyitogatós változat.)* Egy véletlenszerűen választott ismeretlen kétgyerekes családhoz becsönget valaki. A sors úgy hozza, hogy fiú nyit ajtót. Mi a valószínűsége annak, hogy a testvére lány, vagyis a fiú mellett lány is van a családban?

Első megoldás: Ha fiú nyit ajtót, akkor ez a tény jelzi, hogy a családban van fiú. A fejezet elején kiszámoltuk, hogy ilyen feltétel mellett annak a valószínűsége, hogy lány is van a családban, $2/3$ -dal egyenlő:

$$\text{P(van lány a családban | fiú nyit ajtót)} = 2/3$$

Második megoldás: Az ajtót nyitó gyerek testvérének neme független az ajtót nyitó gyerek nemétől. Ezért annak a valószínűsége, hogy lány is van a családban, $1/2$ -del egyenlő:

$$\text{P(van lány a családban | fiú nyit ajtót)} = 1/2$$

Kérdés: Melyik a jó megoldás?

Válasz: Mindkét megoldás jó lehet, ha a feladatot megfeleően pontosítjuk.

1. Ha olyan társadalomban élünk, ahol a fiúk udvariasak, és – fiú-lány testvérpár esetén – lánytesvérüket megelőzve pattannak ajtót nyitni, akkor az A) megoldás a jó:

   $$\text{P(van lány a családban | fiú nyit ajtót)} = 2/3$$

2. Ha mindig az idősebb gyerek megy ajtót nyitni, vagy ha mindig a fiatalabb, vagy ha igazságos sorsolással döntik el, hogy ki menjen ajtót nyitni, akkor a B) megoldás a jó:

   $$\text{P(van lány a családban | fiú nyit ajtót)} = 1/2$$

3. Ha pedig a társadalmi szokások miatt – fiú-lány testvérpár esetén – a lányok nyitnak ajtót, akkor nyilván a kérdéses feltételes valószínűség 0 :

   $$\text{P(van lány a családban | fiú nyit ajtót)} = 0$$

4. Kis fantáziával – ennyi fantázia a valószínűségszámítás tanulása során nélkülözhetetlen! – el lehet képzelni olyan társadalmat is, ahol fiú-lány testvérpár esetén p valószínűséggel a fiú, $(1-p)$ valószínűséggel a lány megy ajtót nyitni.

   Ez a "véletlenítés" megvalósulhat például úgy, hogy

   (a) p értékének megfelelően a fiú és a lány sorsot húz, és úgy is, hogy
   (b) feltételezzük, hogy a társadalomban a kétgyerekes családok p -ed részében a fiú az ajtó nyitogató, $(1-p)$ -ed részében a lány.

Ekkor – mint mindjárt megmutatjuk – a szóban forgó feltételes valószínűség 0 és $2/3$ között akármilyen értékű is lehet, hiszen az értékét az alábbi képlet adja meg:

$$\text{P(van lány a családban | fiú nyit ajtót)} = \frac{2p}{1+2p}$$

Nyilvánvaló, hogy $p = 0$ esetén ez a képlet 0 -t ad, $p = 1$ esetén $2/3$ -ot.

A képlet levezetése:

$$\text{P(van lány | fiú nyit ajtót)} =$$

$$= \frac{\text{P(van lány ÉS fiú nyit ajtót)}}{\text{P(fiú nyit ajtót)}}$$

$$= \frac{\text{P(van lány is és fiú is ÉS fiú nyit ajtót)}}{\text{P(fiú nyit ajtót)}}$$

$$= \frac{\text{P(van lány is és fiú is)} \cdot \text{P(fiú nyit ajtót | van lány is és fiú is)}}{\text{P(fiú nyit ajtót)}}$$

$$= \frac{\text{P(van lány is és fiú is)} \cdot \text{P(fiú nyit ajtót | van lány is és fiú is)}}{\text{P(két fiú van)} \cdot \text{P(fiú nyit ajtót | két fiú van)} + \text{P(van lány is és fiú is)} \cdot \text{P(fiú nyit ajtót | van lány is és fiú is)}}$$

$$= \frac{0.5 \cdot p}{0.25 \cdot 1 + 0.5 \cdot p} = \frac{2\,p}{1\,+\,2\,p}$$

Konklúzió: Jobb, ha elkerüljük az ilyen – nem kellően pontosan definiált – feladatokat! Természetesen az is jó – ha van rá idő és lehetőség – ha megfelelő nehézségű példákon megtanítják a diákoknak, hogy egyrészt észrevegyék, amikor egy feladatban a feltételek nincsenek pontosan megadva, másrészt érezzék, hogy mit is kell pontosítani ahhoz, a hogy a feladat korrekt legyen.

6. Függetlenség

6.1. Események függetlensége

Két esemény függetlensége: Azt mondjuk, hogy a B esemény független az A eseménytől, ha az A, illetve az $\overline{A}$ bekövetkezésének feltétele mellett a B esemény feltételes valószínűsége megegyezik a feltétel nélküli valószínűségével:

$$\text{P}(\, B \mid A \,) \;=\; \text{P}(\, B \,)$$

$$\text{P}(\, B \mid \overline{A} \,) \;=\; \text{P}(\, B \,)$$

B -nek A -tól való függetlensége azt fejezi ki, hogy A bekövetkezése, illetve nem bekövetkezése sem nem növeli, sem nem csökkenti a B bekövetkezésének az esélyét.

A definícióban A és $\overline{A}$ egyforma szerepet töltenek be, ezért az, hogy B független A -tól, ugyanazt jelenti, mint az, hogy B független $\overline{A}$ -től. Sőt, a fenti egyenlőségek nyilván ekvivalensek a komplementerekre vonatkozó

$$\text{P}(\, \overline{B} \mid A \,) \;=\; \text{P}(\, \overline{B} \,)$$

$$\text{P}(\, \overline{B} \mid \overline{A} \,) \;=\; \text{P}(\, \overline{B} \,)$$

egyenlőségekkel, vagyis az a tény, hogy B független A , tól, illetve $\overline{A}$ -től együtt jár azzal, hogy $\overline{B}$ is független A -tól, illetve $\overline{A}$ -től. Ezért beszélhetünk úgy is, hogy a B , $\overline{B}$ pár független az A , $\overline{A}$ pártól.

Nem nehéz megmutatni, hogy a fenti $2{+}2 \;=\; 4$ egyenlőség közül akármelyik implikálja a többit, ezért a függetlenség definiciójául szolgálhat az egyetlen

$$\text{P}(\, B \mid A \,) \;=\; \text{P}(\, B \,)$$

egyenlőség is. Ha itt a baloldali feltételes valószínűséget hányadosként írjuk fel, akkor ezt kapjuk:

$$\frac{\text{P}(\, A \cap B \,)}{\text{P}(\, A \,)} \;=\; \text{P}(\, B \,)$$

amiből szorzással az A -ra, B -re nézve szimmetrikus

$$\text{P}(\, A \cap B \,) \;=\; \text{P}(\, A \,) \cdot \text{P}(\, B \,)$$

egyenlőség adódik. Tehát a függetlenség szimmetrikus reláció: ha B független A -tól, akkor A is független B -től. Ezért függetlenség esetén azt mondhatjuk, hogy az események **függetlenek egymástól**. Könnyű belátni, hogy a

$$\text{P}(A \cap B) \;=\; \text{P}(A) \cdot \text{P}(B)$$

egyenlőségből következnek a

$$\text{P}(A \cap \overline{B}) \;=\; \text{P}(A) \cdot \text{P}(\overline{B})$$

$$\text{P}(\overline{A} \cap B) \;=\; \text{P}(\overline{A}) \cdot \text{P}(B)$$

$$\text{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) \;=\; \text{P}(\overline{A}) \cdot \text{P}(\overline{B})$$

egyenlőségek is. Ezért a függetlenség definíciójául az egyetlen

$$\text{P}(A \cap B) \;=\; \text{P}(A) \cdot \text{P}(B)$$

egyenlőség, vagy alábbi négy egyenlőség

$$\text{P}(A \cap B) \;=\; \text{P}(A) \cdot \text{P}(B)$$

$$\text{P}(A \cap \overline{B}) \;=\; \text{P}(A) \cdot \text{P}(\overline{B})$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(\overline{A} \cap B) &= \mathrm{P}(\overline{A}) \cdot \mathrm{P}(B) \\
\mathrm{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) &= \mathrm{P}(\overline{A}) \cdot \mathrm{P}(\overline{B})
\end{aligned}
$$

is szolgálhat.

Három esemény függetlensége: Kettőnél több eseménnyel kapcsolatban a függetlenség fogalmának definíciója bonyolultabb. Ugyanis már három esemény kapcsán is előfordulhat, hogy *közülük bármely kettő független egymástól, de a három esemény között determinisztikus kapcsolatban áll fenn*. Erre a lehetőségre a fejezet végén található feladatok között egy példával is felhívjuk a figyelmet.

