Valószínűségszámítás
2. rész
Nevezetes diszkrét eloszlások
—
GYAKORLÓ FELADATOK

Vetier András

2019. július 23.

Tartalomjegyzék

Tisztelt Hallgatók!

Kérem, hogy a jegyzetben talált hibákat a **vetier@math.bme.hu** email címen jelezzék nekem. A levél tárgya legyen: **Hibát találtam**. Egy hatékony módszer a hibák rögzítésére, ha valaki a számítógépen olvassa a jegyzetet:

- nyom egy PRINT SCREEN-t
- behívja a PAINT programot
- nyom egy PASTE (ctrl-V) utasítást
- pirossal bekarikázza a hibát, esetleg valamit oda ír
- elmenti a JPG fájlt, a fájl neve legyen a hiba helyének az oldalszáma, vagy a nevében legyen benne az oldalszám
- a JPG fájlokat csatolt fájlként a fent megadott címre

Természetesen minden más módszerrel küldött hibajelzést is köszönök.

Az "***Extra feladat***", "***Extra tananyag***" cimkékkel megjelölt feladatok és anyagrészek nem részei a kötelező vizsga anyagának. Ezeket a vizsgákon nem kérdezzük. Viszont ha valaki az *"Extra feladat"*, *"Extra tananyag"* cimkékkel megjelölt feladatokból és anyagrészekből

- összesen 20 oldalnyi mennyiséget szépen, okosan megtanult, és
- a honlapon megadott határidőig szándékét emailben jelzi, és
- a szóbeli beszámoló elején írásban bemutatja, hogy mik azok az anyagrészek, melyekből összeáll az ő extra 20 oldala, és
- utána a vizsgáztató által a deklarált anyagból feltett kérdésekre szépen, okosan válaszol, akkor

a vizsgán már elért a közepes (3) vagy a jó (4) osztályzatát egy jeggyel javíthatja.

A "szépen, okosan" itt azt jelenti, hogy tényleg érti a dolgokat, nem csupán visszamondja az olvasottakat.

Nem iMSC hallgatók részére a küldendő email címzettje: **vetier49@gmail.com**, tárgya: **Beszámoló Extra tananyagból**.

iMSc hallgatók a jegy javításán túl iMSc extra pontokat szerezhetnek, ha a megtanult anyag mennyisége 30 oldal. Részükre a küldendő email címzettje: **ferenczi@math.bme.hu**, tárgya: **Beszámoló Extra tananyagból**.

Eredményes, örömteli, jó tanulást kívánok! Üdvözlettel,

2018. augusztunovember 29.

Vetier András

1. Nevezetes eloszlások

1. A tanult nevezetes eloszlások közül melyik illik legjobban az alábbi valószínűségi változók modellezésére?

   - Nevezze meg eloszlást!
   - Indokolja meg az eloszlás jogosságát!
   - Ha lehet, adja meg az eloszlás paramétereinek numerikus értékét!
   - Ha nem lehet, magyarázza el, milyen adatokra, mérési eredményekre lenne szükség a paraméterek megadásához!

   Íme a valószínűségi változók:

