Valószínűségszámítás
3. RÉSZ
Egydimenziós folytonos valószínűségi változók
—
GYAKORLÓ FELADATOK

Vetier András

2020. augusztus 30.

Tartalomjegyzék

Tisztelt Hallgatók!

Kérem, hogy a jegyzetben talált hibákat a **vetier@math.bme.hu** email címen jelezzék nekem. A levél tárgya legyen: **Hibát találtam**. Egy hatékony módszer a hibák rögzítésére, ha valaki a számítógépen olvassa a jegyzetet:

- nyom egy PRINT SCREEN-t
- behívja a PAINT programot
- nyom egy PASTE (ctrl-V) utasítást
- pirossal bekarikázza a hibát, esetleg valamit oda ír
- elmenti a JPG fájlt, a fájl neve legyen a hiba helyének az oldalszáma, vagy a nevében legyen benne az oldalszám
- a JPG fájlokat csatolt fájlként a fent megadott címre

Természetesen minden más módszerrel küldött hibajelzést is köszönök.

Az "***Extra feladat***", "***Extra tananyag***" cimkékkel megjelölt feladatok és anyagrészek nem részei a kötelező vizsga anyagának. Ezeket a vizsgákon nem kérdezzük. Viszont ha valaki az *"Extra feladat"*, *"Extra tananyag"* cimkékkel megjelölt feladatokból és anyagrészekből

- összesen 20 oldalnyi mennyiséget szépen, okosan megtanult, és
- a honlapon megadott határidőig szándékét emailben jelzi, és
- a szóbeli beszámoló elején írásban bemutatja, hogy mik azok az anyagrészek, melyekből összeáll az ő extra 20 oldala, és
- utána a vizsgáztató által a deklarált anyagból feltett kérdésekre szépen, okosan válaszol, akkor

a vizsgán már elért a közepes (3) vagy a jó (4) osztályzatát egy jeggyel javíthatja.

A "szépen, okosan" itt azt jelenti, hogy tényleg érti a dolgokat, nem csupán visszamondja az olvasottakat.

Nem iMSC hallgatók részére a küldendő email címzettje: **vetier49@gmail.com**, tárgya: **Beszámoló Extra tananyagból**.

iMSc hallgatók a jegy javításán túl iMSc extra pontokat szerezhetnek, ha a megtanult anyag mennyisége 30 oldal. Részükre a küldendő email címzettje: **ferenczi@math.bme.hu**, tárgya: **Beszámoló Extra tananyagból**.

Eredményes, örömteli, jó tanulást kívánok! Üdvözlettel,

2018. augusztunovember 29.

Vetier András

1. Folytonos eloszlások

1. Legyen X egyenletes eloszlású valószínűségi változó
   - a $[0, 1]$ intervallumon
   - a $[0, B]$ intervallumon
   - az $[A, B]$ intervallumon

   Mennyi az X
   - mediánja?
   - alsó kvartilise?
   - felső kvartilise?
   - p -kvantilise?
   - Adja meg a kvantilis függvény képletét!
2. Tekintsük a következő folytonos eloszlásokat, melyeket a sűrűségfüggvényükkel adunk meg.
   (a) $f(x) = 2x \quad (0 < x < 1)$
   (b) $f(x) = 2x/a^2 \quad (0 < x < a)$
   (c) $f(x) = 1/(2\sqrt{x}) \quad (0 < x < 1)$
   (d) $f(x) = 0.5 + x \quad (0 < x < 1)$
   (e) $fx) = 2e^{-2x} \quad (x \geq 0)$