Az A_1, A_2, A_3 események sorozatát akkor nevezzük függetlennek, ha

- A_2 független A_1 -től, és
- A_3 független minden olyan eseménytől, ami az A_1, A_2 eseményekből előállítható az eseményekre vonatkozó komplementer képzéssel és metszet képzés művelettel, ami – részletesen kiírva – az alábbiakat jelenti:
  - A_3 független az $A_1 \cap A_2$ eseménytől, azaz

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(\ A_3 \mid A_1 \cap A_2\ ) &= \mathrm{P}(\ A_3\ ) \\
\mathrm{P}(\ A_3 \mid \overline{A_1 \cap A_2}\ ) &= \mathrm{P}(\ A_3\ )
\end{aligned}
$$

  - A_3 független az $A_1 \cap \overline{A_2}$ eseménytől, azaz

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(\ A_3 \mid A_1 \cap \overline{A_2}\ ) &= \mathrm{P}(\ A_3\ ) \\
\mathrm{P}(\ A_3 \mid \overline{A_1 \cap \overline{A_2}}\ ) &= \mathrm{P}(\ A_3\ )
\end{aligned}
$$

  - A_3 független az $\overline{A_1} \cap A_2$ eseménytől, azaz

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(\ A_3 \mid \overline{A_1} \cap A_2\ ) &= \mathrm{P}(\ A_3\ ) \\
\mathrm{P}(\ A_3 \mid \overline{\overline{A_1} \cap A_2}\ ) &= \mathrm{P}(\ A_3\ )
\end{aligned}
$$

  - A_3 független az $\overline{A_1} \cap \overline{A_2}$ eseménytől, azaz

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(\ A_3 \mid \overline{A_1} \cap \overline{A_2}\ ) &= \mathrm{P}(\ A_3\ ) \\
\mathrm{P}(\ A_3 \mid \overline{\overline{A_1} \cap \overline{A_2}}\ ) &= \mathrm{P}(\ A_3\ )
\end{aligned}
$$

Akit az ilyesfajta logikai okoskodások érdekelnek, figyelmes elemzéssel kigondolhatja, hogy mindennek szükséges és elégséges feltétele, hogy az alábbi 8 egyenlőség kell teljesüljön:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(\ A_1 \cap A_2 \cap A_3\ ) &= \mathrm{P}(\ A_1\ ) \cdot \mathrm{P}(\ A_2\ ) \cdot \mathrm{P}(\ A_3\ ) \\
\mathrm{P}(\ A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}\ ) &= \mathrm{P}(\ A_1\ ) \cdot \mathrm{P}(\ A_2\ ) \cdot \mathrm{P}(\ \overline{A_3}\ ) \\
\mathrm{P}(\ A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3\ ) &= \mathrm{P}(\ A_1\ ) \cdot \mathrm{P}(\ \overline{A_2}\ ) \cdot \mathrm{P}(\ A_3\ ) \\
\mathrm{P}(\ A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\ ) &= \mathrm{P}(\ A_1\ ) \cdot \mathrm{P}(\ \overline{A_2}\ ) \cdot \mathrm{P}(\ \overline{A_3}\ ) \\
\mathrm{P}(\ \overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3\ ) &= \mathrm{P}(\ \overline{A_1}\ ) \cdot \mathrm{P}(\ A_2\ ) \cdot \mathrm{P}(\ A_3\ ) \\
\mathrm{P}(\ \overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}\ ) &= \mathrm{P}(\ \overline{A_1}\ ) \cdot \mathrm{P}(\ A_2\ ) \cdot \mathrm{P}(\ \overline{A_3}\ ) \\
\mathrm{P}(\ \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3\ ) &= \mathrm{P}(\ \overline{A_1}\ ) \cdot \mathrm{P}(\ \overline{A_2}\ ) \cdot \mathrm{P}(\ A_3\ ) \\
\mathrm{P}(\ \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\ ) &= \mathrm{P}(\ \overline{A_1}\ ) \cdot \mathrm{P}(\ \overline{A_2}\ ) \cdot \mathrm{P}(\ \overline{A_3}\ )
\end{aligned}
$$

Ezért a függetlenség definíciójául ez a 8 egyenlőség szolgálhat. Ezek az egyenlőségek A_1, A_2, A_3 -re nézve szimetrikusak, ezért az A_1, A_2, A_3 események sorozatának felsorolásában a sorrendnek nincs szerepe. Ezért ha a felsorolt szorzási szabályok fennállnak, egyszerűen csak azt mondhatjuk, hogy az A_1, A_2, A_3 események rendszere független rendszer, vagy – rövidebben fogalmazva - az A_1, A_2, A_3 események függetlenek egymástól.

Több esemény függetlensége: Az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események sorozatát akkor nevezzük függetlennek, ha

- A_2 független A_1 -től, és
- A_3 független minden olyan eseménytől, ami az A_1, A_2 eseményekből előállítható komplementer-, únió- és metszet képzéssel,
- A_4 független minden olyan eseménytől, ami az A_1, A_2, A_3 eseményekből előállítható komplementer-, únió- és metszet képzéssel,

$\vdots$

- és így tovább, A_n független minden olyan eseménytől, ami az $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$ eeseményekből előállítható komplementer-, únió- és metszet képzéssel.

Akit az ilyesfajta logikai okoskodások érdekelnek, figyelmes elemzéssel kigondolhatja, hogy ennek szükséges és elégséges feltétele az, hogy teljesüljön az a 2^n egyenlőség, melyek közül az első így fest:

$$\mathrm{P}(\ A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \ldots \cap A_n\ ) \ = \ \mathrm{P}(\ A_1\ )\,\mathrm{P}(\ A_2\ )\,\mathrm{P}(\ A_3\ )\,\mathrm{P}(\ A_4\ ) \ \ldots\ \mathrm{P}(\ A_n\ )$$

a többi pedig úgy, hogy bizonyos A_i -k helyett mindkét oldalon azok komplementerét vesszük, például így:

$$\mathrm{P}(\ \overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3} \cap A_4 \cap \ldots \cap A_n\ ) \ = \ \mathrm{P}(\ \overline{A_1}\ )\,\mathrm{P}(\ A_2\ )\,\mathrm{P}(\ \overline{A_3}\ )\,\mathrm{P}(\ A_4\ ) \ \ldots\ \mathrm{P}(\ A_n\ )$$

a legutolsó, 2^n -ik egyenlőség pedig az alábbi:

$$\mathrm{P}(\ \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \ldots \overline{A_n}\ ) \ = \ \mathrm{P}(\ \overline{A_1}\ )\,\mathrm{P}(\ \overline{A_2}\ )\,\mathrm{P}(\ \overline{A_3}\ )\,\mathrm{P}(\ \overline{A_4}\ ) \ \ldots\ \mathrm{P}(\ \overline{A_n}\ )$$

Ezek az egyenlőségek $A_1, A_2, \ldots A_n$ -re nézve szimetrikusak, ezért az $A_1, A_2, \ldots A_n$ események sorozatának felsorolásában a sorrendnek nincs szerepe. Egyszerűen csak azt mondhatjuk, hogy az $A_1, A_2, \ldots A_n$ események függetlenek, ha a felsorolt szorzási szabályok fennállnak.

1. Megjegyzés: Amikor azt mondjuk, hogy az $A_1, A_2, \ldots A_n$ események függetlenek, akkor ez a kijelentés nem az egyes eseményeket minősíti külön-külön, hanem az eseményeknek a rendszerét, a köztük lévő viszonyt ahhoz hasonlóan, mint amikor azt mondjuk, hogy János, Józsi és Jakab jó barátok.

2. Megjegyzés: Egyes helyzetekben az események függetlensége magától értetődik, a valóságos körülményekből fakad. Ilyenkor ha az egyes események valószínűségeit ismerjük, akkor a szorzási szabály segítségével az események és komlementereik metszeteinek a valószínűségeit ki tudjuk számolni. Például ha három szabályos dobókockával szabályosan gurítunk, egy pirossal, egy fehérrel és egy zölddel, akkor

- a *pirossal hatost dobunk*,
- a *fehérrel nem hatost dobunk*,
- a *zölddel párosat dobunk dobunk*

események érezhetően függetlenek, hiszen a három dobókocka között semmi kölcsönhatás nincs: nincsenek összekötve, nem vonzzák vagy taszítják egymást. Ezért

- *"a pirossal hatost dobunk, és a fehérrel nem hatost dobunk és a zölddel párosat dobunk"*

esemény valószínűsége: $\frac{1}{6}\,\frac{5}{6}\,\frac{3}{6} \ = \ \frac{15}{216}$

3. Megjegyzés: Más esetekben valamilyen számolás eredményeképpen adódik ki, hogy az eseményeink függetlenek, és ez a tény esetleg meglephet minket, vagy akár fontos is lehet egy bennünket érdeklő probléma szempontjából.

Példa a Fibonacci számokkal: Unokám még alsó tagozatos kisdiák, de egy – a matematika iránt érdeklődő – társa elbűvölte a Fibonacci számok szépségeivel. Mint ismeretes, az első két Fibonacci szám az 1 és a 2 , a többit pedig úgy kapjuk, hogy az őt megelőző kettőt összeadjuk. Íme az első néhány Fibonacci szám:

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ \ldots$$

Amikor társasjátékot játszunk, és a dobókockával valaki Fibonacci számot dob, unokám örül ennek. Annak a valószínűsége, hogy a dobókockával Fibonacci számot dobunk, nyilván $4/6$, hiszen az $1, 2, 3, 4, 5, 6$ számok között négy Fibonacci szám rejlik: $1, 2, 3, 5$.

Gyakran játszunk olyan társasjátékot, amikor a dobott számok összege szerint halad a játék. Unokám látja, hogy ezekben a játékokban a 7 a 2 és a 12 között félúton van, és az örömöt adó Fibonacci számokat is jól tudja: $2, 3, 5, 8$.

Igaz, nem tudja még, hogy hogyan kell valószínűségeket számolni, de a sok játék alapján érzi, hogy a Fibonacci számok esélye nagyobb, mint a 7 -é.

