

Valószínűesszámitás
4. RÉSZ
Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók
—
FOGALMAK ÉS KIDOLGOZOTT PÉLDÁK

Vetier András

2020. május 17.

Tartalomjegyzék

1. Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók	5
1.1. Sűrűségfüggvény és valószínűség	5
1.2. Kétdimenziós folytonos eloszlás szemléltetése festékekkel	6
1.3. Feltételes valószínűség	8
1.4. Feltételes sűrűségfüggvény egy pozitív valószínűségű eseményen belül	8
1.5. Szorzási szabály független valószínűségi változókra	8
1.6. Általános szorzási szabály	9
1.7. Eloszlásfüggvény	10
2. Kétdimenziós egyenletes eloszlás	12
2.1. Egyenletes eloszlás véges területű halmazon	12
2.2. Végtelen területű halmazon nem létezik egyenletes eloszlás	12
3. Béta eloszlások kétdimenzióban	13
3.1. Ha az érkezések egyenletes eloszlást követnek dél és egy óra között	13
3.1.1. Három ember esete	13
3.1.2. Tíz ember esete	16
3.1.3. Általános eset	17
3.2. Ábrák	18
3.3. Feladatok megoldásokkal	26
3.4. Ha az érkezések egyenletes eloszlást követnek valamilyen véges intervallumon	28
3.5. Ha az érkezések tetszőleges eloszlást követnek (<i>Extra tananyag</i>)	28
4. Kísérleti eredmények függvényének a várható értéke	30
4.1. Diszkrét eset (ismétlés)	30
4.2. Folytonos eset	30
4.3. Szorzat várható értéke	31
5. NSZT a kísérleti eredmények függvényének az átlagára	32
5.1. Diszkrét eset (ismétlés)	32
5.2. Folytonos eset	33

6. Vetület- és feltételes eloszlások	35
6.1. Vetítések koordináta tengelyekre	35
6.2. Vetület eloszlások sűrűségfüggvénye	36
6.3. Feltételes eloszlások sűrűségfüggvénye	37
6.4. Feltételes sűrűségfüggvények rendszere	40
6.5. Sűrűségfüggvények keverése	41
6.6. Feltételes eloszlásfüggvény	41
6.7. Feltételes valószínűség	42
6.8. Feltételes medián	43
6.9. Feltételes várható érték	43
6.10. Feltételes variancia	44
6.11. Feltételes szórás	45
6.12. Egy számolás minta példa: $Y = \text{RND}_1$, $X = Y \cdot \text{RND}_2$	45
6.13. Folytonos szimuláció kétdimenzióban	47
7. Transzformáció síkról síkra	51
7.1. Példa: transzformáció szorzás és osztás segítségével	51
7.1.1. A transzformáció definíciója	51
7.1.2. A transzformáció inverzének képlet-párja	51
7.1.3. Az egységnégyzet képe egy "vitorla" alakú halmaz	51
7.1.4. A transzformáció hatásának szemléltetése	52
7.1.5. A "börtön rács" "díszes rács"-ba transzformálódik, a négyzetből pedig "vitorla" lesz,	56
7.1.6. Pontfelhők transzformációja	57
7.1.7. Eloszlások transzformációja	59
7.2. Jacobi mátrix	60
7.3. Sűrűségfüggvények közötti kapcsolat	61
8. Lineáris transzformáció síkról síkra	62
8.1. Mátrixszal való szorzás	62
8.2. Mátrixszal való szorzás és eltolás	62
9. Transzformáció síkról egyenesre	63
9.1. Példák ábrákkal szemléltetve	63
9.1.1. Transzformáció a $z = x + y$ összeg függvényével	64
9.1.2. Transzformáció a $z = x \cdot y$ szorzat függvényével	65
9.1.3. Transzformáció a $z = x / y$ hányados függvényével	66
9.2. Általános transzformációs képlet	67
9.3. Számolások a fentebbi példákkal kapcsolatban	67
9.3.1. Transzformáció a $z = x + y$ összeg függvényével	68
9.3.2. Transzformáció a $z = x \cdot y$ szorzat függvényével	70
9.3.3. Transzformáció a $z = x / y$ hányados függvényével	72
9.4. Kétlépéses módszer a $z = x + y$ transzformáció esetén – példák ábrákkal szemléltetve	74
9.4.1. Egyenletes eloszlás transzformációja két lépésben	75
9.4.2. Az $f(x, y) = 4xy$ sűrűségfüggvényű eloszlás transzformációja két lépésben	76
9.4.3. Kétdimenziós exponenciális eloszlás transzformációja két lépésben	77
9.5. Kétlépéses módszer a $z = x + y$ transzformáció esetén – általános képlet	79
9.6. Számolások a fentebbi kétlépéses példákkal kapcsolatban	81
9.6.1. Egyenletes eloszlás transzformációja két lépésben	81
9.6.2. Az $f(x, y) = 4xy$ sűrűségfüggvényű eloszlás transzformációja két lépésben	81
9.6.3. Kétdimenziós exponenciális eloszlás transzformációja két lépésben	81
9.7. Konvolúció	82

10. Regresszió a mediánnal és a várható értékkel	83
10.1. Regresszió egydimenzióban	83
10.1.1. A medián minimál tulajdonsága	83
10.1.2. A távolság várható értékének minimalizálása	84
10.1.3. A várható érték minimál tulajdonsága	84
10.1.4. A távolság négyzete várható értékének minimalizálása	86
10.2. Regresszió kétdimenzióban	86
10.2.1. A hiba abszolút értéke várható értékének minimalizálása	86
10.2.2. A hiba négyzete várható értékének minimalizálása	87
10.3. Egy számolás minta példa	88
11. Normális eloszlások a síkon	91
11.1. Standard normális eloszlás a síkon	91
11.2. Standard normális eloszlás r korrelációval	92
11.3. Normális eloszlás $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, r$ paraméterekkel	95
11.4. Vetület eloszlások	102
11.5. Feltételes sűrűségfüggvény	103
11.6. Feltételes medián és várható érték	104
11.7. Feltételes szórás	104
11.8. Példa: testmagasság és testsúly	105
11.9. Példa: A műszer hibáját korrigáljuk	108

Tisztelt Hallgatók!

Kérem, hogy a könyvben talált hibákat a **vetier@math.bme.hu** email címen jelezzék nekem. A levél tárgya legyen: **Hibát találtam**. Egy hatékony módszer a hibák rögzítésére, ha valaki számítógépen olvassa a könyvet:

- nyom egy PRINT SCREEN-t
- behívja a PAINT programot
- nyom egy PASTE (ctrl-V) utasítást
- pirossal bekarikázza a hibát, esetleg valamit oda ír
- elmenti a JPG fájl, a fájl neve legyen a hiba helyének az oldalszáma, vagy a nevében legyen benne az oldalszám
- a JPG fájlokat csatolt fájlként elküldi a fent megadott címre

Természetesen minden más módszerrel küldött hibajelzést is köszönök.

2019. február 5.

Vetier András

1. Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók

Két valószínűségi változót véve – legyenek ezek X és Y – összerakhatjuk őket egyetlen (X, Y) véletlen számpárrá, véletlen ponttá. Ily módon egy kétdimenziós valószínűségi változót kapunk. Példák:

1. Amikor az ejtőernyős célba ugrik, igyekszik a célpontot eltalálni, de ez nem sikerül pontosan. Általában a célpont közelében ér talajt. Ez a pont véletlentől (is) függ. A pont, illetve annak koordinátái egy (X, Y) kétdimenziós folytonos valószínűségi változót adnak.
2. Ha véletlenszerűen választunk egy magyar férfit, akkor az

X = testmagassága centiméterekben mérve

Y = testúlya (pontosabban: testtömege) kilogramokban mérve

jelölésekkel élve (X, Y) kétdimenziós folytonos valószínűségi változó.

3. Számítógéppel generáljunk három 0 és 1 közötti véletlen számot, és legyenek

X = a legkisebb

Y = a legnagyobb

Ekkor (X, Y) kétdimenziós folytonos valószínűségi változó.

1.1. Sűrűségfüggvény és valószínűség

Folytonos kétdimenziós valószínűségi változókat általában a sűrűségfüggvényükkel jellemezzük. Az $f(x, y)$ sűrűségfüggvényt a síknak valamilyen A részhalmazán integrálva megkapjuk annak a valószínűségét, hogy az (X, Y) véletlen pont az A halmazba esik:

$$P(A) = P((X, Y) \in A) = \iint_A f(x, y) dx dy$$

Ahhoz, hogy egy $f(x, y)$ függvény valamilyen kétdimenziós (X, Y) valószínűségi változó sűrűségfüggvénye lehessen két feltételnek kell teljesülni:

$$f(x, y) \geq 0$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = 1$$

Ezek a feltételek minden kétdimenziós sűrűségfüggvényre teljesülnek, és ha egy kétváltozós függvény teljesíti ezeket a tulajdonságokat, akkor lehet olyan kétdimenziós (X, Y) valószínűségi változót értelmezni, melynek sűrűségfüggvénye a szóbanforgó függvény. (Lásd: 6. fejezet, 6.12 Folytonos szimuláció kétdimenzióban.)

A sűrűségfüggvény értéke, mint arányossági tényező. Ha A egy kicsike halmaz (x, y) közelében, akkor

$$P((X, Y) \in A) = \iint_A f(x, y) dx dy \approx f(x, y) \times A \text{ területe}$$

és

$$f(x, y) \approx \frac{P((X, Y) \in A)}{A \text{ területe}}$$

Hangsúlyozzuk, hogy az $f(x, y)$ sűrűségfüggvény értéke semminek sem képviseli a valószínűségét. Ha (x, y) egy adott pont a síkon, akkor $f(x, y)$ jelentése a következő: az (x, y) pont közelében akármilyen kicsi A halmaz esetén annak a valószínűsége, hogy (X, Y) az A halmazba esik, közelítőleg $f(x, y) \times A$ területe :

$$P((X, Y) \in A) \approx f(x, y) \times A \text{ területe}$$

A sűrűségfüggvény értékének közelítése. Legyen most A az a kicsi téglalap az (x, y) pontra támaszkodóan, melynek "bal alsó" sarka az (x, y) pont, "jobb felső" sarka pedig az $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ pont. Ekkor A területe $\Delta x \Delta y$, ezért

$$f(x, y) \approx \frac{P(x < X < x + \Delta x \text{ és } y < Y < y + \Delta y)}{\Delta x \Delta y}$$

Ezt a formulát fogjuk használni a 3. fejezetben a béta eloszlások sűrűségfüggvényeinek levezetéséhez.

1.2. Kétdimenziós folytonos eloszlás szemléltetése festékekkel

A felületi sűrűség – speciálisan a síkon vett sűrűség – fogalma a fizikából jól ismert. Szemléltetés céljából szeretnénk támaszkodni erre a fogalomra.

Ha egy kétdimenziós sűrűségfüggvénnyel van dolgunk, akkor könnyen elképzelhetjük azt a tömegeloszlást a síkon, aminek a síkon vett sűrűsége a szóbanforgó sűrűségfüggvény írja le. Ha valaki ezt mégsem tudja elképzelni, akkor olvassa lelkesen a következő "konstrukciót"!

Jön az úthenger! Képzeljük el az $f(x, y)$ sűrűségfüggvény grafikonját, ami a 3-dimenziós térben egy felület. A felület alatti térrészben – képzeletben – egyenletesen helyezünk el egységnyi össztömegű festéket! Az egyenletesség itt azt jelenti, hogy a térrész minden részhalmazára annyi festék kerül, amennyi a térrész térfogata. És akkor most jöjjön az úthenger, és a térrészben elhelyezett festéket préselje függőleges irányú préseléssel a vízszintes síkra!

A síkon kapunk egy tömegeloszlást, ami festékből készült, és így a festék szín árnyalata is jelzi, hogy hol sűrűbb, hol ritkább az anyag (a festék). Ennél a konstrukciónál a sík (x, y) pontjában a tömegsűrűség éppen $f(x, y)$ -nek adódik.

Ha valaki ennek a gyerekes tálalásnak az egzakt hátterét szeretné tudni, akkor íme, tessék: egy $f(x, y)$ sűrűségfüggvény grafikonja (felülete) alatti térrészben vett egyenletes eloszlás vetületé az (x, y) -síkra olyan folytonos eloszlást ad, aminek sűrűségfüggvénye $f(x, y)$.

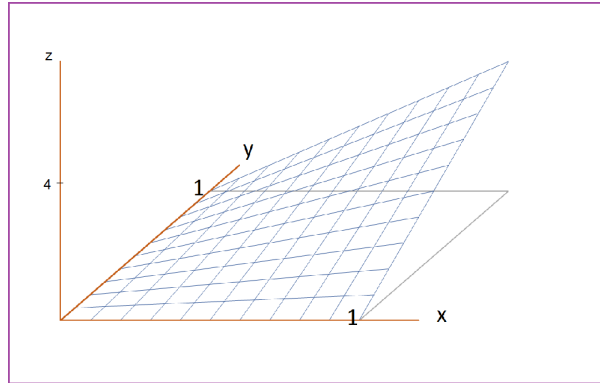
Példa: Tekintsük a kétdimenziós

$$(\sqrt{\text{RND}_1}, \sqrt{\text{RND}_2})$$

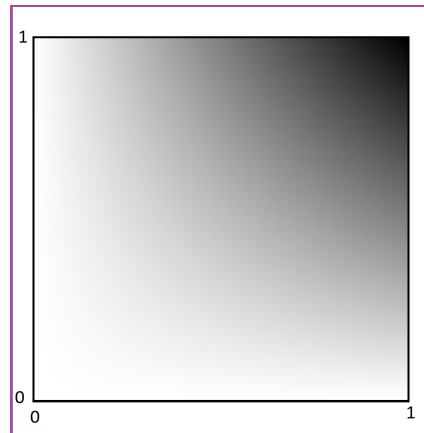
valószínűségi változót. Ennek sűrűségfüggvénye – mint azt néhány oldallal később belátjuk – a következő:

$$f(x, y) = 4xy \quad (0 < x < 1, 0 < y < 1)$$

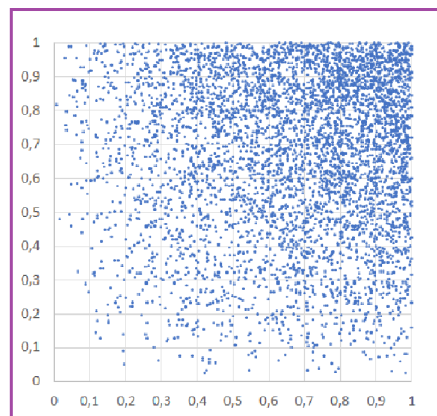
Íme a megfelelő ábrák:



1. ábra. $(\sqrt{RND_1}, \sqrt{RND_2})$ – a sűrűségfüggvény szemléltetése felülettel



2. ábra. $(\sqrt{RND_1}, \sqrt{RND_2})$ – az eloszlás szemléltetése festékkel



3. ábra. $(\sqrt{RND_1}, \sqrt{RND_2})$ – pontfelhő 5000 kísérletből

A következő oldalak, fejezetek bőven szolgáltatnak további példákat, tessék előre lapozgatni!.

1.3. Feltételes valószínűség

Ha A és B a síknak részhalmazai, akkor $(X, Y) \in A$, illetve $(X, Y) \in B$ egy-egy eseményt jelentenek. Az $(X, Y) \in A$ feltétel mellett az $(X, Y) \in B$ esemény valószínűségét értelemszerűen $P((X, Y) \in B | (X, Y) \in A)$ -vel, vagy rövidebben csak $P(B | A)$ -val jelöljük. A számláló és a nevező is egy-egy integrállal írható fel, ezért a feltételes valószínűség két integrál hányadosával egyenlő:

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\iint_{A \cap B} f(x, y) dx dy}{\iint_A f(x, y) dx dy}$$

Ha $B \subseteq A$, akkor $A \cap B = B$, ezért ezt kapjuk:

$$P(B | A) = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{\iint_B f(x, y) dx dy}{\iint_A f(x, y) dx dy}$$

1.4. Feltételes sűrűségfüggvény egy pozitív valószínűségű eseményen belül

Legyen A a síknak egy részhalmaza, melynek pozitív a valószínűsége. Tegyük fel, hogy az $(X, Y) \in A$ esemény bekövetkezett. Ilyen feltétel mellett az (X, Y) valószínűségi változó sűrűségfüggvénye nyilván

$$f(x, y | A) = \frac{f(x, y)}{P(A)} = \frac{f(x, y)}{\iint_A f(x, y) dx dy} \quad \text{ha } (x, y) \in A$$

1.5. Szorzási szabály független valószínűségi változókra

Állítás: Ha X és Y függetlenek, és sűrűségfüggvényeik $f_1(x)$, illetve $f_2(y)$, akkor az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye az $f_1(x)$ és $f_2(y)$ sűrűségfüggvények direktszorzata:

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

Vázlatos bizonyítás.

$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx \frac{P(x < X < x + \Delta x \text{ és } y < Y < y + \Delta y)}{\Delta x \Delta y} = \\ &= \frac{P(x < X < x + \Delta x) \cdot P(y < Y < y + \Delta y)}{\Delta x \Delta y} = \\ &= \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x} \cdot \frac{P(y < Y < y + \Delta y)}{\Delta y} \approx f_1(x) \cdot f_2(y) \end{aligned}$$

1. Példa: Tekintsük a kétdimenziós

$$(\sqrt{\text{RND}_1}, \sqrt{\text{RND}_2})$$

valószínűségi változót. Mivel RND_1 és RND_2 függetlenek, a kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye a szorzási szabállyal számítható:

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y) = 2x \cdot 2y = 4xy \quad (0 < x < 1, 0 < y < 1)$$

Néhány oldallal előbb felhasználtuk ezt az eredményt.

2. Példa: Ha X és Y független exponenciális eloszlású valószínűségi változók $\lambda_1 = 3$, illetve $\lambda_2 = 4$ paraméterekkel, akkor (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye az $f_1(x)$ és $f_2(y)$ sűrűségfüggvények direktszorzata:

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y) = 3e^{-3x} \cdot 4e^{-4y} = 12e^{-3x-4y} \quad (x, y \geq 0)$$

1.6. Általános szorzási szabály

Amikor egy kétdimenziós (X, Y) valószínűségi változóval van dolgunk, előfordulhat, hogy ismerjük X -nek az $f_1(x)$ -szel jelölt sűrűségfüggvényét, és minden lehetséges x érték mellett tudjuk, hogy az $X = x$ feltétel mellett milyen eloszlást követ Y . Jelöljük ennek a feltételes eloszlásnak a sűrűségfüggvényét $f_{2|1}(y | x)$ -vel. Az $f_{2|1}(y | x)$ jelölésben az index mutaja, hogy a második koordináta, vagyis az Y sűrűségfüggvényéről van szó az első koordinátával kapcsolatos feltétel mellett, és hogy a sűrűségfüggvényben a változó szerepében az y áll, a felétel szerepében pedig az x . Az $f_{2|1}(y | x)$ jelölés helyett lehet használni az $f_{2|1}(y | X = x)$ avagy $f_{Y|X}(y | x)$ jelöléseket is.

Természetesen az is előfordulhat, hogy ismerjük Y -nak az $f_2(y)$ -nal jelölt sűrűségfüggvényét, és minden lehetséges y érték mellett tudjuk, hogy az $Y = y$ feltétel mellett milyen eloszlást követ X . Ennek a feltételes eloszlásnak a sűrűségfüggvényét most értelemszerűen $f_{1|2}(x | y)$ -nal jelöljük. Az $f_{1|2}(x | y)$ jelölésben az index mutaja, hogy az első koordináta, vagyis az X sűrűségfüggvényéről van szó a második koordinátával kapcsolatos feltétel mellett, és hogy a sűrűségfüggvényben a változó szerepében az x áll, a felétel szerepében pedig az y . Az $f_{1|2}(x | y)$ jelölés helyett lehet használni az $f_{1|2}(x | Y = y)$ avagy $f_{X|Y}(x | y)$ jelöléseket is.

Állítás: Ha X sűrűségfüggvénye $f_1(x)$, és Y feltételes sűrűségfüggvénye az $X = x$ feltétel mellett $f_{2|1}(y | x)$, akkor (X, Y) sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_{2|1}(y | x)$$

Hasonlóképpen, ha Y sűrűségfüggvénye $f_2(y)$, és X feltételes sűrűségfüggvénye az $Y = y$ feltétel mellett $f_{1|2}(x | y)$, akkor (X, Y) sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = f_2(y) \cdot f_{1|2}(x | y)$$

Vázlatos bizonyítás. A két formula közül az elsőt bizonyítjuk:

$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx \frac{P(x < X < x + \Delta x \text{ és } y < Y < y + \Delta y)}{\Delta x \Delta y} = \\ &= \frac{P(x < X < x + \Delta x) \cdot P(y < Y < y + \Delta y | x < X < x + \Delta x)}{\Delta x \Delta y} = \\ &= \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x} \cdot \frac{P(y < Y < y + \Delta y | x < X < x + \Delta x)}{\Delta y} \approx \\ &\approx \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x} \cdot \frac{P(y < Y < y + \Delta y | X = x)}{\Delta y} \approx \\ &\approx f_1(x) \cdot f_{2|1}(y | x) \end{aligned}$$

2. Példa: Ha X exponenciális eloszlású valószínűségi változó $\lambda_1 = 2$ paraméterrel, és az $X = x$ feltétel mellett Y exponenciális eloszlást követ x paraméterrel, akkor

$$f_1(x) = 2e^{-2x} \quad (x \geq 0)$$

$$f_{2|1}(y|x) = x e^{-xy} \quad (y \geq 0)$$

és így az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y) = 2e^{-2x} \cdot x e^{-xy} = 2x e^{-2x-xy} = 2x e^{-x(2+y)} \quad (x, y \geq 0)$$

3. Példa ($Y = \text{RND}_1$, $X = Y \cdot \text{RND}_2$) : Válasszunk egy pontot 0 és 1 között egyenletes eloszlás szerint, ez legyen az Y pont. Ha Y -t már megválasztottuk, akkor 0 és Y között válasszunk egy másik pontot ugyancsak egyenletes eloszlás szerint, ez legyen az X pont. Ezek után X -ből és Y -ből rakjuk össze az (X, Y) pontot a síkon! Számítógéppel X és Y így állítható elő random számok segítségével:

$$Y = \text{RND}_1, \quad X = Y \cdot \text{RND}_2$$

Most pedig megadjuk, illetve kiszámoljuk (X, Y) , illetve X sűrűségfüggvényének a képletét:

Ha Y egyenletes eloszlású valószínűségi változó 0 és 1 között, akkor

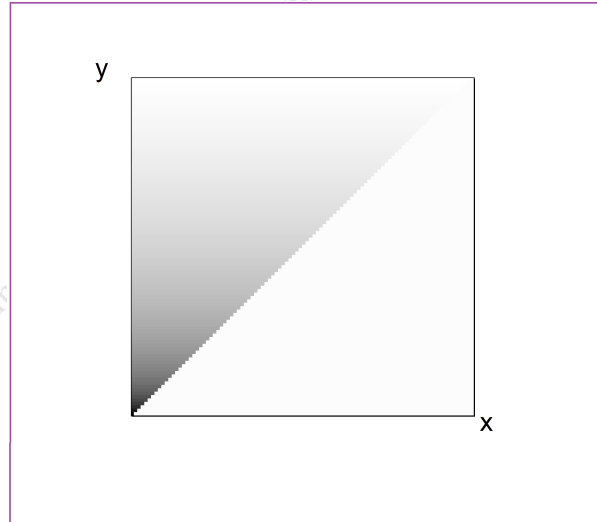
$$f_2(y) = 1 \quad (0 < y < 1)$$

Mivel az $Y = y$ feltétel mellett X egyenletes eloszlású valószínűségi változó 0 és y között, ezért

$$f_{1|2}(x|y) = \frac{1}{y} \quad (0 < x < y)$$

A szorzási szabály alapján az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y) = 1 \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{y} \quad (0 < x < y < 1)$$



4. ábra. (X, Y) eloszlása festékekkel szemlélítve, ahol $Y = \text{RND}_1$, $X = Y \cdot \text{RND}_2$

1.7. Eloszlásfüggvény

Egy kétdimenziós valószínűségi változó eloszlásfüggvényét az

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y)$$

képlettel definiáljuk. Az eloszlásfüggvény a sűrűségfüggvényből integrálással adódik:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^y f(x, y) dy \right) dx = \int_{-\infty}^y \left(\int_{-\infty}^x f(x, y) dx \right) dy$$

A sűrűségfüggvényt az eloszlásfüggvényből kétszeres parciális deriválással kapjuk:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

Egy téglalap valószínűsége az eloszlásfüggvénynek a téglalap sarkain vett értékeiből kiszámolható:

$$\begin{aligned} P(x_1 < X < x_2 \text{ és } y_1 < Y < y_2) &= \\ &= P(X < x_2 \text{ és } Y < y_2) - P(X < x_1 \text{ és } Y < y_2) - \\ &- P(X < x_2 \text{ és } Y < y_1) + P(X < x_1 \text{ és } Y < y_1) = \\ &= F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \end{aligned}$$

A kétdimenziós eloszlásfüggvény fogalmát megemlítettük, de rögtön hozzá is tesszük: számunkra ennek a fogalomnak nincs jelentősége, nem is fogjuk használni a későbbiekben.

2. Kétdimenziós egyenletes eloszlás

2.1. Egyenletes eloszlás véges területű halmazon

Legyen S egy véges területű halmaz a síkon. Legyen az $f(x, y)$ kétdimenziós sűrűségfüggvény értéke az S halmazon egy pozitív konstans, a halmazon kívül pedig 0 . Mivel egy sűrűségfüggvény integrálja a teljes síkon 1 -gyel egyenlő, a konstans nem lehet más, mint az S halmaz területének a reciproka:

$$f(x, y) = \frac{1}{S \text{ területe}} \quad \text{ha } (x, y) \in S$$

Az eloszlást nyilván jogosan nevezhetjük az S halmazon vett egyenletes eloszlásnak.

Vegyünk most S -nek egy A részhalmazát. Ha a $P(A)$ valószínűség kiszámítása érdekében integráljuk az $f(x, y)$ függvényt az A halmazon, akkor az integrál értékül a szóbanforgó konstans és a halmaz területének a szorzatát kapjuk:

$$P(A) = \iint_A f(x, y) dx dy = \iint_A \frac{1}{S \text{ területe}} dx dy = \frac{A \text{ területe}}{S \text{ területe}}$$

Tehát az A halmaz valószínűsége egyenlő az A területe osztva az S területével. Ugyanahoz a képlethez jutottunk, mint az 1. rész 3. fejezetének 1. pontjában a "Folytonos egyenletes eloszlás" cím alatt.

2.2. Végtelen területű halmazon nem létezik egyenletes eloszlás

Végtelen területű halmazon nem lehet egyenletes eloszlást értelmezni, hiszen ha egy végtelen területű halmazon egy pozitív konstans integrálunk, akkor az integrál értéke végtelen, pedig a sűrűségfüggvény integráljának a teljes téren 1 -et kellene adnia.

3. Béta eloszlások kétdimenzióban

Az alábbiakban több példán is bemutatjuk, hogy az

$$f(x, y) \approx \frac{P(x < X < x + \Delta x \text{ és } y < Y < y + \Delta y)}{\Delta x \Delta y}$$

formula segítségével hogyan lehet a sűrűségfüggvény képletét meghatározni. A számolásoknak az eredményei is érdekesek, elgondolkodtatóak, ezért egy külön alfejezetben ábrákkal is illusztráljuk az eloszlásokat. De ami itt igazán fontos és megértendő, az *maga a módszer, amivel a sűrűségfüggvények képleteit meghatározzuk*. A kiadódó eloszlásokat **béta eloszlásoknak** hívjuk ilyen-olyan paraméterekkel. A gondolatmenetet többször is elismételjük más-más szerepekkel. Először egyszerűbb, később bonyolultabb példákat veszünk. Ki-k találja meg a magának való mennyiséget és nehézséget!

A következő alfejezetben csak számolunk, számolunk. Az ezt követő alfejezetben viszont ábrákat mutatunk a számolással kapott eloszlásokról: az eloszlásokat festékekkel ábrázoljuk. Szép élményben lehet része az Olvasónak, ha a saját maga által számítógépes szimulációval készített pontfelhőket összeveti az általunk megadott festék eloszlásokkal!

3.1. Ha az érkezések egyenletes eloszlást követnek dél és egy óra között

3.1.1. Három ember esete

Három ember rendszeresen együtt ebédel egy vendéglőben. Tegyük fel, hogy mindegyikük – a többiektől függetlenül – dél és egy óra között egyenletes eloszlás szerint érkezik a vendéglőbe. Az érkezési időpontokkal kapcsolatban végzünk megfigyeléseket.

Számítógéppel könnyen szimulálhatjuk a problémát: generáljunk három random számot 0 és 1 között, melyeket RND_1 , RND_2 , RND_3 jelöl, és – mondjuk – úgy képzeljük, hogy

RND_1 jelenti a legfiatalabb ember érkezési időpontját,
 RND_2 jelenti a kor szerinti középső ember érkezési időpontját,
 RND_3 jelenti a legöregebb ember érkezési időpontját.

1. Mikor érkezik az első ember, mikor jön a második?

Legyen

X = az első érkezési időpont
 Y = a második érkezési időpont

Tehát nem az érdekel minket, hogy ki érkezik elsőnek, másodiknak (ez itt most nem egy érkezési verseny!), hanem az, hogy mikor ül le valaki a lefoglalt asztalhoz elsőnek, másodiknak.

A szimuláció lehetőségével élve azt is mondhatjuk, hogy

X = a három random szám közül a legkisebb
 Y = a három random szám közül a második legkisebb, azaz a nagyság szerinti középső

Javasoljuk, hogy az Olvasó csináljon számítógépes szimulációkat:

- Generáljon Excelben három véletlen számot a VÉL () utasítással!
- A
KICSI(hivatkozás a véletlen számokat tartalmazó tartományra ; 1),
KICSI(hivatkozás a véletlen számokat tartalmazó tartományra ; 2)
utasításokkal találja meg X és Y értékét!
- Készítsen ábrát az (X, Y) pontról! Az F9 gomb ismételt nyomogatásával tapasztalja meg, hogy merre, hogyan szeret kóvályogni az (X, Y) pont!
- Végezzen (X, Y) -ra sok – kb. ezer – kísérletet, és azokat egy pontfelhővel ábrázolja! A pontfelhő "sűrűségéből" is láthatja, hogy az (X, Y) pont számára a sík mely része "népszerű".