   Rajzolja le a sűrűségfüggvények grafikonjait! Mennyi ezeknek az eloszlásoknak
   - a mediánja?
   - alsó kvartilise?
   - felső kvartilise?
   - p -kvantilise?
   - Adja meg a kvantilis függvény képletét!
   - Határozza meg az eloszlásfüggvény képletét!
3. Tekintsük a következő folytonos eloszlásokat, melyeket az eloszlásfüggvényükkel adunk meg.
   (a) $F(x) = x^2 \quad (0 < x < 1)$
   (b) $F(x) = x^2/a^2 \quad (0 < x < a)$
   (c) $F(x) = 1 - e^{-2x} \quad (x \geq 0)$
   (d) $F(x) = \sqrt{x} \quad (0 < x < 1)$

   Rajzolja le az eloszlásfüggvények grafikonjait! Mennyi ezeknek az eloszlásoknak
   - a mediánja?
   - alsó kvartilise?
   - felső kvartilise?
   - p -kvantilise?
   - Adja meg a kvantilis függvény képletét!
   - Határozza meg a sűrűségfüggvény képletét!
4. Tekintünk két egymástól független, külön-külön 0 és 1 között egyenletes eloszlású véletlen számot. Jelöljük X -szel a nagyobbikat.

(a) Határozza meg X eloszlásfüggvényének képletét!

(b) Az eloszlásfüggvény deriválásával határozza meg X sűrűségfüggvényének képletét!

(c) *Az eloszlásfüggvény használata nélkül*, az

$$f(x) \approx \frac{\mathrm{P}(x_1 \le X \le x_2)}{x_2 - x_1} \qquad (\; x_1 \; \le \; x \; \le x_2, \quad x_1 \text{ és } x_2 \text{ közel vannak } x \text{ -hez })$$

képletből kiindulva határozza meg X sűrűségfüggvényének képletét!

5. Tekintünk két egymástól független, külön-külön 0 és 1 között egyenletes eloszlású véletlen számot. Jelöljük X -szel a kisebbiket.

(a) Határozza meg X eloszlásfüggvényének képletét!

(b) Az eloszlásfüggvény deriválásával határozza meg X sűrűségfüggvényének képletét!

(c) *Az eloszlásfüggvény használata nélkül*, az

$$f(x) \approx \frac{\mathrm{P}(x_1 \le X \le x_2)}{x_2 - x_1} \qquad (\; x_1 \; \le \; x \; \le x_2, \quad x_1 \text{ és } x_2 \text{ közel vannak } x \text{ -hez })$$

képletből kiindulva határozza meg X sűrűségfüggvényének képletét!

6. Ahhoz hasonlóan, ahogy az $F(x)$ eloszlásfüggvény tulajdonságai és $f(x)$ -szel való kapcsolatát megvilágítottuk, keresse meg a $T(x)$ jobboldali eloszlásfüggvény tulajdonságait és $f(x)$ -szel való kapcsolatát!

2. Folytonos eloszlások szemléltetése festékkel, pontfelhővel

1.

2.

3. Random számok transzformációi

4. Várható érték, variancia, szórás *(– folytonos eset)*

1. Legyen X egyenletes eloszlású valószínűségi változó

   - a $[0,1]$ intervallumon
   - a $[0,B]$ intervallumon
   - az $[A,B]$ intervallumon

   Mennyi az X

   - várható értéke?
   - második momentuma?
   - varianciája?
   - szórása?
   - Mennyi X^3 a várható értéke?

2. Tekintsük a következő folytonos eloszlásokat, melyeket a sűrűségfüggvényükkel adunk meg.

   (a) $f(x) = 2x \quad (0 < x < 1)$
   (b) $f(x) = 2x/a^2 \quad (0 < x < a)$
   (c) $f(x) = 1/(2\sqrt{x}) \quad (0 < x < 1)$
   (d) $f(x) = 0.5 + x \quad (0 < x < 1)$
   (e) $fx) = 2e^{-2x} \quad (x \geq 0)$

   Mennyi ezeknek az eloszlásoknak

   - a várható értéke?
   - a második momentuma?
   - a varianciája?
   - a szórása?