Arra alapozva, hogy az öt lehetséges Fibonacci szám közül csak a 8 -as nagyobb a 7 -nél, pár napja azt súgta nekem, hogy ha valaki csak annyit mondana el neki, hogy 7 -nél nagyobb számot kapott, akkor ő kevesebb esélyt érezne arra, hogy Fibonacci szám jött ki, mintha az ellenkezőjét mondaná, vagy semmit sem mondana az összegről. Ön győződjön meg róla, hogy unokám itt nem jól érzi az esélyeket: *az az esemény, hogy két kockával dobva az összeg Fibonacci szám, és az az esemény, hogy az összeg 7 -nél nagyobb,* ***függetlenek egymástól****!*

Megoldás: A számolás legyen az Olvasó feladata! A megoldáshoz ötletként csak annyit súgunk, hogy a két kockával kapcsolatos táblázatba mindenhova beírtuk a dobott számok összegét, és vastagon írtuk a Fibonacci számokat:

jobb bal	1	2	3	4	5	6
1	**2**	**3**	4	**5**	6	7
2	**3**	4	**5**	6	7	**8**
3	4	**5**	6	7	**8**	9
4	**5**	6	7	**8**	9	10
5	6	7	**8**	9	10	11
6	7	**8**	9	10	11	12

Táblázat: *A dobott számok összege*

4. Megjegyzés: A felületes diák, aki gyakran a hétköznapi szóhasználatból próbálja kitalálni a matematikai fogalmak jelentését, az események függetlenségére esetleg – hibásan – úgy gondol, mintha azt jelentené, hogy "az eseményeknek nincs közük egymáshoz", nem tudnának egyidejűleg bekövetkezni, kizárják egymást. Itt hívjuk fel a figyelmet, hogy **pozitív valószínűségű független események nem lehetnek kizáróak**, hiszen metszetük valószínűsége a valószínűségek szorzata, vagyis pozitív, tehát a metszet nem a lehetetlen esemény.

6.2. Valószínűségi változók függetlensége

Azt mondjuk, hogy az Y valószínűségi változó független az X valószínűségi változótól, ha minden x és y lehetséges érték esetén az $Y = y$ esemény független az $X = x$ eseménytől, azaz

$$\mathrm{P}(Y = y \mid X = x) = \mathrm{P}(Y = y)$$

Ha itt a baloldali feltételes valószínűséget hányadosként írjuk fel, akkor ezt kapjuk:

$$\frac{\mathrm{P}(X = x \cap Y = y)}{\mathrm{P}(X = x)} = \mathrm{P}(Y = y)$$

amiből szorzással az A -ra, B -re nézve szimmetrikus

$$\mathrm{P}(\ X\ =\ x \cap Y\ =\ y\ )\ \ =\ \ \mathrm{P}(\ X\ =\ x\ )\,\mathrm{P}(\ Y\ =\ y\ )$$

egyenlőség adódik. Tehát a függetlenség szimmetrikus reláció: ha Y független X -től, akkor X is független Y -tól. Ezért függetlenség esetén azt mondhatjuk, hogy a valószínűségi változók **függetlenek egymástól**.

6.3. Direktszorzat

1. Példa: Fiatal házaspár gyerekeinek száma és a nagyszülők száma függetlenek egymástól. Korábban vizsgáltuk az a problémát, melyben egy fiatal házaspárt véletlenszerűen választottunk, és tekintettük az alábbi két valószínűségi változót:

$$X\ =\ \text{gyerekek száma},\qquad Y\ =\ \text{nagyszülők száma}$$

Az akkor mondott feltételek mellett meghatároztuk az (X,Y) kétdimenziós valószínűségi változó eloszlását. (X,Y) eloszlása mellett feltüntetjük X és Y eloszlását is:

y	$\mathrm{P}(\ Y\ =\ y\ )$					
4	0.30	0.060	0.120	0.090	0.030	
3	0.40	0.080	0.160	0.120	0.040	
2	0.15	0.030	0.060	0.045	0.015	
1	0.10	0.020	0.040	0.030	0.010	
0	0.05	0.010	0.020	0.015	0.005	
		0.2	0.4	0.3	0.1	$\mathrm{P}(X = x)$
		0	1	2	3	x

Táblázat: *Gyerekek és nagyszülők – kétdimenziós eloszlás*

Vegyük észre, hogy (X,Y) eloszlásának minden tagját szorzatként kaptuk meg X és Y eloszlásának megfelelő tagjaiból:

$$\mathrm{P}(\ X\ =\ x, Y\ =\ y\ )\ \ =\ \ \mathrm{P}(\ X\ =\ x\ )\,\mathrm{P}(\ Y\ =\ y\ )$$

Definíció: Ha egy kétdimenziós eloszlás minden tagja úgy képződik két egydimenziós eloszlás tagjaiból, hogy a megfelelő tagokat összeszorozzuk, akkor a síkbeli eloszlást a két egydimenziós eloszlás **direktszorzat**ának nevezzük.

6.4. Konvolúció

1. Példa: Gyerekek száma plusz nagyszülők száma. Korábban vizsgáltuk az a problémát, melyben egy fiatal házaspárt véletlenszerűen választottunk, és tekintettük az alábbi két valószínűségi változót:

$$X = \text{ gyerekek száma}, \quad Y = \text{ nagyszülők száma}$$

Az akkor mondott feltételek mellett meghatároztuk az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó eloszlását:

y					
4	0.060	0.120	0.090	0.030	
3	0.080	0.160	0.120	0.040	
2	0.030	0.060	0.045	0.015	
1	0.020	0.040	0.030	0.010	
0	0.010	0.020	0.015	0.005	
	0	1	2	3	x

Táblázat: *Gyerekek és nagyszülők – kétdimenziós eloszlása*

Az előző alpontban észrevettük, hogy (X, Y) eloszlása X eloszlásából és Y eloszlásából direktszorzatként adódik:

y	P($Y = y$)					
4	0.30	0.060	0.120	0.090	0.030	
3	0.40	0.080	0.160	0.120	0.040	
2	0.15	0.030	0.060	0.045	0.015	
1	0.10	0.020	0.040	0.030	0.010	
0	0.05	0.010	0.020	0.015	0.005	
		0.2	0.4	0.3	0.1	P($X = x$)
		0	1	2	3	x

Táblázat: *Gyerekek és nagyszülők – kétdimenziós eloszlás, mint direktszorzat*

Ha – valamilyen rejtélyes okból – a gyerekek számának és a nagyszülők számának az összege érdekel minket, akkor a $Z = X + Y$ valószínűségi változó eloszlával kell foglalkoznunk. Nyilván igazak az alábbiak:

$$\begin{aligned}
\text{P}(\ Z = 0\ ) &= 0.010 \\
\text{P}(\ Z = 1\ ) &= 0.040 = 0.020 + 0.020 \\
\text{P}(\ Z = 2\ ) &= 0.085 = 0.030 + 0.040 + 0.015 \\
\text{P}(\ Z = 3\ ) &= 0.175 = 0.080 + 0.060 + 0.030 + 0.005 \\
\text{P}(\ Z = 4\ ) &= 0.275 = 0.060 + 0.160 + 0.045 + 0.010 \\
\text{P}(\ Z = 5\ ) &= 0.255 = 0.120 + 0.120 + 0.015 \\
\text{P}(\ Z = 6\ ) &= 0.130 = 0.090 + 0.040 \\
\text{P}(\ Z = 7\ ) &= 0.030
\end{aligned}$$

Táblázat: *Valószínűségek számolása összegzéssel*

Ha Z lehetséges értékeit és a hozzájuk tapadó valószínűségeket táblázatba rendezzük, megkapjuk Z eloszlását:

z	0	1	2	3	4	5	6	7
P($Z = z$)	0.010	0.040	0.085	0.175	0.275	0.255	0.130	0.030

Táblázat: *Gyerekek száma plusz nagyszülők száma – egydimenziós eloszlás*

Z eloszlását egy egyszerű, **konvolúció**nak nevezett művelettel kaptuk meg X és Y eloszlásából: először vettük X eloszlásának és Y eloszlásának a direktszorzatát, majd a kapott síkbeli eloszlást a $z = x + y$ transzformációval a számegyenesre képeztük.

7. Sok független tag összegének eloszlása harang alakot ölt

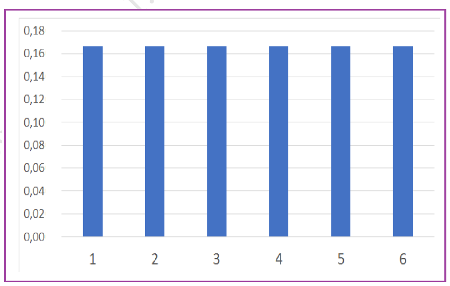
Amikor független valószínűségi változókból sokat adunk össze, az összeg eloszlása mindig ugyanolyan alakúnak bizonyul. Az eloszlás alakja egy szép szabályos harangra emlékeztet. Ezt a tényt fogjuk most bemutatni két példasorozattal, melyekben – az egyszerűség és a könnyebb elképzelhetőség kedvéért – azt képzeljük el, mintha dobókockákkal dobnánk, és mindig a dobott számok összegét vizsgálnánk. Az első alfejezetben szabályos dobókockákkal foglalkozunk, a másodikban hamisakkal. Mint látni fogjuk, szabályos dobókockák esetén már 4 lépésben eljutunk a harang alakhoz, hamis kockák esetén ehhez több lépésre van szükség: csak 10 lépésben jutunk el a harang alakhoz.