Nyilvánvaló, hogy a kétdimenziós (X, Y) valószínűségi változó lehetséges értékei azok az (x, y) pontok, melyekre teljesülnek a $0 < x < y < 1$ egyenlőtlenségek. Ezek a pontok a síkon egy háromszöget alkotnak az egységnegyzet bal felső részén.

Most levezetjük a kétdimenziós (X, Y) valószínűségi változó sűrűségfüggvényének a képletét. E célból először felvesszünk két x, y számot, melyekre igaz, hogy

$$0 < x < y < 1$$

Ezek után felvesszünk

x	mellett egy kis	$[x, x + \Delta x]$	intervallumot, és
y	mellett egy kis	$[y, y + \Delta y]$	intervallumot úgy, hogy
	teljesüljön az	$x + \Delta x < y$	egyenlőtlenség is.

Figyelem! Fontos, hogy a Tisztelt Olvasó – itt is és a későbbiekben is – készítsen ábrát a $[0; 1]$ intervallumról, és a benne felvett $x, x + \Delta x, y, y + \Delta y$ számokról.

Most kezdődik a sűrűségfüggvény meghatározása. E célból az (X, Y) sűrűségfüggvényét hányadossal közelítjük:

$$f(x, y) \approx \frac{P(x < X < x + \Delta x \text{ és } y < Y < y + \Delta y)}{\Delta x \cdot \Delta y}$$

A számlálóban álló

$$x < X < x + \Delta x \quad \text{és} \quad y < Y < y + \Delta y$$

esemény azt jelenti, hogy a RND_1, RND_2, RND_3 random számok közül

a legkisebb, vagyis X az	$[x, x + \Delta x)$	intervallumba esik, és
a középső, vagyis Y az	$[y, y + \Delta y)$	intervallumba esik,

ami – részletesebben kifejtve – azt is jelenti, hogy

a legkisebb, vagyis X az	$[x, x + \Delta x)$	intervallumba esik, és
a középső, vagyis Y az	$[y, y + \Delta y)$	intervallumba esik, és
a legnagyobb az	$[Y, 1]$	intervallumba esik.

Ez – jó közelítéssel – azt jelenti, hogy

pontosan	1	random szám esik az	$[x, x + \Delta x)$	intervallumba, és
pontosan	1	random szám esik az	$[y, y + \Delta y)$	intervallumba, és
pontosan	1	random szám esik az	$[y + \Delta y, 1]$	intervallumba.

Figyelem! Az Ön által rajzolt ábra segítségével gondolja meg, hogy mit jelentenek a mondott események: hány random számnak kell az egyes intervallumokba esni, hogy ezek az események teljesüljenek!

Az, hogy

melyik random szám esik az	$[x, x + \Delta x)$	intervallumba, és
melyik random szám esik az	$[y + \Delta y)$	intervallumba, és
melyik random szám esik az	$[y + \Delta y, 1]$	intervallumba,

3! -féleképpen valósulhat meg, ezért a leírt esemény valószínűsége 6 -szor annyi, mint annak az eseménynek a valószínűsége, amit az itt definiálunk:

RND ₁ belesik az	$[x, x + \Delta x)$	intervallumba, és
RND ₂ belesik az	$[y, y + \Delta y)$	intervallumba, és
RND ₃ belesik az	$[y + \Delta y, 1]$	intervallumba.

Ennek az eseménynek a valószínűsége a megfelelő intervallumok hosszainak szorzata, vagyis

$$\Delta x \cdot \Delta y \cdot (1 - (y + \Delta y))$$

Ezért

$$f(x, y) \approx \frac{6 \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot (1 - (y + \Delta y))}{\Delta x \cdot \Delta y} = 6 \cdot (1 - (y + \Delta y)) \approx 6 \cdot (1 - y)$$

Midebből azt kapjuk, hogy

$$f(x, y) = 6 \cdot (1 - y) \quad (0 < x < y < 1)$$

2. Mikor érkezik az első ember, mikor jön a harmadik?

Legyen most

X = a három random szám közül a legkisebb
 Y = a három random szám közül a legnagyobb

Most is levezetjük (X, Y) sűrűségfüggvényének a képletét.

$$f(x, y) \approx \frac{P(x < X < x + \Delta x \text{ és } y < Y < y + \Delta y)}{\Delta x \cdot \Delta y}$$

A számlálóban álló

$$x < X < x + \Delta x \quad \text{és} \quad y < Y < y + \Delta y$$

esemény azt jelenti, hogy a RND₁, RND₂, RND₃ random számok közül

a legkisebb, vagyis X az	$[x, x + \Delta x)$	intervallumba esik, és
a legnagyobb, vagyis Y az	$[y, y + \Delta y)$	intervallumba esik,

ami – most! – a következőket jelenti:

a legkisebb, vagyis X az	$[x, x + \Delta x)$	intervallumba esik, és
a legnagyobb, vagyis Y az	$[y + \Delta y)$	intervallumba esik, és
a középső az	$[X, Y]$	intervallumba esik.

Ez – jó közelítéssel – azt jelenti, hogy

pontosan 1	random szám esik az	$[x, x + \Delta x)$	intervallumba, és
pontosan 1	random szám esik az	$[y, y + \Delta y)$	intervallumba, és
pontosan 1	random szám esik az	$[x + \Delta x, y]$	intervallumba.

Az, hogy

melyik random szám esik az $[x, x + \Delta x)$ intervallumba, és
melyik random szám esik az $[y, y + \Delta y)$ intervallumba, és
melyik random szám esik az $[x + \Delta x, y]$ intervallumba,

3! -féleképpen valósulhat meg, ezért a leírt esemény valószínűsége 6 -szor annyi, mint annak az eseménynek a valószínűsége, amit az itt definiálunk:

RND₁ belesik az $[x, x + \Delta x)$ intervallumba, és
RND₂ belesik az $[y, y + \Delta y)$ intervallumba, és
RND₃ belesik az $[x + \Delta x, y]$ intervallumba.

Ennek az eseménynek a valószínűsége a megfelelő intervallumok hosszainak szorzata, vagyis

$$\Delta x \cdot \Delta y \cdot (y - (x + \Delta x))$$

Ezért

$$f(x, y) \approx \frac{6 \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot (y - (x + \Delta x))}{\Delta x \cdot \Delta y} = 6 \cdot (y - (x + \Delta x)) \approx 6 \cdot (y - x)$$

Midebből azt kapjuk, hogy

$$f(x, y) = 6 \cdot (y - x) \quad (0 < x < y < 1)$$

1. Mikor érkezik a második, mikor jön a harmadik?

Legyen most

X = a három random szám közül a középső
 Y = a három random szám közül a legnagyobb

Legyen az Olvasó feladata, megmutatni, hogy

$$f(x, y) = 6 \cdot x \quad (0 < x < y < 1)$$

3.1.2. Tíz ember esete

Tegyük fel, hogy tíz ember mindegyike – akik rendszeresen együtt ebédelnek – a többitől függetlenül dél és 1 óra között egyenletes eloszlás szerint érkezik egy vendéglőbe. Legyen X a 3 -ik, Y a 7 -ik érkezési időpont. Könnyen szimulálhatjuk a problémát, ha generálunk tíz random számot 0 és 1 között, és

X = a 3 -ik legkisebb
 Y = a 7 -ik legkisebb

Most levezetjük a kétdimenziós (X, Y) valószínűségi változó sűrűségfüggvényének a képletét. E célból először felvesszünk két x, y számot, melyekre igaz, hogy

$$0 < x < y < 1$$

Ezek után felvesszünk x mellett egy kis $[x, x + \Delta x]$ intervallumot és y mellett egy kis $[y, y + \Delta y]$ intervallumot úgy, hogy teljesüljön az $x + \Delta x < y$ egyenlőtlenség is. (X, Y) sűrűségfüggvényét hányadossal közelítjük:

$$f(x, y) \approx \frac{P(x < X < x + \Delta x \text{ és } y < Y < y + \Delta y)}{\Delta x \cdot \Delta y}$$

A számlálóban álló

$$x < X < x + \Delta x \quad \text{és} \quad y < Y < y + \Delta y$$

esemény azt jelenti, hogy

a 3 -ik legkisebb random szám, vagyis X az $[x, x + \Delta x)$ intervallumba esik, és
a 7 -ik legkisebb random szám, vagyis Y az $[y, y + \Delta y)$ intervallumba esik,

ami – részletesebben kifejtve – a következőket jelenti:

a 3 -ik legkisebb random szám, vagyis X az $[x, x + \Delta x)$ intervallumba esik, és
a 7 -ik legkisebb random szám, vagyis Y az $[y, y + \Delta y)$ intervallumba esik, és
pontosan 2 random szám a $[0, X)$ intervallumba esik, és
pontosan 3 random szám az $[X, Y)$ intervallumba esik, és
pontosan 3 random szám az $[Y, 1]$ intervallumba esik.

Ez – jó közelítéssel – azt jelenti, hogy

pontosan 2 random szám a $[0, x)$ intervallumba esik, és
pontosan 1 random szám az $[x, x + \Delta x)$ intervallumba esik, és
pontosan 3 random szám az $[x + \Delta x, y)$ intervallumba esik, és
pontosan 1 random szám az $[y, y + \Delta y)$ intervallumba esik, és
pontosan 3 random szám az $[y + \Delta y, 1]$ intervallumba esik.

Ennek az eseménynek a valószínűsége

$$\frac{10!}{2! 1! 3! 1! 3!} \cdot (x)^{i-1} \cdot (\Delta x)^1 \cdot (y - (x + \Delta x))^3 \cdot (\Delta y)^1 \cdot (1 - (y + \Delta y))^3$$

Eldobhatunk néhány fölösleges zárójelet, tényezőit és kitevőit, ami által a formula így egyszerűsödik:

$$\frac{10!}{2! 3! 3!} \cdot x^2 \cdot \Delta x \cdot (y - (x + \Delta x))^3 \cdot \Delta y \cdot (1 - (y + \Delta y))^3$$

Osztva $\Delta x \cdot \Delta y$ -nal, majd $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ határérték mellett megkapjuk a sűrűségfüggvényt:

$$f(x, y) = \frac{10!}{2! 3! 3!} x^2 (y - x)^3 (1 - y)^3 \quad (0 < x < y < 1)$$

3.1.3. Általános eset

Tegyük fel, hogy n ember mindegyike – akik rendszeresen együtt ebédelnek – a többitől függetlenül dél és 1 óra között egyenletes eloszlás szerint érkezik egy vendéglőbe. Legyen X az i -ik, Y a j -ik érkezési időpont. Könnyen szimulálhatjuk a problémát, ha generálunk n random számot 0 és 1 között, és

$$\begin{aligned} X &= \text{az } i\text{-ik legkisebb} \\ Y &= \text{a } j\text{-ik legkisebb} \end{aligned}$$

Most levezetjük a kétdimenziós (X, Y) valószínűségi változó sűrűségfüggvényének a képletét. E célból először felvesszünk két x , y számot, melyekre igaz, hogy

$$0 < x < y < 1$$

Ezek után felvesszünk x mellett egy kis $[x, x + \Delta x]$ intervallumot és y mellett egy kis $[y, y + \Delta y]$ intervallumot úgy, hogy teljesüljön az $x + \Delta x < y$ egyenlőtlenség is. (X, Y) sűrűségfüggvényét hányadossal közelítjük:

$$f(x, y) \approx \frac{P(x < X < x + \Delta x \text{ és } y < Y < y + \Delta y)}{\Delta x \cdot \Delta y}$$

A számlálóban álló

$$x < X < x + \Delta x \quad \text{és} \quad y < Y < y + \Delta y$$

esemény azt jelenti, hogy

az i -ik legkisebb random szám, vagyis X az $[x, x + \Delta x)$ intervallumba esik, és
a j -ik legkisebb random szám, vagyis Y az $[y, y + \Delta y)$ intervallumba esik,

ami – részletesebben kifejtve – a következőket jelenti:

a i -ik legkisebb random szám, vagyis X az $[x, x + \Delta x)$ intervallumba esik, és
a j -ik legkisebb random szám, vagyis Y az $[y, y + \Delta y)$ intervallumba esik, és
pontosan $(i - 1)$ random szám a $[0, X)$ intervallumba esik, és
pontosan $(j - i - 1)$ random szám az $[X, Y)$ intervallumba esik, és
pontosan $(n - j)$ random szám az $[Y, 1]$ intervallumba esik.

Ez – jó közelítéssel – azt jelenti, hogy

pontosan $(i - 1)$ random szám a $[0, x)$ intervallumba esik, és
pontosan 1 random szám az $[x, x + \Delta x)$ intervallumba esik, és
pontosan $(j - i - 1)$ random szám az $[x + \Delta x, y)$ intervallumba esik, és
pontosan 1 random szám az $[y, y + \Delta y)$ intervallumba esik, és
pontosan $(n - j)$ random szám az $[y + \Delta y, 1]$ intervallumba esik.

Ennek az eseménynek a valószínűsége

$$\frac{n!}{(i-1)! 1! (j-i-1)! 1! (n-j)!} \cdot (x)^{i-1} \cdot (\Delta x)^1 \cdot (y - (x + \Delta x))^{j-i-1} \cdot (\Delta y)^1 \cdot (1 - (y + \Delta y))^{n-j}.$$

Eldobhatunk néhány fölösleges zárójelet, tényezőt és kitevőt, ami által a formula így egyszerűsödik:

$$\frac{n!}{(i-1)! (j-i-1)! (n-j)!} \cdot x^{i-1} \cdot \Delta x \cdot (y - (x + \Delta x))^{j-i-1} \cdot \Delta y \cdot (1 - (y + \Delta y))^{n-j}$$

Osztva $\Delta x \cdot \Delta y$ -nal, majd $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ határérték mellett megkapjuk a sűrűségfüggvényt:

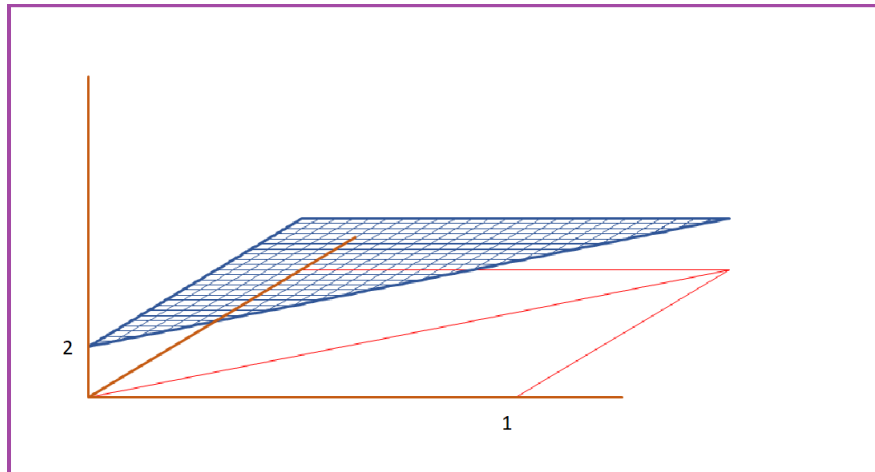
$$f(x, y) = \frac{n!}{(i-1)! (j-i-1)! (n-j)!} x^{i-1} (y-x)^{j-i-1} (1-y)^{n-j} \quad (0 < x < y < 1)$$

3.2. Ábrák

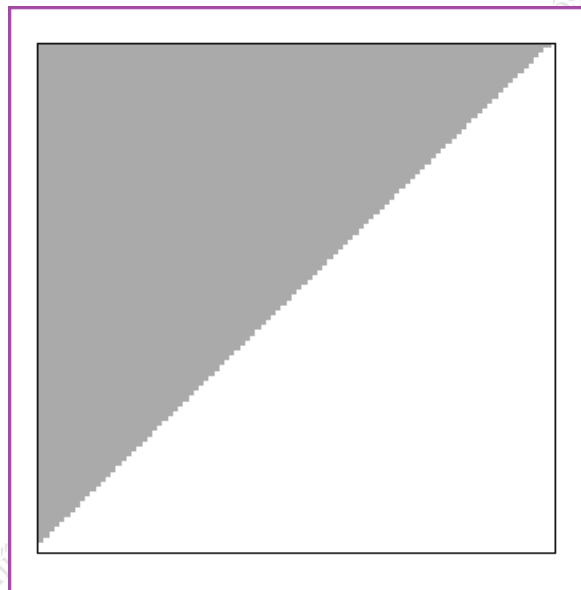
Két ember (két véletlen szám) esete:

$X = \text{a kisebbik}$ $Y = \text{a nagyobbik}$ $n = 2$, $i = 1$, $j = 2$; esetén ezt kapjuk:

$$f(x, y) = 2 \quad \text{ha } 0 < x < y < 1$$



5. ábra. 2-dimenziós béta eloszlás sűrűségfüggvénye; paraméterek: $n = 2, i = 1, j = 2$



6. ábra. 2-dimenziós béta eloszlás festékkel szemléltetve; paraméterek: $n = 2, i = 1, j = 2$

Három ember (három véletlen szám) esete:

1. $X = \text{a legkisebb}$ $Y = \text{a legnagyobb}$ $n = 3, i = 1, j = 3$ esetén ezt kapjuk:

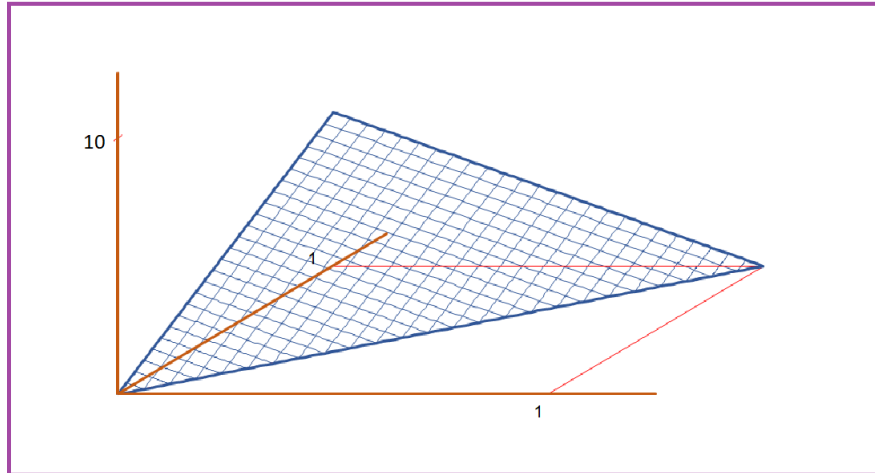
$$f(x, y) = 6(y - x) \quad \text{ha } 0 < x < y < 1$$

2. $X = \text{a legkisebb}$ $Y = \text{a középső}$ $n = 3, i = 1, j = 2$ esetén ezt kapjuk:

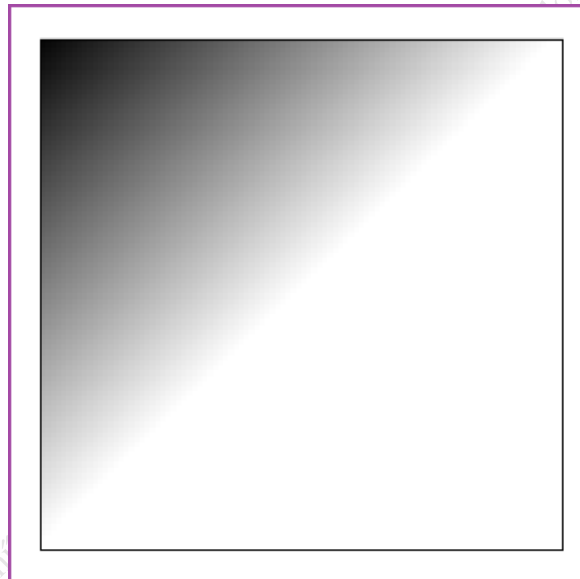
$$f(x, y) = 6(1 - y) \quad \text{ha } 0 < x < y < 1$$

3. $X = \text{a középső}$ $Y = \text{a legnagyobb}$ $n = 3, i = 2, j = 3$ esetén ezt kapjuk:

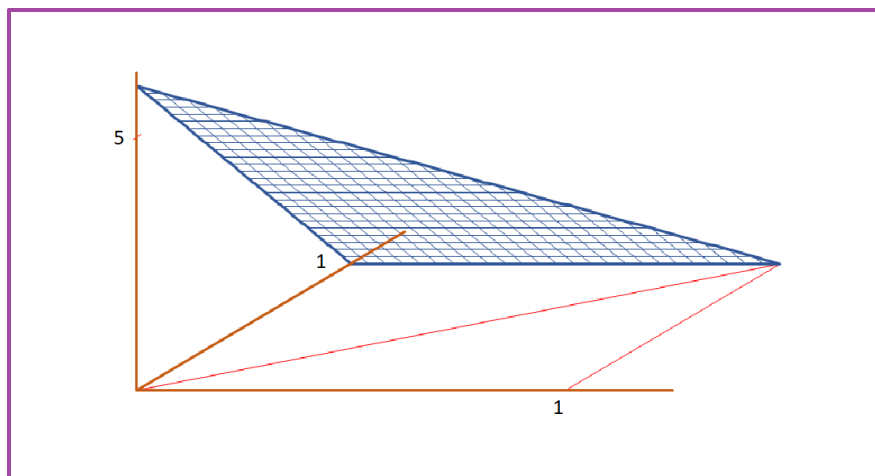
$$f(x, y) = 6x \quad \text{ha } 0 < x < y < 1$$



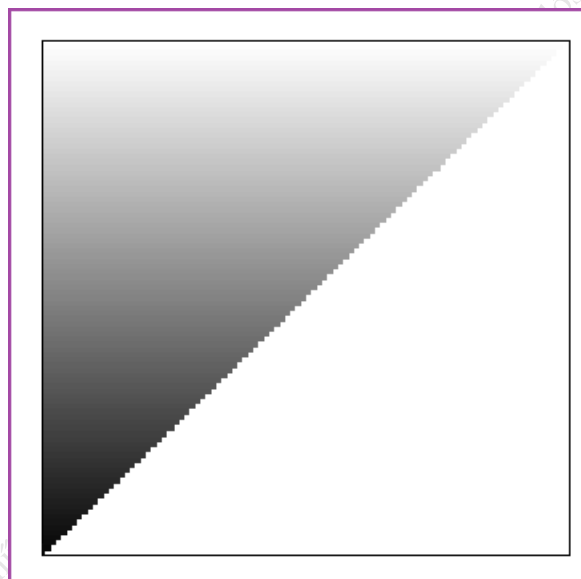
7. ábra. 2-dimenziós béta eloszlás sűrűségfüggvénye; paraméterek: $n = 3, i = 1, j = 3$



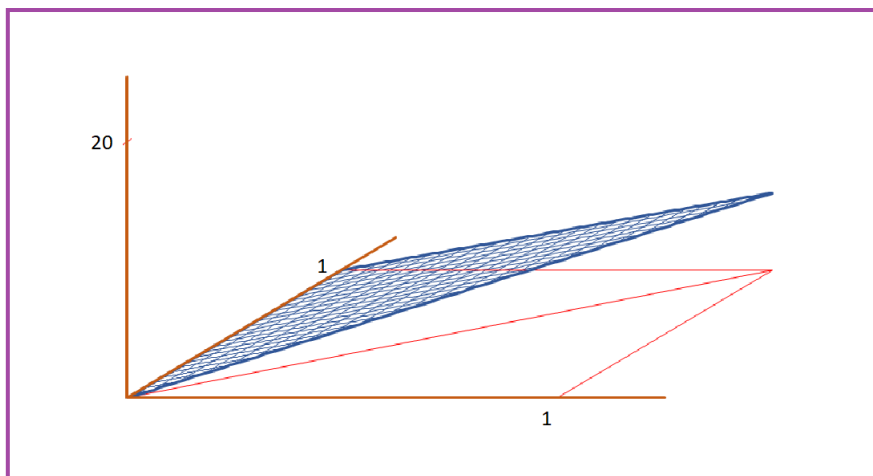
8. ábra. 2-dimenziós béta eloszlás festékkel szemléltetve; paraméterek: $n = 3, i = 1, j = 3$



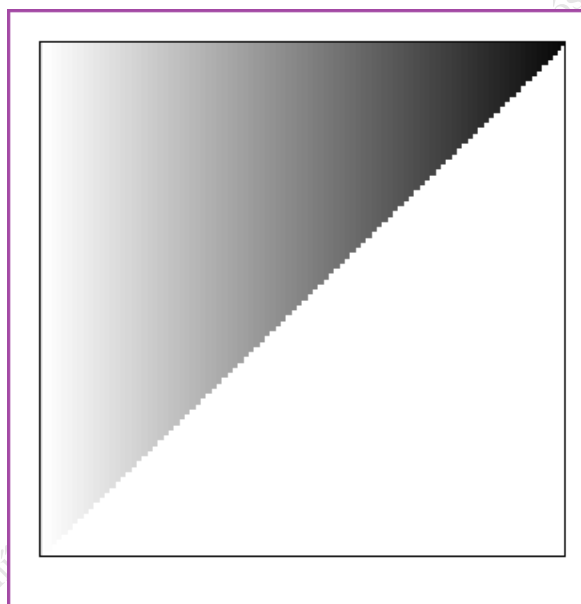
9. ábra. 2-dimenziós béta eloszlás sűrűségfüggvénye; paraméterek: $n = 3$, $i = 1$, $j = 2$



10. ábra. 2-dimenziós béta eloszlás festékekkel szemléltetve; paraméterek: $n = 3$, $i = 1$, $j = 2$



11. ábra. 2-dimenziós béta eloszlás sűrűségfüggvénye; paraméterek: $n = 3$, $i = 2$, $j = 3$



12. ábra. 2-dimenziós béta eloszlás festékkel szemléltetve; paraméterek: $n = 3$, $i = 2$, $j = 3$

Négy ember (négy véletlen szám) esete:

1. $X = \text{a legkisebb}$ $Y = \text{a legnagyobb}$ $n = 4$, $i = 1$, $j = 4$ esetén ezt kapjuk:

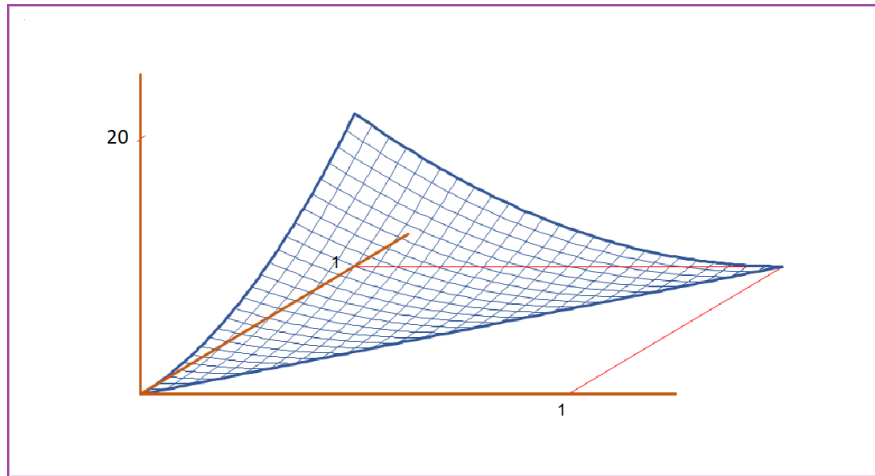
$$f(x, y) = 12 (y - x)^2 \quad \text{ha } 0 < x < y < 1$$

2. $X = \text{a legkisebb}$ $Y = \text{a középső}$ $n = 4$, $i = 1$, $j = 2$ esetén ezt kapjuk:

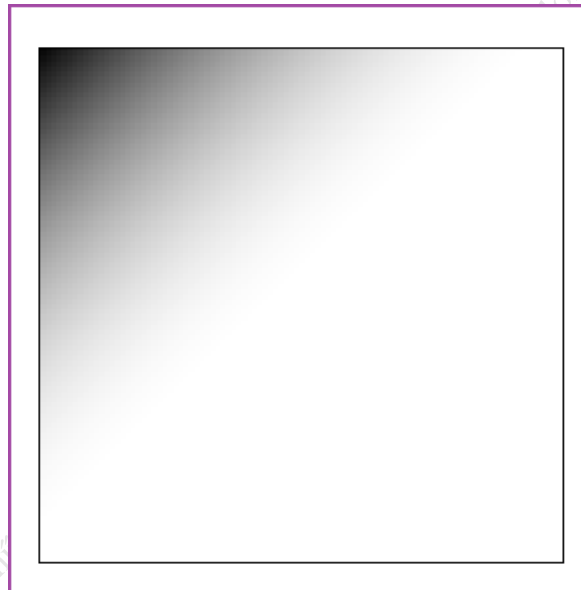
$$f(x, y) = 12(1 - y)^2 \quad \text{ha } 0 < x < y < 1$$

3. $X = \text{a második legkisebb}$ $Y = \text{a harmadik legkisebb}$ $n = 4$, $i = 2$, $j = 3$ esetén ezt kapjuk:

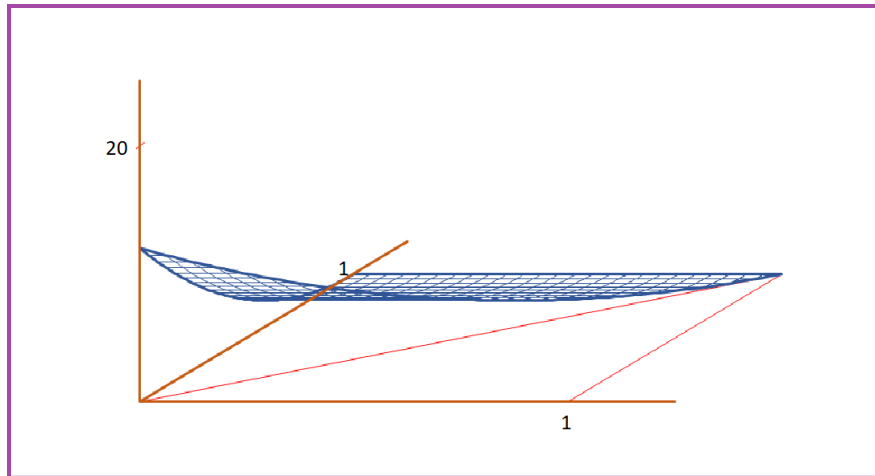
$$f(x, y) = 24x(1 - y) \quad \text{ha } 0 < x < y < 1$$



