Valószínűségszámítás
1. rész
Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók
—
GYAKORLÓ FELADATOK

Vetier András

2020. szeptember 30.

Tartalomjegyzék

Tisztelt Hallgatók!

Kérem, hogy a jegyzetben talált hibákat a **vetier@math.bme.hu** email címen jelezzék nekem. A levél tárgya legyen: **Hibát találtam**. Egy hatékony módszer a hibák rögzítésére, ha valaki a számítógépen olvassa a jegyzetet:

- nyom egy PFRINT SCREEN-t
- behívja a PAINT programot
- nyom egy PASTE (ctrl-V) utasítást
- pirossal bekarikázza a hibát, esetleg valamit oda ír
- elmenti a JPG fájlt, a fájl neve legyen a hiba helyének az oldalszáma, vagy a nevében legyen benne az oldalszám
- a JPG fájlokat csatolt fájlként a fent megadott címre

Természetesen minden más módszerrel küldött hibajelzést is köszönök.

Az "***Extra feladat***", "***Extra tananyag***" cimkékkel megjelölt feladatok és anyagrészek nem részei a kötelező vizsga anyagának. Ezeket a vizsgákon nem kérdezzük. Viszont ha valaki az *"Extra feladat"*, *"Extra tananyag"* cimkékkel megjelölt feladatokból és anyagrészekből

- összesen 20 oldalnyi mennyiséget szépen, okosan megtanult, és
- a honlapon megadott határidőig szándékét emailben jelzi, és
- a szóbeli beszámoló elején írásban bemutatja, hogy mik azok az anyagrészek, melyekből összeáll az ő extra 20 oldala, és
- utána a vizsgáztató által a deklarált anyagból feltett kérdésekre szépen, okosan válaszol, akkor

a vizsgán már elért a közepes (3) vagy a jó (4) osztályzatát egy jeggyel javíthatja.

A "szépen, okosan" itt azt jelenti, hogy tényleg érti a dolgokat, nem csupán visszamondja az olvasottakat.

Nem iMSC hallgatók részére a küldendő email címzettje: **vetier49@gmail.com**, tárgya: **Beszámoló Extra tananyagból**.

iMSc hallgatók a jegy javításán túl iMSc extra pontokat szerezhetnek, ha a megtanult anyag mennyisége 30 oldal. Részükre a küldendő email címzettje: **ferenczi@math.bme.hu**, tárgya: **Beszámoló Extra tananyagból**.

Eredményes, örömteli, jó tanulást kívánok! Üdvözlettel,

2018. augusztunovember 29.

Vetier András

1. Esemény, valószínűség

I. téma: Lehetséges kimenetelek

Az alábbi véletlen jelenségek megnevezett megfigyelésével kapcsolatban adjuk meg az eseményteret, azaz soroljuk fel a lehetséges kimeneteleket (más néven: elemi eseményeket). Minden esetben állapítsuk meg, hogy hány elemű az eseménytér?

1. (a) Két szabályos érmével dobunk,
   (b) Három szabályos érmével dobunk,
   (c) Négy szabályos érmével dobunk,
   (d) Öt szabályos érmével dobunk,
   (e) Tíz szabályos érmével dobunk,

   és megfigyeljük mindegyik érmén, hogy melyik oldal van felül.

2. (a) Addig dobunk egy szabályos érmével, amíg végre fejet kapunk,
   (b) Addig dobunk egy szabályos érmével, amíg másodszorra fejet kapunk,
   (c) Addig dobunk egy szabályos érmével, amíg harmadszorra fejet kapunk,

   és megfigyeljük, hány dobás kell ehhez.

3. (a) Addig dobunk egy szabályos érmével, amíg végre fejet kapunk,
   (b) Addig dobunk szabályos érmével, amíg másodszorra fejet kapunk,
   (c) Addig dobunk szabályos érmével, amíg harmadszorra fejet kapunk,

   és megfigyeljük, hogy addig hányszor dobtunk írást.

4. (a) Két szabályos (különböző színű) dobókockával dobunk,
   (b) Három szabályos (különböző színű) dobókockával dobunk,
   (c) Négy szabályos dobókockával dobunk,
   (d) Öt szabályos (különböző színű) dobókockával dobunk,

   és megfigyeljük mindegyik kockán, hogy melyik szám van felül.

5. (a) Addig dobunk egy szabályos dobókockával, amíg végre hatost kapunk,
   (b) Addig dobunk egy szabályos dobókockával, amíg másodszorra hatost kapunk,
   (c) Addig dobunk egy szabályos dobókockával, amíg harmadszorra hatost kapunk,

   és megfigyeljük, hány dobás kell ehhez.

II. téma: Kombinatorika gyakorlása

6. A hét törpe minden este más sorrendben szeretne sorba állni, amikor Hófehérke a vacsorát osztja. Hányféleképpen tehetik ezt meg?

7. Hányféle sorrendben rakhatók ki a MATEMATIKA szó betűi?

8. Egy versenyen 5 -en indulnak, az újságok az első három helyezett nevét közlik. Hányféle lehet ez a lista? (Közlik a helyezést is.)

9. Egy fagyizóban 5 féle fagylalt kapható: vanília, csoki, málna, pisztácia és citrom. Hányféleképpen vehetünk 2 gombócot, ha számít a gombócok sorrendje is, és lehet egyfajtából többet is venni?

10. Van 6 lányismerősöm, és kettőt el akarok hívni moziba. Hányféleképpen tehetem ezt meg?

11. 3 új tanárt és egy titkárnőt akarnak felvenni egy iskolában. 6 tanár- és 3 titkárnő-jelölt van. Hányféleképpen kerülhetnek ki közülük az iskola új dolgozói?

12. Egy számkombinációs zárat 3 db különböző, 1 és 10 közötti szám begépelésével lehet kinyitni, de tudjuk, hogy a számok növekvő sorrendben vannak. Hány ilyen kombináció van?

III. téma: Klasszikus képlet alkalmazása

13. Feldobunk egy érmét

    - kétszer
    - háromszor
    - n -szer

    egymásután.

    (a) Mi a valószínűsége, hogy dobunk (legalább egy) fejet?

    (b) És hogy pontosan 1 db fejet dobunk?

14. Egy csomag magyar kártyából kiveszünk egy lapot, megnézzük a színét, majd visszatesszük. Megkeverjük a paklit, majd megint választunk egy lapot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a két lap színe különböző?

15. Mi a valószínűsége annak, hogy két szabályos kockával dobva legalább az egyik 6 -os lesz? És annak a valószínűsége, hogy egyik sem lesz 6 -os?

16. Mi a valószínűsége annak, hogy egy háromgyermekes családban a gyerekek mind egyneműek, ha a lányok és a fiúk születési valószínűsége egyaránt $\frac{1}{2}$?

17. Legalább hány szabályos pénzdarabot kell feldobni ahhoz, hogy 90% -nál nagyobb legyen az esély arra, hogy legyen köztük fej?

18. Mennyi a valószínűsége, hogy ha egy polcon 7 db könyvet véletlenszerűen sorba rakunk, akkor egy köztük lévő trilógia kötetei egymás mellé kerülnek?

19. Hatszor dobunk egy szabályos dobókockával. Mi a valószínűsége annak, hogy mind a hat szám előjön?

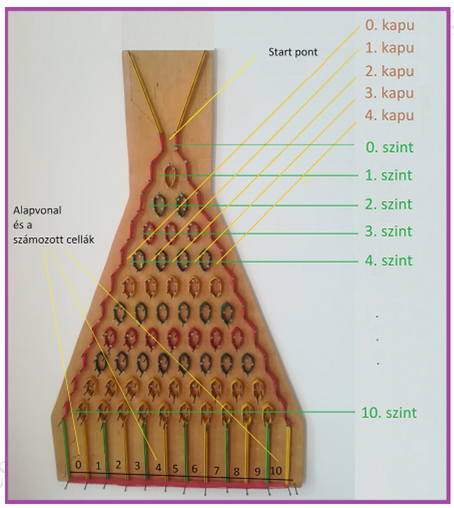
20. A brazil labdarúgó válogatott edzésének megkezdése előtt, az edzésen résztvevő 22 játékost két csoportba osztják. Mi annak a valószínűsége, ha találomra történik a szétosztás a két 11-es csoportba, hogy Ronaldo és Ronaldinho egymás ellen játszik?

21. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az ötös lottón (90 -ből 5 számot húznak, sorrend nem számít) pontosan két találatunk lesz? És hogy legalább két találatunk lesz?

22. Egy dobozban 6 zöld és 4 sárga golyó van. Kihúzunk (visszatevés nélkül) 4 golyót csukott szemmel, mennyi a valószínűsége, hogy pontosan két zöld golyót húztunk ki?

A híres **Galton deszka.**
A képek alapján ismerkedjünk meg a Galton deszkával! Képzeljük el, mi történik, mi történhet, ha start pontra helyezünk egy golyót, ami aztán ide-oda ütődve, legurul az alapvonalra! Feltételezzük, hogy minden elágazásnál a golyó 0.5 valószínűséggel megy balra, 0.5 valószínűséggel megy jobbra.

1. ábra. *Galton deszka*



2. ábra. *Galton deszka: szintek 0-tól 10-ig és a kapuk a 4. szinten*

3. ábra. *Egy lehetséges pálya mentén többször is odarajzoltuk a golyót*

Két fontos kérdéskör:

- Vajon milyen eséllyel gurul a golyó a lehetséges pályák valamelyikén?
- A végén az alapvonalon milyen eséllyel köt ki az egyes cellákban?

Kissé távoli és merész hasonlat, de elgondolkodtató:

- Vajon – az életem egy véletlennel tűzdelt szakaszán – merre sodor a sors?
- Hová sodor a sors, hol kötök ki a végén?

Amikor Ön, Kedves Olvasó, a valószínűségszámítást kezdőként tanulja, akkor először ilyen "golyó-sorsokat" kell érdeklődéssel tanulmányoznia: hogy alakul a leguruló golyó sorsa? Ha ezt nem találja elég izgalmasnak, akkor íme a vígasz: megfelelő mennyiségű és minőségű tanulás árán el lehet jutni sokkal összetettebb, és emiatt izgalmasabb, életszerűbb prolémákhoz.

A leguruló golyó pályáját azzal jellemezzük, hogy minden egyes szinttel kapcsolatban (a legalsó szinttől – természetesen – eltekintve) megmondjuk, hogy a golyó balra vagy jobbra hagyja el a szintet. Az ábrán látható pálya a balra `(B)` és jobbra `(J)` lépések alábbi sorozatával jellemezhető:

```
B B J J B B J J J J
```

Számlálási feladatok:

23. Hány lehetséges pálya van

    (a) a start pont és az alapvonal (10. szint) között?

    (b) a start pont és a 4. szint között?

    (c) a 4. szint 2. kapuja (mint új start pont) és az alapvonal (10. szint) között?

24. Hány pálya fut a start pont és

    (a) az alapvonal 0 -ik cellája között?

    (b) az alapvonal 1 -ső cellája között?

(c) az alapvonal 2 -ik cellája között?

(d) az alapvonal 6 -ik cellája között?

(e) az alapvonal k -ik cellája között?

25. Hány olyan pálya van, mely a start pontból indul és

    (a) átmegy a 4. szint 1. kapuján?

    (b) átmegy a 4. szint 2. kapuján?

    (c) átmegy az i-ik szint j-ik kapuján?

26. Hány olyan pálya van, mely

    (a) átmegy a 4. szint 1. kapuján és az alapvonalon a 3. cellába fut?

    (b) átmegy a 4. szint 1. kapuján és az alapvonalon a 4. cellába fut?

    (c) átmegy a 4. szint i -ik kapuján és az alapvonalon a j -ik cellába fut?

    (d) átmegy a k-ik szint i -ik kapuján és az alapvonalon a j -ik cellába fut?

27. Most képzeljünk el egy nagyobb Galton deszkát, aminek több szintje van: az alapvonala nem a 10. szint, hanem az n -ik. Hány olyan pálya van ebben a Galton deszkában, mely átmegy a k -ik szint i -ik kapuján és az alapvonalon a j -ik cellába fut?

Valószínűségek számolása:

28. Fogadjuk el, hogy a start pont és az alapvonal (10. szint) közötti lehetséges pályák egyforma esélyűek. Eme feltevés elfogadása után meghatározandók az alábbi valószínűségek: Mennyi a valószínűsége annak, hogy a start pontból induló golyó

    (a) a 0 -ik cellába jut?

    (b) az 1 -ső cellába jut?

    (c) a 2 -ik cellába jut?

    (d) a 6 -ik cellába jut?

    (e) a k -ik cellába jut?

29. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a start pontból induló golyó átmegy

    (a) a 4. szint 1. kapuján?

    (b) a 4. szint 2. kapuján?

    (c) az i -ik szint j -ik kapuján?

30. Mennyi a valószínűsége annak, hogy

    (a) a 4. szint 1. kapujából induló golyó az alapvonalon a 3. cellába fut?

    (b) a 4. szint 1. kapujából induló golyó az alapvonalon a 4. cellába fut?

    (c) a 4. szint i -ik kapujából induló golyó az alapvonalon a j -ik cellába fut?

    (d) a k -ik szint i -ik kapujából induló golyó az alapvonalon a j -ik cellába fut?

31. Most képzeljünk el egy olyan Galton deszkát, aminek az alapvonala nem a 10. szint, hanem az n -ik. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a k-ik szint i -ik kapujából induló golyó az alapvonalon a j -ik cellába fut?

2. Diszkrét eloszlás

- Az alábbi 4 feladatban az ott definiált valószínűségi változók eloszlását adja meg táblázattal!
- Készítsen ábrákat az eloszlásokról Excellel!
- Adja meg táblázattal a bal- és jobb oldali eloszlásfüggvényt!
- Készítsen ábrákat az eloszlásfüggvényekről is!
- Keresse meg az eloszlások móduszát és mediánját is! (A számolásokhoz használhatja az Excelt.)
- Adja meg az eloszlásokat matemaikai képlettel is!

Jó tanács: Egy X valószínűségi változó eloszlásának meghatározása kissé összetett feladat: meg kell keresni a valószínűségi változó lehetséges értékeit, és minden lehetséges értékeknek meg kell határozni a valószínűségét. A $\mathrm{P}(X = x)$ vagy $\mathrm{P}(X = k)$ (van amikor az x , van amikor a k betűt szeretjük használni) általános képlet megtalálása nehéz lehet. Ilyenkor érdemes lépésről lépésre haladni:

- Először a $\mathrm{P}(X = 1)$ valószínűség értékére keressük meg a választ egy numerikus képlettel, és ennek örülünk.
- Ezután a $\mathrm{P}(X = 2)$ valószínűség értékét adjuk meg egy numerikus képlettel, és ennek még jobban örülünk.
- Most már nagyobb önbizalommal merünk belevágni a $\mathrm{P}(X = 3)$ valószínűség értékének meghatározásába, és – ha még ez is sikerül, — akkor már nagyon örülünk.
- És így tovább lépésről lépésre haladva egyre jobban kivilágosodik előttünk, hogy mi a problémának a lényege, és – jó esetben – rájövünk még az általános képletre is!

Uccu neki, itt a lehetőség a módszer gyakorlására:

1. (a) Két szabályos érmével dobunk.
   (b) Három szabályos érmével dobunk.
   (c) Négy szabályos érmével dobunk.
   (d) Öt szabályos érmével dobunk.
   (e) Tíz szabályos érmével dobunk.

   Mindegyik esetben a vizsgálandó valószínűségi változó:

   $$X = \text{ ahány fejet kapunk}$$

2. (a) Addig dobunk egy szabályos érmével, amíg végre fejet kapunk.
   (b) Addig dobunk egy szabályos érmével, amíg másodszorra fejet kapunk.
   (c) Addig dobunk egy szabályos érmével, amíg harmadszorra fejet kapunk.

   Mindegyik esetben a vizsgálandó valószínűségi változó:

   $$X = \text{ ahány dobás kell ehhez}$$

3. (a) Addig dobunk egy szabályos érmével, amíg végre fejet kapunk.
   (b) Addig dobunk szabályos érmével, amíg másodszorra fejet kapunk.

(c) Addig dobunk szabályos érmével, amíg harmadszorra fejet kapunk.