7.1. Szabályos dobókockák esete

1. Feladat: A dobott szám eloszlása – egyetlen szabályos dobókocka esetén. Ez a feladat nagyon egyszerű, mert nem kell csinálni semmi mást, mint ránézni arra a nem is izgalmas táblázatra és ábrára, ami a dobott szám eloszlását mutatja, amikor egy szabályos dobókockával dobunk.

1	1/6	0.167
2	1/6	0.167
3	1/6	0.167
4	1/6	0.167
5	1/6	0.167
6	1/6	0.167

Táblázat:
A dobott szám eloszlása – szabályos dobókocka esetén



29. ábra. *A dobott szám eloszlása – egyetlen szabályos dobókocka esetén*

2. Feladat: Az összeg eloszlása – két szabályos dobókocka esetén. Kiindulásként vegyük fel a dobott számok eloszlásait külön-külön egy táblázat baloldali és felső peremén:

		1	2	3	4	5	6
		1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
1	1/6						
2	1/6						
3	1/6						
4	1/6						
5	1/6						
6	1/6						

Táblázat:
A függőleges oszlopban: az első dobókockával dobott szám eloszlása
A vízszintes sorban: a második dobókockával dobott szám eloszlása

A függetlenség miatt a dobott két szám együttes eloszlását direktszorzatként kapjuk meg:

		1	2	3	4	5	6
		$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$
1	$1/6$	$1/6^2$	$1/6^2$	$1/6^2$	$1/6^2$	$1/6^2$	$1/6^2$
2	$1/6$	$1/6^2$	$1/6^2$	$1/6^2$	$1/6^2$	$1/6^2$	$1/6^2$
3	$1/6$	$1/6^2$	$1/6^2$	$1/6^2$	$1/6^2$	$1/6^2$	$1/6^2$
4	$1/6$	$1/6^2$	$1/6^2$	$1/6^2$	$1/6^2$	$1/6^2$	$1/6^2$
5	$1/6$	$1/6^2$	$1/6^2$	$1/6^2$	$1/6^2$	$1/6^2$	$1/6^2$
6	$1/6$	$1/6^2$	$1/6^2$	$1/6^2$	$1/6^2$	$1/6^2$	$1/6^2$

Táblázat: *A két eloszlás direktszorzata*

A dobott számok összegének értékét írjuk a táblázat megfelelő cellájába:

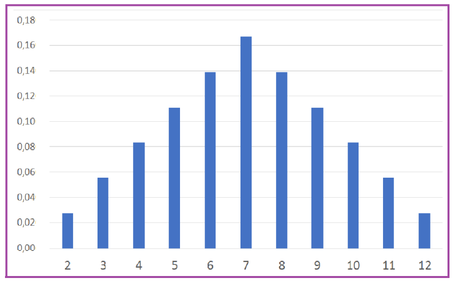
	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Táblázat: *A dobott számok összege – két dobókocka esetén*

A dobott számok összegének az eloszlását az összegzési szabállyal kapjuk:

2	$1/6^2$	0.028
3	$2/6^2$	0.056
4	$3/6^2$	0.083
5	$4/6^2$	0.111
6	$5/6^2$	0.139
7	$6/6^2$	0.167
8	$5/6^2$	0.139
9	$4/6^2$	0.111
10	$3/6^2$	0.083
11	$2/6^2$	0.056
12	$1/6^2$	0.028

Táblázat:
Az összeg eloszlása – két szabályos dobókocka esetén



30. ábra. *Az összeg eloszlása – két szabályos dobókocka esetén*

3. Feladat: Az összeg eloszlása – három szabályos dobókocka esetén. A három dobókocka közül az első kettővel dobott számok összegét nevezük X -nek, a harmadikkal dobott számot Y -nak. Az alábbi táblázat bal oldalára X eloszlását, a tetejére Y eloszlását tettük:

		1	2	3	4	5	6
		$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$
2	$1/6^2$						
3	$2/6^2$						
4	$3/6^2$						
5	$4/6^2$						
7	$6/6^2$						
8	$5/6^2$						
9	$4/6^2$						
10	$3/6^2$						
11	$2/6^2$						
12	$1/6^2$						

Táblázat:
A függőleges oszlopban: az első két dobókockával dobott számok összegének eloszlása
A vízszintes sorban: a harmadik dobókockával dobott szám eloszlása

A függetlenség miatt (X, Y) eloszlását direktszorzatként kapjuk meg:

		1	2	3	4	5	6
		$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$
2	$1/6^2$	$1/6^3$	$1/6^3$	$1/6^3$	$1/6^3$	$1/6^3$	$1/6^3$
3	$2/6^2$	$2/6^3$	$2/6^3$	$2/6^3$	$2/6^3$	$2/6^3$	$2/6^3$
4	$3/6^2$	$3/6^3$	$3/6^3$	$3/6^3$	$3/6^3$	$3/6^3$	$3/6^3$
5	$4/6^2$	$4/6^3$	$4/6^3$	$4/6^3$	$4/6^3$	$4/6^3$	$4/6^3$
6	$5/6^2$	$5/6^3$	$5/6^3$	$5/6^3$	$5/6^3$	$5/6^3$	$5/6^3$
7	$6/6^2$	$6/6^3$	$6/6^3$	$6/6^3$	$6/6^3$	$6/6^3$	$6/6^3$
8	$5/6^2$	$5/6^3$	$5/6^3$	$5/6^3$	$5/6^3$	$5/6^3$	$5/6^3$
9	$4/6^2$	$4/6^3$	$4/6^3$	$4/6^3$	$4/6^3$	$4/6^3$	$4/6^3$
10	$3/6^2$	$3/6^3$	$3/6^3$	$3/6^3$	$3/6^3$	$3/6^3$	$3/6^3$
11	$2/6^2$	$2/6^3$	$2/6^3$	$2/6^3$	$2/6^3$	$2/6^3$	$2/6^3$
12	$1/6^2$	$1/6^3$	$1/6^3$	$1/6^3$	$1/6^3$	$1/6^3$	$1/6^3$

Táblázat: *A két eloszlás direktszorzata*

X és Y összegének értékét írjuk a táblázat megfelelő cellájába:

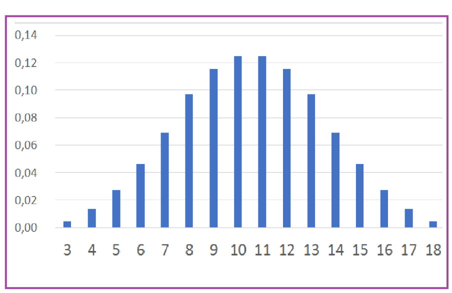
	1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12
7	8	9	10	11	12	13
8	9	10	11	12	13	14
9	10	11	12	13	14	15
10	11	12	13	14	15	16
11	12	13	14	15	16	17
12	13	14	15	16	17	18

Táblázat: *A dobott számok összege – három dobókocka esetén*

X és Y összegének az eloszlását az összegzési szabállyal kapjuk:

3	$1/6^3$	0.005
4	$3/6^3$	0.014
5	$6/6^3$	0.028
6	$10/6^3$	0.046
7	$15/6^3$	0.069
8	$21/6^3$	0.097
9	$25/6^3$	0.116
10	$27/6^3$	0.125
11	$27/6^3$	0.125
12	$25/6^3$	0.116
13	$21/6^3$	0.097
14	$15/6^3$	0.069
15	$10/6^3$	0.046
16	$6/6^3$	0.028
17	$3/6^3$	0.014
18	$1/6^3$	0.005

Táblázat:
Az összeg eloszlása – három szabályos dobókocka esetén



31. ábra. *Az összeg eloszlása – három szabályos dobókocka esetén*

4. Feladat: Az összeg eloszlása – négy szabályos dobókocka esetén. A négy dobókocka közül az első hárommal dobott számok összegét nevezük X -nek, a negyedikkel dobott számot Y -nak. Az alábbi táblázat bal oldalára X eloszlását, a tetejére Y eloszlását tettük:

		1	2	3	4	5	6
		1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
3	$1/6^3$						
4	$3/6^3$						
5	$6/6^3$						
6	$10/6^3$						
7	$15/6^3$						
8	$21/6^3$						
9	$25/6^3$						
10	$27/6^3$						
11	$27/6^3$						
12	$25/6^3$						
13	$21/6^3$						
14	$15/6^3$						
15	$10/6^3$						
16	$6/6^3$						
17	$3/6^3$						
18	$1/6^3$						

Táblázat:
A függőleges oszlopban: az első három dobókockával dobott számok összegének eloszlása
A vízszintes sorban: a negyedik dobókockával dobott szám eloszlása

A függetlenség miatt (X, Y) eloszlását direktszorzatként kapjuk meg:

		1	2	3	4	5	6
		1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
3	$1/6^3$	$1/6^4$	$1/6^4$	$1/6^4$	$1/6^4$	$1/6^4$	$1/6^4$
4	$3/6^3$	$3/6^4$	$3/6^4$	$3/6^4$	$3/6^4$	$3/6^4$	$3/6^4$
5	$6/6^3$	$6/6^4$	$6/6^4$	$6/6^4$	$6/6^4$	$6/6^4$	$6/6^4$
6	$10/6^3$	$10/6^4$	$10/6^4$	$10/6^4$	$10/6^4$	$10/6^4$	$10/6^4$
7	$15/6^3$	$15/6^4$	$15/6^4$	$15/6^4$	$15/6^4$	$15/6^4$	$15/6^4$
8	$21/6^3$	$21/6^4$	$21/6^4$	$21/6^4$	$21/6^4$	$21/6^4$	$21/6^4$
9	$25/6^3$	$25/6^4$	$25/6^4$	$25/6^4$	$25/6^4$	$25/6^4$	$25/6^4$
10	$27/6^3$	$27/6^4$	$27/6^4$	$27/6^4$	$27/6^4$	$27/6^4$	$27/6^4$
11	$27/6^3$	$27/6^4$	$27/6^4$	$27/6^4$	$27/6^4$	$27/6^4$	$27/6^4$
12	$25/6^3$	$25/6^4$	$25/6^4$	$25/6^4$	$25/6^4$	$25/6^4$	$25/6^4$
13	$21/6^3$	$21/6^4$	$21/6^4$	$21/6^4$	$21/6^4$	$21/6^4$	$21/6^4$
14	$15/6^3$	$15/6^4$	$15/6^4$	$15/6^4$	$15/6^4$	$15/6^4$	$15/6^4$
15	$10/6^3$	$10/6^4$	$10/6^4$	$10/6^4$	$10/6^4$	$10/6^4$	$10/6^4$
16	$6/6^3$	$6/6^4$	$6/6^4$	$6/6^4$	$6/6^4$	$6/6^4$	$6/6^4$
17	$3/6^3$	$3/6^4$	$3/6^4$	$3/6^4$	$3/6^4$	$3/6^4$	$3/6^4$
18	$1/6^3$	$1/6^4$	$1/6^4$	$1/6^4$	$1/6^4$	$1/6^4$	$1/6^4$

Táblázat: *A két eloszlás direktszorzata*

X és Y összegének értékét írjuk a táblázat megfelelő cellájába:

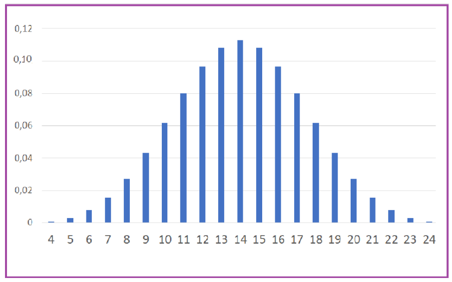
	1	2	3	4	5	6
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12
7	8	9	10	11	12	13
8	9	10	11	12	13	14
9	10	11	12	13	14	15
10	11	12	13	14	15	16
11	12	13	14	15	16	17
12	13	14	15	16	17	18
13	14	15	16	17	18	19
14	15	16	17	18	19	20
15	16	17	18	19	20	21
16	17	18	19	20	21	22
17	18	19	20	21	22	23
18	19	20	21	22	23	24

Táblázat: *A dobott számok összege – négy dobókocka esetén*

X és Y összegének az eloszlását az összegzési szabállyal kapjuk:

4	$1/6^4$	0.001
5	$4/6^4$	0.003
6	$10/6^4$	0.008
7	$20/6^4$	0.015
8	$35/6^4$	0.027
9	$56/6^4$	0.043
10	$80/6^4$	0.062
11	$104/6^4$	0.080
12	$125/6^4$	0.096
13	$140/6^4$	0.108
14	$146/6^4$	0.113
15	$140/6^4$	0.108
16	$125/6^4$	0.096
17	$104/6^4$	0.080
18	$80/6^4$	0.062
19	$56/6^4$	0.043
20	$35/6^4$	0.027
21	$20/6^4$	0.015
22	$10/6^4$	0.008
23	$4/6^4$	0.003
24	$1/6^4$	0.001

Táblázat:
Az összeg eloszlása – négy szabályos dobókocka esetén



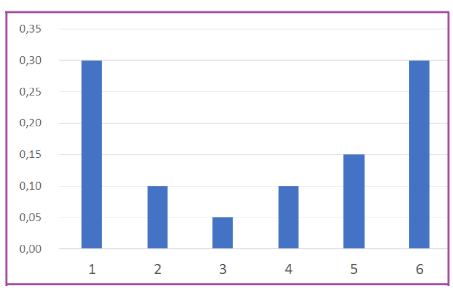
32. ábra. *Az összeg eloszlása – négy szabályos dobókocka esetén:* GYÖNYÖRŰ HARANG ALAK!

7.2. Hamis dobókockák esete

1. Feladat: A dobott szám eloszlása – egyetlen hamis dobókocka esetén. Ez a feladat nagyon egyszerű, mert nem kell csinálni semmi mást, mint ránézni arra a kissé már izgalmas táblázatra és ábrára, ami a dobott szám eloszlását mutatja, amikor egy ilyen hamis dobókockával dobunk. Vegyük észre, hogy a feltételezett dobókockán az 1 és a 6 a legvalószínűbb, a 2, 3, 4, 5 értékek valószínűsége kisebb.

1	$6/20$	0.30
2	$2/20$	0.10
3	$1/20$	0.05
4	$2/20$	0.10
5	$3/20$	0.15
6	$6/20$	0.30

Táblázat: *A dobott szám eloszlása – egyetlen hamis dobókocka esetén*



33. ábra. *A dobott szám eloszlása – egyetlen hamis dobókocka esetén*

2. Feladat: Az összeg eloszlása – két hamis dobókocka esetén. Kiindulásként vegyük fel a dobott számok eloszlásait külön-külön egy táblázat baloldali és felső peremén:

		1	2	3	4	5	6
		6/20	2/20	1/20	2/20	3/20	6/20
1	6/20						
2	2/20						
3	1/20						
4	2/20						
5	3/20						
6	6/20						

Táblázat:
A függőleges oszlopban: az első dobókockával dobott szám eloszlása
A vízszintes sorban: a második dobókockával dobott szám eloszlása

A függetlenség miatt a dobott két szám együttes eloszlását direktszorzatként kapjuk meg:

		1	2	3	4	5	6
		6/20	2/20	1/20	2/20	3/20	6/20
1	6/20	$36/20^2$	$12/20^2$	$6/20^2$	$12/20^2$	$18/20^2$	$36/20^2$
2	2/20	$12/20^2$	$4/20^2$	$2/20^2$	$4/20^2$	$6/20^2$	$12/20^2$
3	1/20	$6/20^2$	$2/20^2$	$1/20^2$	$2/20^2$	$3/20^2$	$6/20^2$
4	2/20	$12/20^2$	$4/20^2$	$2/20^2$	$4/20^2$	$6/20^2$	$12/20^2$
5	3/20	$18/20^2$	$6/20^2$	$3/20^2$	$6/20^2$	$9/20^2$	$18/20^2$
6	6/20	$36/20^2$	$12/20^2$	$6/20^2$	$12/20^2$	$18/20^2$	$36/20^2$

Táblázat: *A két eloszlás direktszorzata*

A dobott számok összegének értékét írjuk a táblázat megfelelő cellájába:

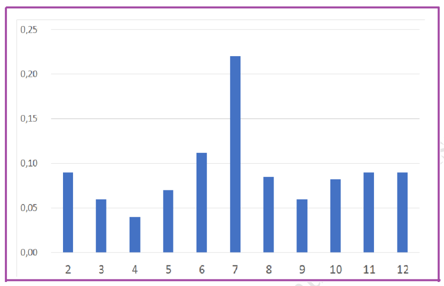
	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Táblázat: *A dobott számok összege*

A dobott számok összegének az eloszlását az összegzési szabállyal kapjuk:

2	$36/20^2$	0.090
3	$24/20^2$	0.060
4	$16/20^2$	0.040
5	$28/20^2$	0.070
6	$43/20^2$	0.113
7	$88/20^2$	0.220
8	$34/20^2$	0.085
9	$24/20^2$	0.060
10	$33/20^2$	0.083
11	$36/20^2$	0.090
12	$36/20^2$	0.090

Táblázat: *Az összeg eloszlása – két hamis dobókocka esetén*



34. ábra. *Az összeg eloszlása – két hamis dobókocka esetén*

3. Feladat: Az összeg eloszlása – három hamis dobókocka esetén. A három dobókocka közül az első kettővel dobott számok összegét nevezük X -nek, a harmadikkal dobott számot Y -nak. Az alábbi táblázat bal oldalára X eloszlását, a tetejére Y eloszlását tettük:

		1	2	3	4	5	6
		$6/20$	$2/20$	$1/20$	$2/20$	$3/20$	$6/20$
2	$36/20^2$						
3	$24/20^2$						
4	$16/20^2$						
5	$28/20^2$						
6	$45/20^2$						
7	$88/20^2$						
8	$34/20^2$						
9	$24/20^2$						
10	$33/20^2$						
11	$36/20^2$						
12	$36/20^2$						

Táblázat:
A függőleges oszlopban: az első két dobókockával dobott számok összegének eloszlása
A vízszintes sorban: a harmadik dobókockával dobott szám eloszlása

A függetlenség miatt (X,Y) eloszlását direktszorzatként kapjuk meg:

		1	2	3	4	5	6
		$1/20$	$1/20$	$1/20$	$1/20$	$1/20$	$1/20$
2	$36/20^2$	$1/20^3$	$1/20^3$	$1/20^3$	$1/20^3$	$1/20^3$	$1/20^3$
3	$24/20^2$	$2/20^3$	$2/20^3$	$2/20^3$	$2/20^3$	$2/20^3$	$2/20^3$
4	$16/20^2$	$3/20^3$	$3/20^3$	$3/20^3$	$3/20^3$	$3/20^3$	$3/20^3$
5	$28/20^2$	$4/20^3$	$4/20^3$	$4/20^3$	$4/20^3$	$4/20^3$	$4/20^3$
6	$45/20^2$	$5/20^3$	$5/20^3$	$5/20^3$	$5/20^3$	$5/20^3$	$5/20^3$
7	$88/20^2$	$6/20^3$	$6/20^3$	$6/20^3$	$6/20^3$	$6/20^3$	$6/20^3$
8	$34/20^2$	$5/20^3$	$5/20^3$	$5/20^3$	$5/20^3$	$5/20^3$	$5/20^3$
9	$24/20^2$	$4/20^3$	$4/20^3$	$4/20^3$	$4/20^3$	$4/20^3$	$4/20^3$
10	$33/20^2$	$3/20^3$	$3/20^3$	$3/20^3$	$3/20^3$	$3/20^3$	$3/20^3$
11	$36/20^2$	$2/20^3$	$2/20^3$	$2/20^3$	$2/20^3$	$2/20^3$	$2/20^3$
12	$36/20^2$	$1/20^3$	$1/20^3$	$1/20^3$	$1/20^3$	$1/20^3$	$1/20^3$

Táblázat: *A két eloszlás direktszorzata*

X és Y összegének értékét írjuk a táblázat megfelelő cellájába:

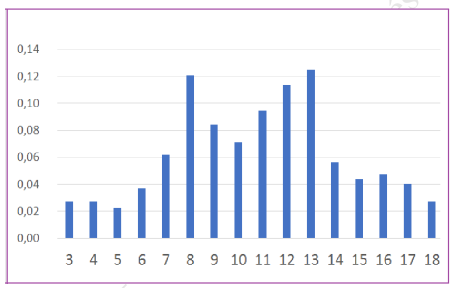
	1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12
7	8	9	10	11	12	13
8	9	10	11	12	13	14
9	10	11	12	13	14	15
10	11	12	13	14	15	16
11	12	13	14	15	16	17
12	13	14	15	16	17	18

Táblázat: *A dobott számok összege – három dobókocka esetén*

A dobott számok összegének az eloszlását az összegzési szabállyal kapjuk:

3	$216/20^3$	0.027
4	$216/20^3$	0.027
5	$180/20^3$	0.023
6	$296/20^3$	0.037
7	$498/20^3$	0.062
8	$966/20^3$	0.121
9	$673/20^3$	0.084
10	$570/20^3$	0.071
11	$759/20^3$	0.095
12	$908/20^3$	0.114
13	$999/20^3$	0.125
14	$450/20^3$	0.056
15	$351/20^3$	0.044
16	$378/20^3$	0.047
17	$324/20^3$	0.041
18	$216/20^3$	0.027

Táblázat: *Az összeg eloszlása – három hamis dobókocka esetén*



35. ábra. *Az összeg eloszlása – három hamis dobókocka esetén*

4. Feladat: Az összeg eloszlása – négy hamis dobókocka esetén. A négy dobókocka közül az első hárommal dobott számok összegét nevezük X -nek, a negyedikkel dobott számot Y -nak. Az alábbi táblázat bal oldalára X eloszlását, a tetejére Y eloszlását tettük:

		1	2	3	4	5	6
		$1/20$	$1/20$	$1/20$	$1/20$	$1/20$	$1/20$
3	$216/20^3$						
4	$216/20^3$						
5	$180/20^3$						
6	$296/20^3$						
7	$498/20^3$						
8	$966/20^3$						
9	$673/20^3$						
10	$570/20^3$						
11	$759/20^3$						
12	$908/20^3$						
13	$999/20^3$						
14	$450/20^3$						
15	$351/20^3$						
16	$378/20^3$						
17	$324/20^3$						
18	$216/20^3$						

Táblázat:
A függőleges oszlopban: az első három dobókockával dobott számok összegének eloszlása
A vízszintes sorban: a negyedik dobókockával dobott szám eloszlása

A függetlenség miatt (X, Y) eloszlását direktszorzatként kapjuk meg:

		1	2	3	4	5	6
		$1/20$	$1/20$	$1/20$	$1/20$	$1/20$	$1/20$
3	$216/20^3$	$216/20^4$	$216/20^4$	$216/20^4$	$216/20^4$	$216/20^4$	$216/20^4$
4	$216/20^3$	$216/20^4$	$216/20^4$	$216/20^4$	$216/20^4$	$216/20^4$	$216/20^4$
5	$180/20^3$	$180/20^4$	$180/20^4$	$180/20^4$	$180/20^4$	$180/20^4$	$180/20^4$
6	$296/20^3$	$296/20^4$	$296/20^4$	$296/20^4$	$296/20^4$	$296/1296$	$296/6^4$
7	$498/20^3$	$498/20^4$	$498/20^4$	$498/20^4$	$498/20^4$	$498/20^4$	$498/20^4$
8	$966/20^3$	$966/20^4$	$966/20^4$	$966/20^4$	$966/20^4$	$966/20^4$	$966/20^4$
9	$673/20^3$	$673/20^4$	$673/20^4$	$673/20^4$	$673/20^4$	$673/20^4$	$673/20^4$
10	$570/20^3$	$570/20^4$	$570/20^4$	$570/20^4$	$570/20^4$	$570/20^4$	$570/20^4$
11	$759/20^3$	$759/20^4$	$759/20^4$	$759/20^4$	$759/20^4$	$759/20^4$	$759/20^4$
12	$908/20^3$	$908/20^4$	$908/20^4$	$908/20^4$	$908/20^4$	$908/20^4$	$908/20^4$
13	$999/20^3$	$999/20^4$	$999/20^4$	$999/20^4$	$999/20^4$	$999/20^4$	$999/20^4$
14	$450/20^3$	$999/20^4$	$450/20^4$	$450/20^4$	$450/20^4$	$450/20^4$	$450/20^4$
15	$350/20^3$	$350/20^4$	$350/20^4$	$350/20^4$	$350/20^4$	$350/20^4$	$350/20^4$
16	$378/20^3$	$378/20^4$	$378/20^4$	$378/20^4$	$378/20^4$	$378/20^4$	$378/20^4$
17	$324/20^3$	$324/20^4$	$324/20^4$	$324/20^4$	$324/20^4$	$324/20^4$	$324/20^4$
18	$216/20^3$	$216/20^4$	$216/20^4$	$216/20^4$	$216/20^4$	$216/20^4$	$216/20^4$

Táblázat: *A két eloszlás direktszorzata*

X és Y összegének értékét írjuk a táblázat megfelelő cellájába:

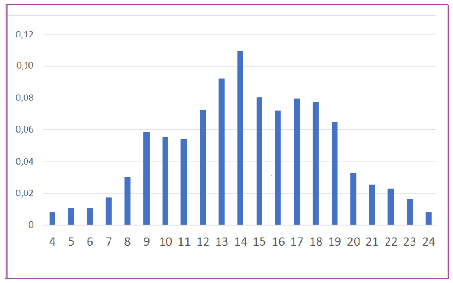
	1	2	3	4	5	6
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12
7	8	9	10	11	12	13
8	9	10	11	12	13	14
9	10	11	12	13	14	15
10	11	12	13	14	15	16
11	12	13	14	15	16	17
12	13	14	15	16	17	18
13	14	15	16	17	18	19
14	15	16	17	18	19	20
15	16	17	18	19	20	21
16	17	18	19	20	21	22
17	18	19	20	21	22	23
18	19	20	21	22	23	24

Táblázat: *A dobott számok összege – négy dobókocka esetén*

A dobott számok összegének az eloszlását az összegzési szabállyal kapjuk:

4	$1\,296/20^4$	0.008
5	$1\,728/20^4$	0.011
6	$1\,728/20^4$	0.011
7	$2\,784/20^4$	0.017
8	$4\,840/20^4$	0.030
9	$9\,392/20^4$	0.059
10	$8\,896/20^4$	0.062
11	$8\,696/20^4$	0.054
12	$11\,569/20^4$	0.072
13	$14\,768/20^4$	0.092
14	$17\,524/20^4$	0.110
15	$12\,872/20^4$	0.080
16	$11\,518/20^4$	0.072
17	$12\,696/20^4$	0.079
18	$12\,396/20^4$	0.077
19	$10\,368/20^4$	0.065
20	$5\,265/20^4$	0.033
21	$4\,104/20^4$	0.026
22	$3\,672/20^4$	0.022
23	$2\,592/20^4$	0.016
24	$1\,296/20^4$	0.008