   (a) Egy érmét 15-ször feldobunk, és megnézzük, hogy hányszor kapunk fejet.
   (b) Egy érmét 15-ször feldobunk, és megnézzük, hogy hányszor kapunk írást.
   (c) Két érmét 15-ször feldobunk, és megnézzük, hogy hányszor kapunk dupla fejet.
   (d) Két érmét 15-ször feldobunk, és megnézzük, hogy hányszor kapunk legalább egy fejet.
   (e) Egy dobókockát 15-ször feldobunk, és megnézzük, hogy hányszor kapunk hatost.
   (f) Addig dobunk egy szabályos érmével, amíg végre fejet kapunk, és megfigyeljük, hány dobás kell ehhez.
   (g) Addig dobunk egy szabályos érmével, amíg másodszorra fejet kapunk, és megfigyeljük, hány dobás kell ehhez.
   (h) Addig dobunk két szabályos érmével, amíg harmadszorra kapunk dupla fejet, és megfigyeljük, hány dobás kell ehhez.
   (i) Addig dobunk egy szabályos dobókockával, amíg végre hatost kapunk, és megfigyeljük, hogy hány dobás kellett ehhez.
   (j) Addig dobunk egy szabályos dobókockával, amíg másodszorra hatost kapunk, és megfigyeljük, hogy hány dobás kellett ehhez.
   (k) Addig dobunk egy szabályos dobókockával, amíg harmadszorra hatost kapunk, és megfigyeljük, hogy előtte hányszor dobtunk hattól különböző számot.
   (l) Ahányadik autó felvesz, amikor kiállok az országútra (mert autóstoppal akarok utazni).
   (m) Ahány autó elmegy 10 perc alatt.
   (n) Ahányadik autó a harmadik piros.
   (o) Ahány pótkocsi nélküli elmegy az első pótkocsis előtt.
   (p) Ahány pótkocsi nélküli elmegy az ötödik pótkocsis előtt.
   (q) Ahány kocsi megáll az első 10 odaérkező kocsi közül.
   (r) Ahány kocsi jön 5 perc alatt.
   (s) Ahány kocsi jön 10 perc alatt.
   (t) Ahány kocsi megáll 10 perc alatt.
   (u) Ahány kocsi elmegy, mielőtt az első megáll.
   (v) Ahányadik az a kocsi, amelyik másodiknak megáll.
   (w) Ahány kocsi elmegy, mielőtt a második megáll.
   (x) Ahány kocsi elmegy, mielőtt a harmadik megáll.

2. Feltéve, hogy egy 100 tagú társaságban 40 balkezes van, adjuk meg annak a valószínűségét, hogy 10 véletlenszerűen kiválasztott ember között

   (a) pontosan 3 balkezes van.
   (b) pontosan x balkezes van.

3. Feltéve, hogy egy országban a balkezesek aránya kb. 40%, adjuk meg annak a valószínűségét, hogy 10 véletlenszerűen kiválasztott ember között

   (a) pontosan 3 balkezes van.

   (b) pontosan x balkezes van.

4. Egy gyárban futószalag szállítja az alkatrészeket. A futószalag leáll, ha selejtes termék érkezik. A termékek 2%-a selejtes. Mi az eloszlása annak a valószínűségi változónak, ami azt számolja, hogy

   (a) hányszor állt le a szalag az n -edik termékig (őt is beleértve)?

   (b) hány terméket gyártott a gép az n -edik leállásig?

   (c) hány terméket szállított két leállás között?

   (d) hány leállás történt egymás után anélkül, hogy egyetlen jó termék is keletkezett volna?

5. Egy forgalmas országútszakaszon, ahol máskor is szoktak radarozni, figyelik, hogy 5 perc alatt hány autó lépi át a megengedett sebességhatárt. Tapasztalat szerint kb. ugyanolyan valószínű, hogy lesz ilyen autó, mint az, hogy nem lesz. Mennyi a valószínűsége, hogy az 5 perc alatt pontosan három autó lépi át a megengedett sebességhatárt?

6. Egy osztályban 22 tanuló van. Egy órára 8-an nem készültek, és 7-en felelnek. Adjuk meg a készületlen felelők számának eloszlását! Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 2 készületlen felelő lesz?

7. 100 kulcs közül 2 nyitja az előttünk lévő ajtót. A kipróbált kulcsokat félretesszük. Mi a valószínűsége, hogy legfeljebb 50 próbálkozásból bejutunk? És mi a valószínűsége, hogy pontosan n próbálkozásból jutunk be?

8. Tegyük fel, hogy hétköznaponként Pesten 0.4, Budán 0.7 annak a valószínűsége, hogy nem történik súlyos baleset. Mi a valószínűsége annak, hogy

   (a) Pesten pontosan 1 baleset történik?

   (b) Budán pontosan 1 baleset történik?

   (c) Budapesten pontosan 1 baleset történik?