Mindegyik esetben a vizsgálandó valószínűségi változó:

$$X = \text{ ahány írás adódik eközben}$$

4. (a) Addig dobunk egy szabályos dobókockával, amíg végre hatost kapunk,
   (b) Addig dobunk egy szabályos dobókockával, amíg másodszorra hatost kapunk,
   (c) Addig dobunk egy szabályos dobókockával, amíg harmadszorra hatost kapunk,

   Mindegyik esetben a vizsgálandó valószínűségi változó:

$$X = \text{ ahány dobás kell ehhez}$$

5. 45 darab golyó van egy dobozban. Közülük 10 darab piros, 15 darab kék, 20 darab fehér. Kiveszünk 8 golyót **visszatevés nélkül**. Legyen X a pirosak, Y a kékek száma a kihúzottak között! Az $(X;Y)$ kétdimenziós valószínűségi változó eloszlása valahol korábban megtalálható ebben a jegyzetben.
   (a) Keresse meg!
   (b) Állítsa elő Excellel ezt a táblázatot!
   (c) Adja meg az X valószínűségi változó eloszlását képlettel, táblázattal és grafikonnal!
   (d) Adja meg az Y valószínűségi változó eloszlását képlettel, táblázattal és grafikonnal!

6. 45 darab golyó van egy dobozban. Közülük 10 darab piros, 15 darab kék, 20 darab fehér. Kiveszünk 8 golyót, de most nem visszatevés nélkül, hanem **visszatevéssel**. Legyen X a pirosak, Y a kékek száma a kihúzottak között!
   (a) Adja meg az $(X;Y)$ kétdimenziós valószínűségi változó eloszlását képlettel is!
   (b) Állítsa elő Excellel az eloszlás táblázatát!
   (c) Adja meg az X valószínűségi változó eloszlását képlettel, táblázattal és grafikonnal!
   (d) Adja meg az Y valószínűségi változó eloszlását képlettel, táblázattal és grafikonnal!

7. Az érmék tömegei:

érme	**5 Ft**	**10 Ft**	**20 Ft**	**50 Ft**	**100 Ft**	**200 Ft**
tömeg (g)	4.2	6.1	7.0	7.7	8.0	9.5

Táblázat: *Érmék és tömegeik*

Feltételezzük, hogy az érmék valószínűségei arányosak a tömegeikkel. Hány darabot tegyünk be az egyes érmékből egy kalapba, hogy a kalapból való húzáskor az 5 forintos érme legyen a legvalószínűbb, aztán a 10 forintos, és így tovább, a legkevésbé valószínűszínű a 200 forintos legyen! Törekedjen arra, hogy minimális számú érmével oldja meg a feladatot! A megoldásnál – ha gondolja – használjon számítógépet!

Az alábbi feladatok megoldásában

- az összes eset felsorolásához és
- az eloszlás tagjainak meghatározásánál a kedvező kimenetelek számának leszámlálásához

használja az Excel!

8. Két szabályos dobókockával dobunk. Ha a dobott számok összege kisebb 7 -nél, akkor X legyen a dobott számok minimuma, ellenkező esetben X legyen a dobott számok maximuma. Határozza meg X eloszlását!

3. Folytonos egyenletes eloszlás

1. Egy városban a metró szabályosan 5 percenként jár. Az én érkezési pillanatom a metróállomásra véletlenszerű. Attól függ, hogy hogyan ébredek, mennyi ideig vacakolok, hogyan tudok átmenni a zebrákon, stb. Vegyük a várakozási időmet egyenletes eloszlásúnak 0 és 5 perc között! Mi a valószínűsége annak, hogy

   (a) kevesebb, mint 3 percet kell várnom a metróra?

   (b) több, mint 3 percet kell várnom a metróra?

   (c) matematikai pontossággal pontosan 3 percet kell várnom a metróra?

   (d) kevesebb, mint x percet kell várnom a metróra, ha $0 < x < 5$?

   (e) kevesebb, mint x percet kell várnom a metróra, ha $x < 0$?

   (f) kevesebb, mint x percet kell várnom a metróra, ha $5 < x$?

   (g) matematikai pontossággal pontosan x percet kell várnom a metróra?

2. A reggeli buszom egyenletes eloszlású időpontban érkezik $7:30$ és $7:40$ között. Hányra menjek oda a megállóba, ha legalább 80% -os esélyt szeretnék arra, hogy elérjem?

3. Egyenletes eloszlás szerint választunk egy számot a $[-1;2]$ intervallumban. Jelöljük ezt X -szel. Mi annak a valószínűsége, hogy $X^3 < 0.5$?

4. Szimulálja Excellel az előző feladatban szereplő X -et , és sok kísérlet kapcsán számolja ki az ott szereplő esemény relatív gyakoriságát! Ha mindent jól csinált, akkor a relatív gyakoriságnak közel kell lenni a valószínűséghez.

5. Egy téglalapot úgy szerkesztünk meg, hogy mindkét oldalának hosszát egymástól függetlenül 0 és 10 cm között egyenletes eloszlás szerint választjuk. Mi a valószínűsége annak, hogy

   (a) a téglalap kerülete nagyobb 15 cm -nél?

   (b) a területe kisebb 25 cm^2 -nél?

   (c) a téglalap kerülete nagyobb 15 cm-nél, és a területe kisebb 25 cm^2 területegységnél?

6. Egy véletlen téglalapot úgy szerkesztünk meg, hogy mindkét oldalának hosszát egymástól függetlenül 0 és 1 között egyenletes eloszlás szerint választjuk. Mi a valószínűsége annak, hogy

   (a) a téglalap kerülete kisebb x hosszegységnél, ahol $0 < x < 4$?

   (b) a területe kisebb y területegységnél, ahol $0 < y < 1$?

   (c) a téglalap kerüete kisebb x hosszegységnél, és a területe kisebb y területegységnél?

7. Egy nagy papírlapra 5 cm-enként párhuzamos egyeneseket húzunk, majd egy 10 cm hosszú tűt magasról a papírra ejtünk. Mi a valószínűsége annak, hogy

   (a) a tű metszi valamelyik egyenest?

   (b) a tű két egyenest metsz?

8. *Bertrand-paradoxon (híres probléma!)*: Egyezzünk meg abban, hogy a kör egy húrját "hosszúnak" nevezzük, ha a húrhoz tartozó középponti szög 120 foknál nagyobb, vagyis a húr hosszabb, mint a körbe rajzolható egyenlőoldalú háromszög oldalának a hossza. Egységsugarú kör esetén ez annyit jelent, hogy a húr hosszabb, mint $\sqrt{3}$ egység. Mi a valószínűsége annak, hogy a kör húrjai közül véletlenszerűen választva hosszú húr adódik, ha a véletlenszerű választás az alábbi módszerek egyikét jelenti?

   (a) A kör egyik átmérőjét véletlenszerűen kiválasztjuk úgy, hogy az átmérő irányát kijelölő szög egyenletes eloszlású legyen 0 és 2π között, majd pedig a kiválasztott átmérőn egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot. Azt a húrt tekintjük, mely átmegy ezen a ponton, és merőleges az átmérőre.

(b) A kör kerületén egymástól függetlenül két pontot választunk egyenletes eloszlás szerint, és tekintjük a két pont által meghatározott húrt.

(c) A körlapon egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot, és tekintjük azt a húrt, aminek ez a pont a felezőpontja.

9. *A Buffon féle tű probléma általánosításai*:

   (a) Egy nagy papírlapra 10 cm-enként párhuzamos egyeneseket húzunk, majd egy 10 cm hosszú tűt magasról a papírra ejtünk. Mi a valószínűsége annak, hogy
      i. a tű metszi valamelyik egyenest?
      ii. metszi valamelyik egyenest, és 30 foknál kisebb szöget zár be az egyenessel?

   (b) Egy nagy papírlapra 5 cm-enként párhuzamos egyeneseket húzunk, majd egy 10 cm hosszú tűt magasról a papírra ejtünk. Mi a valószínűsége annak, hogy
      i. a tű metszi valamelyik egyenest?
      ii. a tű két egyenest metsz?

   (c) Egy nagy papírlapra 2 cm-enként párhuzamos egyeneseket húzunk, majd egy 10 cm hosszú tűt magasról a papírra ejtünk. Mi a valószínűsége annak, hogy a tű pontosan k darab egyenest metsz? $(k \geq 0$ egész$)$

   (d) Egy nagy papírlapra négyzethálót szerkesztünk úgy, hogy 20 cm-enként párhuzamos piros egyeneseket húzunk, majd az ezekre az egyenesekre merőlegesen szintén 20 cm-enként párhuzamos zöld egyeneseket húzunk. Ezután egy 10 cm hosszú tűt magasról a papírra ejtünk. Mi a valószínűsége annak, hogy
      i. a tű piros és zöld egyenest is metsz?
      ii. a tű metszi valamelyik egyenest?