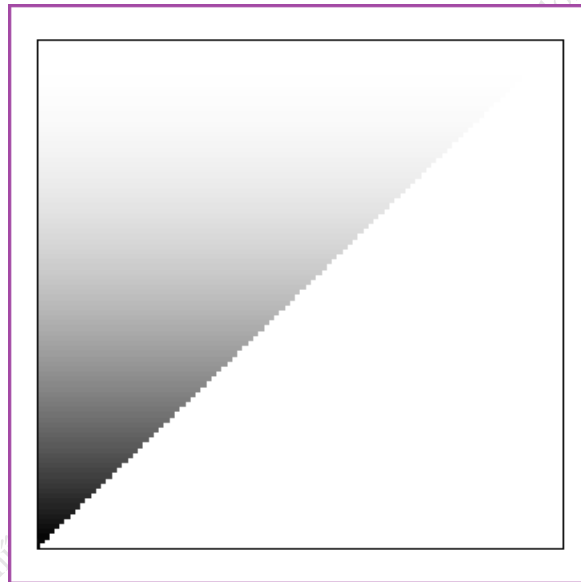
13. ábra. 2-dimenziós béta eloszlás sűrűségfüggvénye; paraméterek: $n = 4$, $i = 1$, $j = 4$



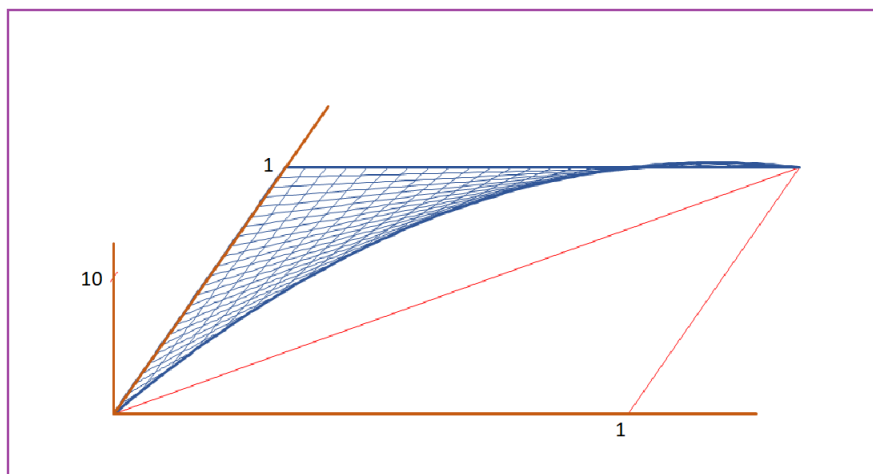
14. ábra. 2-dimenziós béta eloszlás festékekkel szemléltetve; paraméterek: $n = 4$, $i = 1$, $j = 4$



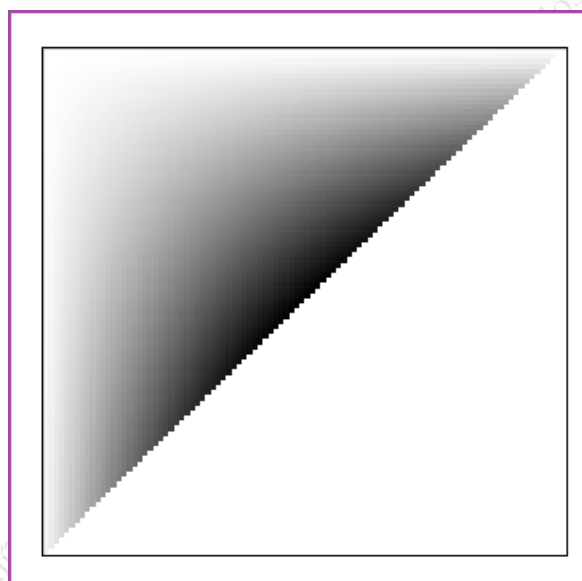
15. ábra. 2-dimenziós béta eloszlás sűrűségfüggvénye; paraméterek: $n = 4$, $i = 1$, $j = 2$



16. ábra. 2-dimenziós béta eloszlás festékkal szemléltetve; paraméterek: $n = 4$, $i = 1$, $j = 2$



17. ábra. 2-dimenziós béta eloszlás sűrűségfüggvénye; paraméterek: $n = 4, i = 2, j = 3$

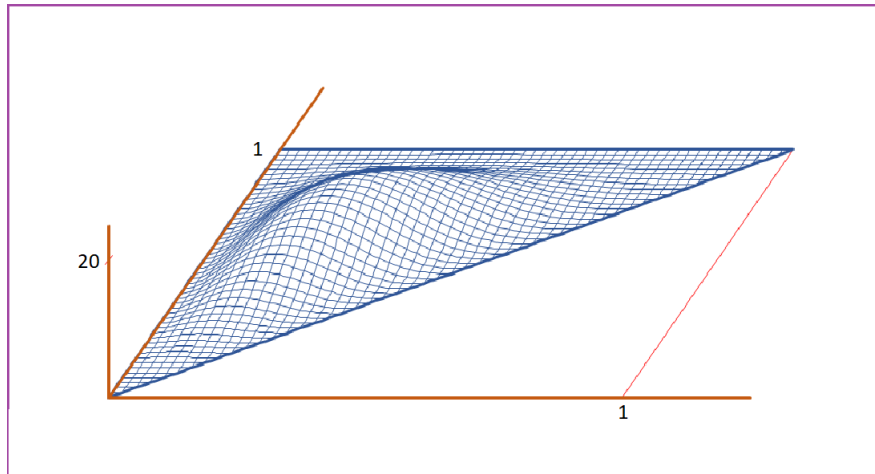


18. ábra. 2-dimenziós béta eloszlás festékkal szemléltetve; paraméterek: $n = 4, i = 2, j = 3$

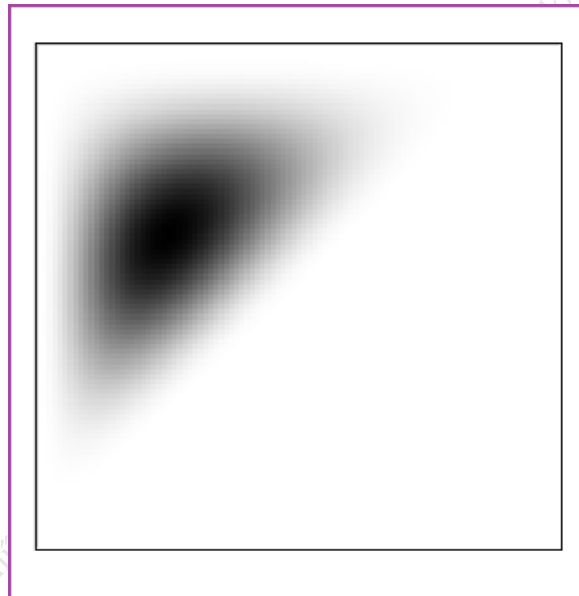
Tíz ember (tíz véletlen szám) esete:

$X = \mathbf{a}$ 3-ik legkisebb $Y = \mathbf{a}$ 7-ik legkisebb $n = 10, i = 3, j = 7$ esetén ezt kapjuk:

$$f(x, y) = \frac{10!}{2! 3! 3!} x^2 (y - x)^3 (1 - y)^3 \quad \text{ha } 0 < x < y < 1$$



19. ábra. 2-dimenziós béta eloszlás sűrűségfüggvénye; paraméterek: $n = 10$, $i = 3$, $j = 7$



20. ábra. 2-dimenziós béta eloszlás festékekkel szemléltetve; paraméterek: $n = 10$, $i = 3$, $j = 7$

3.3. Feladatok megoldásokkal

1. Feladat: Három jóbarát déli 12 óra és délután 1 óra között egymástól függetlenül (folytonos) egyenletes eloszlás szerint érkezik a menzára. Mi a valószínűsége annak, hogy aki elsőnek ér oda, az fél egy előtt, aki utolsónak, az fél egy után érkezik?

Megoldás: Bizonyára az Olvasó emlékszik az előző alponthan említett "Három véletlen szám esete" példára, amikor X jelölte a három véletlen szám közül a legkisebbet, Y a legnagyobbat, és (X, Y) sűrűségfüggvénye az

$$f(x, y) = 6(y - x) \quad (0 \leq x \leq y \leq 1)$$

függvény volt. Ha most tekintjük az

$$N = \{ (x, y) : 0 \leq x \leq 0.5, 0.5 \leq y \leq 1 \}$$

négyszetet, akkor a kérdéses valószínűség annyi, mint annak a valószínűsége, hogy az (X, Y) pont az N négyzetbe esik:

$$P((X, Y) \in N) = \iint_N 6(y-x) dx dy = \int_{0.5}^1 \left(\int_0^{0.5} 6(y-x) dx \right) dy = \dots = \frac{3}{4}$$

A képletben a három pont az jelenti, hogy az integrál kiszámolása az Olvasó feladata.

2. Feladat: Három jóbarát déli 12 óra és délután 1 óra között egymástól függetlenül (folytonos) egyenletes eloszlás szerint érkezik a menzára. Mi a valószínűsége annak, hogy aki elsőnek ér oda, az fél egy előtt, aki utolsónak, az fél egy után érkezik feltéve, hogy érkezési időpontjaik között legfeljebb fél óra telik el?

Megoldás: Az első érkezési időpont legyen X , az utolsó Y . Ekkor (X, Y) sűrűségfüggvénye – mint tudjuk:

$$f(x, y) = 6(y-x) \quad (0 < x < y < 1)$$

A kért feltételes valószínűség:

$$\begin{aligned} P(X < 0.5 \text{ és } Y > 0.5 \mid Y - X < 0.5) &= \frac{P(X < 0.5 \text{ és } Y > 0.5 \text{ és } Y - X < 0.5)}{P(Y - X < 0.5)} = \\ &= \frac{P(0 < X < 0.5 \text{ és } 0.5 < Y < X + 0.5)}{1 - P(Y - X > 0.5)} \end{aligned}$$

A számláló:

$$P(0 < X < 0.5 \text{ és } 0.5 < Y < X + 0.5) = \int_0^{0.5} \left(\int_{0.5}^{x+0.5} 6(y-x) dy \right) dx = \dots = 0.25$$

A nevező:

$$1 - P(0 < X < 0.5 \text{ és } Y > X + 0.5) = \int_0^{0.5} \left(\int_{x+0.5}^1 6(y-x) dy \right) dx = \dots = 0.5$$

Így a kért feltételes valószínűség $0.25/0.5 = 0.5$ -del egyenlő.

3. Feladat: Most tegyük fel, hogy nem három, hanem n jóbarát érkezik a menzára déli 12 óra és délután 1 óra között egymástól függetlenül (folytonos) egyenletes eloszlás szerint. **(a)** Mi a valószínűsége annak, hogy az utolsó és az első érkezési időpont között legalább z idő eltelik ($0 < z < 1$)? Az említett két időpont között eltelt időtartamnak mi **(b)** az eloszlásfüggvénye, **(c)** sűrűségfüggvénye?

Megoldás: Az első érkezési időpont legyen X , az utolsó Y , az X és Y között eltelt időtartam $Z = Y - X$. Ekkor (X, Y) sűrűségfüggvénye az $0 < x < y < 1$ egyenlőtlenségek által definiált tartományon a korábban levezetett

$$f(x, y) = \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} x^{i-1} (y-x)^{j-i-1} (1-y)^{n-j}$$

általános képletből az $i = 1$, $j = n$ helyettesítéssel adódik:

$$f(x, y) = \frac{n!}{(0)!(n-2)!(0)!} x^0 (y-x)^{n-2} (1-y)^0$$

Az egyszerűsítések után ezt kapjuk:

$$f(x, y) = n(n-1)(y-x)^{n-2}$$

(a) A kért valószínűség:

$$P(Z > z) = P(Y - X > z) = P(X < Y - z) =$$

A kettős integrált – gyakorlásképpen – kétféleképpen is felírjuk kétszeres integrálként. Első esetben az x szerinti integrál áll kívül, az y szerinti belül:

$$= \int_0^{1-z} \left(\int_{x+z}^1 n(n-1)(y-x)^{n-2} dy \right) dx =$$

Most pedig az y szerinti integrál áll kívül, és az x szerinti belül:

$$= \int_z^1 \left(\int_0^{y-z} n(n-1)(y-x)^{n-2} dx \right) dy =$$

Akár így, akár úgy, az eredmény ez lesz:

$$\dots = 1 - n z^{n-1} + (n-1) z^n$$

(b) Az eloszlásfüggvény:

$$R(z) = 1 - P(Z > z) = n z^{n-1} - (n-1) z^n$$

(c) A sűrűségfüggvény:

$$r(z) = (n z^{n-1} - (n-1) z^n)' = n(n-1) z^{n-2} - n(n-1) z^{n-1} = n(n-1)(z^{n-2} - z^{n-1})$$

3.4. Ha az érkezések egyenletes eloszlást követnek valamilyen véges intervallumon

Az előző gondolatmenetet könnyű általánosítani arra az esetre, ha az emberek az A és a B időpontok között érkeznek (egyenletes eloszlás szerint, egymástól függetlenül), azaz n független, egyenletes eloszlású véletlen számot tekintünk A és B között, és

X = az i -ik legkisebb

Y = a j -ik legkisebb

ahol $0 < i < j \leq n$. Ekkor minden $A < x < y < B$ esetén

$$f(x, y) = \frac{1}{(B-A)^2} \cdot \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} \cdot \left(\frac{x-A}{B-A} \right)^{i-1} \cdot \left(\frac{y-x}{B-A} \right)^{j-i-1} \cdot \left(\frac{B-y}{B-A} \right)^{n-j}$$

3.5. Ha az érkezések tetszőleges eloszlást követnek (Extra tananyag)

Tegyük fel, hogy az emberek egyforma, de nem egyenletes eloszlás szerint érkeznek a vendéglőbe: mindenki – a többitől függetlenül – az $s(x)$ sűrűségfüggvényű, $S(x)$ eloszlásfüggvényű eloszlás szerint érkezik ($A < x < B$). Legyen X az i -ik, Y a j -ik érkezési időpont.

Most levezetjük erre az általánosabb esetre is a kétdimenziós (X, Y) valószínűségi változó sűrűségfüggvényének a képletét. E célból – ugyanúgy, mint korábban – felvesszünk két x , y számot, melyekre igaz, hogy

$$0 < x < y < 1$$

Ezek után felveszünk x mellett egy kis $[x, x + \Delta x]$ intervallumot és y mellett egy kis $[y, y + \Delta y]$ intervallumot úgy, hogy teljesüljön az $x + \Delta x < y$ egyenlőtlenség is. (X, Y) sűrűségfüggvényét hányadossal közelítjük:

$$f(x, y) \approx \frac{P(x < X < x + \Delta x \text{ és } y < Y < y + \Delta y)}{\Delta x \Delta y}$$

A számlálóban álló

$$x < X < x + \Delta x \quad \text{és} \quad y < Y < y + \Delta y$$

esemény – ugyanúgy, mint korábban – azt jelenti, hogy

az i -ik legkisebb szám, amit X jelöl, az $[x, x + \Delta x)$ intervallumba esik,

és

a j -ik legkisebb szám, amit Y jelöl, az $[y, y + \Delta y)$, intervallumba esik,

ami – részletesebben kifejtve a következőket jelenti:

a i -ik legkisebb random szám, vagyis X az	$[x, x + \Delta x)$	intervallumba esik, és
a j -ik legkisebb random szám, vagyis Y az	$[y, y + \Delta y)$	intervallumba esik, és
pontosan $(i - 1)$ random szám a	$[0, X)$	intervallumba esik, és
pontosan $(j - i - 1)$ random szám az	$[X, Y)$	intervallumba esik, és
pontosan $(n - j)$ random szám az	$[Y, 1]$	intervallumba esik.

Ez – jó közelítéssel – azt jelenti, hogy

pontosan	$(i - 1)$	random szám a	$[0, x)$	intervallumba esik, és
pontosan	1	random szám az	$[x, x + \Delta x)$	intervallumba esik, és
pontosan	$(j - i - 1)$	random szám az	$[x + \Delta x, y)$	intervallumba esik, és
pontosan	1	random szám az	$[y, y + \Delta y)$	intervallumba esik, és
pontosan	$(n - j)$	random szám az	$[y + \Delta y, 1]$	intervallumba esik.

Ennek az eseménynek a valószínűsége körülbelül egyenlő a

$$\frac{n!}{(i - 1)! 1! (j - i - 1)! 1! (n - j)!}$$

konstans és

$$(S(x))^{i-1} (s(x) \Delta x)^1 (S(y) - S(x + \Delta x))^{j-i-1} (s(y) \Delta y)^1 (1 - S(y + \Delta y))^{n-j}$$

kifejezés szorzatával. Eldobhatunk néhány fölösleges zárójelet, tényezőt és kitevőt, ami által a teljes formula, vagyis maga szorzat így egyszerűsödik:

$$\frac{n!}{(i - 1)! (j - i - 1)! (n - j)!} (S(x))^{i-1} s(x) \Delta x (S(y) - S(x + \Delta x))^{j-i-1} s(y) \Delta y (1 - S(y + \Delta y))^{n-j}$$

Osztva $\Delta x \cdot \Delta y$ -nal osztva, majd $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ határérték mellett megkapjuk a keresett sűrűségfüggvényt:

$$f(x, y) = \frac{n!}{(i - 1)! (j - i - 1)! (n - j)!} (S(x))^{i-1} s(x) (S(y) - S(x))^{j-i-1} s(y) (1 - S(y))^{n-j}$$

4. Kísérleti eredmények függvényének a várható értéke

4.1. Diszkrét eset (ismétlés)

A folytonos esetre vonatkozó gondolatok és formulák megértésének könnyítése céljából először a kétdimenziós diszkrét esetre vonatkozó formulákat mondjuk ki. Igaz, korábban (a könyv második részében) csak az *egydimenziós* diszkrét esetet tárgyaltuk, most pedig *kétdimenziós* formulákat fogalmazunk meg. A kétdimenziós formulák megértése – remélhetőleg – nem okoz nehézséget, hiszen diszkrét esetben az egy- és kétdimenzió technikai között nincs lényegi különbség.

Ha egy (X, Y) kétdimenziós diszkrét valószínűségi változó mellett egy $z = t(x, y)$ transzformációt is tekintünk, és képezzük a $t(X, Y)$ valószínűségi változót, akkor az

$$\sum_{(x,y)} t(x, y) p(x, y)$$

számot a transzformációval nyert $t(X, Y)$ **valószínűségi változó várható értékének** nevezzük, és $E(t(X, Y))$ -vel jelöljük:

$$E(t(X, Y)) = \sum_{(x,y)} t(x, y) p(x, y)$$

Ha egy diszkrét eloszlást a síkon csak úgy önmagában – mindenféle valószínűségi változó nélkül – vizsgálunk, akkor a

$$\sum_{(x,y)} t(x, y) p(x, y)$$

számot a szóbanforgó eloszlásból a $z = t(x, y)$ **transzformációval kapott eloszlás várható értékének** nevezzük.

Megjegyzés. Természetesen a $Z = t(X, Y)$ valószínűségi változó várható értékét meghatározhatjuk úgy is, hogy meghatározzuk a Z valószínűségi változó lehetséges z értékeit és az $r(z)$ súlyfüggvényt, és a kapott eloszlás

$$E(Z) = \sum_z z r(z)$$

várható értékét kiszámoljuk.

4.2. Folytonos eset

Ha egy (X, Y) kétdimenziós folytonos valószínűségi változó mellett egy $z = t(x, y)$ folytonos transzformációt is tekintünk, és képezzük a $t(X, Y)$ valószínűségi változót, akkor az

$$\iint_{\mathbb{R}^2} t(x, y) f(x, y) dx dy$$

számot a $t(X, Y)$ **valószínűségi változó várható értékének** nevezzük, és $E(t(X, Y))$ -vel jelöljük:

$$E(t(X, Y)) = \iint_{\mathbb{R}^2} t(x, y) f(x, y) dx dy$$

Ha egy folytonos eloszlást a síkon csak úgy önmagában – mindenféle valószínűségi változó nélkül – vizsgálunk, akkor az

$$\iint_{\mathbb{R}^2} t(x, y) f(x, y) dx dy$$

számot a $z = t(x, y)$ **transzformációval kapott eloszlás várható értékének** nevezzük.

Megjegyzés. Természetesen a $Z = t(X, Y)$ valószínűségi változó várható értékét meghatározhatjuk úgy is, hogy meghatározzuk a $Z = t(X, Y)$ valószínűségi változó eloszlásának $r(z)$ sűrűségfüggvényét, és a kapott eloszlás

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} z r(z) dz$$

várható értékét kiszámoljuk.

Feladat: Tegyük fel, hogy n jóbarát érkezik a menzára déli 12 óra és délután 1 óra között egymástól függetlenül (folytonos) egyenletes eloszlás szerint. Az utolsó és az első érkezése között eltelt időtartamnak mennyi a várható értéke?

Megoldás: Az első érkezési időpont legyen X , az utolsó Y , az X és Y között eltelt időtartam $Z = Y - X$. Ekkor (X, Y) sűrűségfüggvénye – mint korábban meghatároztuk:

$$f(x, y) = n(n-1)(y-x)^{n-2} \quad (0 < x < y < 1)$$

Z sűrűségfüggvényét is kiszámítottuk a korábbiakban:

$$r(z) = n(n-1)(z^{n-2} - z^{n-1}) \quad (0 < z < 1)$$

Most háromféleképpen is felírjuk Z várható értékét:

1. $Z = Y - X$ várható értéke az $f(x, y)$ sűrűségfüggvényből az $y - x$ függvénnyel így írható fel:

$$\begin{aligned} E(Z) &= \iint_{\mathbb{R}^2} (y-x) \cdot f(x, y) dx dy = \iint_{0 < x < y < 1} (y-x) \cdot n(n-1)(y-x)^{n-2} dx dy \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^y n(n-1)(y-x)^{n-1} dx \right) dy = \dots = \frac{n-1}{n+1} \end{aligned}$$

2. A várható érték a Z sűrűségfüggvényéből:

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} z \cdot r(z) dz = \int_0^1 z \cdot (n(n-1)(z^{n-2} - z^{n-1})) dz = \dots = \frac{n-1}{n+1}$$

3. A legegyszerűbb, ha a várható értéket a korábbról már ismert

$$E(Y) = \frac{n}{n+1} \quad E(X) = \frac{1}{n+1}$$

tények alapján különbségként írjuk fel:

$$E(Z) = E(Y) - E(X) = \frac{n}{n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n-1}{n+1}$$

4.3. Szorzat várható értéke

Fontossága miatt külön megemlíti az $X \cdot Y$ szorzat várható értékének a képletét.

Diszkrét esetben:

$$E(X \cdot Y) = \sum_{(x,y)} x \cdot y \cdot p(x, y)$$

Folytonos esetben:

$$E(X \cdot Y) = \iint_{\mathbb{R}^2} x \cdot y \cdot f(x, y) dx dy$$

5. NSZT a kísérleti eredmények függvényének az átlagára

5.1. Diszkrét eset (ismétlés)

Képzeljük el, hogy egy (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változóra sok kísérletet végzünk. A kísérletek számát jelölje N , a kísérleti eredményeket, melyek véletlen számpárok, jelölje

$$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_N, Y_N)$$

Állítás: Ha kísérleti eredményeket egy $t(x, y)$ függvénybe helyettesíthetjük, majd az így kapott

$$t(X_1, Y_1), t(X_2, Y_2), \dots, t(X_N, Y_N)$$

értékeket átlagoljuk, akkor ez az átlag – nagy kísérletszám esetén – körülbelül a $t(X, Y)$ várható értékével egyenlő:

$$\frac{t(X_1, Y_1) + t(X_2, Y_2) + \dots + t(X_N, Y_N)}{N} \approx E(t(X, Y))$$

Vázlatos bizonyítás. Az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó lehetséges értékeit most indexezve soroljuk fel:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$$

Figyelem! Mint hasonló helyzetben korábban is megtettük már, itt is felhívjuk a figyelmet, hogy az

$$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_N, Y_N)$$

nagybetű-párok kísérleti eredményeket, tehát véletlen értékpárokat jelölnek. Az

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$$

kisbetű-párok segítségével pedig a lehetséges értékeket soroljuk fel. Ha például az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó egy dobókocka-párral (egy piros és egy kék kockával) dobott véletlen számpárt jelöl, és – mondjuk – százszor dobunk, akkor a nagybetűvel jelölt

- X_1 jelenti az első dobás eredményét a piros kockával,
- Y_1 jelenti az első dobás eredményét a kék kockával,
- X_2 jelenti a második dobás eredményét a piros kockával,
- Y_2 jelenti a második dobás eredményét a kék kockával, és így tovább,
- X_{100} jelenti a századik dobás eredményét a piros kockával,
- Y_{100} jelenti a századik dobás eredményét a kék kockával.

A kisbetűvel jelölt

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots (x_{35}, y_{35}), (x_{36}, y_{36})$$

értékek pedig az

$$(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots (6, 5), (6, 6)$$

számpárokat jelentik.

A lehetséges értékpárok valószínűségeit is indexekkel látjuk el:

$$p_1, p_2, \dots$$

Tehát minden i esetén p_i megadja az (x_i, y_i) számpár valószínűségét. Jelölje továbbá

$$N_1, N_2, \dots$$

a lehetséges értékek gyakoriságait N kísérlet során. Tehát minden i esetén N_i azt mutatja, hogy az (x_i, y_i) számpár hányszor következik be az N kísérlet során. Tudjuk, hogy – nagy N esetén – minden i -re az N_i/N relatív gyakoriság közel van a p_i valószínűséghez.

A

$$\frac{t(X_1, Y_1) + t(X_2, Y_2) + \dots + t(X_N, Y_N)}{N}$$

kifejezés számlálóját N darab tagból áll. Közöttük a t függvény argumentumaként az (x_1, y_1) számpár N_1 -szer, az (x_2, y_2) számpár N_2 -szer, ... fordul elő. Ezért a számláló értéke:

$$t(X_1, Y_1) + t(X_2, Y_2) + \dots + t(X_N, Y_N) = N_1 \cdot t(x_1, y_1) + N_2 \cdot t(x_2, y_2) + \dots$$

Az átlagot jelentő tört értéke:

$$\begin{aligned} \frac{t(X_1, Y_1) + t(X_2, Y_2) + \dots + t(X_N, Y_N)}{N} &= \frac{N_1 \cdot t(x_1, y_1) + N_2 \cdot t(x_2, y_2) + \dots}{N} = \\ &= \frac{N_1}{N} \cdot t(x_1, y_1) + \frac{N_2}{N} \cdot t(x_2, y_2) + \dots \approx p_1 \cdot t(x_1, y_1) + p_2 \cdot t(x_2, y_2) + \dots = E(t(X, Y)) \end{aligned}$$

5.2. Folytonos eset

Képzeld el, hogy egy (X, Y) kétdimenziós folytonos valószínűségi változóra sok kísérletet végzünk. A kísérletek számát jelölje N , a kísérleti eredményeket, melyek véletlen számpárok, jelöljük

$$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_N, Y_N)$$

Állítás: Ha kísérleti eredményeket egy $t(x, y)$ folytonos függvénybe helyettesíthetjük, majd az így kapott

$$t(X_1, Y_1), t(X_2, Y_2), \dots, t(X_N, Y_N)$$

értékeket átlagoljuk, akkor ez az átlag – nagy kísérletszám esetén – körülbelül a $t(X, Y)$ várható értékével egyenlő:

$$\frac{t(X_1, Y_1) + t(X_2, Y_2) + \dots + t(X_N, Y_N)}{N} \approx \iint_{\mathbb{R}^2} t(x, y) f(x, y) dx dy = E(t(X, Y))$$

Vázlatos bizonyítás. Osszuk fel az x -tengelyt Δx hosszúságú, az y -tengelyt Δy hosszúságú kis intervallumokra! Ezáltal az (x, y) -sík $\Delta x \cdot \Delta y$ területű kis téglalapokra tagolódik. A kis téglalapok csúcsain egy diszkrét eloszlást értelmezünk úgy, hogy minden ilyen kis téglalap bal alsó sarkához hozzárendeljük a téglalapnak a folytonos eloszlás szerinti valószínűségét. A diszkrét eloszlás szerint az (x, y) csúcsához tapadó súlyfüggvényérték integrál formájában adható meg:

$$p(x, y) = \int_x^{x+\Delta x} \int_y^{y+\Delta y} f(x, y) dx dy$$

Az (X, Y) valószínűségi változó megfigyelt értékeit a téglalapok bal alsó csúcsaira "lekerekítve" egy (X^*, Y^*) diszkrét valószínűségi változót kapunk: ha (X, Y) értéke abba a téglalapba esik, melynek bal alsó csúcsa az (x, y) pont, akkor (X^*, Y^*) értékét (x, y) -nak vesszük:

$$(X^*, Y^*) = (x, y) \quad \text{ha} \quad x \leq X < x + \Delta x \quad \text{és} \quad y \leq Y < y + \Delta y$$

(X^*, Y^*) lehetséges értékei a csúcspontok. Minden egyes (x, y) csúcspont esetén az $(X^*, Y^*) = (x, y)$ esemény valószínűsége, vagyis (X^*, Y^*) súlyfüggvényének az (x, y) helyen vett értéke, a fenti $p(x, y)$ érték. Mivel Δx és Δy kicsi, $p(x, y)$ -ra igaz az alábbi közelítés:

$$p(x, y) \approx f(x, y) \Delta x \Delta y$$

Azt, hogy az alábbi közelítések miért jogosak, a képletsor alatt magyarázzuk el:

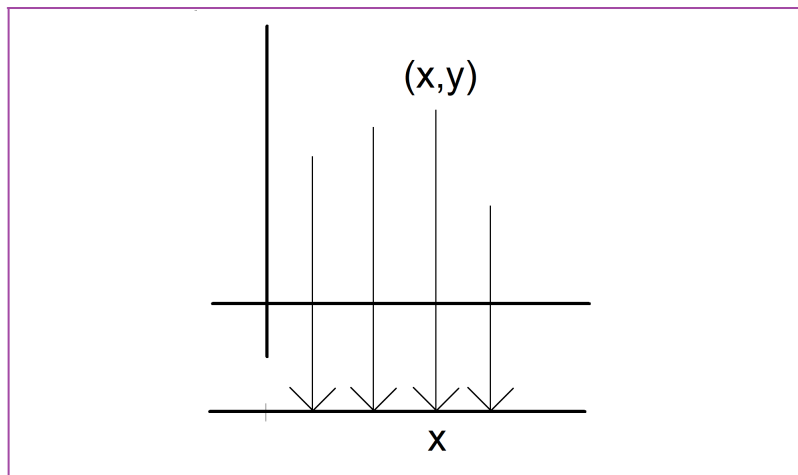
$$\begin{aligned} & \frac{t(X_1, Y_1) + t(X_2, Y_2) + \dots + t(X_N, Y_N)}{N} \approx \\ & \approx \frac{t(X_1^*, Y_1^*) + t(X_2^*, Y_2^*) + \dots + t(X_N^*, Y_N^*)}{N} \approx \\ & \approx \sum_{(x, y)} t(x, y) p(x, y) \approx \\ & \approx \sum_{(x, y)} t(x, y) f(x, y) \Delta x \Delta y \approx \\ & \approx \int_x^{x+\Delta x} \int_y^{y+\Delta y} t(x, y) f(x, y) dx dy \end{aligned}$$

- Az első lépésben, amikor (X_i, Y_i) -t (X_i^*, Y_i^*) -vel helyettesítjük, akkor minden i esetén az $X_i - X_i^*$ legfeljebb Δx , vagyis kicsi, és az $Y_i - Y_i^*$ különbség legfeljebb Δy , vagyis szintén kicsi, így a $t(x, y)$ függvény folytonossága miatt a $t(X_i, Y_i) - t(X_i^*, Y_i^*)$ különbség is kicsi, ezért a két átlag különbsége is kicsi.
- A második lépésben kihasználjuk azt, hogy az (X^*, Y^*) diszkrét valószínűségi változóra már korábban elmagyaráztuk, hogy a kísérleti eredmények függvényének az átlaga közelíti a felírt összeget.
- A harmadik lépésben a $p(x, y)$ -ra felírt közelítést alkalmazzuk.
- A negyedik lépésben a szummát a szummának megfelelő integrállal közelítjük.