2. Módusz megkeresése

1. Vezesse le a hipergeometrikus eloszlás móduszára fentebb megadott képletet!
2. Vezesse le a negatív binomiális eloszlás móduszára fentebb megadott képletet!
3. Tegyük fel, hogy valaki azzal szórakozik, hogy mindenkivel, akivel összefut, megkérdezi, hogy mikor van a születésnapja. (Az év nem számit, csak a hónap, nap. Szökőévektől eltekintünk. Feltételezzük, hogy minden megkérdezett ember a többitől függetlenül egyforma eséllyel mondja születésnapjaként az év 365 napját.) Emberünk izgul, hogy hányadik embernél adódik az első olyan helyzet, hogy a megkérdezett ember születésnapja egybeesik egy olyan születésnappal, amit már valaki mondott korábban: vajon hányadok kérdezésnél következik ez be? Határozza meg ennek a valószínűségi változónak
   (a) a lehetséges értékeit!
   (b) súlyfüggvényét!
   (c) móduszát!
4. Tegyük fel, hogy egy X valószínűségi változó binomiális eloszlást követ, melynek paramétereit nem ismerjük. Azt azért tudjuk, hogy az n paraméter 10 és 15 között van, és azt is tudjuk, hogy X legvalószínűbb értéke 5. Adjon alsó és felső becslést az $X = 6$ esemény valószínűségére!
5. Sok éves tapasztalatok alapján tudni lehet, hogy egy bizonyos országban az a legvalószínűbb, hogy egy év alatt 3 hármasiker születik. Adjon alsó és felső becslést annak az eseménynek a valószínűségére, hogy egy évben nem születnek hármasikrek!
6. **Példa: Hányadik embernél adódik először születésnap ismétlődés?** Barátom azzal szórakozik, hogy akivel csak összefut, megkérdezi, mikor van a születésnapja. (A születés éve nem számít, csak a hónap és a nap. Szökőévektől eltekintünk. Felteszzük, hogy minden kérdezésnél – a korábbi válaszoktól függetlenül – egyforma eséllyel kaphatjuk születésnapként az év 365 napjának akármelyikét.) Barátom arra kíváncsi, hogy hányadik kérdezésnél áll elő először az a helyzet, hogy a megkérdezett ember születésnapja egybeesik egy korábban mondott nappal. Ennek a valószínűségi változónak
   - a legkisebb lehetséges értéke 2 (ami akkor adódik, ha a 2 -ik megkérdezett ember születésnapja egybeesik az első születésnappal),
   - a legnagyobb értéke pedig 366 (ami akkor adódik, ha a sors először 365 olyan emberrel hozza össze barátomat, akik mind különböző napokon születtek).

   Határozza meg
   (a) a jobboldali eloszlásfüggvény képletét,
   (b) a súlyfüggvény képletét,
   (c) az eloszlás móduszát.

3. Szimuláció

1. Szimuláljon Excellel olyan valószínűségi változót, ami binomiális eloszlást követ
   (a) $n = 5$ és $p = 0.4$ paraméterekkel.
   (b) $n = 5$ és változtatható p paraméterekkel.
   (c) változtatható $n = 5$ és p paraméterekkel.
2. Szimuláljon Excellel olyan valószínűségi változót, ami optimista geometriai eloszlást követ változtatható p paraméterrel.
   (a) $p = 1/2$ paraméterrel.
   (b) $p = 1/6$ paraméterrel.
   (c) változtatható p paraméterrel.
3. Szimuláljon Excellel olyan valószínűségi változót, ami az alábbi táblázattal megadot eloszlást követi:

x	0	1	2	3
$p(x)$	0.2	0.4	0.3	0.1

Táblázat: *Numerikusan adott eloszlás*

4. Szimuláljon Excellel olyan valószínűségi változót, ami az alábbi táblázattal megadot eloszlást követi:

x	k_0	k_1	k_2	k_3
$p(x)$	0.2	0.4	0.3	0.1

Táblázat: *Eloszlás szabad paraméterekkel*

ahol k_0, k_1, k_2, k_3 változtatható paraméterek.

5. Szimuláljon Excellel olyan valószínűségi változót, ami az alábbi táblázattal megadot eloszlást követi:

x	k_0	k_1	k_2	k_3
$p(x)$	p_0	p_1	p_2	p_3

Táblázat: *Eloszlás szabad paraméterekkel*

ahol k_0, k_1, k_2, k_3 és p_0, p_1, p_2, p_3 változtatható paraméterek.