10. ***Extra feladat:***
    A korábban talált "Randevú probléma" folytatása. Jancsi és Juliska déli 12 óra és 1 óra között – mint feljebb leírtuk – randevúznak. Azonban a randevú menetébe és sikerébe nem csak a véletlen szól bele, mint korábban, hanem Juliska apukája is: az 1 órás időtartam alatt a fiatalok érkezésétől függetlenül ő is egyenletes eloszlás szerint odatoppan a randevú helyszínére, és ha valamelyik fiatalt ott találja, akkor nagy patáliát csap, és megakadályozza a randevú létrejöttét. Mi a valószínűsége, hogy a fiatalok randevúja mégis létrejön?

11. Egy RND random számot generálunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy
    (a) $\text{RND} < 0.75$?
    (b) $\text{RND} > 0.45$?
    (c) $0.45 < \text{RND} < 0.75$?

12. Egy RND random számot generálunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy
    (a) $\text{RND}^2 < 0.75$?
    (b) $\text{RND}^2 > 0.45$?
    (c) $0.45 < \text{RND}^2 < 0.75$?

13. Egy RND random számot generálunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy
    (a) $\sqrt{\text{RND}} < 0.75$?
    (b) $\sqrt{\text{RND}} > 0.45$?
    (c) $\sqrt{\text{RND}} < 0.75$?

14. Egy RND random számot generálunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a tizedespont utáni első tizedesjegye
    (a) 3 -mal egyenlő?
    (b) 3 -nál nagyobb?

(c) osztható 3 -mal?

15. Egy RND random számot generálunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a tizedespont utáni második tizedesjegye

    (a) 3 -mal egyenlő?
    (b) 3 -nál nagyobb?
    (c) osztható 3 -mal?

16. Egy RND random számot generálunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a tizedespont utáni első tizedesjegye 3 -mal egyenlő, és a tizedespont utáni második tizedesjegye

    (a) 4 -gyel egyenlő?
    (b) 4 -nél nagyobb?
    (c) osztható 4 -gyel?

17. Egy RND random számot generálunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a tizedespont utáni első tizedesjegye 3 -nál nagyobb, és a tizedespont utáni második tizedesjegye

    (a) 4 -gyel egyenlő?
    (b) 4 -nél nagyobb?
    (c) osztható 4 -gyel?

18. Egy RND random számot generálunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a tizedespont utáni első tizedesjegye osztható 3 -mal, és a tizedespont utáni második tizedesjegye

    (a) 4 -gyel egyenlő?
    (b) 4 -nél nagyobb?
    (c) osztható 4 -gyel?

19. Két (független) random számot generálunk: RND_1 , RND_2 . Mennyi a valószínűsége annak, hogy

    (a) $\mathrm{RND}_1 + \mathrm{RND}_2 < 0.75$?
    (b) $\mathrm{RND}_1 + \mathrm{RND}_2 < 1.75$?
    (c) $0.75 < \mathrm{RND}_1 + \mathrm{RND}_2 < 1.75$?
    (d) $\mathrm{RND}_1 + \mathrm{RND}_2 < z$?
    (e) $a < \mathrm{RND}_1 + \mathrm{RND}_2 < b$?

20. Két (független) random számot generálunk: RND_1 , RND_2 . Mennyi a valószínűsége annak, hogy

    (a) $\mathrm{RND}_1 \cdot \mathrm{RND}_2 < 0.25$?
    (b) $\mathrm{RND}_1 \cdot \mathrm{RND}_2 < 0.75$?
    (c) $0.25 < \mathrm{RND}_1 \cdot \mathrm{RND}_2 < 0.75$?
    (d) $\mathrm{RND}_1 \cdot \mathrm{RND}_2 < z$?
    (e) $a < \mathrm{RND}_1 \cdot \mathrm{RND}_2 < b$?

21. Két (független) random számot generálunk: RND_1 , RND_2 . Mennyi a valószínűsége annak, hogy

    (a) $\mathrm{RND}_1 < \mathrm{RND}_2^2$?
    (b) $\mathrm{RND}_1 < 1 - \mathrm{RND}_2^2$?
    (c) $\mathrm{RND}_1 < \mathrm{RND}_2^3$?
    (d) $\mathrm{RND}_1 < \mathrm{RND}_2^n$?

22. Két (független) random számot generálunk: RND_1 , RND_2 . Mennyi a valószínűsége annak, hogy

   (a) $\mathrm{RND}_1 + \mathrm{RND}_2^2 < 0.75$?
   (b) $\mathrm{RND}_1 + \mathrm{RND}_2^2 < 1.75$?
   (c) $0.75 < \mathrm{RND}_1 + \mathrm{RND}_2^2 < 1.75$?
   (d) $\mathrm{RND}_1 + \mathrm{RND}_2^2 < z$?
   (e) $a < \mathrm{RND}_1 + \mathrm{RND}_2^2 < b$?

23. Két (független) random számot generálunk: RND_1 , RND_2 . Mennyi a valószínűsége annak, hogy

   (a) $\mathrm{RND}_2 < \mathrm{RND}_1^2$?
   (b) $\mathrm{RND}_2 < \sqrt{\mathrm{RND}_1}$?
   (c) $\mathrm{RND}_1^2 + \mathrm{RND}_2^2 < 1$?

24. Két (független) random számot generálunk: RND_1 , RND_2 . Mennyi a valószínűsége annak, hogy

   (a) az $x^2 + \mathrm{RND}_1 \cdot x + \mathrm{RND}_2 = 0$ másodfokú egyenlet gyökei valós számok?
   (b) az $x^2 + \mathrm{RND}_1 \cdot x + \mathrm{RND}_2 = 0$ másodfokú egyenlet gyökei komplex számok?

25. Két (független) random számot generálunk: RND_1 , RND_2 . A nekik megfelelő két pont három részre osztja a $[0;1]$ intervallumot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy

   (a) a középső rész hosszabb, mint a másik két rész akármelyike ?
   (b) a középső rész hosszabb, mint a másik két rész együttesen ?
   (c) a három részből háromszöget lehet összerakni, azaz mindegyik rész rövidebb, mint a másik két rész hosszainak az összege?

4. További műveletek és szabályok

1. (a) Mi a valószínűsége annak, hogy 10 szabályos dobókockával dobva a legnagyobb kapott szám kisebb vagy egyenlő, mint 4, azaz mind a 10 kapott szám kisebb vagy egyenlő, mint 4 ?
   (b) Mi a valószínűsége annak, hogy 10 szabályos dobókockával dobva a legnagyobb kapott szám kisebb vagy egyenlő, mint 3 ?
   (c) Mi a valószínűsége annak, hogy 10 szabályos dobókockával dobva a legnagyobb kapott szám 4 -gyel egyenlő?

2. Ha egy szabályos dobókockát végtelen sokszor feldobnánk, akkor minden n -re értelmezhető lenne az alábbi esemény: "*az első n dobás során nem dobunk hatost*".
   (a) Mennyi ennek az eseménynek a valószínűsége?
   (b) Győződjön meg róla, hogy ezek az események csökkenő sorozatot alkotnak!
   (c) Mit jelent ennek a végtelen sok eseményeknek a metszete?
   (d) A fentiekből kiadódik annak az eseménynek a valószínűsége, hogy "*a végtelen sok dobás során soha sem dobunk 6 -ost*". Rakja össze fentiekből, hogy hogyan jön ez ki!

3. Venn diagram segítségével igazolja az összegzési szabályt két tetszőleges eseményre: ha A, B tetszőleges események, akkor
$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$$

4. Venn diagram segítségével igazolja az összegzési szabályt három tetszőleges eseményre: ha A, B, C tetszőleges események, akkor
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A \cup B \cup C) \quad = & \\ & \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) \\ - \; & \mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(A \cap C) - \mathrm{P}(B \cap C) \\ + \; & \mathrm{P}(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

5. Hogyan nézhet ki az $(X;Y)$ kétdimenziós valószínűségi változó eloszlása, hogy X és Y között fennáll a
   (a) $Y = 20 - X$
   (b) $Y = 2\,X$
   (c) $Y \leq 20 - X$
   (d) $Y = X^2$
   (e) $Y < X^2$

   relációk valamelyike?