6. Vetület- és feltételes eloszlások

6.1. Vetítések koordiána tengelyekre

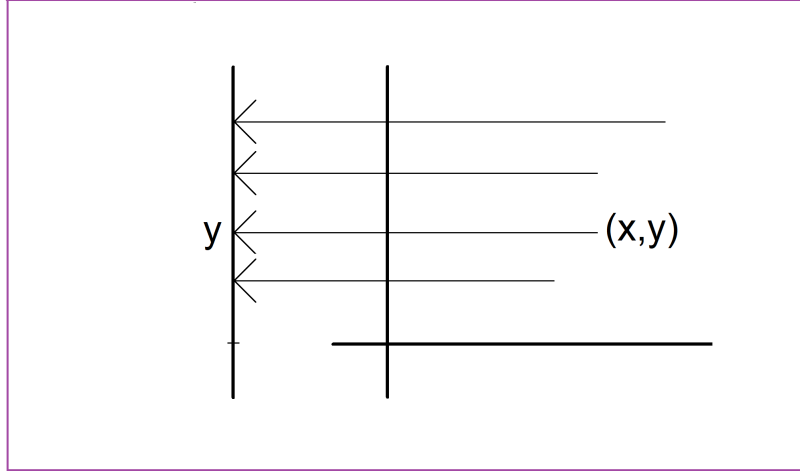
1. Tekintsük azt transzformációt, mely a síkról a vízszintes koordináta tengelyre úgy képez, hogy a sík minden egyes (x, y) pontját a tengely x pontjába képezi. Ez a leképezés tulajdonképpen egyfajta **felejtést** jelent, mert az x és y koordináták közül töröljük (elfelejtjük) az y -t és megtartjuk az x -et. Ha viszont a leképezés geometriáját tartjuk szem előtt, akkor a leképezést joggal nevezhetjük a síkról a **vízszintes tengelyre való (merőleges) vetítésnek**. A leképezés hatása úgy is elképzelhető, mintha a síkot a függőleges tengellyel párhuzamos irányban összenyomnánk, **belepréselnénk** a vízszintes tengelybe.



21. ábra. Vetítés az x -tengelyre

Ha a síkon festék van, akkor a préselésnél a festék a vízszintes tengelyre nyomódik. A tengelyen adódó eloszlást a síkon vett eloszlásnak a vízszintes tengelyre vetett **vetületének** nevezzük.

2. Hasonló az a transzformáció, mely a síkról a függőleges koordináta tengelyre úgy képez, hogy a sík minden egyes (x, y) pontját a tengely y pontjába képezi. Töröljük, elfelejtjük az x koordinátát. Ezt a leképezést joggal nevezhetjük a **függőleges tengelyre való (merőleges) vetítésnek**. A leképezés hatása úgy is elképzelhető, mintha a síkot a vízszintes tengellyel párhuzamos irányban összenyomnánk, **belepréselnénk** a függőleges tengelybe.



22. ábra. Vetítés az y -tengelyre

6.2. Vetület eloszlások sűrűségfüggvénye

Ha a síkon festék van, akkor a préselésnél a festék a függőleges tengelyre nyomódik. A tengelyen adódó eloszlást a síkon vett eloszlásnak a függőleges tengelyre vetett **vetületének** nevezzük.

Állítás: Ha a kétdimenziós (X, Y) valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x, y)$, akkor az X valószínűségi változó $f_1(x)$ sűrűségfüggvénye integrálként áll elő $f(x, y)$ -ből:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

Hasonlóképpen az Y valószínűségi változó $f_2(y)$ sűrűségfüggvénye is integrálként áll elő $f(x, y)$ -ből:

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

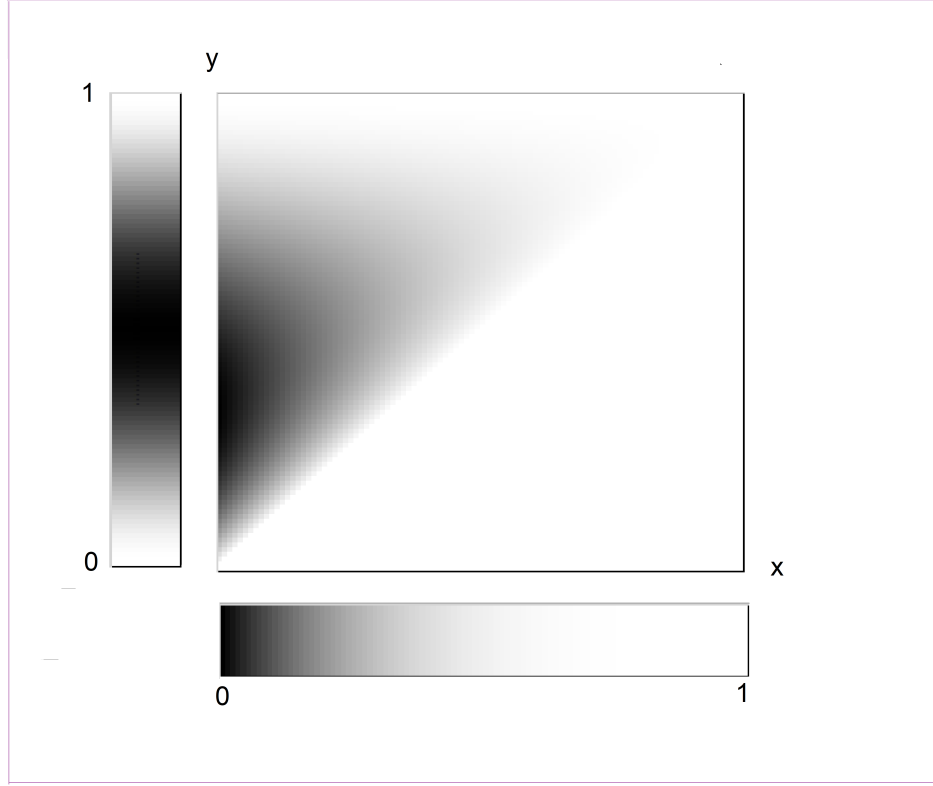
Diszkrét esetben az ezekkel analóg szabályokat összegzési szabályoknak hívtuk. Most joggal nevezhetük ezeket a szabályokat **integrálási szabályoknak**.

Vázlatos bizonyítás. A vízszintes tengelyen felvett $[x, x + \Delta x]$ intervallum egy függőleges sávot definiál a síkon:

$$S_{[x, x + \Delta x]} = \{(x, y) : x \in [x, x + \Delta x]\}$$

Az $X \in [x, x + \Delta x]$ esemény nyilván ekvivalens az $(X, Y) \in S_{[x, x + \Delta x]}$ eseménnyel. E tény alapján:

$$\begin{aligned} f_1(x) &\approx \frac{P(X \in [x, x + \Delta x])}{\Delta x} = \frac{P((X, Y) \in S_{[x, x + \Delta x]})}{\Delta x} = \\ &= \frac{\iint_{S_{[x, x + \Delta x]}} f(x, y) dx dy}{\Delta x} = \frac{\int_x^{x + \Delta x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \right) dx}{\Delta x} \approx \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \end{aligned}$$



23. ábra. 2-dimenziós béta eloszlás és vetületei festékekkel szemléltetve; paraméterek: $n = 5$, $i = 1$, $j = 3$

6.3. Feltételes eloszlások sűrűségfüggvénye

Amikor egy kétdimenziós (X, Y) valószínűségi változóval van dolgunk, előfordulhat, hogy X értékét megtudjuk: $X = x$, de a másik koordinátát, Y -t nem tudjuk: Y -t továbbra is valószínűségi változónak kell tekintenünk. Felmerül a kérdés: milyen eloszlással modellezzük Y -t az $X = x$ feltétel mellett? Az $X = x$ feltétel mellett Y (feltételes) sűrűségfüggvényét $f_{2|1}(y | x)$ -szel vagy $f_{2|1}(y | X = x)$ -szel jelöljük. Hasonlóképpen, az $Y = y$ feltétel mellett X (feltételes) sűrűségfüggvényét $f_{1|2}(x | y)$ -szel vagy $f_{1|2}(x | Y = y)$ -nal jelöljük.

Állítás: Az $X = x$ feltétel mellett Y feltételes sűrűségfüggvényét hányadosként kaphatjuk meg:

$$f_{2|1}(y | x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}$$

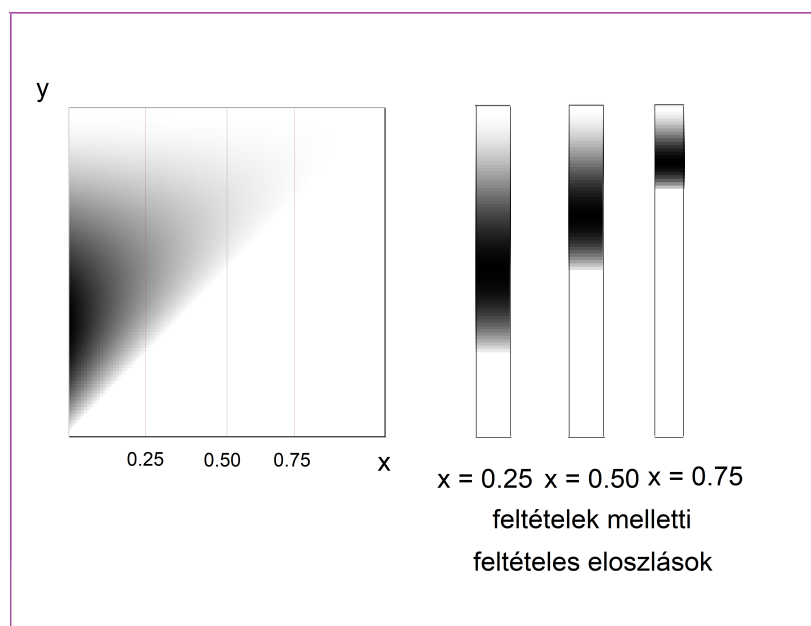
Hasonlóképpen, az $Y = y$ feltétel mellett X feltételes sűrűségfüggvénye:

$$f_{1|2}(x | y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}$$

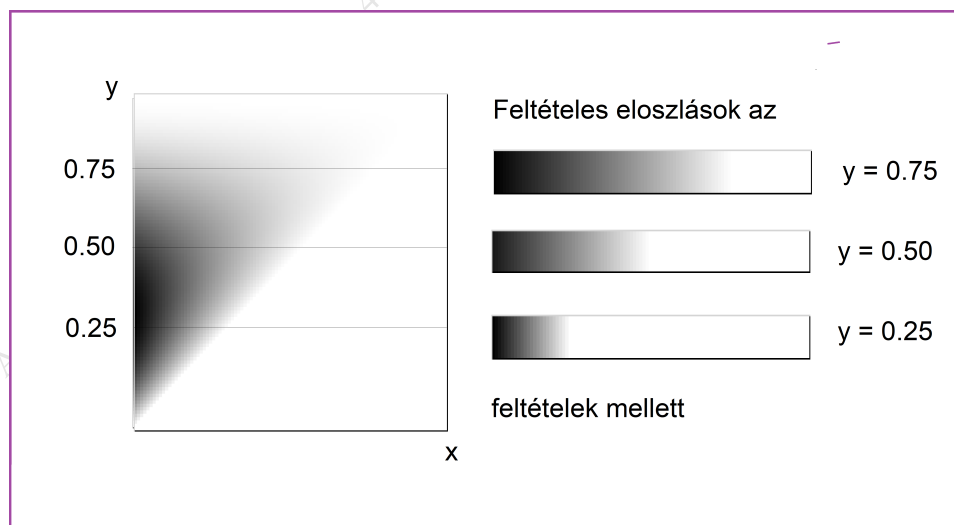
Vázlatos bizonyítás. A két formula közül az elsőt vezetjük le:

$$f_{2|1}(y | x) \approx \frac{P(y < Y < y + \Delta y | X = x)}{\Delta y} \approx \frac{P(y < Y < y + \Delta y | x < X < x + \Delta x)}{\Delta y} =$$

$$= \frac{\frac{P(x < X < x + \Delta x \text{ és } y < Y < y + \Delta y)}{P(x < X < x + \Delta x)}}{\Delta y} = \frac{\frac{P(x < X < x + \Delta x \text{ és } y < Y < y + \Delta y)}{\Delta x \Delta y}}{\frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x}} \approx \frac{f(x, y)}{f_1(x)}$$



24. ábra. 2-dimenziós béta eloszlás és az $x = 0.25$, $x = 0.50$, $x = 0.75$ feltételek melletti feltételes eloszlásai festékekkel szemléltetve; paraméterek: $n = 5$, $i = 1$, $j = 3$



25. ábra. 2-dimenziós béta eloszlás és az $y = 0.25$, $y = 0.50$, $y = 0.75$ feltételek melletti feltételes eloszlásai festékekkel szemléltetve; paraméterek: $n = 5$, $i = 1$, $j = 3$

Példa; $Y = \mathbf{RND}_1, X = Y \cdot \mathbf{RND}_2$: Válasszunk egy pontot 0 és 1 között egyenletes eloszlás szerint, ez legyen az Y pont. Ha Y -t már megválasztottuk, akkor 0 és Y és között válasszunk egy másik pontot ugyancsak egyenletes

eloszlás szerint, ez legyen az X pont. X -ből és Y -ből rakjuk össze az (X, Y) pontot a síkon! Számítógéppel X és Y így állítható elő random számok segítségével:

$$Y = \text{RND}_1, \quad X = Y \cdot \text{RND}_2$$

Y egyenletes eloszlást követ 0 és 1 között, ezért

$$f_2(y) = 1 \quad (0 < y < 1)$$

Az $Y = y$ feltétel mellett X egyenletes eloszlást követ 0 és y között, ezért

$$f_{1|2}(x | y) = \frac{1}{y} \quad (0 < x < y)$$

Mint korábban meghatároztuk – az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

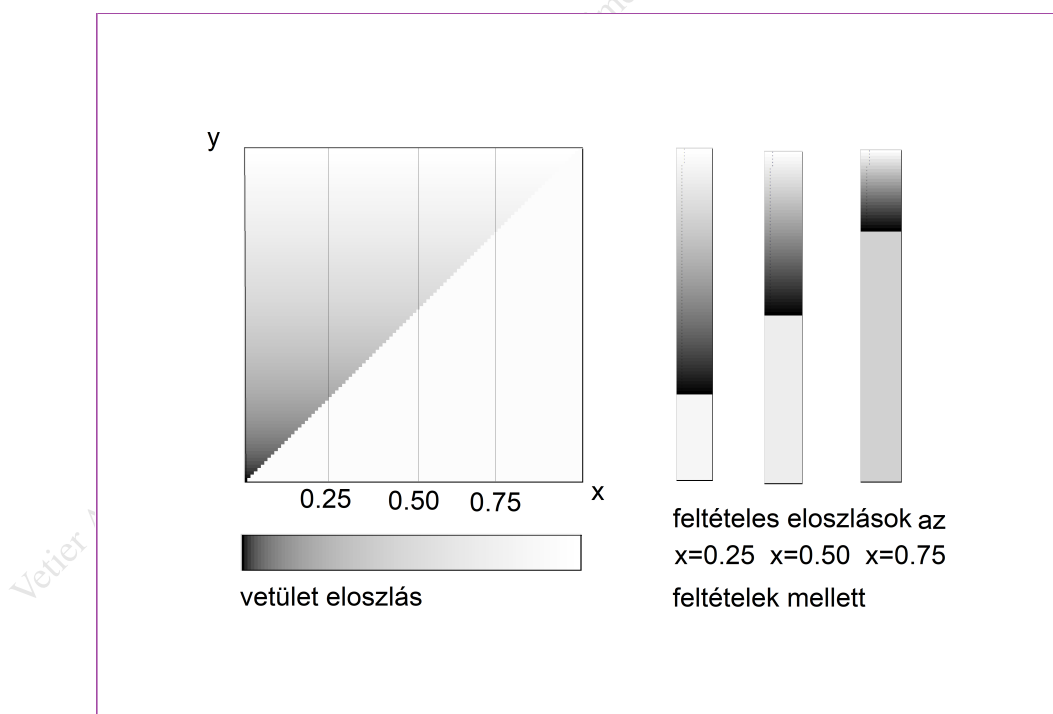
$$f(x, y) = \frac{1}{y} \quad (0 < x < y < 1)$$

X (feltétel nélküli) sűrűségfüggvényét is kiszámítottuk:

$$f_1(x) = -\ln(x) \quad (0 < x < 1)$$

Y feltételes sűrűségfüggvénye az $X = x$ feltétel mellett a hányados szabállyal adódik:

$$f_{2|1}(y | x) = \frac{\frac{1}{y}}{-\ln(x)} \quad (0 < x < y < 1)$$



26. ábra. (X, Y) eloszlása, X eloszlása és Y feltételes eloszlásai az $x = 0.25, x = 0.50, x = 0.75$ feltételek mellett festékekkel szemléltetve, ahol $Y = \text{RND}_1, X = Y \cdot \text{RND}_2$

6.4. Feltételes sűrűségfüggvények rendszere

Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy az (első fejezetben tárgyalt)

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_{2|1}(y | x)$$

szorzási szabály és az (előző pontban levezetett)

$$f_{2|1}(y | x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}$$

osztási szabály egyenértékű egymással. Hasonlóképpen az

$$f(x, y) = f_2(y) \cdot f_{1|2}(x | y)$$

szorzási szabály és az

$$f_{1|2}(x | y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}$$

osztási szabály egyenértékű egymással.

Ha minden x mellett tekintjük a $f_{2|1}(y | x)$ sűrűségfüggvényt, akkor sűrűségfüggvényeknek egy rendszerét kapjuk, amit az Y valószínűségi változó X -re vonatkozó **feltételes sűrűségfüggvény-rendszerének** nevezünk.

Ha minden y mellett tekintjük a $f_{1|2}(x | y)$ sűrűségfüggvényt, akkor sűrűségfüggvényeknek egy rendszerét kapjuk, amit az X valószínűségi változó Y -re vonatkozó **feltételes sűrűségfüggvény-rendszerének** nevezünk.

Egy adott $f(x, y)$ kétdimenziós sűrűségfüggvényből, az

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

integrálási szabállyal meghatározhatjuk az $f_1(x)$ vetület-sűrűségfüggvényt, majd pedig a

$$f_{2|1}(y | x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}$$

hányados szabállyal az $f_{2|1}(y | x)$ feltételes sűrűségfüggvények rendszerét.

Fordítva, az $f_1(x)$ vetület-sűrűségfüggvényből és a feltételes sűrűségfüggvények $f_{2|1}(y | x)$ rendszeréből a

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_{2|1}(y | x)$$

szorzási szabállyal a megkaphatjuk az $f(x, y)$ kétdimenziós sűrűségfüggvényt. Ezért az $f(x, y)$ kétdimenziós sűrűségfüggvény ismerete egyenértékű azzal, hogy ismerjük az $f_1(x)$ vetület-sűrűségfüggvényt és a feltételes sűrűségfüggvények $f_{2|1}(y | x)$ rendszerét. Hasonlóképpen kiadódik az is, hogy a az $f(x, y)$ kétdimenziós sűrűségfüggvény ismerete egyenértékű azzal, hogy ismerjük az $f_2(y)$ vetület-sűrűségfüggvényt és a feltételes sűrűségfüggvények az $f_{1|2}(x | y)$ rendszerét.

6.5. Sűrűségfüggvények keverése

A feltételes sűrűségfüggvényekkel kapcsolatos

$$f(x, y) = f_1(x) f_{2|1}(y | x)$$

szorzási szabály és a vetítésre vonatkozó

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

integrálási szabály kombinálásával adódik az alábbi formula:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(y) f_{1|2}(x | y) dy$$

A koordináták szerepének felcserélése pedig a

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_{2|1}(y | x) dx$$

formulát adja.

Ezek a formulák a korábban tanult

$$p_1(x) = \sum_y p_2(y) p_{1|2}(x | y)$$

$$p_2(y) = \sum_x p_1(x) p_{2|1}(y | x)$$

diszkrét formulák folytonos megfelelői. Ezért ezekre az integrál-formulákra hivatkozhatunk úgy is mint a **teljes valószínűség formulái kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)**.

A jobboldali integrál-kifejezéseket egyfajta **keverésnek** is felfoghajuk: például az

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_{2|1}(y | x) dx$$

formula azt mutatja, hogy az $f_2(y)$ függvényértéket úgy kaphatjuk meg, hogy az $f_{2|1}(y | x)$ függvényértékeket az $f_1(x)$ súlyfüggvény szerint keverjük. Tehát

- az Y valószínűségi változó sűrűségfüggvénye (eloszlása) nem más, mint az Y feltételes sűrűségfüggvényeinek (feltételes eloszlásainak) keveréke az X sűrűségfüggvénye (eloszlása) szerint.

Hasonlóképpen

- az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye (eloszlása) nem más, mint az X feltételes sűrűségfüggvényeinek (feltételes eloszlásainak) keveréke az Y sűrűségfüggvénye (eloszlása) szerint.

6.6. Feltételes eloszlásfüggvény

A feltételes sűrűségfüggvény integráljaként a feltételes eloszlásfüggvényt kapjuk:

$$F_{2|1}(y | x) = \int_{-\infty}^y f_{2|1}(y | x) dy = P(Y < y | X = x)$$

illetve

$$F_{1|2}(x | y) = \int_{-\infty}^x f_{1|2}(x | y) dx = P(X < x | Y = y)$$

Megfordítva: a feltételes eloszlásfüggvény deriváltjaként a feltételes sűrűségfüggvényt kapjuk meg

$$f_{2|1}(y|x) = \frac{\partial F_{2|1}(y|x)}{\partial y}$$

$$f_{1|2}(x|y) = \frac{\partial F_{1|2}(x|y)}{\partial x}$$

A feltételes eloszlásfüggvény jelentése:

- Ha (x_1, x_2) egy picike intervallum az x szám körül, és az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változóra annyira sok kísérletet végzünk, hogy még az olyan kísérletekből is sok adódik, melyekre az X értéke x_1 és x_2 közé esik, akkor az ilyen kísérletekhez tartozó Y értékeknek körülbelül az

$$F_{2|1}(y|x) \text{ -ed része kisebb } y \text{ -nél}$$

- Ha (y_1, y_2) egy picike intervallum az y szám körül, és az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változóra annyira sok kísérletet végzünk, hogy még az olyan kísérletekből is sok adódik, melyekre az Y értéke y_1 és y_2 közé esik, akkor az ilyen kísérletekhez tartozó X értékeknek körülbelül az

$$F_{1|2}(x|y) \text{ -ed része kisebb } x \text{ -nél}$$

6.7. Feltételes valószínűség

Az $y_1 < Y < y_2$ esemény valószínűsége az $X = x$ feltétel mellett a feltételes sűrűségfüggvényből integrálással adódik:

$$P(y_1 < Y < y_2 | X = x) = \int_{y_1}^{y_2} f_{2|1}(y|x) dy$$

Hasonlóan adódik az $x_1 < X < x_2$ esemény valószínűsége az $Y = y$ feltétel mellett:

$$P(x_1 < X < x_2 | Y = y) = \int_{x_1}^{x_2} f_{1|2}(x|y) dx$$

Ugyanezeket a feltételes valószínűségeket a feltételes eloszlásfüggvényből különbséggént is megkaphatjuk:

$$P(y_1 < Y < y_2 | X = x) = F_{2|1}(y_2|x) - F_{2|1}(y_1|x)$$

$$P(x_1 < X < x_2 | Y = y) = F_{1|2}(x_2|y) - F_{1|2}(x_1|y)$$

A feltételes valószínűség jelentése:

- Ha (y_1, y_2) egy tetszőleges intervallum az y tengelyen, (x_1, x_2) pedig egy picike intervallum az x szám körül, és az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változóra annyira sok kísérletet végzünk, hogy még az olyan kísérletekből is sok adódik, melyekre az X értéke x_1 és x_2 közé esik, akkor az ilyen kísérletekhez tartozó Y értékeknek körülbelül a

$$P(y_1 < Y < y_2 | X = x) \text{ -ed része esik az } (y_1, y_2) \text{ intervallumba}$$

- Ha (x_1, x_2) egy tetszőleges intervallum az x tengelyen, (y_1, y_2) pedig egy picike intervallum az y szám körül, és az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változóra annyira sok kísérletet végzünk, hogy még az olyan kísérletekből is sok adódik, melyekre az Y értéke y_1 és y_2 közé esik, akkor az ilyen kísérletekhez tartozó X értékeknek körülbelül a

$$P(x_1 < X < x_2 | Y = y) \text{ -ed része esik az } (x_1, x_2) \text{ intervallumba}$$

Megjegyzés. A

$$P(y_1 < Y < y_2 \mid X = x)$$

feltételes valószínűségben a feltétel valószínűsége nulla

$$P(X = x) = 0$$

Ezért a feltételes valószínűség elemi

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

formuláját nem lehet alkalmazni a $P(y_1 < Y < y_2 \mid X = x)$ valószínűség definiálására.

6.8. Feltételes medián

Az

$$F_{2|1}(y \mid x) = \frac{1}{2}$$

egyenletet y -ra megoldva, azaz y -t kifejezve az egyenletből x segítségével, megkapjuk Y mediánját az $X = x$ feltétel mellett.

Hasonlóképpen, az

$$F_{1|2}(x \mid y) = \frac{1}{2}$$

egyenletet x -re megoldva, azaz x -et kifejezve az egyenletből y segítségével, megkapjuk X mediánját az $Y = y$ feltétel mellett.