4. Tömegpont rendszerek súlypontja és tehetetlenségi nyomatéka

5. Egydimenziós adatrendszerek

6. Valószínűségi változók és eloszlások várható értéke, varianciája, szórása

1. Tegyük fel, hogy egy normált tömeg eloszlás az $[A; B]$ intervallumra koncentrálódik. Hogy néz ki az eloszlás, ha

   (a) a súlypontja a lehető leginkább balra helyzkedik el?

   (b) a súlypontja a lehető leginkább jobbra helyzkedik el?

   (c) ha a tehetetlenségi nyomatéka a lehető legnagyobb?

2. A

x	0	1	2	3
$p(x)$	0.2	0.4	0.3	0.1

Táblázat: *Eloszlás N.1*

táblázattal megadot eloszlásnak mennyi a

   (a) várható értéke?

   (b) második momentuma?

   (c) varianciája?

   (d) szórása?

   (e) a 2.5 pontra vonatkozó második momentuma?

3. A

x	10	11	12	13
$p(x)$	0.2	0.4	0.3	0.1

Táblázat: *Eloszlás N.2*

táblázattal megadot eloszlásnak mennyi a

   (a) várható értéke?

   (b) második momentuma?

   (c) varianciája?

   (d) szórása?

   (e) a 2.5 pontra vonatkozó második momentuma?

4. A

x	0	10	20	30
$p(x)$	0.2	0.4	0.3	0.1

Táblázat: *Eloszlás N.3*

táblázattal megadot eloszlásnak mennyi a

(a) várható értéke?
(b) második momentuma?
(c) varianciája?
(d) szórása?
(e) a 2.5 pontra vonatkozó második momentuma?

5. A

x	0	11	22	33
$p(x)$	0.2	0.4	0.3	0.1

Táblázat: *Eloszlás N.4*

táblázattal megadot eloszlásnak mennyi a

(a) várható értéke?
(b) második momentuma?
(c) varianciája?
(d) szórása?
(e) a 2.5 pontra vonatkozó második momentuma?

6. Tegyük fel, hogy egy bizonyos országban a családoknak kb.

- 15%-ának nincs gyereke
- 40%-ának 1 gyereke van
- 30%-ának 2 gyereke van
- 10%-ának 3 gyereke van
- 5%-ának pedig 4

A 4 -nél többgyerekes családok olyan ritkák, hogy ezzel a lehetőséggel nem foglalkozunk. Feltesszük, hogy a különböző családokban a gyerekek száma független egymástól. Feltesszük, hogy minden gyerek a többitől függetlenül $0.5 - 0.5$ valószínűségggel születik lánynak vagy fiúnak.

(a) Átlagosan hány gyerek van egy-egy családban?
(b) Átlagosan hány lány-gyerek van egy-egy családban?

(c) Átlagosan hány fiú-gyerek van egy-egy családban?

(d) Ha egy családról annyit tudunk, hogy van benne gyerek, akkor a gyerekek számának mi az eloszlása?

(e) A családi pótlékot az alábbi táblázat szerint kapják a családok:

gyerekek száma	0	1	2	3	4
családi pótlék (*fityingben*-ben)	0 000	5 000	25 000	30 000	35 000

Táblázat: *Családi pótlék*

Átlagosan hány fitying családi pótlékot kap egy-egy család?

(f) Átlagosan hány fitying családi pótlékot kapnak a gyerekes családok?

7. Egy dobozban pénzérmék vannak. Az érmék tömegei:

érme	**5 Ft**	**10 Ft**	**20 Ft**	**50 Ft**	**100 Ft**	**200 Ft**
tömeg (g)	4.2	6.1	7.0	7.7	8.0	9.5

Táblázat: *Érmék tömegei*

Feltételezzük, hogy húzáskor az érmék valószínűségei arányosak a tömegeikkel. 1000 -szer húzunk visszatevéssel. Kb. mennyi lesz a kihúzott érmék

- értkének
- súlyának

az átlaga? (Ha esetleg kísérletekkel ellenőrizni akarja számítását, akkor azt ne igazi érmékkel, hanem számítógépes szimulációval tegye! Az, hogy húzáskor az érmék valószínűségei arányosak a tömegeikkel, csak egy hipozézis volt. Egyáltalán nem biztos, hogy ezek a valószínűségek megfelelnek a valóságnak.)