6. Adjon meg olyan síkbeli egyenletes eloszlást, melynek vetületei egyik tengelyen sem egyenletes!

7. Adjon meg olyan síkbeli nem egyenletes eloszlást, melynek vetülete mindkét tengelyen egyenletes!

8. Adjon meg két egymástól különböző síkbeli eloszlást, melyeknek vetületei mindkét tengelyen megegyeznek! (Tanulság: egy síkbeli eloszlás vetületei nem határozzák meg a síkbeli eloszlást.)

9. Rajz segítségével győződjön meg róla, hogy az A, B események úniójának a metszete egy C eseménnyel ugyanaz, mint az $A \cup C$ metszete $B \cup C$ -vel.

10. Rajz segítségével győződjön meg róla, hogy az A, B események metszetének úniója egy C eseménnyel ugyanaz, mint az $A \cap C$ úniója $B \cap C$ -vel.

5. Feltételes valószínűség és eloszlás

I. téma: Feltételes valószínűség

1. Egy szabályos dobókockával dobunk. Barátom látja a dobás eredményét, de én nem. Mennyi a valószínűsége, hogy 6-ost dobtunk,
   (a) ha barátomtól tudom, hogy párosat dobtunk?
   (b) És ha azt tudom, hogy legalább 3-ast dobtunk?
   (c) És ha azt tudom, hogy legfeljebb 5-öst dobtunk?
2. Feldobunk két dobókockát.
   (a) Mi annak a valószínűsége, hogy legalább az egyik kockán 2-est dobunk?
   (b) Mi annak a valószínűsége, hogy legalább az egyik kockán 2-est dobunk, ha már tudjuk, hogy a dobott számok összege 6?
3. Tegyük fel, hogy minden születendő gyermek azonos eséllyel lesz fiú vagy lány. Tekinsünk egy véletlenszerűen választott háromgyerekes családot. Ha megtudjuk, hogy a családban van fiú, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy
   (a) pontosan egy fiú van a családban?
   (b) pontosan két fiú van a családban?
   (c) pontosan három fiú van a családban?
4. A barátommal snapszerozom. Ebben a játékban 20 darab lap van, mind a négy színből 5. Én is és barátom is kap 5 lapot.
   (a) Mi a valószínűsége, hogy a barátomnak van zöldje?
   (b) Mi a valószínűsége, hogy a barátomnak van zöldje, ha nekem 3 zöldem és 2 pirosam van?
5. Egy iskolába 260 ember jár, 230 tanuló és 30 tanár. Egyszer egy influenzajárvány tört ki köztük. Az orvos az alábbi táblázatot készítette:

	beteg	egészséges	**összesen**
fiú	50	60	**110**
lány	40	80	**120**
tanár	10	20	**30**
összesen	**100**	**160**	**260**

Táblázat: *Betegek, egészségesek száma*

   (a) Véletlenszerűen kihúzunk egy kartont. Mi a valószínűsége, hogy a karton
      i. fiúé?
      ii. betegé?
      iii. beteg fiúé?
   (b) Ha előzetesen a fiúk, lányok és tanárok kartonjait külön fiókokba gyűjtötték, én a lányokéból húzok, mi a valószínűsége annak, hogy beteg lányt húztam?
   (c) Az orvos szorgos asszistense egy kupacba kidobálta a fiókokból az összes kartont, aki beteg volt. Ebből véletlenszerűen húzva egyet, mi a valószínűsége annak, hogy tanár az illető?

(d) Ha kettőt húzok ugyanebből a beteg-kupacból egymás után, mi a valószínűsége, hogy az első fiú lesz, a második lány? És hogy mindkettő fiú lesz?

II. téma: Szorzási szabály

6. Egy urnában 3 piros, 5 fehér és 6 zöld golyó van. Kihúzunk közülük 3 golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy elsőre pirosat, másodikra fehéret, harmadikra zöldet húzunk, ha húzás után a golyókat
   - (a) visszatesszük
   - (b) nem tesszük vissza?
7. Egy lakótelepen csótányirtást végeztek. Az első vegykezelés még a csótányok 60 %-át irtja ki, de utána a csótányok egyre inkább immúnissá válnak, így a másodszorra már csak a 40 %, harmadszorra pedig csak a 20 %-uk pusztul el. Mi a valószínűsége, hogy egy megjelölt csótány
   - (a) átvészeli a teljes eljárást?
   - (b) az utolsó irtáskor pusztul el?
   - (c) túléli a kezelést, ha az első kezelés után még látták élve?
8. Egy dobozban 16 alkatrész közül 3 hibás. Mi a valószínűsége, hogy három egymás után kivett alkatrész működőképes?
9. Egy valszámvizsgán 30 tétel van. Ezek közül 6 a nevezetes eloszlásokkal kapcsolatos. Az első két szóbeliző hallgató kihúz egy-egy tételt. Mivel visszatevéssel húznak, húzhatják mindketten ugyanazt is. Mi annak a valószínűsége, hogy
   - (a) csak az első hallgató húz nevezetes eloszlásos tételt?
   - (b) mindkét hallgató ilyen tételt húz?
   - (c) egyik sem húz ilyen tételt?
10. Van két dobozunk. Az egyik dobozban 3 piros és 2 kék golyó van, a másikban 2 piros és 4 kék. Az első dobozból átrakunk egy golyót a másik dobozba, majd onnan átrakunk egyet az elsőbe.
    - (a) Mi a valószínűsége annak, hogy ezek után az első dobozban 3 piros golyó lesz?
    - (b) Mi a valószínűsége annak, hogy az első golyó piros és a második kék?
    - (c) Mi a valószínűsége annak, hogy az első golyó piros volt, ha a második kék?
11. Van két dobozunk. Az egyik dobozban 3 piros és 2 kék golyó van, a másikban 2 piros és 4 kék. Az első dobozból átrakunk egy golyót a másik dobozba, majd onnan átrakunk egyet az elsőbe, majd az első dobozból ismét egyet a másikba. Találjon ki olyan kérdéseket, melyek golyók színével kapcsolatosak, és feltételes valószínűségekkel megválaszolhatók!

III. téma: Teljes valószínűség tétele és Bayes tétel

12. Egy suli tanulóinak 80 %-a lány. Az első matekvizsgán általában a lányok 85 %-a, a fiúk 90 %-a megy át. A hallgatóságnak kb. hány százaléka megy át az első vizsgán?
13. Két szabályos dobókockával dobunk, és megnézzük a dobott számok különbségét (ami egy 0 és 5 közötti szám). Amennyi a dobott számok különbsége, annyi szabályos érmével dobunk. (Tehát az is lehet, hogy 0 darab érmével dobunk.) Mi a valószínűsége annak, hogy az érmékkel pontosan 4 fejet kapunk?
14. Első lépés: három tízforintos érmével dobunk, és megnézzük, hány fejet kapunk. Második lépés: ahány fejet kaptunk az első lépésben, annyi húszforintos érmével dobunk. Mi a valószínűsége annak, hogy a húszforintos érmékkel pontosan 2 fejet kapunk,
    - (a) ha nem tudjuk, hogy a tízforintos érmékkel mi jött ki?

(b) ha tudjuk, hogy a tízforintos érmékkel legalább 2 fejet kaptunk?

15. A ketyere gyárban az A , B és C gépsoron állítják elő a ketyeréket. Az A gépsoron a ketyerék 25 , a B -n 35, a C -n 40 %-át gyártják. Az A gépsoron előállított ketyerék 5 %-a, a B gépsoron előállítottak 4 %-a, a C -n gyártott ketyeréknek csak 2 %-a hibás. A hibásakat félredobják egy nagy kupacba. Ebből véletlenszerűen kiszedve egy ketyerét, mi a valószínűsége, hogy azt az A , B , illetve a C gépsoron gyártották?

16. Egy bináris csatornán a 0 jelet $1/3$, az 1 jelet $2/3$ valószínűséggel adják le. Mivel az adást zajok zavarják, ha 0 -t adnak le, akkor $1/4$ valószínűséggel 1 érkezik, ha pedig 1 -et adnak le, $1/5$ valószínűséggel 0 érkezik.

    (a) Mi a valószínűsége, hogy 1 -et kapunk?

    (b) Kaptunk egy 0 -t. Mi a valószínűsége, hogy ezt 0 -ként is adták le?