3. Tekintsük a következő folytonos eloszlásokat, melyeket az eloszlásfüggvényükkel adunk meg.

   (a) $F(x) = x^2 \quad (0 < x < 1)$
   (b) $F(x) = x^2/a^2 \quad (0 < x < a)$
   (c) $F(x) = 1 - e^{-2x} \quad (x \geq 0)$
   (d) $F(x) = \sqrt{x} \quad (0 < x < 1)$

   Mennyi ezeknek az eloszlásoknak

   - a várható értéke?
   - a második momentuma?
   - a varianciája?
   - a szórása?

4. Generálunk két egymástól független, külön-külön 0 és 1 között egyenletes eloszlású random számot. Jelöljük X -szel a nagyobbikat. Ha X -re 1000 kísérletetet hajtanánk végre, körülbelül mennyi lenne a kísérleti eredmények

   (a) átlaga?
   (b) négyzetének az átlaga?
   (c) varianciája?
   (d) szórása?

5. Generálunk két egymástól független, külön-külön 0 és 1 között egyenletes eloszlású random számot. Jelöljük X -szel a kisebbiket. Ha X -re 1000 kísérletetet hajtanánk végre, körülbelül mennyi lenne a kísérleti eredmények

   (a) átlaga?
   (b) négyzetének az átlaga?
   (c) varianciája?
   (d) szórása?

6. Generálunk három egymástól független, külön-külön 0 és 1 között egyenletes eloszlású random számot. Jelöljük X -szel

   - a legnagyobbat.
   - a nagyság szerint középsőt.
   - a legkisebbet.

   Mind a három esettel kapcsolatban végezze el ugyanazokat a számításokat, amiket az előző feladatokban kellett.

7. Generálunk tíz egymástól független, külön-külön 0 és 1 között egyenletes eloszlású random számot. Jelöljük X -szel a nagyság szerint harmadik legkisebbet. Végezze el ugyanazokat a számításokat, amiket az előző feladatokban kellett.

8. Generálunk három egymástól független, külön-külön 0 és 1 között egyenletes eloszlású random számot. Jelöljük X -szel

   - a legnagyobbat.
   - a nagyság szerint középsőt.
   - a legkisebbet.

   Mind a három esettel kapcsolatban határozza meg, hogy ha X -re 1000 kísérletetet hajtanánk végre, körülbelül mennyi lenne a kísérleti eredmények

   (a) átlaga?
   (b) négyzetének az átlaga?
   (c) varianciája?
   (d) szórása?

9. Választunk egy véletlen számot egyenletes eloszlás szerint az $(1, 4)$ intervallumon, majd szerkesztünk egy egyenlő szárú derékszögű háromszöget, melynek ekkora a befogója. Mennyi a háromszög területének a várható értéke?

   Tegyük fel, hogy az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x) = 2x \quad (0 < x < 1)$. Képzeljük el, hogy valaki X -re sok kísérletet végez. A kísérletek számát jelölje N, a kísérleti eredményeket, amelyek véletlen számok, jelölje

$$X_1, X_2, \ldots, X_N$$

   - Becsülje meg, hogy körülbelül mennyi lesz a kísérleti eredmények átlaga, vagyis az

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N}$$

     kifejezés értéke?
   - Becsülje meg, hogy körülbelül mennyi lesz a kísérleti eredmények négyzetének átlaga, vagyis az

$$\frac{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_N^2}{N}$$

     kifejezés értéke?

- Becsülje meg, hogy körülbelül mennyi lesz a kísérleti eredményeknek egy valamilyen konstanstól, például a 0.8 -től való eltérése négyzetének az átlaga, vagyis az

$$\frac{(X_1-0.8)^2+(X_2-0.8)^2+\ldots+(X_N-0.8)^2}{N}$$

kifejezésnek az értéke? (Az itt szereplő kifejezést az $X_1, X_2, \ldots, X_N$ számoknak a 0.8 -re vonatkozó második momentumának nevezzük.

- Becsülje meg, hogy körülbelül mennyi lesz a kísérleti eredményeknek az átlagukra vonatkozó második momentuma.