8. Találja meg az általános képletet egy valószínűségi változó várható értékére, ha az eloszlását nem a súlyfüggvénnyel, hanem a lehetséges értékek súlyaival adjuk meg (melyek összege általában nem 1.)

7. Nagy számok törvényei

1. Egy dobozban 6 cédula van, rajtuk pedig a következő számok:

   (a) $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6;$

   (b) $1,\ 2,\ 6,\ 6,\ 6,\ 6;$

   (c) $1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3;$

   (d) $1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 6;$

   (e) $1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3;$

   (f) $11,\ 11,\ 11,\ 12,\ 12,\ 13;$

   (g) $21,\ 21,\ 21,\ 22,\ 22,\ 23;$

   (h) $21,\ 22,\ 22,\ 22,\ 22,\ 26;$

   (i) $210,\ 220,\ 220,\ 220,\ 220,\ 236;$

   (j) $0.1,\ 0.2,\ 0.3,\ 0.4,\ 0.5,\ 0.6;$

   (k) $0.1,\ 0.2,\ 0.6,\ 0.6,\ 0.6,\ 0.6;$

   (l) $5.1,\ 5.2,\ 5.6,\ 5.6,\ 5.6,\ 5.6;$

   (m) $-1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -5,\ -6;$

   (n) $-1,\ -2,\ -6,\ -6,\ -6,\ -6;$

   (o) $-1,\ -2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3.$

   A fenti esetek mindegyikében véletlenszerűen húzunk a dobozból egy cédulát, és leolvassuk a rajta lévő számot. Ezt a számot jelöljük X -szel. Képzelje el (még jobb ha ténylegesen vagy szimulációval meg is teszi), hogy X -re sok kísérletet végez. A kísérletek számát jelölje N, a kísérleti eredményeket, amelyek véletlen számok, jelölje

   $$X_1, X_2, \ldots, X_N$$

   - Becsülje meg, hogy körülbelül mennyi lesz a kísérleti eredmények négyzetének átlaga, vagyis az

     $$\frac{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_N^2}{N}$$

     kifejezés értéke? (Az itt szereplő kifejezést az $X_1, X_2, \ldots, X_N$ számok második momentumának nevezzük. Az elméleti értéket, amit Önnek kell meghatározni, az X valószínűségi változó (avagy a valószínűségi változó eloszlása) második momentumának nevezzük.)

   - Becsülje meg, hogy körülbelül mennyi lesz a kísérleti eredményeknek egy valamilyen konstanstól, például a 2.8-től való eltérése négyzetének az átlaga, vagyis az

     $$\frac{(X_1 - 2.8)^2 + (X_2 - 2.8)^2 + \ldots + (X_N - 2.8)^2}{N}$$

     kifejezésnek az értéke? (Az itt szereplő kifejezést az $X_1, X_2, \ldots, X_N$ számoknak a 2.8 -re vonatkozó második momentumának nevezzük. Az elméleti értéket, amit Önnek meg kell határozni, az X valószínűségi változó (avagy a valószínűségi változó eloszlása) 2.8 -re vonatkozó második momentumának nevezzük.)

   - Becsülje meg,hogy körülbelül mennyi lesz a kísérleti eredményeknek az átlagukra vonatkozó második momentuma. Az elméleti értéket, amit Önnek meg kell határozni, az X valószínűségi változónak a várható értékre vonatkozó második momentumának nevezzük. Ezt a mennyiséget varianciának, avagy szórásnégyzetnek is hívjuk.

2. Először számolja ki a

x	0	1	2	3
$p(x)$	0.2	0.4	0.3	0.1

Táblázat: *Eloszlás N.5*

eloszlás

(a) várható értékét
(b) második momentumát
(c) varianciáját
(d) szórását

majd pedig szimuláljon olyan valószínűségi változót, amely a megadott eloszlást követi, csináljon sok kísérletet, számolja ki a kísérleti eredmények

(a) átlagát
(b) második momentumát
(c) varianciáját
(d) szórását

és győződjön meg arról, hogy a kísérleti eredmények megfelelő jellemzői az eloszlás megfelelő jellemzőihez közel vannak, a kísérletsorozat ismételgetésével azok körül ingadoznak.