17. Egy dobozban pénz érmék vannak. Az érmék tömegei:

érme	**5 Ft**	**10 Ft**	**20 Ft**	**50 Ft**	**100 Ft**	**200 Ft**
tömeg (g)	4.2	6.1	7.0	7.7	8.0	9.5

Táblázat: *Az érmék tömegei*

18. Feltételezzük, hogy húzáskor az érmék valószínűségei arányosak a tömegeikkel. Háromszor húzunk úgy, hogy az 5 , 10 , 20 és 50 forintos érméket visszatesszük, a 100 és 200 forintos érméket nem. Mi a valószínűsége annak, hogy

    (a) a 3 -ik húzásnál 100 vagy 200 forintos érmét húzunk?

    (b) a 2 -ik húzásnál 100 vagy 200 forintos érmét húzunk, feltéve, hogy a 3 -ik húzásnál 100 vagy 200 forintos érmét húzunk?

19. Ugyanaz a helyzet mint az előző feladatban, de most – kezdetkor – minden érméből 3 -at teszünk a dobozba. Most mi a valószínűsége annak, hogy

    (a) a 3 -ik húzásnál 100 vagy 200 forintos érmét húzunk?

    (b) a 2 -ik húzásnál 100 vagy 200 forintos érmét húzunk, feltéve, hogy a 3 -ik húzásnál 100 vagy 200 forintos érmét húzunk?

20. A játékvezető egy dobozba n golyót helyez, melyek közül a darab piros, k darab fehér ($a \geq 1$, $k \geq 2$) . A játékos a bal kezével véletlenszerűen választ az n golyó közül egyet, de a színét nem nézi meg, csak szorongatja a kezében. A maradék $n-1$ golyó közül a játékvezető kivesz és félretesz egy fehéret. Ezek után a dobozban lévő $n-2$ golyó közül a játékos jobb kezével véletlenszerűen választ egyet, de a színét nem nézi meg, csak szorongatja a jobb kezében.

    (a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a játékos bal kezében piros golyó van?

    (b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a játékos jobb kezében piros golyó van?

Megjegyzés: A híres "autó és kecskék feladat" általánosításáról van szó: a azon ajtók száma, melyek mögött autó van, k azon ajtók száma, melyek mögött kecske van. $a=1$, $k=2$ esetén az eredeti "egy autó és két kecske problémá"-hoz jutunk. A bal kéz azt a szerepet játsza, amikor a játékos nem másítja meg első választását egy másodikkal, a jobb kéz pedig azt a szerepet játsza, amikor a játékos megmásítja az első választását egy másodikkal.

Megoldás:

(a) Nyilvánvaló, hogy

$$\mathrm{P}(\text{ a játékos bal kezében piros golyó van }) = \frac{a}{n}$$

(b) A teljes valószínűség formuláját felhasználva kapjuk, hogy

$$\mathrm{P}(\text{ a játékos jobb kezében piros golyó van }) =$$

$$= \mathrm{P}(\text{ bal kezében piros golyó }) \cdot \mathrm{P}(\text{ jobb kezében piros golyó } \mid \text{ bal kezében piros golyó }) +$$

$$+ \mathrm{P}(\text{ bal kezében fehér golyó }) \cdot \mathrm{P}(\text{ jobb kezében piros golyó } \mid \text{ bal kezében fehér golyó })$$

$$= \frac{a}{n} \cdot \frac{a-1}{n-2} + \frac{k}{n} \cdot \frac{a}{n-2}$$

Megjegyzés: A következő két táblázat a ezeknek a valószínűségeknek az numerikus értékeit adja meg a és k függvényében:

	2	3	4	5	k
1	0.33	0.25	0.20	0.17	
2	0.50	0.40	0.33	0.29	
3	0.60	0.50	0.431	0.38	
4	0.67	0.57	0.50	0.44	
5	0.71	0.63	0.56	0.50	
a					

	2	3	4	5	k
1	0.67	0.38	0.27	0.21	
2	0.75	0.53	0.42	0.34	
3	0.80	0.63	0.51	0.44	
4	0.83	0.69	0.58	0.51	
5	0.86	0.73	0.63	0.56	
a					

Táblázatok: *Annak a valószínűségei, hogy a* ***bal-, illetve jobb*** *kézben piros golyó van a és k függvényében*

A két táblázat elemeit összevetve látható az az algebrailag is könnyen igazolható tény (tessék igazolni!), hogy annak a valószínűsége, hogy a jobb kézben piros golyó van, mindig nagyobb, mint annak valószínűsége, hogy a bal kézben piros golyó van. Tehát az autó és kecskék problémában a játékos akkor játszik okosan, ha a megmásítja az első választását egy másodikkal.

6. Függetlenség

1. Tegyük fel, hogy az év egy bizonyos napján Budapesten, New York-ban és Tokioban minden nap egymástól függetlenül esik az eső 0.6 , 0.8 , 0.5 valószínűségekkel, illetve nem esik 0.4 , 0.2 , 0.5 valószínűségekkel. Esőzés szempontjából a három városban 8 féle variáció lehetséges. Sorolja fel ezt a 8 variációt, és mind a 8 variácónak adja meg a valószínűségét!

2. *(Az előző feladat folytatása)*
   Hogyan egyszerűsödik az előző feladatban a számítás, ha az eső valószínűsége mindhárom városban ugyanannyi?

3. *(Példa páronként független, de összességében nem független eseményekre)*
   Egy 10 és egy 20 forintos érmével dobunk. Tekintsük az alábbi eseményeket:

   - $A =$ a 10 forintos érme fejet ad
   - $B =$ a 20 forintos érme fejet ad
   - $C =$ mindkét érmével írást dobok vagy mindkét érmével fejet dobok

   A és B nyilván függetlenek egymástól. Mutassuk meg, hogy

   (a) A és C függetlenek.
   (b) B és C függetlenek.
   (c) A és B és C nem függetlenek.

4. Egy piros és egy zöld kockával dobunk. Tekintsük az alábbi eseményeket:

   - $A =$ a dobott számok összege 7
   - $B =$ legalább az egyik kockán van hatos
   - $C =$ mindkét kockával páratlant dobok
   - $D =$ a két kockával különböző számokat dobok
   - $E =$ a zöld kockával 4-est dobok

   Válaszoljuk meg a következő kérdéseket:

   (a) Függetlenek-e egymástól az A és C események?
   (b) Kizáróak-e az A és C események?
   (c) Mennyi a B esemény valószínűsége?
   (d) Hogy viszonul egymáshoz A és D ? Milyen következtetést vonhatunk le ebből a valószínűségeikre nézve? És a függetlenségekre nézve?
   (e) Függetlenek-e egymástól az A és E események?
   (f) Mindezek alapján mutassunk példát olyan eseményekre, amelyek
      i. függetlenek, de nem kizáróak,
      ii. kizáróak, de nem függetlenek.

7. Sok független tag összegének eloszlása harang alakot ölt

Az alábbi számolós feladatok megoldásához előnyösen lehet használni az Excelt. Az Excel használata akkor lenne igazán hasznossá, ha táblázatok mérete lényegesen nagyobb lenne, mint a most következő feladatokban adott 5x4 -es táblázatok.

1. Töltse ki az alábbi táblázatot nemnegatív számokkal úgy, hogy azok összege 1 legyen, és tekintsen a táblázatra úgy, mintha a táblázat egy kétdimenziós $(X;Y)$ valószínűségi változó súlyfüggvényének a táblázata lenne.

y						
3						
2						
1						
0						
	0	1	2	3	4	x

Táblázat: *Kétdimenziós eloszlás*

(a) Adja meg X súlyfüggvényének értékeit az alábbi táblázatban:

0	1	2	3	4	x

Táblázat: X *eloszlása*

(b) Adja meg Y súlyfüggvényének értékeit az alábbi táblázatban:

y	
3	
2	
1	
0	

Táblázat: Y *eloszlása*

A függőleges helyzetű "álló" táblázatot természetesen "le lehet fektetni", vízszintes helyzetbe:

0	1	2	3	y

Táblázat: Y *eloszlása*

(c) Adja meg a $Z = X\,Y$ valószínűségi változó súlyfüggvényének értékeit egy megfelelő táblázatban!

(d) Adja meg a $Z = X + Y$ valószínűségi változó súlyfüggvényének értékeit egy megfelelő táblázatban!