10. Tegyük fel, hogy az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F(x)=\sqrt{x}\quad(0<x<1)$. Képzeljük el, hogy valaki X -re sok kísérletet végez. A kísérletek számát jelölje N, a kísérleti eredményeket, amelyek véletlen számok, jelölje

$$X_1, X_2, \ldots, X_N$$

- Becsülje meg, hogy körülbelül mennyi lesz a kísérleti eredmények átlaga, vagyis az

$$\frac{X_1+X_2+\ldots+X_N}{N}$$

kifejezés értéke?

- Becsülje meg, hogy körülbelül mennyi lesz a kísérleti eredmények négyzetének átlaga, vagyis az

$$\frac{X_1^2+X_2^2+\ldots+X_N^2}{N}$$

kifejezés értéke?

- Becsülje meg, hogy körülbelül mennyi lesz a kísérleti eredményeknek egy valamilyen konstanstól, például a 0.8 -től való eltérése négyzetének az átlaga, vagyis az

$$\frac{(X_1-0.8)^2+(X_2-0.8)^2+\ldots+(X_N-0.8)^2}{N}$$

kifejezésnek az értéke? (Az itt szereplő kifejezést az $X_1, X_2, \ldots, X_N$ számoknak a 2.8 -re vonatkozó második momentumának nevezzük.

- Becsülje meg, hogy körülbelül mennyi lesz a kísérleti eredményeknek az átlagukra vonatkozó második momentuma.

11. Egy Bergengóc DVD napokban kifejezett élettartamának sűrűségfüggvénye

$$f(x)=\frac{2}{x^3}\qquad \text{ha } x>1$$

Mi annak a valószínűsége, hogy ha január 26-án hoztuk haza a boltból, akkor február 1-én még működik? Melyik DVD-t érdemesebb megvenni, a Dél-Szaharait, aminek sűrűségfüggvénye

$$f(x)=\frac{1}{x^2}\qquad \text{ha } x>1$$

vagy a Bergengócot?

12. A vihar X idő múlva tör ki a Balatonon, ahol X egy exponenciális eloszlást követő valószínűségi változó λ paraméterrel. Bérbe veszek egy csónakot A Ft/óra bérleti díjért c óra időtartamra ($c>0$ valós konstans), és azonnal bérbe adom egy "albérlőnek" B Ft/óra bérleti díjért ($A<B$) ameddig csak lehet, tehát $\min(X,c)$ időtartamra azzal a feltétellel, hogy

- ha a vihar előbb jön mint a c időtartam letelte, akkor a visszamaradó $c-X$ időrész elvesztéséért én D Ft/óra vigaszdíjat fizetek az "albérlőm"-nek.

(a) Hogyan függ a hasznom az X tényleges értékétől?

(b) Írja fel a haszon várható értékét képlet formájában!

(c) Mennyi legyen a c konstans értéke, hogy a hasznom várható értéke a lehető legnagyobb legyen?

5. A várható érték, variancia és szórás általános tulajdonságai *(– diszkrét és folytonos eset)*

1. Tegyük fel, hogy a zsömlék súlya (pontosabban: tömege) egyenletes eloszlást követ 5 dkg várható értékkel és 1 dkg szórással. Kirándulni megy a család: 20 zsömlét tesznek a zsákba. Mennyi a várható értéke, illetve a szórása a zsákban lévő zsömlék összsúlyának?

6. Nevezetes folytonos eloszlások

1.

2.

7. Közelítések normális eloszlással

1. Egy árverésen a műkincsek élettartama exponenciális eloszlású, 100 év várható értékkel. Eladási áruk négyzetesen nő az idővel. Mi az eladási ár várható értéke?

2. Tegyük fel, hogy egy villanykörte élettartama (évben) $\frac{1}{2}$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó.

   (a) Mennyi a várható élettartama?

   (b) Mi a valószínűsége annak, hogy kevesebb, mint 2 évig ég?