8. Várható érték, variancia, szórás általános tulajdonságai

1. Egy dobozban két cédula van, rajtuk az 1, illetve a 2 számok. Visszatevéssel húzogatunk, és egy papírra mindig felírjuk a kihúzott számot? Legyen $X =$ ahány húzás kell ahhoz, hogy a papírunkon mindkét szám ott legyen. Határozza meg X

   (a) várható értékét!

   (b) szórását!

2. Egy dobozban három cédula van, rajtuk az 1, 2, illetve a 3 számok. Visszatevéssel húzogatunk, és egy papírra mindig felírjuk a kihúzott számot? Legyen $X =$ ahány húzás kell ahhoz, hogy a papírunkon mind a három szám ott legyen. Határozza meg X

   (a) várható értékét!

   (b) szórását!

   (Segítség: Az első húzással kihúzunk valamit. Véletlentől függ, hogy ezután hány húzás kell ahhoz, hogy egy ettől különböző számot húzzunk. Jelölje a szükséges húzások számát Y. Véletlentől függ, hogy ezután hány húzás kell ahhoz, hogy a már kihúzott két számtól különböző számot húzzunk. Jelölje a szükséges húzások számát Z. Nem nehéz rájönni, hogy milyen eloszlást követ Y és Z, és hogy mennyi a várható értékük. Ha ezek után felhasználja a nyilvánvaló $X = 1 + Y + Z$ tényt, megkapja kérdezett várható értéket.)

3. Egy dobozban 10 cédula van 1 -től 10 -ig számozva. Visszatevéssel húzogatunk, és egy papírra mindig felírjuk a kihúzott számot? Legyen $X =$ ahány húzás kell ahhoz, hogy a papírunkon az összes szám ott legyen. Határozza meg X

   (a) várható értékét!

   (b) szórását!

4. Tegyük fel, hogy egy eloszlás szerint

   (a) a 2 koordinátájú pontra eső valószínűség 0.3 . Az eloszlást csak annyiban változtatjuk meg, hogy a 2 ponton lévő 0.3 valószínűséget a 13 pontba helyezzük át. Mennyi lesz az új eloszlás várható értéke, ha az eredetié 5 volt?

   (b) az x_0 koordinátájú pontra eső valószínűség p_0. Az eloszlást csak annyiban változtatjuk meg, hogy az x_0 ponton lévő p_0 valószínűséget az $x_0 + b$ pontba helyezzük át. Mennyi lesz az új eloszlás várható értéke, ha az eredetié m volt? (b konstans)

   (c) az x_0 koordinátájú pontra eső valószínűség p_0. Az eloszlást csak annyiban változtatjuk meg, hogy az x_0 ponton lévő p_0 valószínűséget az $a\,x_0$ pontba helyezzük át. Mennyi lesz az új eloszlás várható értéke, ha az eredetié m volt? (a konstans)

   (d) az x_0 koordinátájú pontra eső valószínűség p_0. Az eloszlást csak annyiban változtatjuk meg, hogy az x_0 ponton lévő p_0 valószínűséget az $a\,x_0 + b$ pontba helyezzük át. Mennyi lesz az új eloszlás várható értéke, ha az eredetié m volt? (a és b konstansok)

9. Nevezetes eloszlások várható értéke, varianciája, szórása – formulák

1. Percenként átlagosan 2 hívás érkezik a tudakozóközpontba. Mi annak a valószínűsége, hogy 10:00 és 10:05 között legalább 4 hívás érkezik?

2. Átlagosan hány szem mazsolának kell lennie egy sütiben ahhoz, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott sütiben legalább 99% valószínűséggel legyen (legalább egy szem) mazsola?

3. Egy dobozban 5 piros és 4 fehér golyó van. 3 golyót kiveszünk visszatevés nélkül. Legyen X a kihúzott piros golyók száma. Számolja ki X eloszlását, várható értékét, varianciáját, szórását!

4. Ha egy országban a átlagosan 2,7 hármasiker születik, akkor mi a valószínűsége annak, hogy pontosan 4 hármasiker születik

   (a) egy év alatt?

   (b) két év alatt?