2. *(Az 1. feladat folytatása.)* Töltse ki az alábbi táblázatot úgy, hogy az x értékhez tartozó oszlopba az $X = x$ feltétel melletti feltételes súlyfüggvény értékeit írja:

y						
3						
2						
1						
0						
	0	1	2	3	4	x

Táblázat: *Feltételes súlyfüggvények (eloszlások) az $X = x$ feltételek mellett*

3. *(Az 1. feladat folytatása.)* Töltse ki az alábbi táblázatot úgy, hogy az y értékhez tartozó sorba az $Y = y$ feltétel melletti feltételes súlyfüggvény értékeit írja:

y						
3						
2						
1						
0						
	0	1	2	3	4	x

Táblázat: *Feltételes súlyfüggvények (eloszlások) az $Y = y$ feltételek mellett*

4. Töltse ki a

0	1	2	3	4	x

Táblázat: X *súlyfüggvénye*

táblázatot pozitív számokkal úgy, hogy az összegük 1 legyen, és tekintsen a táblázatra úgy, mintha a táblázat egy X valószínűségi változó súlyfüggvényének a táblázata lenne.

Töltse ki a

y						
3						
2						
1						
0						
	0	1	2	3	4	x

Táblázat: Y *feltételes súlyfüggvényei $X = x$ feltételek mellett* táblázat minden oszlopát pozitív számokkal úgy, hogy minden oszlopban az összegük 1 legyen, és tekintsen a táblázatra úgy, mintha a táblázat minden oszlopa egy Y valószínűségi változó $X = x$ feltétel melletti feltételes súlyfüggvényének a táblázata lenne.

A felvett táblázatokra építve határozza meg az (X, Y) valószínűségi változó súlyfüggvényének a táblázatát:

y						
3						
2						
1						
0						
	0	1	2	3	4	x

Táblázat: *Kétdimenziós eloszlás*

5. Töltse ki az alábbi két táblázatot pozitív számokkal úgy, hogy mindkét táblázatban 1 legyen az összeg:

0	1	2	3	4	x

Táblázat: *Egyik eloszlás*

0	1	2	3	y

Táblázat: *Másik eloszlás*

Határozza meg a két eloszlás

(a) direktszorzatát

(b) konvolúcióját!

6. Töltse ki az alábbi táblázatokat pozitív számokkal úgy, hogy minden táblázatban 1 legyen az összeg:

1. táblázat: az X valószínűségi változó súlyfüggvénye (eloszlása):

0	1	2	3	4	x

Táblázat: X *súlyfüggvénye (eloszlása)*

2. táblázat: az Y valószínűségi változó súlyfüggvénye (eloszlása) az $X = 0$ feltétel mellett:

0	1	2	3	y

Táblázat: Y *súlyfüggvénye (eloszlása) az* $X = 0$ *feltétel mellett*

3. táblázat: az Y valószínűségi változó súlyfüggvénye (eloszlása) az $X = 1$ feltétel mellett:

0	1	2	3	y

Táblázat: Y *súlyfüggvénye (eloszlása) az* $X = 1$ *feltétel mellett*

4. táblázat: az Y valószínűségi változó súlyfüggvénye (eloszlása) az $X = 2$ feltétel mellett:

0	1	2	3	y

Táblázat: Y *súlyfüggvénye (eloszlása) az* $X = 2$ *feltétel mellett*

5. táblázat: az Y valószínűségi változó súlyfüggvénye (eloszlása) az $X = 3$ feltétel mellett:

0	1	2	3	y

Táblázat: Y *súlyfüggvénye (eloszlása) az* $X = 3$ *feltétel mellett*

6. táblázat: az Y valószínűségi változó súlyfüggvénye (eloszlása) az $X = 4$ feltétel mellett:

0	1	2	3	y

Táblázat: Y *súlyfüggvénye (eloszlása) az* $X = 4$ *feltétel mellett*

Határozza meg az Y valószínűségi változó súlyfüggvényét (eloszlását) úgy, hogy veszi a 2., 3., 4., 5., 6. táblázatban adott súlyfüggvények (eloszlások) keverékét az 1. táblázatban adott súlyfüggvény (eloszlás) szerint!

8. Általános formulák kétdimenziós eloszlásokkal kapcsolatban

1.
2.

9. Vegyes feladatok eseményekre, valószínűségekre

1. Egy pakli francia kártyát (azaz 52 lapot, melyek között 4 ász van) véletlenszerűen négy játékosnak osztunk ki úgy, hogy mindenki kap 13 -13 lapot. Mi a valószínűsége, hogy mindenkinek jutott ász?

2. Egy diák három záróvizsgájára készül. Az első júniusban lesz, és ezen 90%-os eséllyel megy át. Ha ezen átment, akkor júliusban próbálhatja meg a második vizsgát, amely 80 % eséllyel lesz sikeres. Ha ezen is átment, akkor szeptemberben megy a harmadik vizsgára, ahol már csak 70% eséllyel megy át. Ellenben ha bármelyik vizsgája sikertelen, akkor csak egy év múlva lehet újra próbálkozni

   (a) Mi a valószínűsége annak, hogy az első évben átmegy mindhárom vizsgán?

   (b) Feltéve, hogy nem sikerült az első évben letenni a vizsgákat, mi a valószínűsége, hogy a második vizsgája volt sikertelen?

3. z A dobókockának 4 piros és 2 fehér oldala van, a B kockának pedig 2 piros és 4 fehér. Először feldobunk egy szabályos érmét. Ha fej, akkor a továbbiakban mindig az A kockával játszunk; ha írás, akkor pedig mindig a B kockával.

   (a) Mutassa meg, hogy a piros dobásának valószínűsége mindig $\frac{1}{2}$.

   (b) Ha az első két dobás piros, mi a valószínűsége, hogy a harmadik is piros?

   (c) Ha az első három dobás piros, akkor mi a valószínűsége, hogy az A kockát használjuk? (Csak a kocka felső lapját látjuk, a kocka többi oldalát nem.)

4. Egy dobozban 4 cédula van, három piros és egy kék. Kihúzunk egy cédulát, majd visszatesszük még három ugyanolyan színűvel együtt. Ezután ismét húzunk egy cédulát. Mi a valószínűsége annak, hogy

   (a) egyforma színű cédulákat húzunk?

   (b) pirosakat húzunk, feltéve, hogy egyforma színű cédulákat húzunk?

5. Információink szerint az A céggel kötött üzleteink 60%-a, a B céggel kötött üzletek 70%-a bizonyul kedvezőnek. Kettőjük közül a hamarabb jelentkező céggel rögtön két üzletet is kötünk. Feltehető, hogy $1/2$ valószínűséggel jelentkezik hamarabb A B -nél, és fordítva. Mi a valószínűsége, hogy

   (a) az első üzletkötés kedvező lesz?

   (b) mindkét üzletkötés javunkra válik?

   (c) lesz köztük rossz és jó üzlet is?

6. Ping-pongban az a nyertes, aki előbb éri el a 11 pontot, de legalább 2 pont különbség kell a nyeréshez (11 - 10 -nél folytatják két pont különbségig). Egy versenyen csak a nyertes kap pénzjutalmat: 1.000.000 Ft-ot. Két azonos képességű játékosnál a döntő szettben $10 - 9$ -es állásnál áramszünet lesz, nem lehet folytatni. Mi az igazságos osztozkodás a pénzen?

7. (a) Minden héten egy szelvénnyel játszunk az ötös lottón. Hány hétig kell ezt megtennünk, hogy legalább $\frac{1}{2}$ valószínűséggel legyen legalább kettes találatunk?

   (b) Mi a valószínűsége, hogy egy adott héten legalább kettes találatunk lesz, ha két függetlenül kitöltött szelvénnyel játszunk?

   (c) Mi a valószínűsége, hogy egy adott héten legalább kettes találatunk lesz, ha két olyan szelvénnyel játszunk, amelyeken nincsen egyforma szám? (Segítség: A 90 számot ossza háromfelé: 5+5 szám van a szelvényeken, 80 szám pedig nincs egyiken sem.)

8. Egy dobókockát az első hatosig, egy érmét az első fejig dobálunk. Mi a valószínűsége annak, hogy

   (a) a kockával pontosan annyit kell dobnunk, mint az érmével?

   (b) a kockával többet kell dobnunk, mint az érmével?

9. Kertemben 5 fehér és 7 barna tyúkot tartok. A fehér tyúkok átlagosan 3 naponként, a barnák 4 naponként tojnak egy-egy tojást.