   (c) Mi a valószínűsége, hogy több, mint 1 évig nem ég ki?

   (d) Mi a valószínűsége, hogy mostantól kezdve egy napig ég, de utána a következő nap folyamán kiég?

   (e) Feltéve, hogy 1 évig nem ég ki, mi a valószínűsége, hogy utána még legalább negyed évig működni fog?

3. Annak a valószínűsége, hogy egy buszmegállóban, hogy a kövekező t percen belül jön busz $1 - e^{-8t}$. Mi annak a valószínűsége, hogy több mint 10 percet kell várakoznunk? És annak, hogy kell várnunk legalább 5 percet, de legfeljebb 10-et? Mi a várakozási időnk várható értéke? Mi annak a valószínűsége, hogy ha már sikertelenül vártunk 4 percet, akkor kell még várnunk legalább 10 percet?

4. Egy irodában átlag 5 percenként cseng a telefon. Az utolsó hívás 4 perce volt. Mi a valószínűsége, hogy az utolsó hívás és a következő hívás közti időtartam 5 és 10 perc közé esik?

5. Tegyük fel, hogy a zsömlék súlya (pontosabban: tömege) egyenletes eloszlást követ 5 dkg várható értékkel és 1 dkg szórással. Kirándulni megy a család: 20 zsömlét tesznek a zsákba.

   (a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a zsákban lévő zsömlék összsúlya meghaladja a 105 dkg -ot?

   (b) Mekkora az az x érték, amire teljesül, hogy a zsákban lévő zsömlék összsúlya 0.99 valószínűséggel haladja meg az x dkg -ot?

6. Egy utcai telefonfülke foglalt, amikor odaérek. A beszélgetés hossza véletlen, percekben mérve $\frac{1}{3}$ paraméterű exponenciális eloszlású. Mi a valószínűsége, hogy 5 perc múlva sem kerülök sorra? Mi a helyzet akkor, ha tudjuk, hogy odaérkezésünkkor már 2 perce tart a beszélgetés?

7. Adott típusú elektromos berendezések 2%-a 1000 üzemórán belül elromlik. Tegyük fel, hogy a meghibásodásig eltelt idő exponenciális eloszlást követ.

   (a) Mekkora a valószínűsége, hogy egy ilyen berendezés az átlagosnál tovább működik?

   (b) Hány óra garanciát vállaljunk, ha a garanciális időn belül átlagosan csak 5% garanciaigényt akarunk kielégíteni?

8. Egy örökifjú tulajdonságú villanykörténél $\frac{2}{3}$ annak a valószínűsége, hogy 2000 óránál többet üzemel. Egy városban 200 ilyen égőt helyezünk el. Mi a valószínűsége annak, hogy 200 óra elteltével éppen 150 égő világít?

9. A menzai poharak kirakásuktól számított törési ideje exponenciális eloszlást követ 6 hónap várható értékkel. Határozza meg annak valószínűségét, hogy 50 kirakott pohárból legfeljebb 30 törik el egy év alatt!

10. Egy számítógépes programozási nyelvben RND függvény előállít egy véletlen egyenletes eloszlású valószínűségi változót a $(0, 1)$ intervallumon. Milyen transzformációnak vessük alá ezt a számot ahhoz, hogy a kapott szám egy 7 paraméterű exponenciális legyen?

11. Bizonyítsuk be, hogy az

    - $F(x) = 1 - e^{-x^2}$ ha $x \geq 0$
    - $G(y) = 1 - e^{-\sqrt{y}}$ ha $y \geq 0$

    eloszlásfüggvényekkel megadott X és Y valószínűségi változók közül az egyik öregedő, a másik fiatalodó!