5. Sok év statisztikája áll rendelkezésünkre arra nézve, hogy naponta hány lakástűz volt Budapesten. A napi négy tűzeset ugyanolyan relatív gyakorisággal fordul elő, mint az öt tűzeset. Becsülje meg, hogy a napok körülbelül hány százalékában fordul elő a két tűzeset!

6. Sok év adatai alapján feltesszük, hogy egy bizonyos kisvárosban naponta átlagosan 4.5 könnyű baleset és 2.8 súlyos baleset történik. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy nap alatt a könnyű balesetek száma

   (a) 10 -nél kisebb?

   (b) 5 -nél nagyobb?

   (c) 5 -nél nagyobb, de 10 -nél kisebb?

   (d) 10 -nél kisebb, feltéve, hogy 5 -nél nagyobb?

   (e) 5 -nél nagyobb, feltéve, hogy 10 -nél kisebb?

   Hogyan módosulnak a fenti kérdésekre adott válaszok, ha nem egy, hanem két egymást követő napon bekövetkező balesetek számára vonatkoznak?

10. Nevezetes eloszlások várható értékei – bizonyítások

11. Binomiáls eloszlás második momentumának, varianciájának és szórásának levezetése

12. Feltételes várható érték, variancia, szórás

13. Vegyes feladatok diszkrét eloszlásokra

1. Egy 30 fős osztályban 17 lány van. Véletlenszerűen kiválasztanak az osztályból egy 12 fős csapatot egy vetélkedőre. Legyen a csapatba került lányok száma X. Kérdés: $\mathrm{P}(X = 7) = ?$

2. Egy 400 oldalas könyvben összesen 200 sajtóh**u**ba van (véletlenszerűen elszórva). Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 13. oldalon több, mint egy sajtóh**u**ba van? Hány sajtóh**u**ba a legvalószínűbb a 13. oldalon? Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 13. és a 14. oldalon együtt több, mint két sajtóh**u**ba van?

3. 80 üveg bor van egy borospincében össze-vissza lerakva, ebből 30 fehér, 50 vörös. A vendégek a fogadóstól 3 üveg fehér és 7 vörösbort rendelnek, de a pincében kiégett a villany. A fogadós véletlenszerűen kiválaszt 10 üveget. Mi a valószínűsége, hogy minden vendég kap neki megfelelő itókát?

4. A vidámparkban a céllövöldében játszom. Egymás után vonulnak fel a célpontok, mindegyiket egymástól függetlenül 2/3 valószínűséggel eltalálom. Mi a valószínűsége, hogy 6 célzásból

   (a) pontosan 4 -et találok el?

   (b) 2 -nél többet találok el, de azért nem az összeset?

5. Blicc úr minden nap villamossal megy dolgozni, de nincs bérlete, sem jegye. A villamosra minden nap 0,2 valószínűséggel száll fel ellenőr, és ilyenkor 0,95 valószínűséggel elkapja Blicc urat. (Az ellenőr minden nap az addigiaktól függetlenül dönti el, ellenőrzi-e aznap Blicc úr villamosát.)

   (a) Mennyi a valószínűsége, hogy Blicc úrnak "szerencsés hete" van, azaz az 5 munkanap egyikén sem kell büntetést fizetnie?

   (b) Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan kétszer kapják el egy hét munkanapjai alatt?

   (c) Feltéve, hogy Blicc úrnak "szerencsés hete" volt, mi a valószínűsége, hogy mind ötször volt ellenőr a villamoson?

   (d) Mi a valószínűsége hogy csütörtökön büntetik meg másodszor?

6. Egy szöcske elindul a számegyenes origójából. Minden lépésnél 1/2 valószínűséggel jobbra, 1/2 valószínűséggel balra ugrik. 20 ugrás megtétele után

   (a) milyen valószínűséggel lesz a 0-ban?

   (b) milyen valószínűséggel lesz az 1-ben?

   (c) milyen valószínűséggel lesz a (-2)-ben, ha az utolsó előtti ugrás után a (-3)-ban volt?