A feltételes medián jelentése:

- Ha (x_1, x_2) egy picike intervallum az x szám körül, és az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változóra annyira sok kísérletet végzünk, hogy még az olyan kísérletekből is sok adódik, melyekre az X értéke x_1 és x_2 közé esik, akkor az ilyen kísérletekhez tartozó Y értékeknek körülbelül a

fele kisebb, a fele nagyobb, mint az $X = x$ feltételhez tartozó medián

- Ha (y_1, y_2) egy picike intervallum az y szám körül, és az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változóra annyira sok kísérletet végzünk, hogy még az olyan kísérletekből is sok adódik, melyekre az Y értéke y_1 és y_2 közé esik, akkor az ilyen kísérletekhez tartozó X értékeknek körülbelül a

fele kisebb, a fele nagyobb, mint az $Y = y$ feltételhez tartozó medián

6.9. Feltételes várható érték

A feltételes várható érték nem más mint a feltételes eloszlás várható értéke:

$$E(Y \mid X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{2|1}(y \mid x) dy$$

illetve

$$E(X \mid Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{1|2}(x \mid y) dx$$

A feltételes várható érték jelentése:

- Ha (x_1, x_2) egy picike intervallum az x szám körül, és az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változóra annyira sok kísérletet végzünk, hogy még az olyan kísérletekből is sok adódik, melyekre az X értéke x_1 és x_2 közé esik, akkor az ilyen kísérletekhez tartozó Y értékeknek az átlaga körülbelül az

$$\mathbf{E}(Y|X = x) \quad \text{feltételes várható értékkel egyenlő}$$

- Ha (y_1, y_2) egy picike intervallum az y szám körül, és az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változóra annyira sok kísérletet végzünk, hogy még az olyan kísérletekből is sok adódik, melyekre az Y értéke y_1 és y_2 közé esik, akkor az ilyen kísérletekhez tartozó X értékeknek az átlaga körülbelül az

$$\mathbf{E}(X|Y = y) \quad \text{feltételes várható értékkel egyenlő}$$

6.10. Feltételes variancia

A feltételes variancia nem más mint a feltételes eloszlás varianciája:

$$\begin{aligned} \text{VAR}(Y | X = x) &= \int_{-\infty}^{\infty} (y - \mathbf{E}(Y|X = x))^2 f_{2|1}(y | x) dy = \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_{2|1}(y | x) dy \right) - (\mathbf{E}(Y|X = x))^2 \end{aligned}$$

illetve

$$\begin{aligned} \text{VAR}(X | Y = y) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbf{E}(X|Y = y))^2 f_{1|2}(x | y) dx = \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{1|2}(x | y) dx \right) - (\mathbf{E}(X|Y = y))^2 \end{aligned}$$

A feltételes variancia jelentése:

- Ha (x_1, x_2) egy picike intervallum az x szám körül, és az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változóra annyira sok kísérletet végzünk, hogy még az olyan kísérletekből is sok adódik, melyekre az X értéke x_1 és x_2 közé esik, akkor az ilyen kísérletekhez tartozó Y értékeknek a varianciája körülbelül az

$$\mathbf{VAR}(Y|X = x) \quad \text{feltételes varianciával egyenlő}$$

- Ha (y_1, y_2) egy picike intervallum az y szám körül, és az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változóra annyira sok kísérletet végzünk, hogy még az olyan kísérletekből is sok adódik, melyekre az Y értéke y_1 és y_2 közé esik, akkor az ilyen kísérletekhez tartozó X értékeknek a varianciája körülbelül az

$$\mathbf{VAR}(X|Y = y) \quad \text{feltételes varianciával egyenlő}$$

6.11. Feltételes szórás

A feltételes szórás nem más mint a feltételes eloszlás szórása, vagyis a feltételes variancia négyzetgyöke:

$$\begin{aligned} \text{SD}(Y | X = x) &= \sqrt{\text{VAR}(Y | X = x)} = \\ &= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (y - E(Y | X = x))^2 f_{2|1}(y | x) dy} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_{2|1}(y | x) dy - (E(Y | X = x))^2} \end{aligned}$$

illetve

$$\begin{aligned} \text{SD}(X | Y = y) &= \sqrt{\text{VAR}(X | Y = y)} = \\ &= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X | Y = y))^2 f_{1|2}(x | y) dx} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{1|2}(x | y) dx - (E(X | Y = y))^2} \end{aligned}$$

A feltételes szórás jelentése:

- Ha (x_1, x_2) egy picike intervallum az x szám körül, és az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változóra annyira sok kísérletet végzünk, hogy még az olyan kísérletekből is sok adódik, melyekre az X értéke x_1 és x_2 közé esik, akkor az ilyen kísérletekhez tartozó Y értékeknek a szórása körülbelül az

$$\text{SD}(Y | X = x) \quad \text{feltételes szórással egyenlő}$$

- Ha (y_1, y_2) egy picike intervallum az y szám körül, és az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változóra annyira sok kísérletet végzünk, hogy még az olyan kísérletekből is sok adódik, melyekre az Y értéke y_1 és y_2 közé esik, akkor az ilyen kísérletekhez tartozó X értékeknek a szórása körülbelül az

$$\text{SD}(X | Y = y) \quad \text{feltételes szórással egyenlő}$$

Megjegyzés: A feltételes várható érték fogalmát már a jegyzet első részében értelmeztük diszkrét eloszlásokra – integrálok helyett szummákkal. A feltételes variancia, feltételes szórás is nyilvánvalóan értelmezhető diszkrét eloszlásokra is: a fenti formulákban az integrálok a megfelelő formulákban értelemszerűen szummákkal cserélődnek fel.

6.12. Egy számolás minta példa: $Y = \text{RND}_1$, $X = Y \cdot \text{RND}_2$

Feladat: Választunk egy Y számot 0 és 1 között egyenletes eloszlás szerint. Ha $Y = y$, akkor 0 és y között választunk egy X számot ugyancsak egyenletes eloszlás szerint. És most meghatározzuk a feltétel nélküli- és feltételes sűrűség- és eloszlásfüggvényeket és a feltételes eloszlások jellemzőit!

Megoldás:

- Y sűrűségfüggvényét Y definíciója alapján felírhatjuk:

$$f_2(y) = 1 \quad \text{ha} \quad 0 < y < 1$$

- A most következő képletek $0 < y < 1$ mellett értendők.

Az $Y = y$ feltétel mellett

X feltételes sűrűségfüggvényét X definíciója alapján fel tudjuk írni:

$$f_{1|2}(x | y) = \frac{1}{y} \quad \text{ha } 0 < x < y$$

X feltételes eloszlásfüggvénye nyilván:

$$F_{1|2}(x | y) = \frac{x}{y} \quad \text{ha } 0 < x < y$$

X feltételes mediánja és feltételes várható értéke nyilván:

$$\frac{y}{2}$$

a feltételes variancia, illetve szórás pedig:

$$\frac{y^2}{12} \quad \text{illetve} \quad \frac{y}{\sqrt{12}}$$

- (X, Y) sűrűségfüggvényét a szorzási szabály alapján kapjuk meg:

$$f(x, y) = f_2(y) f_{1|2}(x | y) = 1 \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{y} \quad \text{ha } 0 < x < y < 1$$

- X sűrűségfüggvényét y szerinti integrálással kapjuk meg. $0 < x < 1$ esetén ez adódik :

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_x^1 \frac{1}{y} dy = -\ln(x)$$

- A most következő képletek $0 < x < 1$ mellett értendők.

Az $X = x$ feltétel mellett

Y feltételes sűrűségfüggvényét hányadosként kapjuk:

$$f_{2|1}(y | x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \frac{\frac{1}{y}}{-\ln(x)} = -\frac{1}{y \ln(x)} \quad \text{ha } x < y < 1$$

A feltételes eloszlásfüggvényt integrálással kapjuk meg:

$$\begin{aligned} F_{2|1}(y | x) &= \int_{-\infty}^y f_{2|1}(y | x) dy = \\ &= \int_x^y \left(-\frac{1}{y \ln(x)} \right) dy = \frac{1}{-\ln(x)} \int_x^y \frac{1}{y} dy = \frac{1}{-\ln(x)} (\ln(y) - \ln(x)) = \\ &= 1 - \frac{\ln(y)}{\ln(x)} \quad \text{ha } x < y < 1 \end{aligned}$$

A feltételes medián az

$$F_{2|1}(y | x) = 1 - \frac{\ln(y)}{\ln(x)} = \frac{1}{2}$$

egyenlet y -re való megoldásából adódik:

$$\begin{aligned}\frac{\ln(y)}{\ln(x)} &= \frac{1}{2} \\ \ln(y) &= \frac{1}{2} \ln(x) \\ \ln(y) &= \ln(\sqrt{x}) \\ y &= \sqrt{x}\end{aligned}$$

Tehát a feltételes medián $\sqrt{x}$.

A feltételes várható érték:

$$\begin{aligned}E(Y|X=x) &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_{2|1}(y|x) dy = \\ &= \int_x^1 y \left(-\frac{1}{y \ln(x)} \right) dy = \int_x^1 \left(-\frac{1}{\ln(x)} \right) dy = \left(-\frac{1}{\ln(x)} \right) (1-x) = \\ &= \frac{x-1}{\ln(x)}\end{aligned}$$

A feltételes második momentum:

$$\begin{aligned}E(Y^2|X=x) &= \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_{2|1}(y|x) dy = \\ &= \int_x^1 y^2 \left(-\frac{1}{y \ln(x)} \right) dy = \int_x^1 y \left(-\frac{1}{\ln(x)} \right) dy = \left(-\frac{1}{\ln(x)} \right) \frac{1-x^2}{2} = \\ &= \frac{x^2-1}{2 \ln(x)}\end{aligned}$$

A feltételes varianciát a

$$\text{VAR}(Y|X=x) = E(Y^2|X=x) - (E(Y|X=x))^2$$

képlet alapján fel lehet írni, amiből gyökvonással a feltételes szórás képletét is megkaphatjuk:

$$\begin{aligned}\text{VAR}(Y|X=y) &= \frac{x^2-1}{2 \ln(x)} - \left(\frac{x-1}{\ln(x)} \right)^2 \\ \text{SD}(X|Y=x) &= \sqrt{\frac{x^2-1}{2 \ln(x)} - \left(\frac{x-1}{\ln(x)} \right)^2}\end{aligned}$$

6.13. Folytonos szimuláció kétdimenzióban

Tegyük fel, hogy adott egy folytonos kétdimenziós eloszlás, és nekünk elő kell állítani számítógép segítségével egy olyan (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változót, ami a megadott kétdimenziós eloszlást követi. A következőképpen lehet eljárni:

1. Meghatározzuk az előírt eloszlás x -tengelyre vetett vetületének sűrűségfüggvényét:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

majd pedig az eloszlásfüggvényét:

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^x f_1(x) dx$$

és ezután az

$$u = F_1(x)$$

egyenletből az eloszlásfüggvény inverzét:

$$x = F_1^{-1}(u)$$

Tudjuk, hogy ha az inverz függvénybe egy random számot helyettesítünk:

$$X = F_1^{-1}(\text{RND}_1)$$

akkor olyan X valószínűségi változót kapunk, mely a kívánatos vetület eloszlást követi.

2. Az előírt eloszlásból minden x értékre meghatározzuk az $X = x$ feltétel melletti feltételes sűrűségfüggvényt:

$$f_{2|1}(y | x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}$$

majd a feltételes eloszlás eloszlásfüggvényét:

$$F_{2|1}(y | x) = \int_{-\infty}^y f_{2|1}(y | x) dy$$

és ezután rögzített x mellett a

$$v = F_{2|1}(y | x)$$

egyenletből az eloszlásfüggvény inverzét:

$$y = F_{2|1}^{-1}(v | x)$$

Ha ebben az inverzfüggvény képletben az x paraméter helyére a már definiált X -et, a v változó helyére pedig egy újabb random számot helyettesítünk:

$$Y = F_{2|1}^{-1}(\text{RND}_2 | X)$$

akkor olyan Y valószínűségi változót kapunk, melynek az $X = x$ feltételek melletti feltételes eloszlásai a kívánatos feltételes eloszlások.

3. A kapott (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó vetület eloszlása megegyezik a megadott eloszlás vetület eloszlásával, és a feltételes eloszlásai is megegyeznek a kívánatos eloszlás feltételes eloszlásaival. Ezért (X, Y) kétdimenziós eloszlása is megegyezik a kívánatos eloszlással.

Megjegyzés: Természetesen a koordináták szerepcseréjével is működik a módszer. A

$$Y = F_2^{-1}(\text{RND}_1)$$

$$X = F_{1|2}^{-1}(\text{RND}_2 | Y)$$

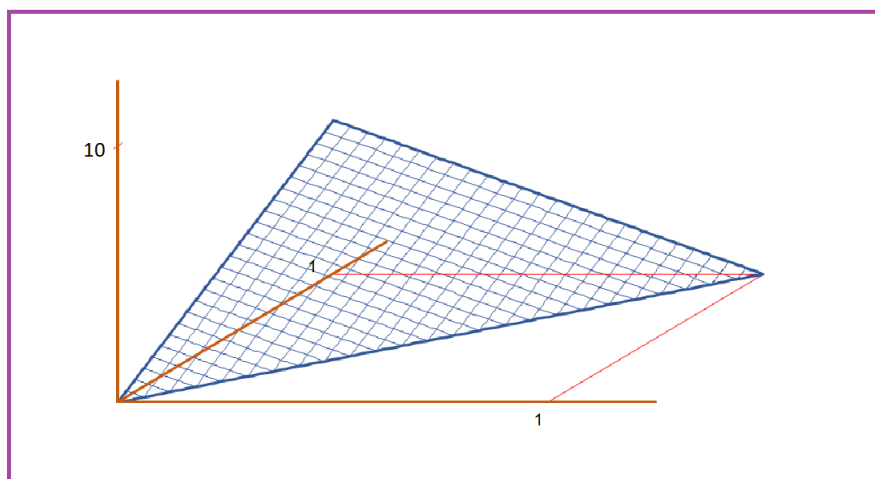
definíciókkal is olyan (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változót kapunk, melynek eloszlása is megegyezik a kívánatos eloszlással.

Példa: Három random szám kapcsán korábban vizsgáltuk

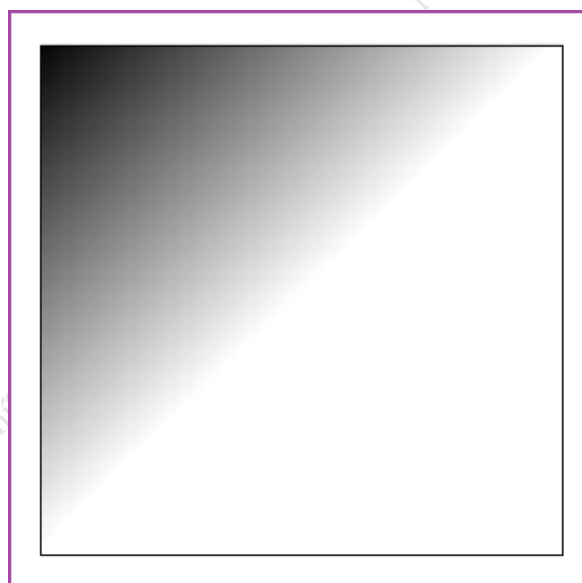
a három random szám közül a legkisebb és a három random szám közül a legnagyobb

valószínűségi változókból alkotott kétdimenziós valószínűségi változót. Levezettük, hogy a kétdimenziós sűrűségfüggvény képlete:

$$f(x, y) = 6 \cdot (y - x) \quad (0 < x < y < 1)$$



27. ábra. 2-dimenziós béta eloszlás sűrűségfüggvénye; paraméterek: $n = 3$, $i = 1$, $j = 3$



28. ábra. 2-dimenziós béta eloszlás festékekkel szemléltetve; paraméterek: $n = 3$, $i = 1$, $j = 3$

Érdekes megnézni, hogy a most tanult módszer hogyan állít elő ilyen eloszlást követő (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változót!

1. Meghatározzuk a megadott eloszlás x -tengelyre vett vetületének sűrűségfüggvényét:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_x^1 6 \cdot (y - x) dy = 3 \cdot (1 - x)^2 \quad (0 < x < y < 1)$$

majd pedig az eloszlásfüggvényét:

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^x f_1(x) dx = \int_0^x 3 \cdot (1-x)^2 dx = 1 - (1-x)^3 \quad (0 < x < y < 1)$$

és ezután az

$$u = 1 - (1-x)^3$$

egyenletből az eloszlásfüggvény inverzét:

$$x = 1 - (1-u)^{\frac{1}{3}}$$

Tudjuk, hogy ha az inverz függvénybe egy random számot helyettesítünk:

$$X = 1 - (1 - \text{RND}_1)^{\frac{1}{3}}$$

akkor olyan X valószínűségi változót kapunk, mely a kívánatos vetület eloszlást követi.

2. Az előírt eloszlásból minden x értékre meghatározzuk az $X = x$ feltétel melletti feltételes sűrűségfüggvényt:

$$f_{2|1}(y | x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \frac{6 \cdot (y-x)}{3 \cdot (1-x)^2} = \frac{2 \cdot (y-x)}{(1-x)^2} \quad (0 < x < y < 1)$$

majd a feltételes eloszlás eloszlásfüggvényét:

$$F_{2|1}(y | x) = \int_x^y \frac{2 \cdot (y-x)}{(1-x)^2} dy = \frac{(y-x)^2}{(1-x)^2} \quad (0 < x < y < 1)$$

és ezután rögzített x mellett a

$$v = \frac{(y-x)^2}{(1-x)^2}$$

egyenletből az eloszlásfüggvény inverzét:

$$y = x + \sqrt{v} \cdot (1-x)$$

Ha ebben az inverzfüggvény képletben az x paraméter helyére a már definiált X -et, a v változó helyére egy újabb random számot helyettesítünk:

$$Y = X + \sqrt{\text{RND}_2} \cdot (1-X)$$

akkor olyan Y valószínűségi változót kapunk, melynek az $X = x$ feltételek melletti feltételes eloszlásai a kívánatos feltételes eloszlások.

A kapott (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó kétdimenziós eloszlása is megegyezik a kívánatos eloszlással.

Megjegyzés: Megnyugtató élmény lehet az Olvasó számára, ha a módszerünkkel most definiált (X, Y) -ra generál egy pontfelhőt, és azt összeveti

a három random szám közül a legkisebb és a három random szám közül a legnagyobb valószínűségi változókból alkotott kétdimenziós valószínűségi változó pontfelhőjével.

7. Transzformáció síkról síkra

Az alábbiakban az eloszlásoknak a síkról síkra való transzformációját egy konkrét példán keresztül mutatjuk be. A sűrűségfüggvény transzformálódásáról szóló általános képletet, amiért mindezt csináljuk, a példa után mondjuk ki. A képletet – a Jacobi determináns jelentésének ismeretét feltételezve – igazoljuk.

7.1. Példa: transzformáció szorzás és osztás segítségével

7.1.1. A transzformáció definíciója

Tekintsük azt a transzformációt, mely az (x, y) síkról az (u, v) síkra képez az

$$u = x \cdot y \quad v = \frac{y}{x}$$

képlet-pár szerint. Mivel az elkövetkező oldalakon csak 0 és 1 közötti x és y értékekkel fogunk dolgozni, a transzformációt csak a

$$0 < x \leq 1 \quad 0 < y \leq 1$$

négyzeten fogjuk tekinteni. A $0 < x$ és a $0 < y$ egyenlőtlenségek miatt a négyzet meg van fosztva a tengelyekre eső oldalaitól.

7.1.2. A transzformáció inverzének képlet-párja

Ha a transzformációt definiáló két egyenletből kifejezzük x -et és y -t az u és a v segítségével, akkor az inverz transzformáció képlet-párjához jutunk:

$$x = \sqrt{\frac{u}{v}} \quad y = \sqrt{u \cdot v}$$

avagy

$$x = u^{\frac{1}{2}} \cdot v^{-\frac{1}{2}} \quad y = u^{\frac{1}{2}} \cdot v^{\frac{1}{2}}$$

7.1.3. Az egységnégyzet képe egy "vitorla" alakú halmaz

Az első kérdések egyike, ami ilyenkor felmerül: milyen halmazt kapunk az (u, v) síkon ha az értelmezési tartomány – ami itt az egységnégyzet – minden (x, y) pontját áttranszformáljuk?

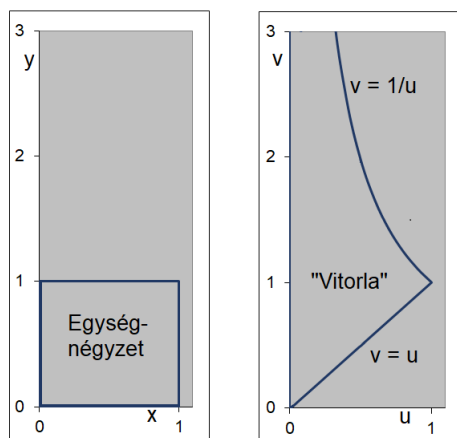
A válasz egyszerű: Nyilván minden (u, v) képpont az első síknegyedbe esik, azaz $u > 0$ és $v > 0$. Továbbá

$$u = x \cdot y \leq 1 \quad v = \frac{y}{x} = \frac{xy}{x^2} = \frac{u}{x^2} \geq u \quad v = \frac{y}{x} = \frac{y^2}{xy} = \frac{y^2}{u} \leq \frac{1}{u}$$

Tehát a képpontok eleget tesznek az

$$0 < u \leq 1 \quad u < v \leq \frac{1}{u}$$

egyenlőtlenségeknek, azaz egy "vitorla" alakú halmazba esnek. Nyilvánvaló, hogy ennek a halmaznak minden pontja valóban képpont.



29. ábra. Az egységnégyzetből "vitorla" lett

7.1.4. A transzformáció hatásának szemléltetése

A transzformáció hatását lépésről lépésre haladva fogjuk bemutatni.

- Először néhány konkrét pontot és szakaszt transzformálunk,
- utána azt érzékeltetjük, ahogy az (x, y) sík egységnégyzetében felvett "börtön rács"-ból az (u, v) síkon "díszes rács" lesz.
- Majd pontfelhőt transzformálunk,
- végül pedig festék eloszlást.
- A pontfelhők és festék eloszlások transzformációját először egyenletes eloszlásra vesszük,
- utána pedig nem-egyenletes eloszlásra.

1. Három pont egy függőleges szakaszon

Először három pontot veszünk fel az $x = \frac{1}{2}$ egyenletű függőleges egyenesen. Ezek transzformáltjait is megadjuk:

$(x; y) \rightarrow (u; v)$	ahol $u = x \cdot y$	és $v = \frac{y}{x}$
$(1/2; 1/4) \rightarrow (1/8; 1/2)$	mert $1/8 = 1/2 \cdot 1/4$	és $1/2 = \frac{1/4}{1/2}$
$(1/2; 1/2) \rightarrow (1/4; 1)$	mert $1/4 = 1/2 \cdot 1/2$	és $1 = \frac{1/2}{1/2}$
$(1/2; 3/4) \rightarrow (3/8; 3/2)$	mert $3/8 = 1/2 \cdot 3/4$	és $3/2 = \frac{3/4}{1/2}$

2. Függőleges szakasz

Ezek után

az $x = \frac{1}{2}$ egyenlettel és az $1/4 \leq y \leq 3/4$ egyenlőtlenségekkel

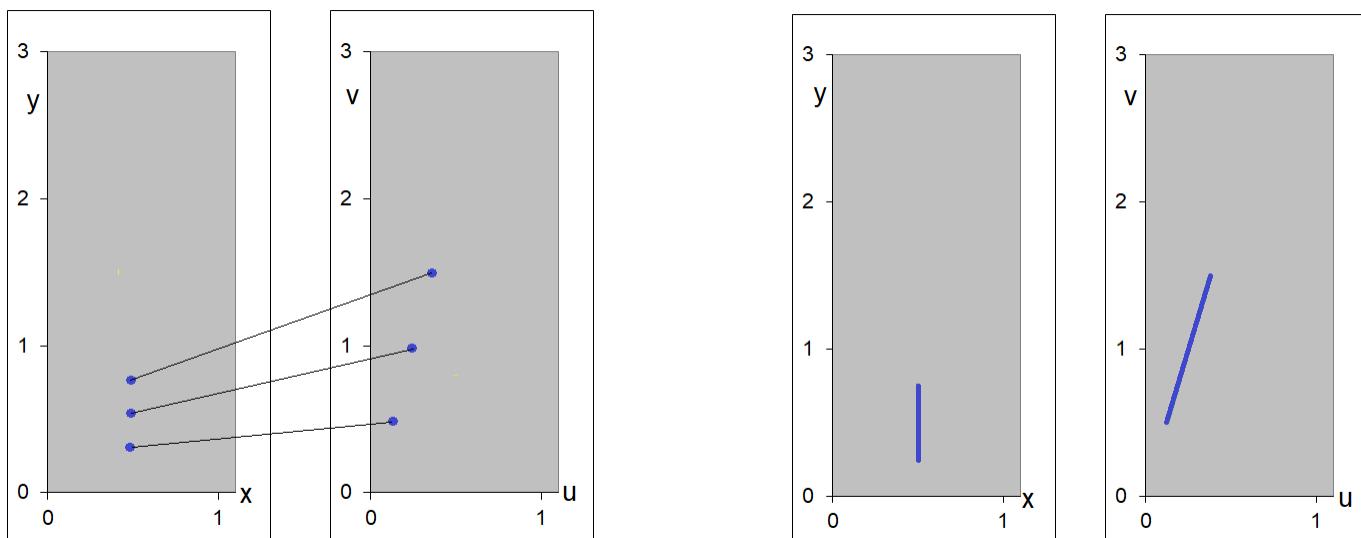
megadott függőleges szakasz transzformáltjának egyenletét határozzuk meg. A

$\sqrt{\frac{u}{v}} = \frac{1}{2}$ egyenletből és az $1/4 \leq \sqrt{u \cdot v} \leq 3/4$ egyenlőtlenségekből

kapjuk a megoldást:

$$v = 4 \cdot u \quad \frac{1}{8} \leq u \leq \frac{3}{8}$$

Látjuk, hogy a transzformációval kapott alakzat az (u, v) síkon egy szakasz, mely az origón átmenő 4 meredekségű egyenesen fekszik.



30. ábra. Három pont egymás felett és transzformáltjaik – Függőleges szakasz és transzformáltja

3. Három pont egy vízszintes szakaszon

Most az $y = \frac{1}{2}$ egyenletű vízszintes egyenesen veszünk fel három pontot. Ezek transzformáltjait is megadjuk:

$(x; y) \rightarrow (u; v)$	ahol $u = x \cdot y$	és $v = \frac{y}{x}$
$(1/4; 1/2) \rightarrow (1/8; 2)$	mert $1/8 = 1/2 \cdot 1/4$	és $2 = \frac{1/2}{1/4}$
$(1/2; 1/2) \rightarrow (1/4; 1)$	mert $1/4 = 1/2 \cdot 1/2$	és $1 = \frac{1/2}{1/2}$
$(3/4; 1/2) \rightarrow (3/8; 2/3)$	mert $3/8 = 3/4 \cdot 1/2$	és $2/3 = \frac{1/2}{3/4}$

4. Vízszintes szakasz

Ezek után

az $y = \frac{1}{2}$ egyenlettel és az $1/4 \leq x \leq 3/4$ egyenlőtlenségekkel

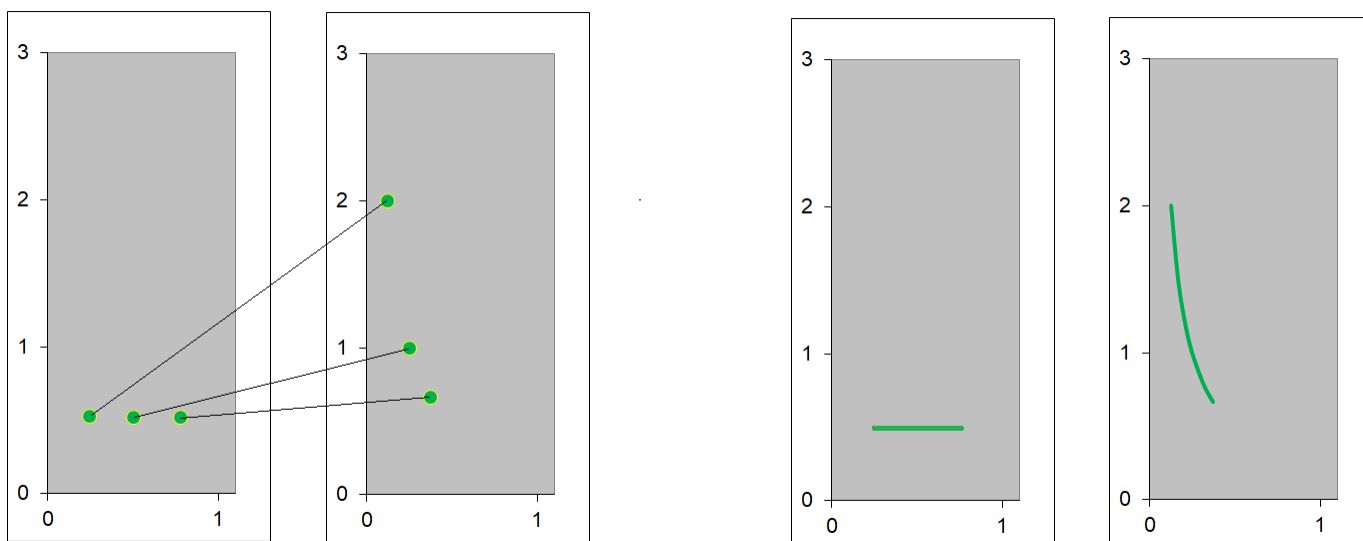
megadott vízszintes szakasz transzformáltjának egyenletét határozzuk meg. A

$\sqrt{u \cdot v} = \frac{1}{2}$ egyenletből és az $1/4 \leq \sqrt{\frac{u}{v}} \leq 3/4$ egyenlőtlenségekből

kapjuk a megoldást:

$$v = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{u} \quad \frac{1}{8} \leq u \leq \frac{3}{8}$$

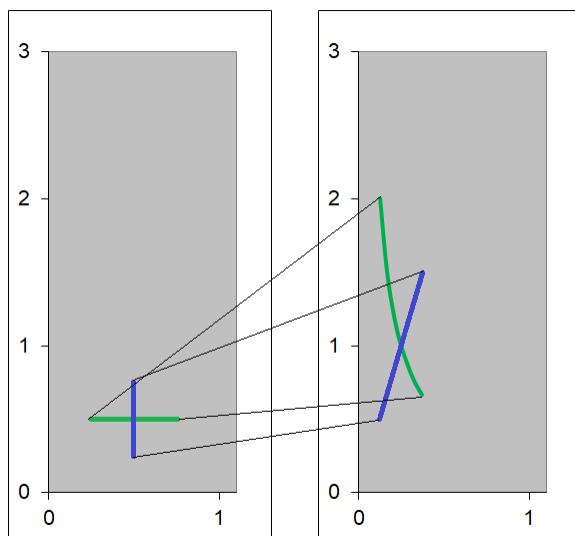
Látjuk, hogy a transzformációval kapott alakzat az (u, v) síkon egy hiperbola-darab, mely a $v = 1/u$ egyenletű "standard" hiperbolából függőleges irányú zsugorítással keletkezik.