Táblázat: *Az összeg eloszlása – négy hamis dobókocka esetén*

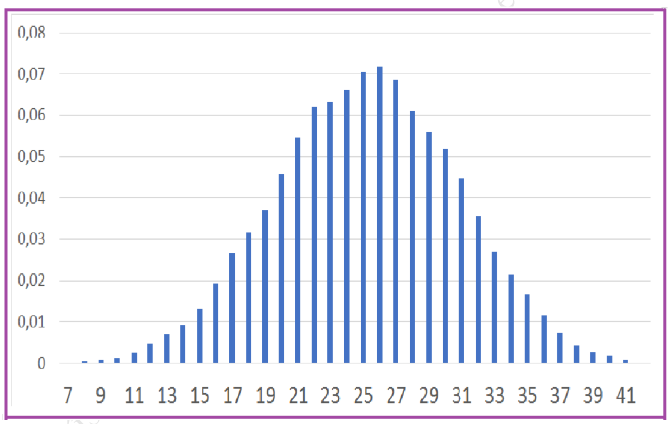


36. ábra. *Az összeg eloszlása – négy hamis dobókocka esetén*

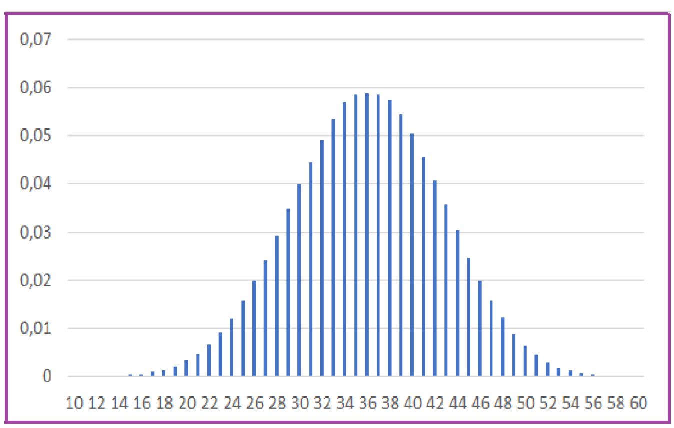
A számolást – terjedelmessége és unalmas mivolta miatt – itt a könyvben nem folytatjuk tovább. Az Excelben elvégézett számítások alapján csak ábrákkal adjuk meg

- 7 hamis dobókocka összegének és
- 10 hamis dobókocka összegének

az eloszlását. Látható, hogy 7 dobókocka esetén az összeg eloszlása még nem igazán harang alakú, de 10 dobókocka esetén már gyönyörű harang alakot kapunk.



37. ábra. *Az összeg eloszlása – hét hamis dobókocka esetén*



38. ábra. *Az összeg eloszlása – tíz hamis dobókocka esetén:* GYÖNYÖRŰ HARANG ALAK!

7.3. Különböző dobókockák esete

Az előző két alfejeztben a dobókockák mindkét esetben egyformák voltak. Először egyformán szabályosak, azután pedig egyformán hamisak. Ahhoz, hogy a dobókockákkal dobott számok összegének eloszlása harang alakot öltsön, nem kell, hogy a kockák egyformák legyenek. Ha a dobókockáink nem egyformák, mert

- a lapjaik száma más-más, vagy
- a cinkelésük más-más,

de **a kockák egymástól függetlenül működnek, akkor – elég sok dobókocka esetén – az összeg eloszlása közelítőleg harang alakú lesz**. A harang elhelyezkedése és alakja (keskenyebb, csúcsosabb vagy szélesebb, laposabb) természetesen függ attól, hogy a dobókockák milyenek, a velük dobott számok várható értéke és szórása mekkora, de az a tény, hogy az összeg eloszlása közelítőleg harang alakú, elég sok dobókocka esetén teljesülni fog. Ennek illusztrációjától itt most eltekintünk, a számolás Excellel való elvégzése legyen az Olvsó munkája és öröme!

8. Általános formulák kétdimenziós eloszlásokkal kapcsolatban

Amikor az X és Y valószínűségi változókból alkotunk egy kétdimenziós (X, Y) valószínűségi változót, kézenfekvő, hogy X, Y és (X, Y) súlyfüggvényei között kapcsolatokat fedezhetünk fel. A most következő általános formulákban x és y a súlyfüggvények változóit jelölik. Az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó súlyfüggvényét $p(x, y)$, az X valószínűségi változó súlyfüggvényét $p_1(x)$, az Y valószínűségi változó súlyfüggvényét $p_2(y)$ jelöli. Emlékeztetünk a súlyfüggvények jelentésére:

$$
\begin{aligned}
p_1(x) &= \mathrm{P}(\ X = x\ ) \\
p_2(y) &= \mathrm{P}(\ Y = y\ ) \\
p(x,y) &= \mathrm{P}(\ X = x,\ Y = y\ )
\end{aligned}
$$

8.1. Összegzési szabály vetület eloszlásokkal kapcsolatban

Nyilvánvalóak az alábbi összegzési szabályok:

$$
\begin{aligned}
p_1(x) &= \sum_y p(x,y) \\
p_2(y) &= \sum_x p(x,y)
\end{aligned}
$$

8.2. Szorzási szabály független koordináták esetére

Ha X és Y függetlenek, akkor

$$p(x,y) = p_1(x) \cdot p_2(y)$$

A $p(x, y)$ súlyfüggvényt (eloszlást) a $p_1(x)$ és $p_2(y)$ súlyfüggvények (eloszlások) **direktszorzat**ának nevezzük.

8.3. Osztási és szorzási szabályok feltételes súlyfüggvényekkel

Ha x lehetséges értéke X -nek, akkor az $X = x$ feltétel mellett Y feltételes súlyfüggvényét $p_{2|1}(y|x)$ -szel jelöljük. Tehát $p_{2|1}(y|x)$ annak a valószínűségét jelöli, hogy az $X = x$ feltétel mellett bekövetkezik az $Y = y$ esemény:

$$p_{2|1}(y|x) = \mathrm{P}(\ Y = y \mid X = x\ )$$

Nyilván teljesül az alábbi osztási szabály:

$$p_{2|1}(y|x) = \frac{p(x,y)}{p_1(x)}$$

Hasonlóképpen, ha y lehetséges értéke Y -nak, akkor az $Y = y$ feltétel mellett X feltételes súlyfüggvényét $p_{1|2}(x|y)$ -nal jelöljük, azaz

$$p_{1|2}(x|y) = \mathrm{P}(\ X = x \mid Y = y\ )$$

Nyilván teljesül az alábbi osztási szabály:

$$p_{1|2}(x|y) \;=\; \frac{p(x,y)}{p_2(y)}$$

A felírt osztási szabályok így írhatók át szorzási szabályokká:

$$p(x,y) \;=\; p_1(x)\, p_{2|1}(y|x)$$
$$p(x,y) \;=\; p_2(y)\, p_{1|2}(x|y)$$

8.4. Eloszlások keverése

Az összegzési és a szorzási szabályok kombinálásával adódnak az alábbi formulák:

$$p_1(x) \;=\; \sum_y p_2(y)\, p_{1|2}(x|y)$$
$$p_2(y) \;=\; \sum_x p_1(x)\, p_{2|1}(y|x)$$

Ezek a formulák a korábban vett

$$\mathrm{P}(B) \;=\; \mathrm{P}(A_1)\cdot\mathrm{P}(B|A_1) + \mathrm{P}(A_2)\cdot\mathrm{P}(B|A_2) + \ldots$$

teljes valószínűség formulájának speciális esetei. Ezért hivatkozhatunk rájuk úgy is mint a **teljes valószínűség formulái kétdimenziós diszkrét valószínűségi változókra**. A jobboldali kifejezéseket egyfajta **keverés**nek is felfoghajuk. Például a

$$p_2(y) \;=\; \sum_x p_1(x)\, p_{2|1}(y|x)$$

formula azt mutatja, hogy a $p_2(y)$ függvényértéket úgy kaphatjuk meg, hogy a a $p_{2|1}(y|x)$ függvényértékeket a $p_1(x)$ súlyfüggvény szerint keverjük. Tehát

- **az Y valószínűségi változó súlyfüggvénye (eloszlása) nem más, mint az Y feltételes súlyfüggvényeinek (feltételes eloszlásainak) keveréke az X súlyfüggvénye (eloszlása) szerint.**

Hasonlóképpen

- **az X valószínűségi változó súlyfüggvénye (eloszlása) nem más, mint az X feltételes súlyfüggvényeinek (feltételes eloszlásainak) keveréke az Y súlyfüggvénye (eloszlása) szerint.**

8.5. Eloszlás transzformációja egydimenzióban

Tegyük fel, hogy adott egy $y = t(x)$ függvény. Ha az X valószínűségi változó értékét behelyettesítjük az $y = t(x)$ függvénybe, akkor a kapott $t(X)$ érték egy új Y valószínűségi változót definiál:

$$Y \;=\; t(X)$$

Y súlyfüggvényének az értékét egy adott y helyen az X súlyfüggvényéből összegzéssel kapjuk meg:

$$r(y) \;=\; \sum_{x:\; t(x) \,=\, y} p(x)$$

A képlet azt fejezi ki, hogy az $r(y)$ értéket úgy kaphatjuk meg, hogy megkeressük azokat az x helyeket, melyekre $t(x) = y$, és az ilyen x helyekhez tartozó $p(x)$ értékeket összeadjuk.

Azt mondjuk, hogy az új $r(y)$ súlyfüggvényt (eloszlást) az eredeti $p(x)$ súlyfüggvényből (eloszlásból) az $y = t(x)$ **transzformációval kaphatjuk meg**.

8.6. Eloszlás transzformációja kétdimenzióból egydimenzióba

A most következő fejezetekben végzett számítások elvileg papír-ceruza technikával is elvégezhetők. E könyv szerzője Excel segítségével számolt. Tanulságos, ha az Olvasó is elvégzi a számításokat Excellel, és megtapasztalja a számolás eleganciáját és erejét.

Kétdimenziós esetben, ha adott $z = t(x,y)$ függvény, és az (X,Y) kétdimenziós valószínűségi változó értékét behelyettesítjük a $z = t(x,y)$ függvénybe, akkor a kapott $t(X,Y)$ érték egy új Z valószínűségi változót definiál: $Z = t(X,Y)$.