   (a) Mi a valószínűsége annak, hogy tyúkjaim 24 óra alatt együttesen is csak egyetlen tojást produkálnak?
   Ma reggel a 12 tyúkból 2 beszökött az üres nyúlketrecbe, és rájuk záródott az ajtó. Mi a valószínűsége annak, hogy

   (b) mindkét tyúk barna volt?

   (c) az egyik fehér, a másik barna volt?

   (d) holnap reggel a nyúlketrecben tojás lesz?

   (e) a két tyúk egyike fehér, feltéve, hogy a ketrecben nem találok tojást?

   (f) a két tyúk egyike fehér, feltéve, hogy a másik barna, és a ketrecben nem találok tojást?

10. *(Kapkodó utazó.)* Egy utazó az íróasztalában, a nyolc fiók egyikében hagyta az útlevelét. Mielőtt a repülőtérre indulna, kapkodva próbálja megtalálni. A kapkodás miatt $0,1$ valószínűséggel akkor sem veszi észre az útlevelet, ha az éppen megnézett fiókban van.

    (a) Mi a valószínűsége, hogy nem találja meg az első 5 fiókban?

    (b) Ha nem találta meg az első 5 fiókban, mi a valószínűsége, hogy az útlevél nem is volt ezekben?

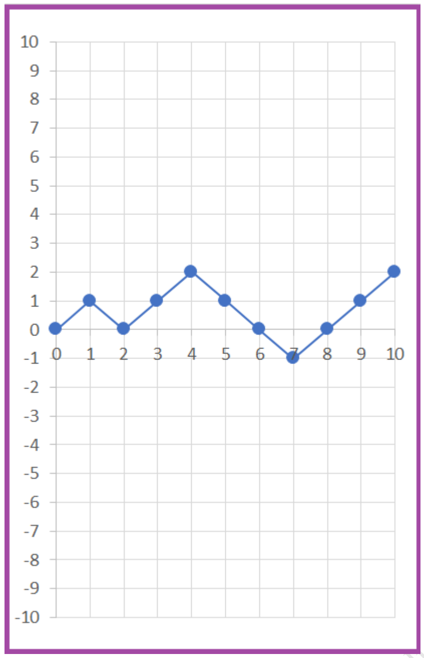
    (c) Ha nem találta meg az első 5 fiókban, mi a valószínűsége, hogy a hátralévő fiókokban megtalálja?

11. **Szimmetrikus bolyongás:** Egy bolha csücsül a számegyenes egyik pontján (például az origón), majd elkezd ugrálni. Ugrásainak eredményeként össze-vissza mozog, bolyong a számegyenesen. Az első ugrás kezdetének a pillanatát nevezzük 0 időpillanatnak. Időegységenként, mondjuk másodpercenként ugik: 0.5 valószínűséggel balra, 0.5 valószínűséggel jobbra. Minden ugrás nagysága 1 hosszegység. Az első ugrásával a -1 vagy a $+1$ pontba jut. Akár ide, akár oda jutott, megint egységnyit ugik 0.5 valószínűséggel balra, 0.5 valószínűséggel jobbra. A második ugrásával a -2 vagy a 0 vagy a $+2$ pontba jut. Aztán megint ugrik, megint ugrik, összesen 10 ugrást végez, mindig 0.5 valószínűséggel balra, 0.5 valószínűséggel jobbra. A 10 ugrással a -10 vagy a -8 vagy a -6 vagy a $\ldots$ $+10$ pontok valamelyikébe jut. Nyilvánvaló, hogy a páratlan számok itt ki vannak zárva, hiszen 10 ugrással nem lehet például a $+1$ pontba jutni.

    Természetesen tekinthetnénk a bolyongást a $[\,0\,;\,10\,]$ időintervallum helyett az általánosabb $[\,n_0\,;\,n\,]$ vagy $[\,n_0\,;\,+\infty\,]$ időintervallumokon is. Itt most az egyszerűség kedvéért a $[\,0\,;\,10\,]$, illetve az $[\,n_0\,;\,10\,]$ időintervallumokra szorítkozunk.

    A bolha pályáját azzal jellemezzük, hogy minden (egész) időpillanatban megmondjuk, hogy hol van. Az ábrán az időt a vízszintes tengelyen vettük fel. A számegyenest, ahol a bolha ugrál, függőleges tengelyenként ábrázoljuk. Ezért amikor a bolha a számegyenesen balra ugrik, az ábrán ez lefelé lépésnek, ereszkedésnek felel meg. A jobbra ugrás pedig felfelé lépésnek, emelkedésnek. Az ábrán látható pálya annak felel meg, hogy a bolha az origóból indul, és az alábbi ugrásokat teszi:

    `J B J J B B B J J J`



4. ábra. *A bolha egy lehetséges pályája*

Mivel a mi bolhánk egyforma esélyekkel ugrik balra vagy jobbra, a bolyongást szimmetrikusnak nevezzük. Amikor balra vagy jobbra ugrás különöző valószínűségekkel történik, akkor asszimetrikus bolyongásról beszélünk. Sok más általánosítás is lehetséges, melyekkel a valószínűségszámítás magasabb szintjén vagy a sztochasztikus folyamatok elméletében foglalkoznak.

Számlálási feladatok:

12. Hány lehetséges pályája van a bolhának

    (a) a $[0; 10]$ időintervallum alatt, ha a 0 időpillanatban a 0 pontból indul?

    (b) a $[0; 4]$ időintervallum alatt, ha a 0 időpillanatban a 0 pontból indul?

    (c) a $[4; 10]$ időintervallum alatt, ha a 4 időpillanatban a 2 pontból indul?

13. Hány olyan pálya fut a $[0; 10]$ időintervallum alatt, mely a 10 időpillanatban

    (a) a -10 pontban végződik?

    (b) a -2 pontban végződik?

    (c) a 0 pontban végződik?

    (d) a k pontban végződik?

14. Hány olyan pálya fut a $[0; 4]$ időintervallum alatt, mely a 4 időpillanatban

    (a) a -4 pontban végződik?

    (b) a -2 pontban végződik?

    (c) a 0 pontban végződik?

    (d) a k pontban végződik?

15. Hány olyan pálya van, hogy a bolha a

(a) 4. pillanatban a 2 pontban van és a 10. pillanatban a 6 pontba fut be?
(b) 4. pillanatban a i pontban van és a 10. pillanatban a j pontba fut be?
(c) k-ik pillanatban a i pontban van és a 10. pillanatban a j pontba fut be?

16. Most képzeljük el a $[\,k\,;\,n\,]$ időintervallumhoz tartozó bolyongást! Hány olyan pálya van ebben a bolyongásban, ami a k időpillanatban az i pontból indul, és az n-ik időpillanatban a j pontba fut be?

17. Most képzeljük el a $[\,0\,;\,n\,]$ időintervallumhoz tartozó bolyongást! Hány olyan pálya van ebben a bolyongásban, ami a k időpillanatban az i pontban van, és az n-ik időpillanatban a j pontba fut be?

Valószínűségek számolása:

18. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 0 időpillanatban a 0 pontból induló bolha a 10. időpillanatban
    (a) a -10 pontba jut?
    (b) a -2 pontba jut?
    (c) a 0 pontba jut?
    (d) a k pontba jut?

19. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 0 időpillanatban a 0 pontból induló bolha a 4. időpillanatban
    (a) a -4 pontba jut?
    (b) a -2 pontba jut?
    (c) a 0 pontba jut?
    (d) a k pontba jut?

20. Mennyi a valószínűsége annak, hogy
    (a) a 4. időpillanatban a 2 pontból induló bolha a 6 pontba fut be?
    (b) a 4. időpillanatban az i pontból induló bolha a j pontba fut be?
    (c) a k-ik időpillanatban az i pontból induló bolha a j pontba fut be?

21. Most képzeljük el a $[\,k\,;\,n\,]$ időintervallumhoz tartozó bolyongást! Hány olyan pálya van ebben a bolyongásban, ami a k időpillanatban az i pontból indul, és az n-ik időpillanatban a j pontba fut be?

22. Most képzeljük el a $[\,0\,;\,n\,]$ időintervallumhoz tartozó bolyongást! Hány olyan pálya van ebben a bolyongásban, ami a k időpillanatban az i pontban van, és az n-ik időpillanatban a j pontba fut be?

JÖN MAJD IDE

Tükrözési elv

Első elérés

Ki nyer a végén? Ismertebb néven: a tönkremenés problémája