31. ábra. Három pont egymás mellett és transzformáltjaik – Vízszintes szakasz és transzformáltja

5. "Plusz jel"

Ha a most vizsgált függőleges és vízszintes szakaszokból egy "plusz jel"-et rakunk össze, akkor láthatjuk, hogy a plusz jel transzformáltja egy erősen torzult plusz jel:



32. ábra. "Plusz jel" és transzformáltja

6. Vízszintes szakasz általánosan

Legyünk bátrabbak! Ha c tetszőleges konstans 0 és 1 között, akkor

az $y = c$ egyenlet és a $0 < x \leq 1$ egyenlőtlenségek

egy vízszintes szakaszt definiálnak a négyzetben. A szakasz transzformáltjának az egyenletét

a $\sqrt{u \cdot v} = c$ egyenletből és a $0 < \sqrt{\frac{u}{v}} \leq 1$ egyenlőtlenségekből

kapjuk. A megoldás:

$$v = c^2 \cdot \frac{1}{u} \quad 0 < u \leq c$$

A képletekből kiolvasható, hogy a transzformációval kapott alakzat az (u, v) síkon egy hiperbola-darab, mely a $v = 1/u$ egyenletű "standard" hiperbolából függőleges irányú zsugorítással keletkezik. A hiperbola-darab bal szélé a v tengelyt közelítve felszalad végtelen magasra, a jobboldali végpontja pedig a (c, c) pont

7. Függőleges szakasz általánosan

Hasonlóképpen, ha d tetszőleges konstans 0 és 1 között, akkor

az $x = d$ egyenlet és a $0 < y \leq 1$ egyenlőtlenségek

egy vízszintes szakaszt definiálnak a négyzetben. A szakasz transzformáltjának az egyenletét a

$$\sqrt{\frac{u}{v}} = d \quad 0 \leq \sqrt{u \cdot v} \leq 1$$

egyenlőtlenségekből kapjuk. A megoldás:

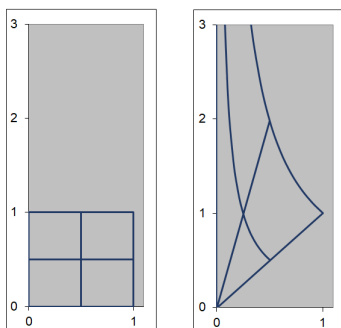
$$v = \frac{1}{d^2} \cdot u \quad 0 \leq u \leq d$$

A képletekből kiolvasható, hogy a transzformációval kapott alakzat az (u, v) -síkon egy szakasz azon az egyenesen, mely átmegy az origón, és meredeksége az 1 -nél nagyobb $1/d^2$ érték. A szakasz baloldali végpontja az origó, a jobboldali végpontja pedig a standard hiperbolán lévő $(d, 1/d)$ pont.

7.1.5. A "börtön rács" "díszes rács"-ba transzformálódik, a négyzetből pedig "vitorla" lesz,

Az előbb mondottakból remélhetőleg világos (lásd a következő ábrát!), hogy

- a függőleges és vízszintes szakaszokból álló "börtön rács" transzformáltja az ábrán látható "díszes rács",
- a négyzet transzformáltja pedig az a "vitorla" alakú alakzat, melyet az v -tengely, az u -tengely, a $v = u$ egyenletű egyenes és a $v = 1/u$ hiperbola határol.



33. ábra. A "börtön rács"-ból "díszes rács" lett lett

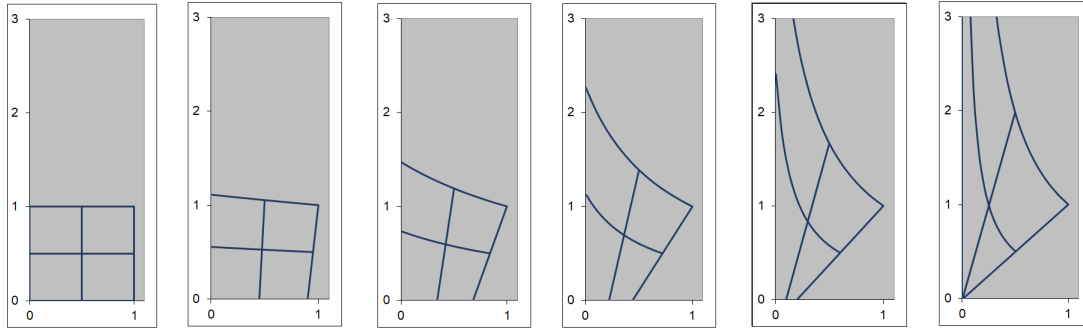
Abból a szempontból, ami számunkra az ilyen transzformációkkal kapcsolatban fontos, egyáltalán nincs szükség az alábbi ábrán látható kép-sorozatra. Mégis – a transzformáció fizikai megvalósításának az elképzelésében – segíthet a következő ábrán látható képek sorozata:

- Kiindulunk a négyzetből és benne felvett rácsból.
- A négyzet jobb alsó sarkát szép finoman húzzuk az origó felé, a bal felső sarkát pedig egyre vadabban toljuk felfelé.
- A jobb alsó sarkot behúzzuk az origóba, a bal felső sarkot pedig toljuk, toljuk a függőleges tengelyen a végtelen felé.

- A leírt időben folytonos deformáció határértékeként kapjuk a legutolsó ábrát, ami megfelel a mi

$$u = x \cdot y \quad v = \frac{y}{x}$$

transzformációnknak.



34. ábra. A transzformáció megvalósítása öt lépésben

Megjegyzés: Természetesen sokféle módon végre lehet hajtani olyan időben folytonos deformációt, ami a mi transzformációnkat valósítja meg. Nem titok, hogyan született az alábbi kép-sorozat. Íme a képlet:

$$u = x \cdot ((1 - t) + t \cdot y) \quad v = \frac{y}{(1 - t) + t \cdot x}$$

ahol a t paraméter az "idő" szerepét tölti be ($0 \leq t \leq 1$). Tessék ellenőrizni, hogy $t = 0$ esetén a

$$u = x \quad v = y$$

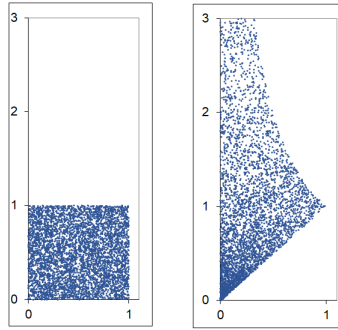
képlet-pár a "helyben maradás"-t jelenti, $t = 1$ esetén pedig a bennünket érdeklő

$$u = x \cdot y \quad v = \frac{y}{x}$$

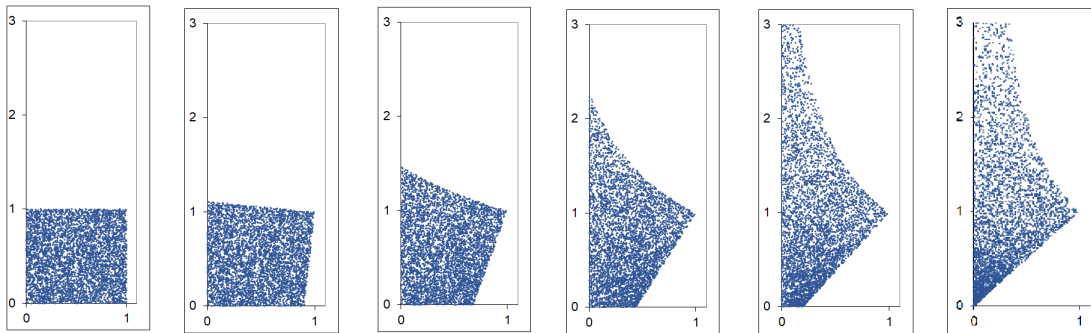
transzformációnkat adja. Az ábrán látható hat kép a $t = 0.00, 0.10, 0.32, 0.56, 0.80, 1.00$ értékekkel készült.

7.1.6. Pontfelhők transzformációja

1. Egyenletes eloszlású pontfelhő transzformációja

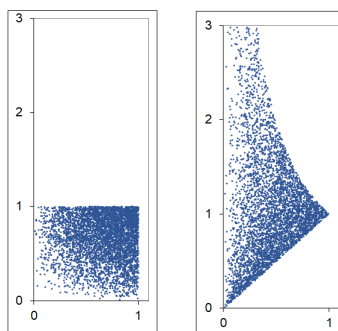


35. ábra. Egyenletes eloszlású pontfelhő transzformációja

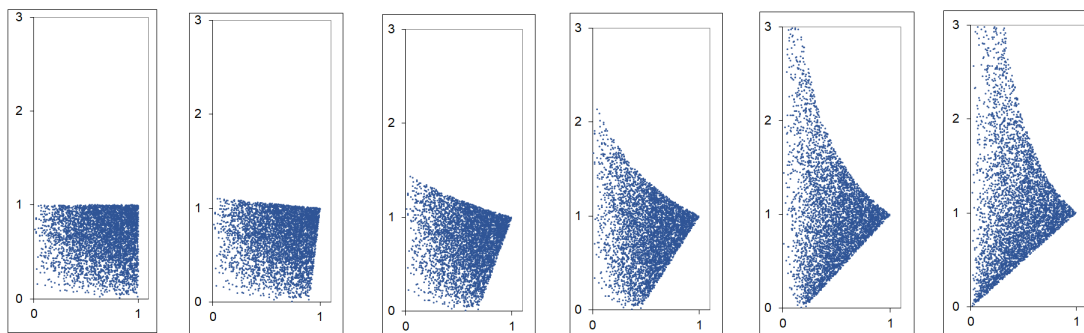


36. ábra. Egyenletes eloszlású pontfelhő transzformációja öt lépésben

2. Nem-egyenletes eloszlású pontfelhő transzformációja



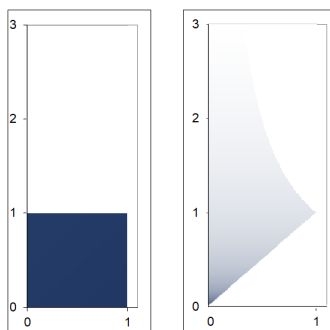
37. ábra. Az $f(x, y) = 4xy$ sűrűségfüggvényt követő pontfelhő transzformációja



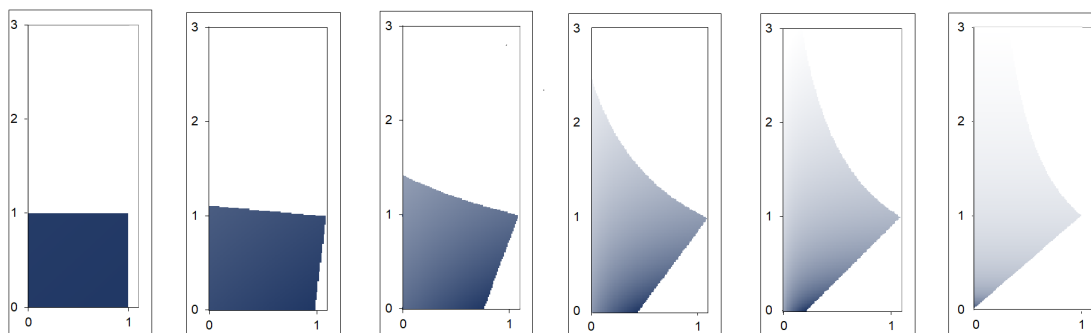
38. ábra. Az $f(x, y) = 4xy$ sűrűségfüggvényt követő pontfelhő transzformációja öt lépésben

7.1.7. Eloszlások transzformációja

1. Egyenletes eloszlás transzformációja

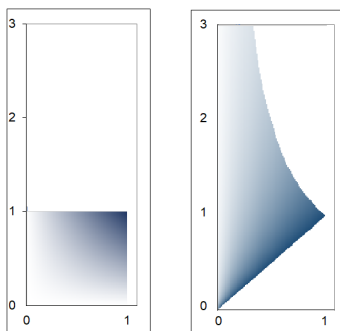


39. ábra. Egyenletes eloszlás transzformációja

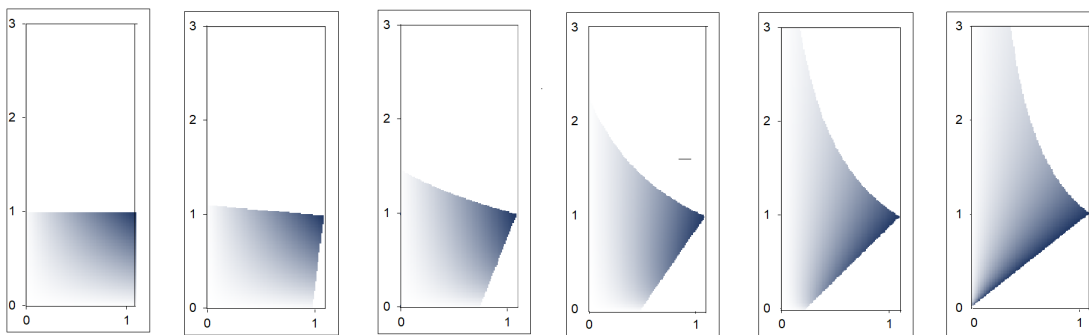


40. ábra. Egyenletes eloszlás transzformációja öt lépésben

2. Nem-egyenletes eloszlás transzformációja



41. ábra. Az $f(x, y) = 4xy$ sűrűségfüggvényű eloszlás transzformációja



42. ábra. Az $f(x, y) = 4xy$ sűrűségfüggvényű eloszlás transzformációja öt lépésben

7.2. Jacobi mátrix

Tekintsünk egy kölcsönösen egyértelmű t transzformációt az (x, y) -síkról az (u, v) -síkra, mely az alábbi két kétváltozós koordináta függvénnyel van megadva:

$$u = u(x, y)$$

$$v = v(x, y)$$

Az inverz transzformációt t^{-1} jelöli, ennek koordináta függvényei:

$$x = x(u, v)$$

$$y = y(u, v)$$

Az inverz transzformáció **Jacobi mátrixa** fontos szerepet játszik abban a formulában, melyet alább megadunk. Definiója:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial x(u, v)}{\partial v} \\ \frac{\partial y(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial y(u, v)}{\partial v} \end{pmatrix}$$

7.3. Sűrűségfüggvények közötti kapcsolat

Ha az (x, y) -síkon tekintett $f(x, y)$ sűrűségfüggvényű eloszlást a t transzformációval az (u, v) -síkra transzformáljuk, akkor az új eloszlás sűrűségfüggvénye így fejezhető ki a régivel:

Állítás.

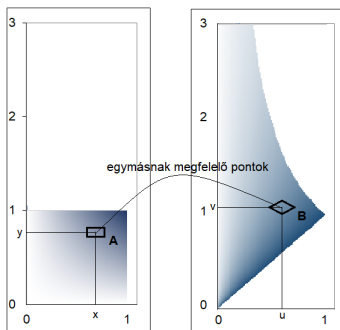
$$s(u, v) = f(x(u, v), y(u, v)) \left| \det \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) \right|$$

Vázlatos bizonyítás. Tekintsünk egy (x, y) pontot az (x, y) -síkon, mely a t transzformációnál (u, v) pontnak felel meg az (u, v) -síkon. Vegyünk fel egy kis A halmazt az (x, y) pont körül, mely a t transzformációnál egy B halmaznak felel meg az (u, v) pont körül. Mint ismeretes

$$\frac{A \text{ területe}}{B \text{ területe}} \approx \left| \det \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) \right|$$

Ezt felhasználva

$$s(u, v) \approx \frac{P((U, V) \in B)}{B \text{ területe}} = \frac{P((X, Y) \in A)}{A \text{ területe}} \cdot \frac{A \text{ területe}}{B \text{ területe}} \approx f(x, y) \left| \det \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) \right|$$



43. ábra. Sűrűségfüggvények közötti kapcsolat levezetése

8. Lineáris transzformáció síkról síkra

8.1. Mátrixszal való szorzás

Tekintsük a

$$\begin{aligned}u &= a_{11}x + a_{12}y \\v &= a_{21}x + a_{22}y\end{aligned}$$

képletekkel definiált, azaz – mátrixokkal felírva – a

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

képlettel definiált lineáris transzformációt, mely az (x, y) -síkról az (u, v) -síkra képez. Bevezetve a

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\end{aligned}$$

jelöléseket, a transzformáció formálisan így is írható:

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Az inverz transzformáció képlete:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}$$

ahol $\mathbf{A}^{-1}$ az $\mathbf{A}$ mátrix inverze.

Ha az (x, y) -síkon tekintett $f(\mathbf{x})$ sűrűségfüggvényű eloszlást a lineáris transzformációval az (u, v) -síkra transzformáljuk, akkor az új eloszlás sűrűségfüggvénye így fejezhető ki a régivel:

$$s(\mathbf{u}) = f(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}) |\det(\mathbf{A}^{-1})|$$

A képletben a $|\det(\mathbf{A}^{-1})|$ szorzófaktor az inverzmátrix determinánsának abszolút értékét jelenti.

8.2. Mátrixszal való szorzás és eltolás

Tekintsük most a

$$\begin{aligned}u &= a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\v &= a_{21}x + a_{22}y + b_2\end{aligned}$$

képlettel definiált lineáris transzformációt, mely az (x, y) -síkról az (u, v) -síkra képez. Bevezetve a

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

jelölést, a transzformáció formálisan így is írható:

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

Az inverz transzformáció képlete:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{u} - \mathbf{b})$$

Ha az (x, y) -síkon tekintett $f(\mathbf{x})$ sűrűségfüggvényű eloszlást a lineáris transzformációval az (u, v) -síkra transzformáljuk, akkor az új eloszlás sűrűségfüggvénye így fejezhető ki a régivel:

$$s(\mathbf{u}) = f(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{u} - \mathbf{b})) |\det(\mathbf{A}^{-1})|$$

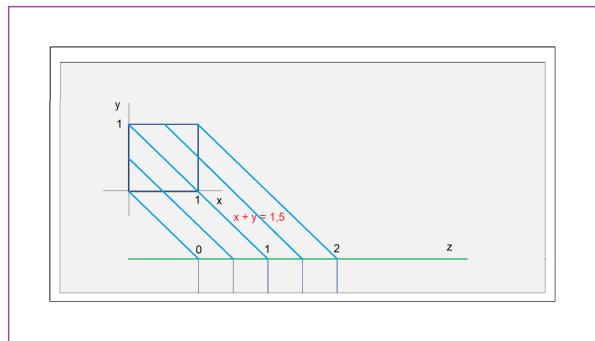
9. Transzformáció síkról egyenesre

9.1. Példák ábrákkal szemléltetve

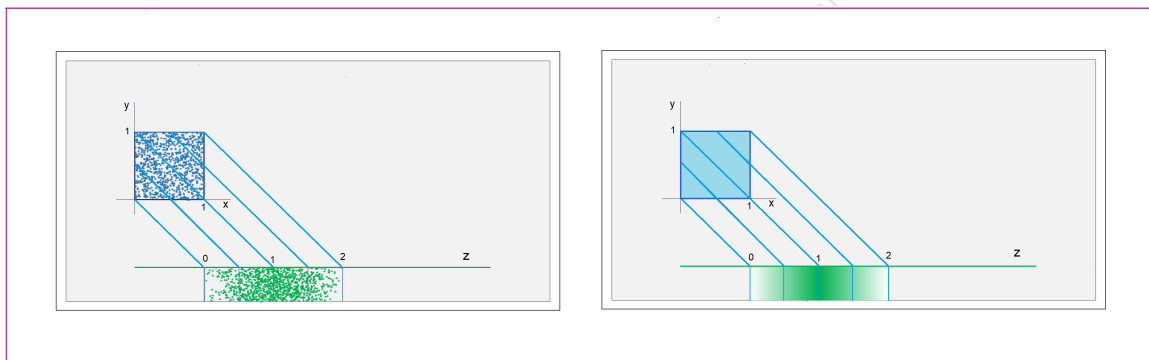
A következő négy oldalon példák vannak, melyeket egyelőre – a matematikai számolások mellőzésével – csak nézegetni kell. Ezekkel a példákkal az általános szabályt próbáljuk előkészíteni. A példákkal kapcsolatos számolások majd akkor jönnek, ha az általános szabályt már megbeszéltük.

Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

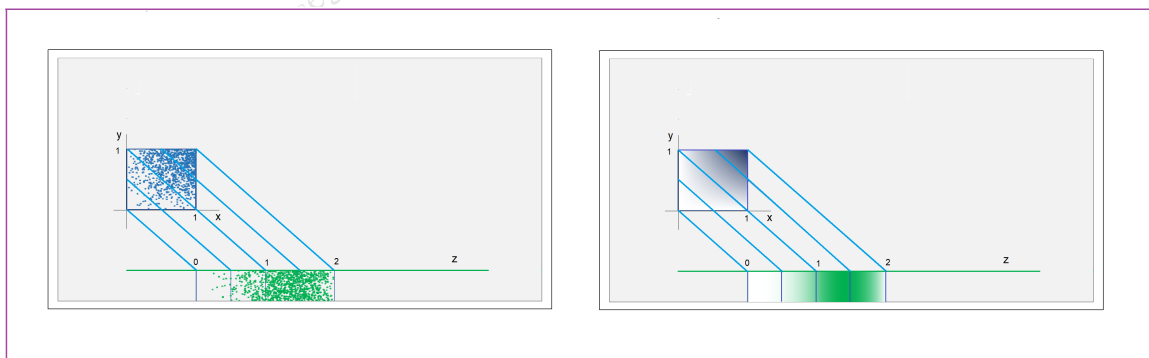
9.1.1. Transzformáció a $z = x + y$ összeg függvénnyel



44. ábra. Transzformáció az egységnégyzetről a $z = x + y$ összeg függvénnyel

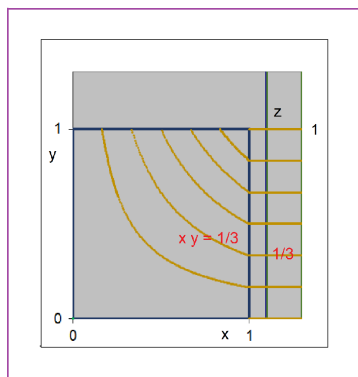


45. ábra. Egyenletes eloszlás transzformációja

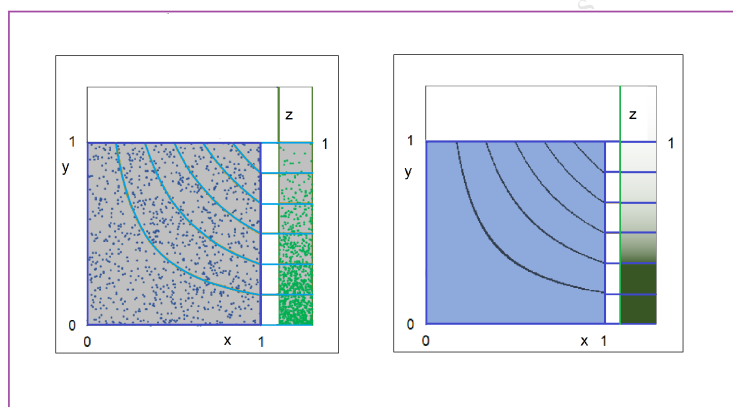


46. ábra. Az $f(x, y) = 4xy$ sűrűségfüggvényű eloszlás transzformációja

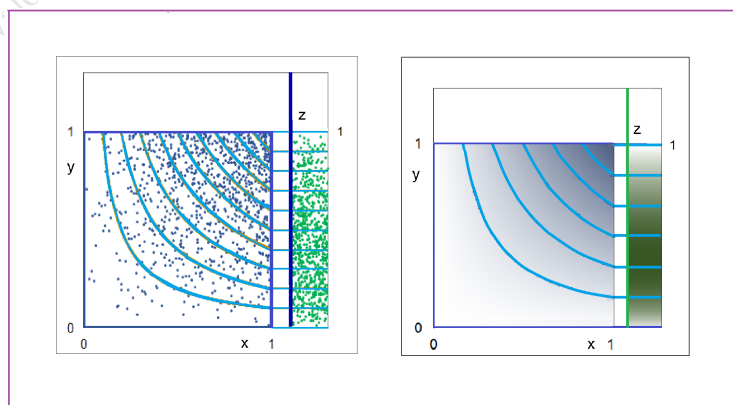
9.1.2. Transzformáció a $z = x \cdot y$ szorzat függvénnyel



47. ábra. Transzformáció az egységnégyzetről a $z = x \cdot y$ szorzat függvénnyel

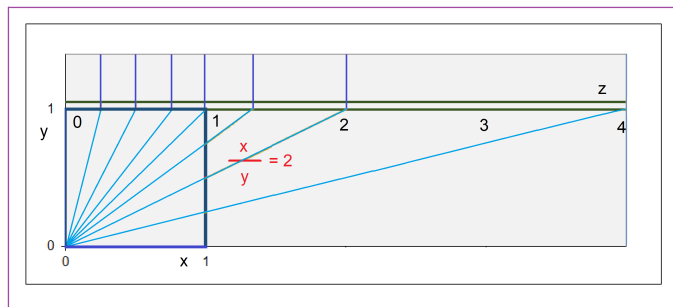


48. ábra. Egyenletes eloszlású pontfelhő transzformációja

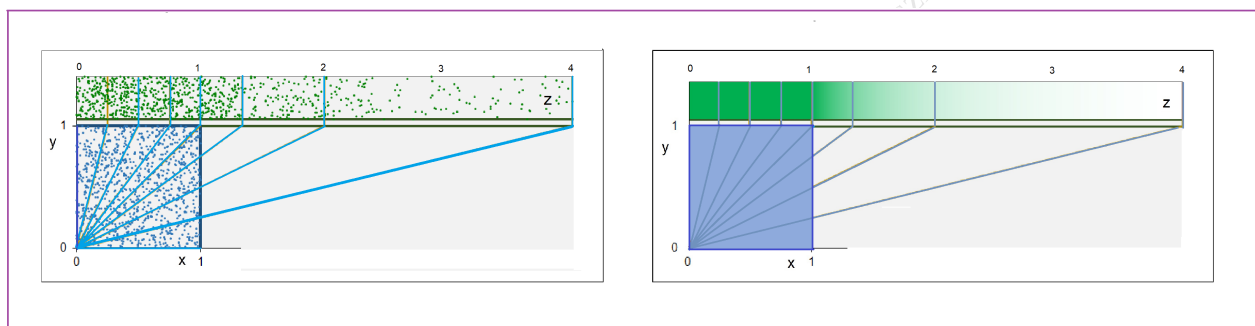


49. ábra. Az $f(x, y) = 4xy$ sűrűségfüggvényű eloszlás transzformációja

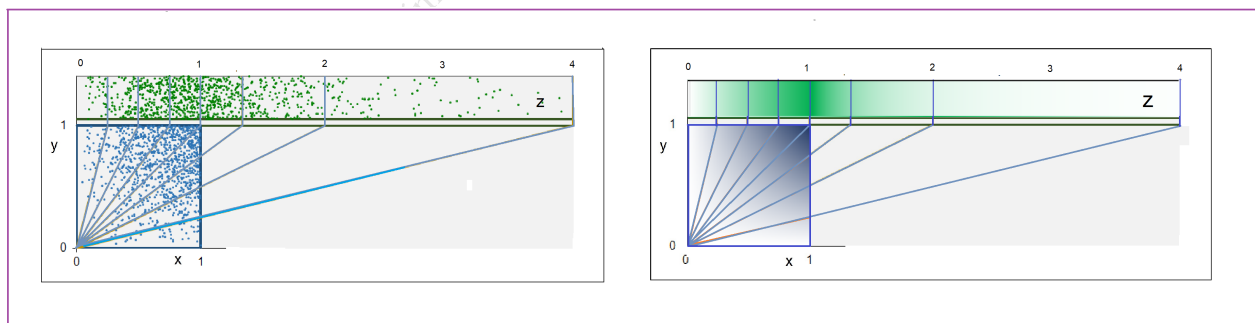
9.1.3. Transzformáció a $z = x/y$ hányados függvénnyel



50. ábra. Transzformáció az egységnégyzetről a $z = x/y$ hányados függvénnyel



51. ábra. Egyenletes eloszlás transzformációja



52. ábra. Az $f(x,y) = 4xy$ sűrűségfüggvényű eloszlás transzformációja

9.2. Általános transzformációs képlet

Tekintsünk egy (X, Y) folytonos kétdimenziós valószínűségi változót. Jelöljük a sűrűségfüggvényét $f(x, y)$ -nal. Legyen $z = t(x, y)$ egy folytonosan differenciálható egy-egyértelmű kétváltozós függvény, mely a síkról a számegyenesre képez: az (x, y) számpárhoz hozzárendeli azt a z számot, melyet a $z = t(x, y)$ képlet definiál. Ha az X és Y valószínűségi változók értékeit behelyettesítjük a $t(x, y)$ függvénybe, akkor egy új Z valószínűségi változót kapunk, melyet $t(X, Y)$ -nal jelölünk. A Z , vagyis a $t(X, Y)$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét jelöljük $R(z)$ -vel, sűrűségfüggvényét $r(z)$ -vel.

Állítás:

$$R(z) = \iint_{A_z} f(x, y) dx dy$$

ahol az A_z halmaz a $t(x, y) < z$ egyenlőtlenség megoldás halmazának az eseménytérben belüli része. Ezt a halmazt a $(-\infty, z)$ intervallum $z = t(x, y)$ transzformációval kapcsolatos **ősképeknek**, avagy a z szinthez tartozó **nívóhalmaznak** is szokták nevezni.

Bizonyítás. A $Z < z$ esemény ekvivalens az $(X, Y) \in A_z$ eseménnyel, így

$$R(z) = P(Z < z) = P((X, Y) \in A_z) = \iint_{A_z} f(x, y) dx dy$$

A kapott $R(z)$ függvényt z szerint deriválva a sűrűségfüggvényt kapjuk:

$$r(z) = R'(z)$$

9.3. Számolások a fentebbi példákkal kapcsolatban

Az alábbi példákkal néhány oldallal feljebb már találkoztunk. Ott – ábrák segítségével – csak bemutattuk a transzformációk hatását, a keletkező eloszlásokat festékekkel szemléltettük. Ebben az alfejezetben kiszámoljuk a transzformációval adódó új eloszlások eloszlás- és sűrűségfüggvényét.

Mindegyik példában a kiindulásul vett eseménytér az $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ egyenlőtlenségekkel definiált egységnégyzet. A feladatok párokat alkotnak, mert mindegyik transzformációval kapcsolatban először az egyenletes eloszlást, aztán pedig az $f(x, y) = 4xy$ sűrűségfüggvényű eloszlás transzformáljuk.