*A Z **súlyfüggvényét** (X,Y) súlyfüggvényéből összegzéssel kapjuk meg:*

$$r(z) = \sum_{(x,y):\ t(x,y)\, =\, z} p(x,y)$$

A képlet azt fejezi ki, hogy az $r(z)$ értéket úgy kaphatjuk meg, hogy megkeressük azokat az (x,y) helyeket, melyekre $t(x,y) = z$, és az ilyen (x,y) helyekhez tartozó $p(x,y)$ értékeket összeadjuk.

*A Z **eloszlásfüggvényét** (X,Y) súlyfüggvényéből összegzéssel kapjuk meg:*

$$R(z) = \sum_{(x,y):\ t(x,y)\, \le\, z} p(x,y)$$

A képlet azt fejezi ki, hogy az $R(z)$ értéket úgy kaphatjuk meg, hogy megkeressük azokat az (x,y) helyeket, melyekre $t(x,y) \le z$, és az ilyen (x,y) helyekhez tartozó $p(x,y)$ értékeket összeadjuk.

Azt mondjuk, hogy az új eloszlást az eredeti eloszlásból a $z = t(x,y)$ **transzformációval kaphatjuk meg**.

8.7. Példák

Mindegyik példa azzal a feladattal kapcsolatos, melyet az 1. fejezet "Kombinatorikus alapképletek" című 8. pontjában vettünk: Egy dobozban 45 darab golyó van, melyek közül 10 piros, 15 kék, 20 fehér. Kiveszünk 8 golyót visszatevés nélkül, és megfigyeljük, hogy a kihúzottak között hány piros és hány kék lesz. Az így kapott X és Y valószínűségi változókból adódó (X,Y) kétdimenziós valószínűségi változó $p(x,y)$ súlyfüggvényének táblázatát akkor meghatároztuk (bár akkor még a súlyfüggvény folgalmát nem ismertük – most már ismerjük). A táblázatot idemásoljuk:

y										
8	0.000									
7	0.001	0.000								
6	0.004	0.005	0.001							
5	0.016	0.026	0.013	0.002						
4	0.0317	0.072	0.054	0.015	0.001					
3	0.033	0.102	0.108	0.048	0.009	0.001				
2	0.019	0.0756	0.106	0.067	0.019	0.002	0.000			
1	0.005	0.027	0.049	0.040	0.017	0.003	0.000	0.000		
0	0.001	0.004	0.008	0.009	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	x

Táblázat:
A valószínűségek numerikus értékei
(3 tizedes pontossággal; az üres helyeken nullák állnak)

(Mivel a táblázatba írt számok 3 tizedes pontosságúak, az alábbi számításokban a 3. tizedesjegyben adódhatnak "hibának tűnő" eltérések. Ezeken a pontatlanságokon nem szabad fennakadni.)

1. Példa: A kihúzott pirosak száma és kékek száma *szorzatának* súlyfüggvénye (eloszlása).

Először egy táblázatba beírjuk a lehetséges x és y értékek *szorzatait*. Íme:

y										
8	0									
7	0	7								
6	0	6	12							
5	0	5	10	15						
4	0	4	8	12	16					
3	0	3	6	9	12	15				
2	0	2	4	6	8	10	12			
1	0	1	2	3	4	5	6	7		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	x

Táblázat:
A szorzat értékei
(Az üres helyek 0 valószínűségűek, azokkal nem kell foglalkozni.)

A szorzat súlyfüggvényének (eloszlásának) meghatározása céljából a szorzat lehetséges értékeit egy új táblázat első oszlopába rendezzük, és minden sorban kiszámoljuk a megfelelő valószínűséget az idevonatkozó összegzési szabállyal. Ezt kapjuk:

z	$r(z)$
0	0.136
1	0.027
2	0.124
3	0.143
4	**0.195**
5	0.030
6	0.180
8	0.074
9	0.048
10	0.015
12	0.025
15	0.002
16	0.001

Táblázat: *A szorzat súlyfüggvénye (eloszlása)*

Most utólag – példaként – elmagyarázzuk, hogy a táblázatban vastagítással kiemelt **0.195** érték hogyan jött ki:

- Először "A szorzat értékei" című táblázatban megkerestük azokat az (x, y) helyeket, melyekre $x \cdot y = 4$. Ezeket találtuk:

$$(1,4) \qquad (2,2) \qquad (4,1)$$

- Ezután a talált helyekhez tartózó

$$p(1,4) \;=\; 0.072$$
$$p(2,2) \;=\; 0.106$$
$$p(4,1) \;=\; 0.017$$

  valószínűségeket összeadtuk:

$$r(4) \;=\; 0.072 \;+\; 0.106 \;+\; 0.017 \;\;=\;\; \mathbf{0.195}$$

2. Példa: A kihúzott pirosak száma és kékek száma *eltérésének* súlyfüggvénye (eloszlása)
(eltérés = különbség abszolút értéke).

Először egy táblázatba beírjuk a lehetséges x és y értékek *eltéréseit*. Íme:

y										
8	8									
7	7	6								
6	6	5	4							
5	5	4	3	2						
4	4	3	2	1	0					
3	3	2	1	0	1	2				
2	2	1	0	1	2	3	4			
1	1	0	1	2	3	4	5	6		
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	x

Táblázat: *Az eltérések értékei*

Az eltérés súlyfüggvényének (eloszlásának) meghatározása céljából az eltérés lehetséges értékeit egy új táblázat első oszlopába rendezzük, és minden sorban kiszámoljuk a megfelelő valószínűséget az idevonatkozó összegzési szabállyal. Ezt kapjuk:

z	$r(z)$
0	0.183
1	0.332
2	0.245
3	**0.145**
4	0.066
5	0.022
6	0.005
7	0.001
8	0.000

Táblázat: *Az eltérés súlyfüggvénye (eloszlása)*

Most utólag – példaként – elmagyarázzuk, hogy a táblázatban vastagítással kiemelt **0,145** érték hogyan jött ki:

- Először "Az eltérés értékei" című táblázatban megkerestük azokat az (x, y) helyeket, melyekre $|x - y| = 3$. Ezeket találtuk:

$$(2,5) \qquad (1,4) \qquad (0,3) \qquad (3,0) \qquad (4,1) \qquad (5,2)$$

- Ezután a talált helyekhez tartózó

$$\begin{aligned} p(2,5) &= 0.013 \\ p(1,4) &= 0.072 \\ p(0,3) &= 0.033 \\ p(3,0) &= 0.009 \\ p(4,1) &= 0.017 \\ p(5,2) &= 0.002 \end{aligned}$$

valószínűségeket összeadtuk:

$$r(3) = 0.013 + 0.072 + 0.033 + 0.009 + 0.017 + 0.002 = \mathbf{0.145}$$

3. Példa: A kihúzott pirosak száma és kékek száma *összegének* súlyfüggvénye (eloszlása).

Először egy táblázatba beírjuk a lehetséges x és y értékek *összegeit*. Íme:

y										
8	8									
7	7	8								
6	6	7	8							
5	5	6	7	8						
4	4	5	6	7	8					
3	3	4	5	6	7	8				
2	2	3	4	5	6	7	8			
1	1	2	3	4	5	6	7	8		
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	x

Táblázat: *Az összeg értékei*

Az összeg súlyfüggvényének (eloszlásának) meghatározása céljából az összeg lehetséges értékeit egy új táblázat első oszlopába rendezzük, és minden sorban kiszámoljuk a megfelelő valószínűséget az idevonatkozó összegzési szabállyal. Ezt kapjuk:

z	$r(z)$
0	0.001
1	0.009
2	0.054
3	**0.165**
4	0.284
5	0.281
6	0.156
7	0.045
8	0.005

Táblázat: *Az összeg súlyfüggvénye (eloszlása)*

Most utólag – példaként – elmagyarázzuk, hogy a táblázatban vastagítással kiemelt **0,165** érték hogyan jött ki:

- Először "Az összeg értékei" című táblázatban megkerestük azokat az (x, y) helyeket, melyekre $x + y = 3$. Ezeket találtuk:

$$(0,3) \qquad (1,2) \qquad (2,1) \qquad (3,0)$$

- Ezután a talált helyekhez tartózó

$$p(0,3) = 0.033$$
$$p(1,2) = 0.076$$
$$p(2,1) = 0.049$$
$$p(3,0) = 0.009$$

valószínűségeket összeadtuk:

$$r(3) = 0.033 + 0.076 + 0.049 + 0.009 = \mathbf{0.165}$$

8.8. Független valószínűségi változók összege – konvolúció

Az összegre vonatkozó korábbi képletnek egy speciális esetét külön kihangsúlyozzuk. Ha X és Y független valószínűségi változók, akkor $X + Y$ súlyfüggvénye:

$$r(z) = \sum_{(x,y):\ x+y\,=\,z} p_1(x) \cdot p_2(y)$$

vagy

$$r(z) = \sum_{x} p_1(x) \cdot p_2(z - x)$$

vagy

$$r(z) = \sum_{y} p_1(z - y) \cdot p_2(y)$$

A képletek azt fejezik ki, hogy az $r(z)$ értéket úgy kaphatjuk meg, hogy megkeressük azokat az (x, y) helyeket, melyekre $x + y = z$, és az ilyen (x, y) helyekhez tartozó $p_1(x) \cdot p_2(y)$ szorzatértékeket összeadjuk.

Azt mondjuk, hogy az $r(z)$ súlyfüggvény (eloszlás) a $p_1(x)$ és $p_2(y)$ eloszlásokból **konvolúció**val adódik.