12. Mennyi az alábbi integrálok értéke, mit jelentenek?

(a) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx$

(b) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,\varphi(x)\,dx$

(c) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|\,\varphi(x)\,dx$

(d) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\,\varphi(x)\,dx$

(e)

13. Bizonyítsuk be, hogy $\Phi(-x) + \Phi(x) \equiv 1$

14. Számítsuk ki a következő valószínűségeket, ha X standard normális eloszlású valószínűségi változó!

(a) $\mathrm{P}(-1 < X < 1)$

(b) $\mathrm{P}(-2 < X < 2)$

(c) $\mathrm{P}(-3 < X < 3)$

15. Számítsuk ki azokat az értékeket, amelyeknél kisebbet egy standard normális eloszlású valószínűségi változó 0.2, 0.9, illetve 0.99 valószínűséggel vesz fel!

16. Tegyük fel, hogy X eloszlása normális 220 várható értékkel és 10 szórással. Számold ki a következő valószínűségeket:

(a) $\mathrm{P}(X > 225)$

(b) $\mathrm{P}(215 < X < 229)$

(c) $\mathrm{P}(215 < X < 229 | X > 225)$

(d) $\mathrm{P}(X > 225 | 215 < X < 229)$

17. Egy nagy populációban az emberek átlagos testmagassága 178 cm, a magasságok szórása 9 cm, és a magasság normális eloszlásnak tekinthető. Mennyi ekkor annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott személy testmagassága 169 és 187 cm közé esik? Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezen személy magasabb 2 méternél? Feltéve, hogy a kiválasztott személy testmagassága nagyobb, mint 172 cm, mik az előző pontokban kérdezett események valószínűségei? Most mennyi az az érték, amelynél kisebb magasság 0.2, 0.9, illetve 0.99 valószínűségű (feltétel nélkül)? Szimuláljuk Excelben egy véletlenszerűen választott ember testmagasságát!

18. Egy pontosnak tekinthető ismerősünkkel 7 órakor van találkozónk. Érkezése normális eloszlású, $\sigma = 5$ perc szórással. Melyik az az időpont, amely előtt ismerősünk 0.9 valószínűséggel megérkezik? Szimuláljuk Excelben imserősünk megérkezési idejét!

19. Megfigyelték, hogy egy napszakban egy metrókocsiban az átlagos utaslétszám 80 fő, a szórás 20 fő. Mekkora a valószínűsége, hogy az utaslétszám egy kocsiban

(a) 50 fő alatt

(b) 80 és 100 fő között lesz, ha mindkét esetben feltételezzük, hogy az utaslétszám közelíthető normális eloszlással?

20. Egy X valószínűségi változó várható értéke 0, szórása 1. Melyik esetben valószínűbb, hogy $X > \frac{1}{2}$; akkor, ha X eloszlása normális, vagy akkor, ha egyenletes? (Az (a, b) intervallumon egyenletes eloszlás szórása $\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$.)

21. Egy gyár autómotorokba való gyertyákat készít. A gyertyák működési ideje közelíthető normális eloszlással, átlagosan 1170 órán keresztül működnek, 100 óra szórással. A gyár olyan működési idő garanciát akar vállalni, amelynél hamarabb csak a gyertyák legfeljebb 5%-a hibásodik meg. Hány óra legyen a vállalt működési idő? A gyertyák működési idejének Excelben való szimulálásával ellenőrizzük le az előző rész megoldását!

22. Egyszerre feldobunk öt különböző szabályos "dobóizét": egy tertaédert, egy kockát, egy oktaédert, egy dodekaédert, egy ikozaédert. Mindegyik izével a számok 1-től kezdődően jöhetnek ki. Az dobott számokat így szimulálhatjuk Excellel:

tertaéder esetén:	`VÉL.KÖZÖTT(1;4)`
kocka esetén:	`VÉL.KÖZÖTT(1;6)`
oktaéder esetén:	`VÉL.KÖZÖTT(1;8)`
dodekaéder esetén:	`VÉL.KÖZÖTT(1;12)`
ikozaéder esetén:	`VÉL.KÖZÖTT(1;20)`

Az öt izével dobott számok összege X. Határozza meg X

(a) várható értékét!