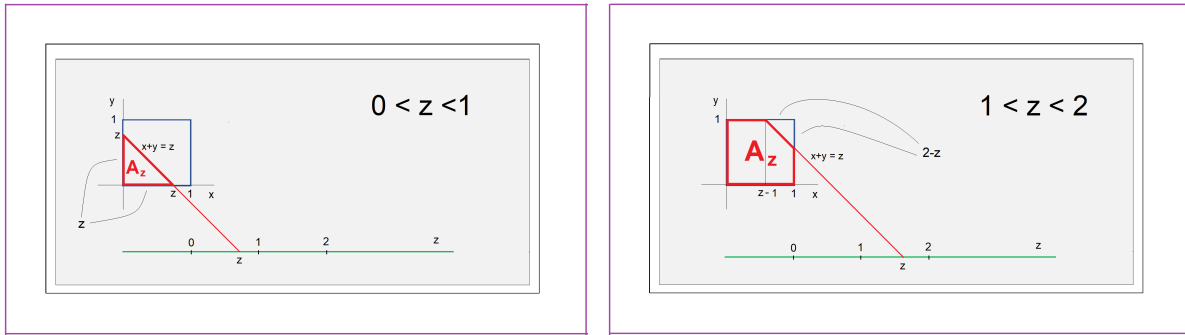
A transzformációval adódó eloszlás $R(z)$ eloszlásfüggvényének kiszámolásához először az

$$R(z) = \iint_{A_z} f(x, y) dx dy$$

képletben szereplő A_z nívóhalmazt kell meghatározni a szóbanjövő z értékekre. Ehhez a $t(x, y) < z$ egyenlőtlenség megoldás halmazára van szükségünk. Ezért mindegyik transzformáció esetében ezzel kezdődik a számolás.

Amikor egyenletes eloszlást transzformálunk, akkor integrál helyett területek hányadosaként is megkaphatjuk az $R(z)$ valószínűséget.

9.3.1. Transzformáció a $z = x + y$ összeg függvénnyel



53. ábra. Nívóhalmazok meghatározása a $z = x + y$ transzformáció kapcsán

Az $x + y < z$ egyenlőtlenség megoldás halmaza az $x + y = z$ egyenletű egyenes alatti félsík. Ezért az A_z halmaz

$0 < z < 1$ esetén nem más, mint egy derékszögű háromszög az egységnégyzet bal alsó sarkában, melyet az alábbi egyenlőtlenségekkel jellemezhetünk:

$$0 < x < z, \quad 0 < y < z - x$$

Ennek a derékszögű háromszögnek a befogói z hosszúságúak.

$1 < z < 2$ esetén pedig az A_z halmaz egy ötszög, melynek az egységnégyzetre vonatkozó komplementere nem más, mint egy derékszögű háromszög a négyzet jobb felső sarkában. Ezt a háromszöget az alábbi egyenlőtlenségekkel jellemezhetjük:

$$z - 1 < x < 1, \quad z - x < y < 1$$

Ennek a derékszögű háromszögnek a befogói $2 - z$ hosszúságúak.

1/A. Egyenletes eloszlás transzformációja a $z = x + y$ összeg függvénnyel.

Az $R(z)$ valószínűséget területekkel számolhatjuk ki:

$0 < z < 1$ esetén

$$R(z) = \frac{\text{bal alsó háromszög területe}}{\text{egységnégyzet területe}} = \frac{z^2/2}{1} = z^2/2$$

$1 < z < 2$ esetén

$$R(z) = 1 - \frac{\text{jobb felső sarki háromszög területe}}{\text{egységnégyzet területe}} = 1 - \frac{(2-z)^2/2}{1} = 1 - (2-z)^2/2$$

A sűrűségfüggvényt deriválással kapjuk:

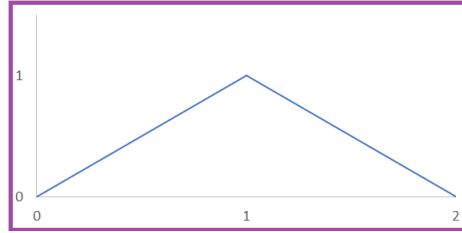
$0 < z < 1$ esetén

$$r(z) = z$$

$1 < z < 2$ esetén

$$r(z) = 2 - z$$

A sűrűségfüggvény grafikonja:



54. ábra. A sűrűségfüggvény grafikonja

1/B. Az $f(x, y) = 4xy$ sűrűségfüggvényű eloszlás transzformációja a $z = x + y$ összeg függvénnyel.

Az $R(z)$ valószínűséget integrállal számolhatjuk ki:

$0 < z < 1$ esetén

$$R(z) = \iint_{A_z} f(x, y) dx dy = \int_0^z \left(\int_0^{z-x} 4xy dy \right) dx = \frac{z^4}{6}$$

$1 < z < 2$ esetén

$$R(z) = \iint_{A_z} f(x, y) dx dy = 1 - \int_{z-1}^1 \left(\int_{z-x}^1 4xy dy \right) dx = 1 - \frac{8z}{3} + 2z^2 - \frac{z^4}{6}$$

A sűrűségfüggvényt deriválással kapjuk:

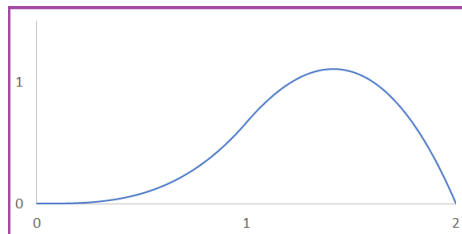
$0 < z < 1$ esetén

$$r(z) = \frac{2z^3}{3}$$

$1 < z < 2$ esetén

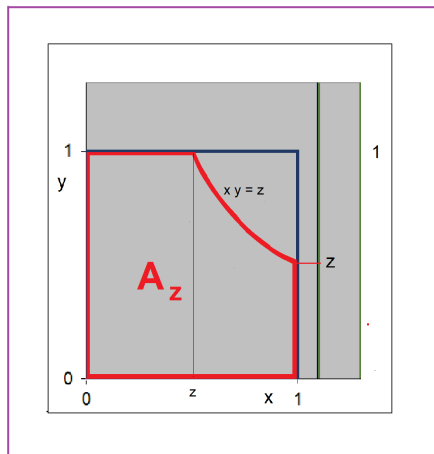
$$r(z) = -\frac{8}{3} + 4z - \frac{2z^3}{3}$$

A sűrűségfüggvény grafikonja:



55. ábra. A sűrűségfüggvény grafikonja

9.3.2. Transzformáció a $z = x \cdot y$ szorzat függvénnyel



56. ábra. Nívóhalmazok meghatározása a $z = x \cdot y$ transzformáció kapcsán

Az $x \cdot y < z$ egyenlőtlenség megoldás halmaza az első síknegyedben az $x \cdot y$ egyenletű hiperbola alatti tartomány. Ezért az A_z halmaz nem más, mint ennek a tartománynak az egységnégyzetbe eső ötszög jellegű része, mely az

$$0 < x < z, \quad 0 < y < 1$$

egyenlőtlenségekkel megadható téglalapról, és a

$$z < x < 1, \quad 0 < y < \frac{z}{x}$$

egyenlőtlenségekkel megadható trapéz jellegű halmazból tevődik össze.

2/A. Egyenletes eloszlás transzformációja a $z = x \cdot y$ szorzat függvénnyel.

Az $R(z)$ valószínűséget területekkel számolhatjuk ki:

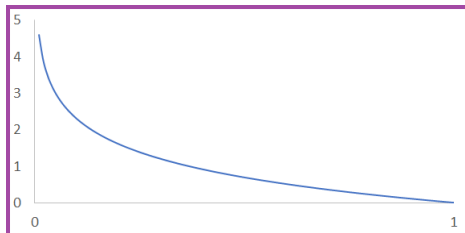
$0 < z < 1$ esetén

$$R(z) = \frac{\text{téglalap területe} + \text{trapéz jellegű rész területe}}{\text{egységnégyzet területe}} = \frac{z \cdot 1 + \int_z^1 z/x \, dx}{1} = z - z \cdot \ln(z)$$

A sűrűségfüggvényt deriválással kapjuk:

$$r(z) = -\ln(z)$$

A sűrűségfüggvény grafikonja:



57. ábra. A sűrűségfüggvény grafikonja

2/B. Az $f(x, y) = 4xy$ sűrűségfüggvényű eloszlás transzformációja a $z = x \cdot y$ szorzat függvénnyel.

Az $R(z)$ valószínűséget integrállal számolhatjuk ki:

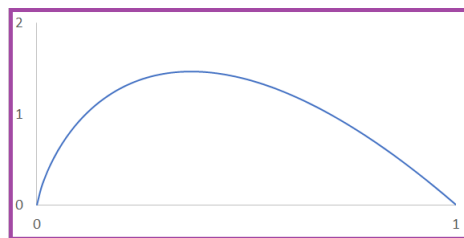
$0 < z < 1$ esetén

$$R(z) = \int_0^z \left(\int_0^1 4xy \, dy \right) dx + \int_z^1 \left(\int_0^{z/x} 4xy \, dy \right) dx = z^2 - 2z^2 \cdot \ln(z)$$

A sűrűségfüggvényt deriválással kapjuk:

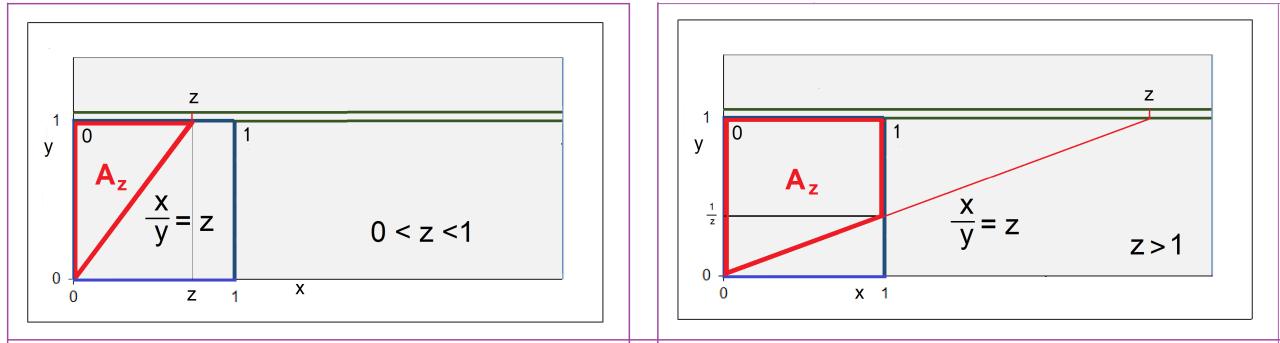
$$r(z) = -4z \cdot \ln(z)$$

A sűrűségfüggvény grafikonja:



58. ábra. A sűrűségfüggvény grafikonja

9.3.3. Transzformáció a $z = x/y$ hányados függvénnyel



59. ábra. Nívóhalmazok meghatározása a $z = x/y$ transzformáció kapcsán

Az $x/y < z$ egyenlőtlenség megoldás halmaza nem más, mint az $x/y = z$, azaz $y = x/z$ egyenletű egyenes feletti félsík. (Nem elírás! A megoldás halmaz tényleg az $y = x/z$ egyenletű egyenes **feletti** félsík.) Ezért az A_z halmaz

$0 < z < 1$ esetén nem más, mint egy derékszögű háromszög az egységnégyzet bal oldalán, melyet az alábbi egyenlőtlenségekkel jellemezhetünk:

$$0 < x < z, \quad x/z < y < 1$$

Ennek a derékszögű háromszögnek a befogói z , illetve 1 hosszúságúak.

$1 < z$ esetén az A_z halmaz egy derékszögű trapéz, melynek a párhuzamos alapjai függőleges helyzetűek. Ezt a trapézt az alábbi egyenlőtlenségekkel jellemezhetjük:

$$0 < x < 1, \quad x/z < y < 1$$

Ennek a trapéznek az alapjai 1 , illetve $1 - 1/z$ hosszúságúak, a trapéz magassága pedig 1 .

3/A. Egyenletes eloszlás transzformációja a $z = x/y$ hányados függvénnyel.

Az $R(z)$ valószínűséget területekkel számolhatjuk ki:

$0 < z < 1$ esetén

$$R(z) = \frac{\text{bal oldali háromszög területe}}{\text{egységnégyzet területe}} = \frac{z/2}{1 \cdot 1} = \frac{z}{2}$$

$z > 1$ esetén

$$R(z) = \frac{1 - 1/(2z)}{1 \cdot 1} = 1 - \frac{1}{2z}$$

A sűrűségfüggvényt deriválással kapjuk:

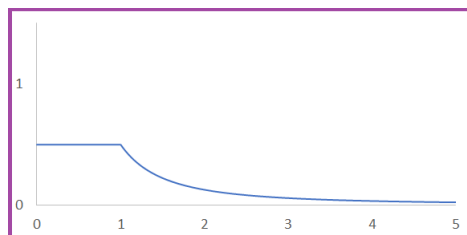
$0 < z < 1$ esetén

$$r(z) = \frac{1}{2}$$

$z > 1$ esetén

$$r(z) = \frac{1}{2z^2}$$

A sűrűségfüggvény grafikonja:



60. ábra. A sűrűségfüggvény grafikonja

3/B. Az $f(x, y) = 4xy$ sűrűségfüggvényű eloszlás transzformációja a $z = x/y$ hányados függvénnyel.

Az $R(z)$ valószínűséget integrállal számolhatjuk ki:

$0 < z < 1$ esetén

$$R(z) = \iint_{A_z} f(x, y) dx dy = \int_0^z \left(\int_{x/z}^1 4xy dy \right) dx = \frac{z^2}{2}$$

$z > 1$ esetén

$$R(z) = \iint_{A_z} f(x, y) dx dy = \int_0^1 \left(\int_{x/z}^1 4xy dy \right) dx = 1 - \frac{1}{2z^2}$$

A sűrűségfüggvényt deriválással kapjuk:

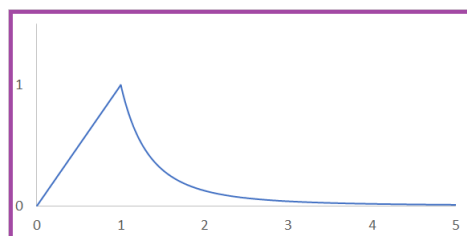
$0 < z < 1$ esetén

$$r(z) = z$$

$1 < z < 2$ esetén

$$r(z) = \frac{1}{z^3}$$

A sűrűségfüggvény grafikonja:



61. ábra. A sűrűségfüggvény grafikonja

9.4. Kétlépéses módszer a $z = x + y$ transzformáció esetén – példák ábrákkal szemlélítve

A sok síkról egyenesre történő transzformáció közül kiragadjuk a legfontosabbat: az összegképzést. Az összegképzéssel kapcsolatban egy egyszerű módszert mutatunk a sűrűségfüggvény meghatározására. Először – ügyesen – a síkról síkra képezünk, onnan pedig a vízszintes tengelyre vetítünk. Igaz, két lépésben jutunk el az összeg sűrűségfüggvényéhez, de mindkét lépés egyszerű és elegáns.

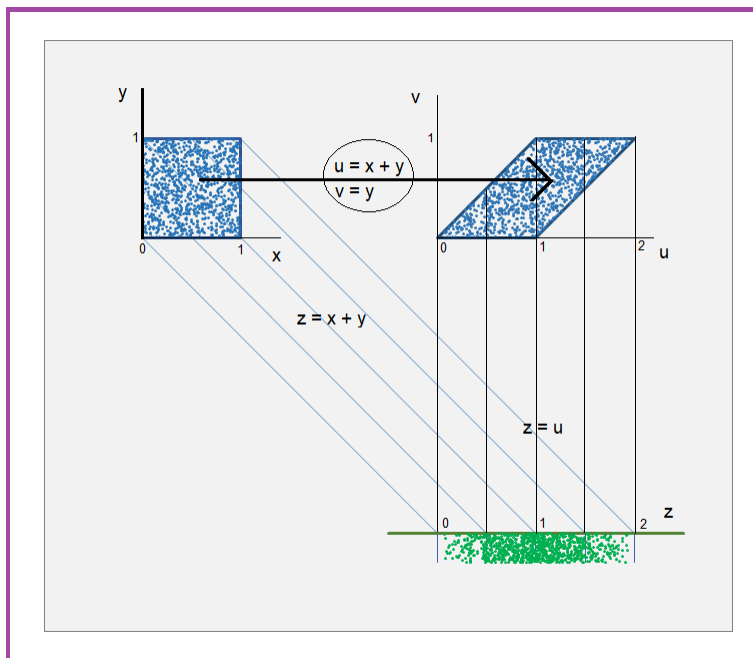
Tessék nézegetni, tanulmányozgatni a következő három oldalon lévő ábra-párokat! Mindhárom oldalon

- a felső ábra kísérleti eredményeket ábrázol pontfelhőkkel,
- az alsó ábra elméleti eloszlásokat ábrázol festékekkel.

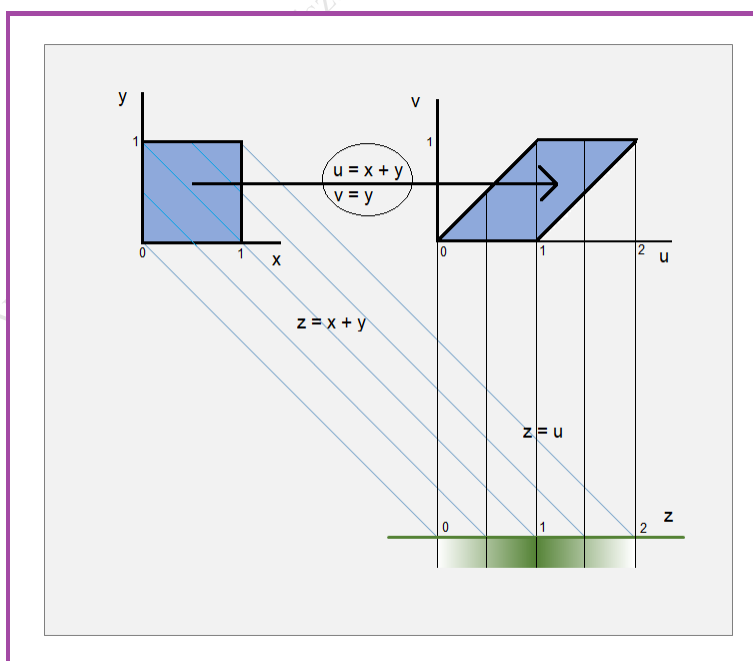
A példákkal kapcsolatos számolásokat egy későbbi alfejezetben adjuk meg.

Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

9.4.1. Egyenletes eloszlás transzformációja két lépésben

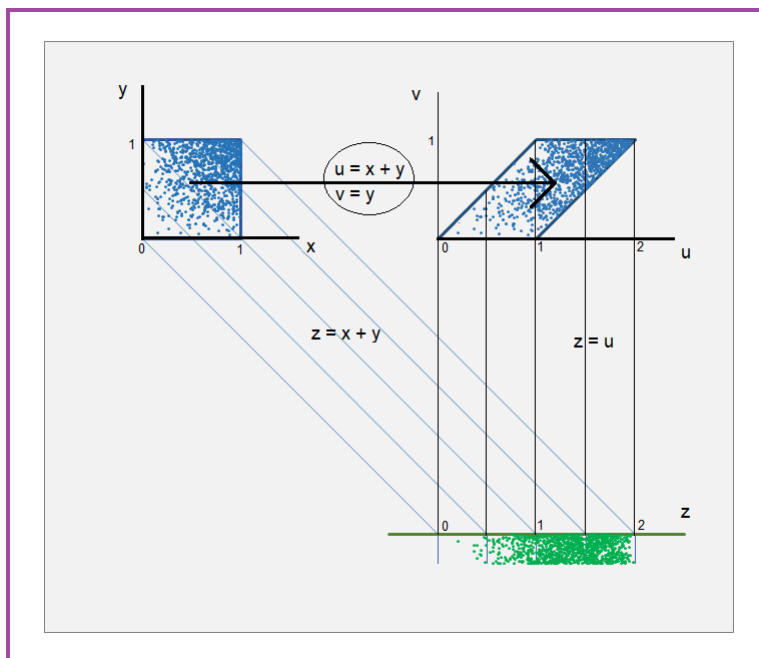


62. ábra. Pontfelhő transzformációja két lépésben

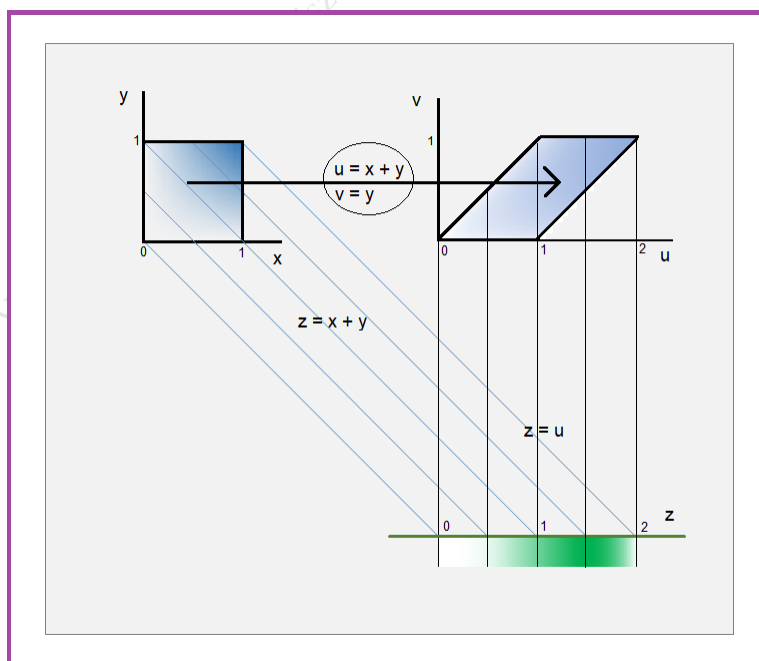


63. ábra. Festék eloszlás transzformációja két lépésben

9.4.2. Az $f(x, y) = 4xy$ sűrűségfüggvényű eloszlás transzformációja két lépésben

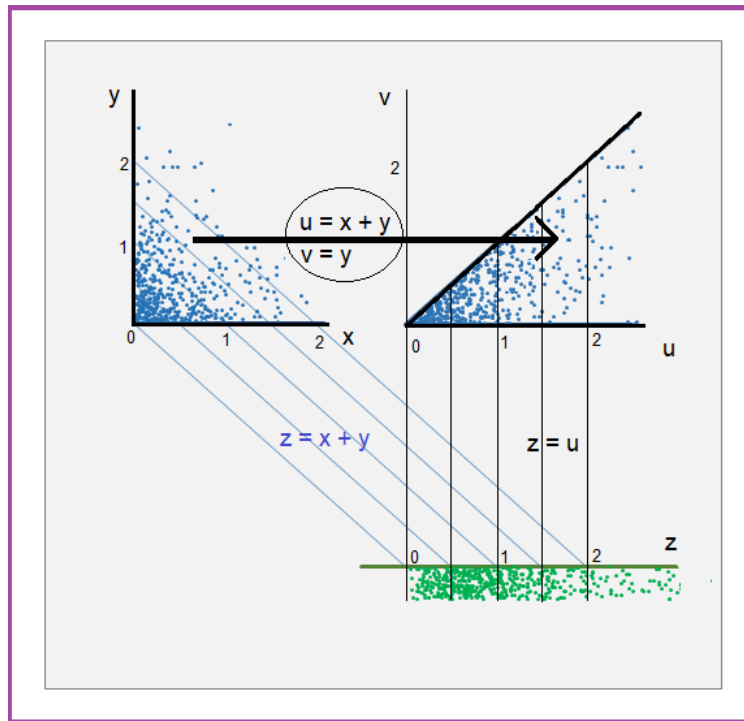


64. ábra. Pontfelhő transzformációja két lépésben

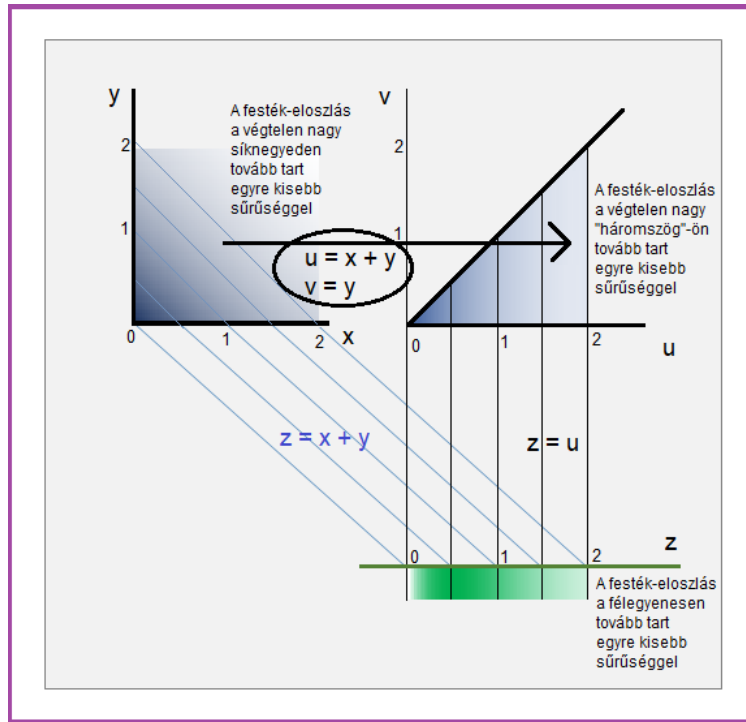


65. ábra. Festék eloszlás transzformációja két lépésben

9.4.3. Kétdimenziós exponenciális eloszlás transzformációja két lépésben



66. ábra. Pontfelhő transzformációja két lépésben



67. ábra. Festék eloszlás transzformációja két lépésben

9.5. Kétlépéses módszer a $z = x + y$ transzformáció esetén – általános képlet

Mielőtt ezt a részt elolvassa, érdemes átnézni az 1. rész 8. fejezetének 8. alpontjában olvasható 3. példát, melynek címe: "A kihúzott pirosak száma és kékék száma összegének súlyfüggvénye (eloszlása)".

Ugyanis ez a példa rámutat arra az egyszerű tényre, hogy *diszkrét X és Y valószínűségi változók esetén a két valószínűségi változó $Z = X + Y$ összegének $r(z)$ súlyfüggvényét úgy kapjuk meg a síkbeli $p(x, y)$ súlyfüggvényből, hogy $p(x, y)$ értékeit összegezzük az $x + y = z$ egyenletű egyenes mentén.*

A következő állítás szerint *folytonos X és Y valószínűségi változók esetén a két valószínűségi változó $Z = X + Y$ összegének $r(z)$ sűrűségfüggvényét úgy kapjuk meg a síkbeli $f(x, y)$ súlyfüggvényből, hogy $f(x, y)$ értékeit integráljuk az $x + y = z$ egyenletű egyenes mentén.*

Állítás: Tegyük fel, hogy az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x, y)$. X és Y összegét jelöljük Z -vel: $Z = X + Y$. Ekkor Z sűrűségfüggvénye kétféleképpen is kiszámolható $f(x, y)$ -ből:

$$r(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z - v, v) dv$$

$$r(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u, z - u) du$$

1. Megjegyzés. Adott z esetén a $(z - v, v)$, illetve az $(u, z - u)$ pontok az $x + y = z$ egyenletű egyenest futják be, ezért mindkét formula azt fejezi ki, hogy $r(z)$ -t úgy kapjuk meg $f(x, y)$ -ből, hogy az értékeit az $x + y = z$ egyenletű egyenes mentén integráljuk.

2. Megjegyzés. Természetesen az integrál kiszámításánál az integritási tartományból elhagyatók az olyan részek, ahol az integrandus 0-val egyenlő. Ezért ha az $f(x, y)$ sűrűségfüggvény az S tartományon kívül nulla, akkor egy adott z érték esetén a $(-\infty, \infty)$ integritási tartomány

- az első integrálban az $A_z = \{v : (z - v, v) \in S\}$ halmazzal helyettesíthető:

$$r(z) = \int_{A_z} f(z - v, v) dv$$

- a második integrálban a $B_z = \{u : (u, z - u) \in S\}$ halmazzal helyettesíthető:

$$r(z) = \int_{B_z} f(u, z - u) du$$

Az első formula vázlatos bizonyítása. A $z = x + y$ leképezést több lépésben hajtjuk végre. Először tekintjük az (x, y) -síkról az (u, v) -síkra ható

$$\begin{aligned} u &= x + y \\ v &= y \end{aligned}$$

lineáris leképezést, majd az (u, v) -síkról vetítünk a vízszintes tengelyre. A vízszintes tengelyt általában u -tengelynek szoktunk nevezni, de most z tengelynek is nevezzük. (Egy tengelynek lehet több neve, jele is!) A síkról síkra való transzformáció a vetítéssel és az átnevezéssel együtt a $z = x + y$ leképezést adja.

Az (x, y) -síkról az (u, v) -síkra ható lineáris transzformáció inverze:

$$\begin{aligned} x &= u - v \\ y &= v \end{aligned}$$

Ennek Jacobi mátrixa:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A Jacobi determináns nyilván 1 -gyel egyenlő. Ezért

$$s(u, v) = f(u - v, v) \cdot 1 = f(u - v, v)$$

Ezek után a vízszintes tengelyre való vetítéssel ezt kapjuk:

$$s_1(u) = \int_{-\infty}^{\infty} s(u, v) dv = \int_{-\infty}^{\infty} f(u - v, v) dv$$

Most u helyett z -t írunk, $s_1(u)$ helyett pedig $r(z)$ -t, és megkapjuk a fenti formulák közül az első:

$$r(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z - v, v) dv$$

A második formula vázlatos bizonyítása. A $z = x + y$ leképezést most is több lépésben hajtjuk végre, de egy kicsit másképpen. Először tekintjük az (x, y) -síkról az (u, v) -síkra ható

$$\begin{aligned} u &= x \\ v &= x + y \end{aligned}$$

lineáris leképezést, majd az (u, v) -síkról vetítünk a függőleges tengelyre. A függőleges tengelyt általában v -tengelynek szoktunk nevezni, de most z tengelynek is nevezzük. A síkról síkra való transzformáció a vetítéssel és az átnevezéssel együtt a $z = x + y$ leképezést adja.