7. Van két érmém, az egyik igazságos érme, a másik cinkelt, de ránézésre nem tudom őket megkülönböztetni egymástól. A cinkelt érme 3/4 valószínűséggel mutat fejet. Előveszem az egyik érmét a zsebemből, 1/2 eséllyel az igazságosat, 1/2 eséllyel a cinkeltet. A kiválasztott érmét feldobom 30-szor, és azt tapasztalom, hogy 25-ször mutatott fejet. Mi a valószínűsége, hogy a cinkelt érmét vettem elő?

8. Addig dobunk két kockával, amíg a két kockán lévő számjegyek összege 12 nem lesz.

   (a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy pontosan nyolcszor dobunk 12-nél kisebb összeget, mielőtt 12-t dobnánk?

   (b) Mennyi a valószínűsége, hogy összesen nyolcszor dobunk?

9. Egy (szabálytalan) pénzérmét dobunk fel annyiszor, amíg fejet nem kapunk. Ha a fej dobás valószínűsége p, akkor mennyi a valószínűsége, hogy

   (a) pont k -szor dobunk a fej előtt?

   (b) pont k -szor dobunk az érmével?

10. Dobogatok a kockával és vonásal számolom, hogy hány hatost dobtam. Mi a valószínűsége, hogy a 12. dobásra húzom a harmadik vonást? Ha azt számolnám ki, hogy mennyi a valószínűsége, hogy 12-szer dobok hatostól különbözőt, mire kidobom a harmadik hatost, akkor különbözne ez az előző eredménytől ?

11. 100 kulcs közül csak 1 nyitja az előttünk lévő ajtót. A sötétben nem látjuk, hogy melyik kulcsot próbáltuk már ki, így a próbálgatások során többször is a kezünkbe kerülhet ugyanaz kulcs. Mi a valószínűsége, hogy legfeljebb 50 próbálkozással kinyitjuk az ajtót? És ha a kipróbált kulcsokat félretesszük?

12. Egymás után kérdezgetjük az embereket a születésnapjukról: melyik hónap hányadikán születtek.

    (a) Hányadik embernél adódik az első olyan születésnap, ami már korábban szerepelt? Határozza meg ennek a valószínűségi változónak az eloszlását: adja meg a súlyfüggvénynek a képletét!

    (b) Hányadik embernél adódik a második olyan születésnap, ami már korábban szerepelt? Határozza meg ennek a valószínűségi változónak az eloszlását: adja meg a súlyfüggvénynek a képletét!

13. Adja meg az alábbi valószínűségi változók eloszlását! Két szabályos dobókockával dobunk, és megfigyeljük a dobott számok

    (a) összegét.

    (b) különbségét.

14. Valaki minden héten egyetlen ötös lottó szelvénnyel játszik. Legalább hány hétig kell játszania ahhoz, hogy a hármas, négyes, ötös valószínűsége legalább 1/2 legyen? (Ez 3 különálló kérdés.)

15. Van két érmém, az egyik igazságos érme, a másik cinkelt, de ránézésre nem tudom őket megkülönböztetni egymástól. A cinkelt érme 3/4 valószínűséggel mutat fejet. Előveszem az egyik érmét a zsebemből, 1/2 eséllyel az igazságosat, 1/2 eséllyel a cinkeltet, és odaadom a hallgatóknak. 30 dobás után el kell dönteniük, melyik érme volt, amit elővettem. Hol húznák meg a döntési határt? (A 30 dobás közül hány fej esetén tippelnének még az igazságos érmére, hány fej esetén tippelnének már a cinkeltre?)

16. Egy dobozban N darab cédula van 1-től N -ig megszámozva. Visszatevés nélkül húzunk n -szer, majd a kihúzott számokat nagyság szerint sorba rakjuk. Tekintsük a nagyság szerinti

    (a) legkisebbet,

    (b) legnagyobbat,

    (c) 2-ik legkisebbet,

    (d) 3-ik legkisebbet,

    (e) s -edik legkisebbet.

    Határozza meg ezeknek a valószínűségi változóknak az eloszlását: adja meg a súlyfüggvény képletét!

17. *Általánosítás:* Egy dobozban A darab piros és B darab fehér golyó van. Visszatevés nélkül húzok az r -ik pirosig. Adjuk meg a súlyfüggvény és az eloszlásfüggvény képletét! Adja meg a súlyfüggvényt visszatevéses húzás esetén is!