(b) szórását!

(c) Az $X > 35$ esemény valószínűségét!

23. Van 25 izzóm, melyek élettartamai egymástól függetlenek, és (napokban mérve) exponenciális eloszlást követnek 0.4 paraméterrel. Az izzókat egymás után használom a sötét pincénk folyamatos világítására. Legyen X az az az időtartam, ameddig a 25 izzóval a világosság a pincében biztosítható, tehát $X =$ az izzók élettartamainak az összege. Határozza meg X

(a) várható értékét!

(b) szórását!

(c) az $X > 60$ esemény valószínűségét!

(d) Mennyi az az x időtartam, amire 0.9 biztonsággal garantálható a világosság? Vagyis mennyi az az x időtartam, hogy az $X > x$ esemény valószínűsége 0.9 ?

8. Eloszlások transzformációi

1. Tegyük fel, hogy egy speciális kemencében a hőmérséklet Celsius fokokban mérve egyenletes eloszlást követ 1000 és 1200 között. Milyen eloszlást követ a hőmérséklet Fahrenheit fokokban? Adja meg a sűrűségfüggvény képletét mindkét esetben! (Mint ismeretes: x Celsius fok $y = \frac{9}{5}x + 32$ Fahrenheit foknak felel meg.)

2. Tegyük fel, hogy X exponenciális eloszlást követ 2.5 paraméterrel. Milyen eloszlású az $Y = 3X$ képletel értelmezett Y valószínűségi változó? Adja meg Y

   (a) sűrűségfüggvényének

   (b) eloszlásfüggvényének

   a képletét!

3. Egy alkatrész élettartama exponenciális eloszlást követ 12.5 nap várható értékkel. Mostantól számoljuk a napokat, de az alkatrészt csak fél nap múlva kezdjük el használni. Azt az időpontot jelöljük X -szel, amikor az alkatrész elromlik. Adja meg X

   (a) sűrűségfüggvényének

   (b) eloszlásfüggvényének

   a képletét!

4. Tegyük fel, hogy X standard normális eloszlást követ. Milyen eloszlást követ az

   (a) $Y = 2X$

   (b) $Y = -2X$

   (c) $Y = 2X + 3$

   valószínűségi változó?

5. Tegyük fel, hogy X standard normális eloszlást követ. Milyen eloszlást követ az

   (a) $Y = 20X$

   (b) $Y = -20X$

   (c) $Y = 20X + 30$

   valószínűségi változó?

6. Tegyük fel, hogy X normális eloszlást követ 100 és 10 paraméterekkel. Milyen eloszlást követ az

   (a) $Y = 20X$

   (b) $Y = -20X$

   (c) $Y = 20X + 30$

   valószínűségi változó?

7. A λ -paraméterű exponenciális eloszlást az $y = \sqrt{x}$ transzformációval transzformáljuk. Mi lesz a transzformációval kapott eloszlás

   - eloszlásfüggvénye?
   - sűrűségfüggfüggvénye?

8. A λ -paraméterű exponenciális eloszlást az $y = x^2$ transzformációval transzformáljuk. Mi lesz a transzformációval kapott eloszlás

   - eloszlásfüggvénye?

- sűrűségfüggfüggvénye?
- várható értéke?

9. A standard normális eloszlást az $y = x^2$ transzformációval transzformáljuk.

   - eloszlásfüggvénye?
   - sűrűségfüggfüggvénye?
   - várható értéke?

   A kapott eloszlás neve: **elsőrendű khínégyzet eloszlás**. *(Figyelem: Az $y = x^2$ függvény a $-\infty, 0$ intervallumon csökken, a $0, \infty$ intervallumon nő!)*

10. Tegyük fel, hogy egy Y valószínűségi változó sok független 1-közeli értékeket felvevő valószínűségi változó szorzata. Y logaritmusát jelöljük X -szel: $X = \ln(Y)$. Mivel a logaritmus képzése szorzatot összegbe visz, az X valószínűségi változó sok független 0-közeli értékeket felvevő valószínűségi változó összege. Ezért X eloszlást normálisnak vehetjük valamilyen μ, σ paraméterekkel. Mivel $Y = \mathrm{e}^X$, az Y eloszlását úgy kaphajuk meg, hogy a normális eloszlást az $y = \mathrm{e}^y$ transzformációnak vetjük alá. A transzformációval kapott eloszlás neve: **lognormális eloszlás** μ, σ paraméterekkel. Határozza meg a lognormális eloszlás sűrűségfüggvényének a képletét!

9. Diszkrét és folytonos eloszlások keverése *(Extra tananyag)*

Küzdelem a zavaró fény ellen! Él egy barátom északon, a sarkkörön túl, ott ahol télen mindig sötét van. A házuk előtt világíít a fehér hó és egy rosszul elhelyezett utcai lámpa. Barátom kisfia utálja, hogy a lámpa bevilágít a szobájába. Ezért minden délután pontosan 18 órakor (vacsora előtt) – egy jól irányzott lövéssel – megpróbálja csúzlival kilőni. A lámpa magasan van, ezért minden lövése csak 0.01 valószínűséggel talál. A tél legelején egy sötét napon 0 órakor betettek egy új izzót, aminek élettartama exponenciális eloszlást követ 10 hét várható értékkel, vagyis – az időt hetekben mérve – 0.1 paraméterrel. Kérdések:

1. Mi a valószínűsége annak, hogy a fiú az első sikert
   (a) az első napon elkönyvelheti magának?
   (b) a k -ik napon könyvelheti el magának?
   (c) az első héten könyvelheti el magának?
   (d) a k -ik héten könyvelhet el magának?
2. Mi a valószínűsége annak, hogy már az első héten
   (a) az izzót cserélni kell, mert a fiú kilövi?
   (b) az izzót cserélni kell, mert – bár a fiú nem tudja kilőni – de kiég?
   (c) az izzót cserélni kell?
3. Mi a valószínűsége annak, hogy
   (a) az x időpillanat előtt az izzót cserélni kell, mert a fiú kilövi? (Az időt hetekben mérjük. $x > 0$ valós.)
   (b) az x időpillanat előtt az izzót cserélni kell, mert – bár a fiú nem tudja kilőni – de kiég?
   (c) az x időpillanat előtt az izzót cserélni kell?

10. A főnökök halmaza nem mérhető *(Extra tananyag)*

11. A nagy számok erős törvénye *valószínűségi változókra (Extra tananyag)*

1. Tegyük fel, hogy egy X valószínűségi változó μ -vel jelölt várható értéke létezik és véges . Képzeljük el, hogy X -re végtelen sok független kísérletet végzünk. A kísérleti eredmények legyenek $X_1, X_2, \ldots$. Az alábbiakban olyan feltételeket adunk meg, melyek egyre gyengébbek. Az Ön feladata, hogy először az (a), aztán a (b), végül a (c) feltétel mellett igazolja, hogy

annak a valószínűsége, hogy az $\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$ **átlagok**

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$ **végtelen sorozata**

konvergál a μ **értékhez,** 1 **-gyel egyenlő.**

A kimondott állítás a (d) feltétel mellett is igaz, de eme feltétel mellett az állítás bizonyításának nehézsége messze meghaladja egy bevezető kurzus színtjét, ezért ne fáradozzon a bizonyítással! Viszont kihangsúlyozzuk, hogy *a (d) feltétel nemcsak elégséges, hanem szükséges is a vastag betűkkel kiemel állítás teljesüléséhez.*

Itt soroljuk fel az (a), (b), (c), és (d) feltételeket:

(a) $0 \leq X \leq 1$
(b) Van olyan K szám, hogy $|X| \leq K$
(c) Az X valószínűségi változó negyedik momentuma véges.
(d) *Az X valószínűségi változó μ várható értéke létezik és véges.*