Az (x, y) -síkról az (u, v) -síkra ható transzformáció inverze:

$$\begin{aligned} x &= u \\ y &= v - u \end{aligned}$$

A Jacobi determináns nyilván most is 1 -gyel egyenlő. Ezért

$$s(u, v) = f(u, v - u) \cdot 1 = f(u, v - u)$$

Ezek után a függőleges tengelyre való vetítéssel ezt kapjuk:

$$s_2(v) = \int_{-\infty}^{\infty} s(u, v) du = \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v - u) du$$

Most v helyett z -t írunk, $s_2(v)$ helyett pedig $r(z)$ -t, és megkapjuk a fenti formulák közül a másodikat:

$$r(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u, z - u) du$$

9.6. Számolások a fentebbi kétlépéses példákkal kapcsolatban

9.6.1. Egyenletes eloszlás transzformációja két lépésben

$$f(x, y) = 1 \quad (0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$$

$$s(u, v) = 1 \quad (0 \leq u - v \leq 1, 0 \leq v \leq 1)$$

$$s_1(u) = \int_0^u 1 \, dv = u \quad \text{ha } 0 \leq u \leq 1$$

$$s_1(u) = \int_{u-1}^1 1 \, dv = 2 - u \quad \text{ha } 1 \leq u \leq 2$$

Tehát az összeg sűrűségfüggvénye:

$$r(z) = z \quad \text{ha } 0 \leq z \leq 1$$

$$r(z) = 2 - z \quad \text{ha } 1 \leq z \leq 2$$

9.6.2. Az $f(x, y) = 4xy$ sűrűségfüggvényű eloszlás transzformációja két lépésben

$$f(x, y) = 4xy \quad (0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$$

$$s(u, v) = 4(u - v)v \quad (0 \leq u - v \leq 1, 0 \leq v \leq 1)$$

$$s_1(u) = \int_0^u 4(u - v)v \, dv = \frac{2}{3}u^3 \quad \text{ha } 0 \leq u \leq 1$$

$$s_1(u) = \int_{u-1}^1 4(u - v)v \, dv = \frac{2}{3}(-u^3 + 6u - 4) \quad \text{ha } 1 \leq u \leq 2$$

Tehát az összeg sűrűségfüggvénye:

$$r(z) = \frac{2}{3}z^3 \quad \text{ha } 0 \leq z \leq 1$$

$$r(z) = \frac{2}{3}(-z^3 + 6z - 4) \quad \text{ha } 1 \leq z \leq 2$$

9.6.3. Kétdimenziós exponenciális eloszlás transzformációja két lépésben

$$f(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} \quad (x, y \geq 0)$$

$$s(u, v) = \lambda^2 e^{-\lambda u} \quad (u \geq 0, 0 \leq v \leq u)$$

$$s_1(u) = \int_0^u \lambda^2 e^{-\lambda u} \, dv = \lambda^2 u e^{-\lambda u} \quad (u \geq 0)$$

Tehát az összeg sűrűségfüggvénye:

$$r(z) = \lambda^2 z e^{-\lambda z} \quad (z \geq 0)$$

9.7. Konvolúció

Független valószínűségi változók összege (folytonos eset). Ha az X és Y valószínűségi változók függetlenek, akkor $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$, ezért az összeg sűrűségfüggvényére korábban kapott formula így alakul:

$$r(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z - v) f_2(v) dv$$

avagy

$$r(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(u) f_2(z - u) du$$

Felismerjük, hogy $r(z)$ nem más, mint az $f_1(x)$ és $f_2(y)$ függvények **konvolúciója**.

Jegyezzük meg:

- Ha két független *diszkrét* valószínűségi változót összeadunk, akkor az összeg *súlyfüggvényét* a tagok súlyfüggvényeiből **konvolúcióval** kapjuk.
- Ha két független *folytonos* valószínűségi változót összeadunk, akkor az összeg *sűrűségfüggvényét* a tagok sűrűségfüggvényeiből **konvolúcióval** kapjuk.

Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

10. Regresszió a mediánnal és a várható értékkel

10.1. Regresszió egydimenzióban

10.1.1. A medián minimál tulajdonsága

Legyen X egy folytonos valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye $f(x)$, eloszlásfüggvénye $F(x)$, és c egy konstans. A véletlen X pontnak és a c pontnak az $|X - c|$ távolsága is valószínűségi változó. Mint tudjuk, $|X - c|$ várható értéke így számolható ki:

$$E(|X - c|) = \int_{-\infty}^{\infty} |x - c| f(x) dx$$

Ennek az integrálnak az értéke – természetesen – függ c -től.

Állítás: Az integrál értéke akkor minimális, ha c eleget tesz az $F(c) = \frac{1}{2}$ egyenletnek. Tehát az $|X - c|$ távolság várható értéke akkor minimális, ha c a valószínűségi változó mediánja.

Bizonyítás (Extra tananyag): Az integrál értékét jelöljük $h(c)$ -vel. Az alábbi átalakítások nyilvánvalóak:

$$\begin{aligned} h(c) &= \int_{-\infty}^{\infty} |x - c| f(x) dx = \int_{-\infty}^c |x - c| f(x) dx + \int_c^{\infty} |x - c| f(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^c (c - x) f(x) dx + \int_c^{\infty} (x - c) f(x) dx = \\ &= c \int_{-\infty}^c f(x) dx - \int_{-\infty}^c x f(x) dx + \int_c^{\infty} x f(x) dx - c \int_c^{\infty} f(x) dx \end{aligned}$$

A kapott négy tag mindegyikét külön-külön deriváljuk c szerint:

$$\begin{aligned} \left(c \int_{-\infty}^c f(x) dx \right)' &= 1 \int_{-\infty}^c f(x) dx + c f(c) = F(c) + c f(c) \\ - \left(\int_{-\infty}^c x f(x) dx \right)' &= -c f(c) \\ \left(\int_c^{\infty} x f(x) dx \right)' &= -c f(c) \\ - \left(c \int_c^{\infty} f(x) dx \right)' &= -1 \cdot \int_c^{\infty} f(x) dx + c f(c) = -1 + F(c) + c f(c) \end{aligned}$$

A kapott 6 tagot összeadva megkapjuk a deriváltat:

$$h'(c) = 2F(c) - 1$$

Mivel a

$$2F(c) - 1 = 0$$

egyenlet ekvivalens a

$$F(c) = \frac{1}{2}$$

egyenlettel,

$$h'(c) = 2F(c) - 1 = 0 \quad \text{ha } c = \text{medián}$$

$$h'(c) = 2F(c) - 1 < 0 \quad \text{ha } c < \text{medián}$$

$$h'(c) = 2F(c) - 1 > 0 \quad \text{ha } c > \text{medián}$$

ami tényleg azt jelenti, hogy $h(c)$ minimuma akkor adódik, ha $c = \text{medián}$.

10.1.2. A távolság várható értékének minimalizálása

Tegyük fel, hogy X valószínűségi változóra N kísérletet végeztünk. A kísérleti eredményeket jelöljük $X_1, X_2, \dots, X_N$ - nel. Ha minden kísérleti eredményt egy c konstanssal helyettesítünk, akkor – természetesen – minden egyes helyettesítésnél egy eltérés, egy "hiba" adódik. Ezeknek az eltéréseknek, hibáknak a nagyságai:

$$|X_1 - c|, |X_2 - c|, \dots, |X_N - c|$$

A hibák átlaga:

$$\frac{|X_1 - c| + |X_2 - c| + \dots + |X_N - c|}{N}$$

Nagy N esetén ez az átlag közel van az $|X - c|$ valószínűségi változó várható értékéhez:

$$\frac{|X_1 - c| + |X_2 - c| + \dots + |X_N - c|}{N} \approx$$

$$\approx E(|X - c|) = \int_{-\infty}^{\infty} |x - c| f(x) dx$$

Az előző pontban láttuk, hogy ez a várható érték akkor minimális, ha c az X valószínűségi változó mediánja.

10.1.3. A várható érték minimál tulajdonsága

Steiner egyenlőség: Ha c egy pont a számegyenesen, és tekintünk egy valószínűségi változót vagy eloszlást, akkor a c -re vonatkozó második momentum egyenlő a variancia (azaz szórásnégyzet) plusz a c pont és várható érték közötti távolság négyzete:

$$\sum_x (x - c)^2 p(x) = \sigma^2 + (\mu - c)^2 \quad (\text{diszkrét esetben})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - c)^2 f(x) dx = \sigma^2 + (\mu - c)^2 \quad (\text{folytonos esetben})$$

Felhívjuk a figyelmet a Steiner egyenlőség mechanikai jelentésére: a számegyenesen vett akármilyen tömegeloszlás esetén a bármely c esetén a c pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték egyenlő a súlypontra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték plusz az a c -re vonatkozó tehetetlenségi nyomaték, amit úgy kapnánk, mintha az összes tömeget a súlypontba helyeznénk.

Bizonyítás A Steiner egyenlőség bizonyítását a folytonos esetre adjuk meg:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} (x - c)^2 f(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} ((x - \mu) + (\mu - c))^2 f(x) dx = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} ((x - \mu)^2 + 2(x - \mu) \cdot (\mu - c) + (\mu - c)^2) f(x) dx = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} 2(x - \mu) \cdot (\mu - c) f(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} (\mu - c)^2 f(x) dx = \\
 &= \sigma^2 + 2(\mu - c) \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu) f(x) dx + (\mu - c)^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \\
 &= \sigma^2 + 2(\mu - c) 0 + (\mu - c)^2 1 = \sigma^2 + 0 + (\mu - c)^2 = \sigma^2 + (\mu - c)^2
 \end{aligned}$$

Ebben az okoskodásban kihasználtuk azt, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu) f(x) dx = 0$$

ami azért igaz, mert

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu) f(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx - \int_{-\infty}^{\infty} \mu f(x) dx = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx - \mu \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \mu - \mu \cdot 1 = 0
 \end{aligned}$$

A diszkrét eset bizonyításának a gondolatmenete hasonló, csak éppen a sűrűségfüggvények helyett súlyfüggvényt kell venni, és az integrálok helyett összegzést kell végezni.

A Steiner egyenlőség nyilvánvaló következménye a Steiner egyenlőtlenség.

Steiner egyenlőtlenség: A c -re vonatkozó második momentum nagyobb vagy egyenlő, mint a variancia (azaz szórásnégyzet), és egyenlőség csak akkor áll fenn, ha a c pont egybeesik a várható értékkel. Más szavakkal: a c -re vonatkozó második momentum akkor minimális, ha c egyenlő a várható értékkel, és a minimum értéke egyenlő a varianciával (szórásnégyzettel).

Felhívjuk a figyelmet a Steiner egyenlőtlenség mechanikai jelentésére: a számegyenesen vett akármilyen tömegeloszlással kapcsolatban bármely c esetén a c pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték nagyobb, mint a súlypontra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték.

10.1.4. A távolság négyzete várható értékének minimalizálása

A kísérleti eredmények hibáit négyzetre emelve az alábbi értékeket kapjuk:

$$(X_1 - c)^2, (X_2 - c)^2, \dots, (X_N - c)^2$$

Ezek átlaga:

$$\frac{(X_1 - c)^2 + (X_2 - c)^2 + \dots + (X_N - c)^2}{N}$$

Nagy N esetén ez az átlag közelíthető az $(X - c)^2$ várható értékével:

$$\begin{aligned} \frac{(X_1 - c)^2 + (X_2 - c)^2 + \dots + (X_N - c)^2}{N} &\approx \\ &\approx E((X - c)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - c)^2 f(x) dx \end{aligned}$$

Az előző pontban láttuk, hogy ez a várható érték akkor minimális, ha c az X valószínűségi változó várható értéke.

10.2. Regresszió kétdimenzióban

Tegyük fel, hogy az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változóval van dolgunk. Képzeljük el, hogy N kísérletet végzünk. A megfigyelt értékek legyenek:

$$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_N, Y_N)$$

Ha valaki az X és Y értékek közül csak az X -et tudja megfigyelni, akkor feladata lehet, hogy Y -ra tippeljen X megfigyelt értékéből úgy, hogy

ügyesen választsa egy alkalmas $y = k(x)$ függvényt, amibe X megfigyelt értékét mindig behelyettesíti, és ezzel a $k(X)$ függvényértékkel értékkel tippel Y -ra: Y -ra.

Ennél a tippelésnél a véletlen X értékből tippelünk a véletlen Y értékre, ezért az – óhatatlanul adódó – hiba is véletlentől függ.

10.2.1. A hiba abszolút értéke várható értékének minimalizálása

Az elkövetett hibák abszolút értékei:

$$|Y_1 - k(X_1)|, |Y_2 - k(X_2)|, \dots, |Y_N - k(X_N)|$$

Ezek átlaga

$$\frac{|Y_1 - k(X_1)| + |Y_2 - k(X_2)| + \dots + |Y_N - k(X_N)|}{N} \approx$$

Nagy N esetén ez az átlag az átlag közelíthető az $|Y - k(X)|$ várható értékével:

$$\begin{aligned} &\approx \frac{|Y_1 - k(X_1)| + |Y_2 - k(X_2)| + \dots + |Y_N - k(X_N)|}{N} \approx \\ &\approx E(|Y - k(X)|) = \iint_{R^2} |y - k(x)| f(x, y) dx dy = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \iint_{R^2} |y - k(x)| f_1(x) f_{2|1}(y | x) dx dy = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |y - k(x)| f_{2|1}(y | x) dy \right) f_1(x) dx \end{aligned}$$

Minden rögzített x esetén a

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y - k(x)| f_{2|1}(y | x) dy$$

belső integrálban $k(x)$ egy rögzített érték. Ezért a belső integrál akkor minimális, ha $k(x)$ egyenlő a belső integrálban szerepet játszó $f_{2|1}(y | x)$ sűrűségfüggvényű feltételes eloszlás mediánjával. Ezért az optimumot nyújtó $y = k(x)$ függvényt úgy kapjuk meg, hogy az

$$F_{2|1}(y | x) = \frac{1}{2}$$

egyenletből y -t kifejezzük x segítségével.

10.2.2. A hiba négyzete várható értékének minimalizálása

Az elkövetett hibák négyzetei:

$$(Y_1 - k(X_1))^2, (Y_2 - k(X_2))^2, \dots, (Y_N - k(X_N))^2$$

Ezek átlaga

$$\frac{(Y_1 - k(X_1))^2 + (Y_2 - k(X_2))^2 + \dots + (Y_N - k(X_N))^2}{N}$$

Nagy N esetén ez az átlag az átlag közelíthető az $(Y - k(X))^2$ várható értékével:

$$\begin{aligned} & \frac{(Y_1 - k(X_1))^2 + (Y_2 - k(X_2))^2 + \dots + (Y_N - k(X_N))^2}{N} \approx \\ & \approx E((Y - k(X))^2) = \iint_{R^2} (y - k(x))^2 f(x, y) dx dy = \\ & = \iint_{R^2} (y - k(x))^2 f_1(x) f_{2|1}(y | x) dx dy = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (y - k(x))^2 f_{2|1}(y | x) dy \right) f_1(x) dx \end{aligned}$$

Minden rögzített x esetén a

$$\int_{-\infty}^{\infty} (y - k(x))^2 f_{2|1}(y | x) dy$$

belső integrálban $k(x)$ egy rögzített érték. Ezért a belső integrál akkor minimális, ha $k(x)$ egyenlő a belső integrálban szerepet játszó $f_{2|1}(y | x)$ sűrűségfüggvényű feltételes eloszlásnak a várható értékével. Ezért az optimumot nyújtó $y = k(x)$ függvényt így kapjuk meg:

$$k(x) = m_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{2|1}(y | x) dy$$

10.3. Egy számolás minta példa

Példa: Választunk egy Y számot 0 és 1 között egyenletes eloszlás szerint. Ha $Y = y$, akkor 0 és y között választunk egy X számot ugyancsak egyenletes eloszlás szerint. Számítógéppel a szimuláció így történhet:

$$Y = \text{RND}_1 \quad X = Y \cdot \text{RND}_2$$

Tegyük fel, hogy valakinek az a dolga, hogy X -ből (a másodiknak választott pont helyéből) az Y -ra (az elsőnek választott pont helyére) tippeljen. Két célt is kitűznek neki:

1. Az első esetben a hiba abszolút értékének a várható értékét kell minimalizálnia.
2. A második esetben hiba négyzetének a várható értékét kell minimalizálnia.

Megoldás:

$$f(x, y) = f_{1|2}(x | y) \cdot f_2(y)$$

Y sűrűségfüggvénye:

$$f_2(y) = 1 \quad 0 < y < 1$$

X feltételes sűrűségfüggvénye az $Y = y$ feltétel mellett:

$$f_{1|2}(x | y) = \frac{1}{y} \quad 0 < x < y$$

(X, Y) sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y) = \frac{1}{y} \quad 0 < x < y < 1$$

X sűrűségfüggvénye:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_x^1 \frac{1}{y} dy = -\ln(x) \quad 0 < x < 1$$

Y feltételes sűrűségfüggvénye az $X = x$ feltétel mellett:

$$f_{2|1}(y | x) = \frac{\frac{1}{y}}{-\ln(x)} \quad 0 < x < y < 1$$

Y feltételes eloszlásfüggvénye az $X = x$ feltétel mellett:

$$F_{2|1}(y | x) = \int_{-\infty}^y f_{2|1}(y | x) dy = \int_x^y \frac{\frac{1}{y}}{-\ln(x)} dy = \frac{\ln(y) - \ln(x)}{-\ln(x)} \quad 0 < x < y < 1$$

Y feltételes mediánja az $X = x$ feltétel mellett az

$$\frac{\ln(y) - \ln(x)}{-\ln(x)} = \frac{1}{2}$$

egyenlet y -ra történő megoldásából jön ki:

$$\ln(y) - \ln(x) = -\frac{1}{2} \ln(x)$$

$$\ln(y) = \frac{1}{2} \ln(x)$$

$$\ln(y) = \ln(\sqrt{x})$$

$$y = \sqrt{x}$$

Ezért az **abszolút hiba** várható értékének minimalizálásához az optimális tippelést nyújtó függvény:

$$k(x) = \sqrt{x}$$

Y feltételes várható értéke az $X = x$ feltétel mellett:

$$E(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{2|1}(y | x) dy = \int_x^1 y \frac{\frac{1}{y}}{-\ln(x)} dy = \int_x^1 \frac{1}{-\ln(x)} dy = \frac{1-x}{-\ln(x)} = \frac{x-1}{\ln(x)}$$

Ezért a **négyzetes hiba** várható értékének minimalizálásához az optimális tippelést nyújtó függvény:

$$k(x) = \frac{x-1}{\ln(x)} \quad 0 < x < 1$$

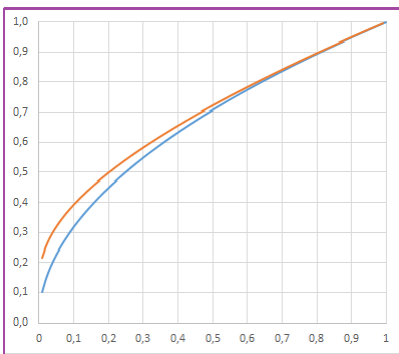
A két függvény összevetése céljából egy egyszerű táblázatot készítettünk az értékeikből:

x	$\sqrt{x}$	$\frac{x-1}{\ln(x)}$
0,1	0,32	0,39
0,2	0,45	0,50
0,3	0,55	0,58
0,4	0,63	0,65
0,5	0,71	0,72
0,6	0,77	0,78
0,7	0,84	0,84
0,8	0,89	0,90
0,9	0,95	0,95

Látható, hogy

$$y = \sqrt{x} \quad \text{kisebb, mint} \quad y = \frac{x-1}{\ln(x)}$$

ami azt jelenti, hogy az abszolút hiba várható értékének minimalizálásakor kisebb értékekkel kell tippelnünk, mint amikor a négyzetes hiba várható értékét minimalizáljuk. Ezt a tényt a "Regressziós függvények összevetése" feliratú ábrán is bemutatjuk.



68. ábra. Regressziós függvények összevetése: $y = \sqrt{x}$ görbe lejjebb van, mint az $y = \frac{x-1}{\ln(x)}$ görbe

Vetier András – Valószínűségszámítás – 4. rész: Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók (A rész)

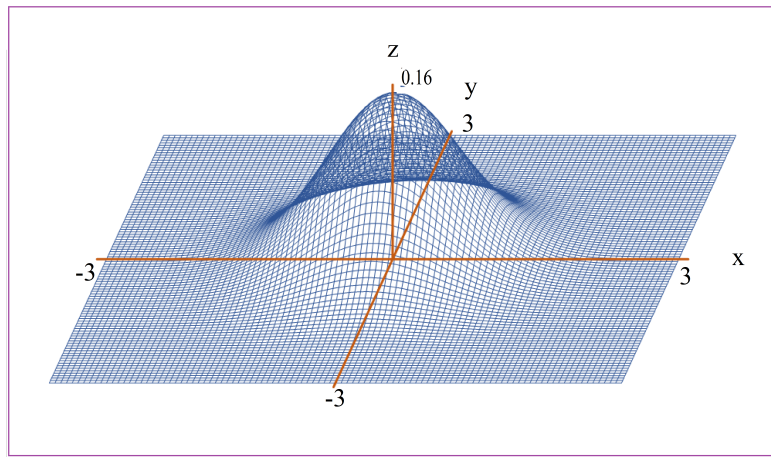
11. Normális eloszlások a síkon

11.1. Standard normális eloszlás a síkon

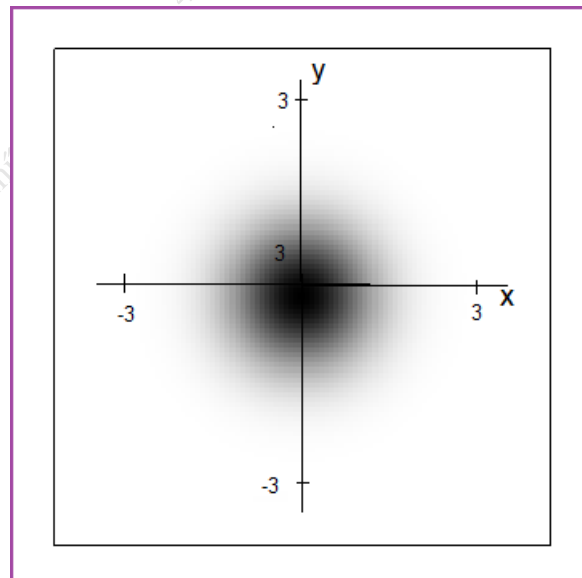
A kétdimenziós standard normális eloszlást az egész síkon az alábbi sűrűségfüggvénnyel definiáljuk:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

Mivel a sűrűségfüggvény csak $(x^2 + y^2)$ -en keresztül függ x -től és y -től, az eloszlás körszimmetrikus. A függvénynek megfelelő felület egy harang alakjára emlékeztet.



69. ábra. 2-dimenziós standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye



70. ábra. 2-dimenziós standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye festékekkel szemléltetve

Könnyű észrevenni, hogy a kétdimenziós standard normális sűrűségfüggvény előállítható egydimenziós standard nor-

mális sűrűségfüggvények direktszorzataként is:

$$\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}$$

Ezért a kétdimenziós standard normális eloszlásnak

- a tengelyekre vetett vetületei egydimenziós standard normális eloszlások,
- a feltételes eloszlások a függőleges és a vízszintes egyenesek mentén is egydimenziós standard normális eloszlások.

Tehát kétdimenziós standard normálist követő valószínűségi változó esetén a koordináták egydimenziós standard normális eloszlást követnek, és függetlenek egymástól.

11.2. Standard normális eloszlás r korrelációval

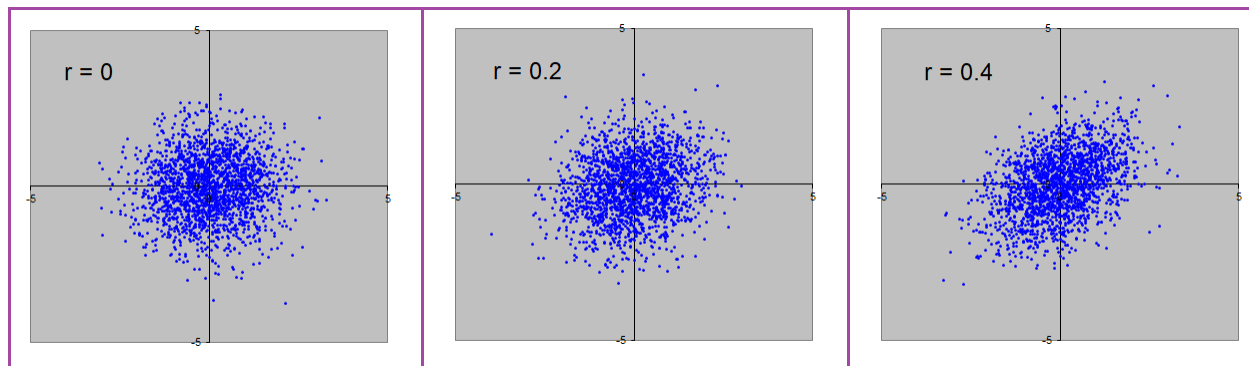
Az r korrelációval rendelkező kétdimenziós standard normális eloszlást az egész síkon az alábbi sűrűségfüggvénnyel definiáljuk:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{x^2+y^2-2rxy}{1-r^2}}$$

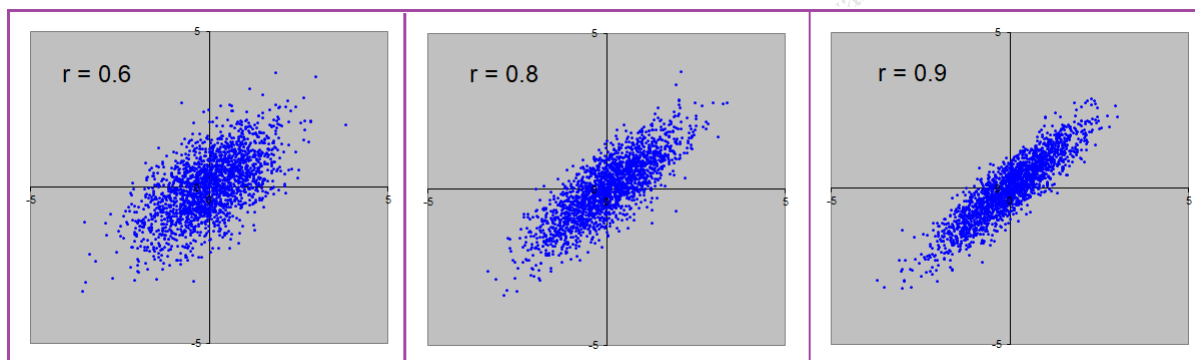
ahol r valós szám -1 és 1 között.

A korrelációval rendelkező standard normális eloszlásokat két ábra sorozattal mutatjuk be – pontfelhők segítségével. Az ábra sorozatokat egyszerre kell áttekinteni úgy, mintha egy moziban lepörgetnék előttünk a képeket.

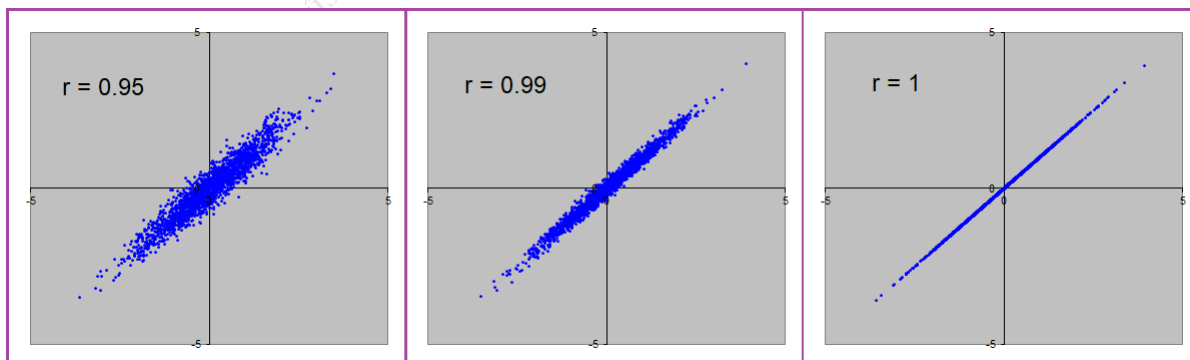
Amikor az r korrelációs együttható pozitív:



71. ábra. Standard normális pontfelhő 0, 0.2, 0.4 korrelációval

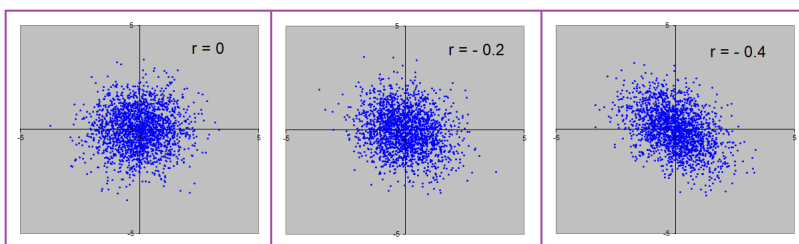


72. ábra. Standard normális pontfelhő 0.6, 0.8, 0.9 korrelációval

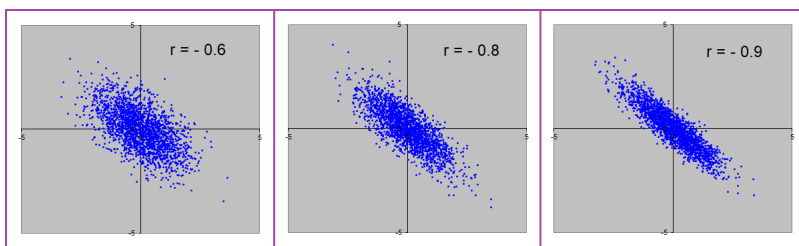


73. ábra. Standard normális pontfelhő 0.95, 0.99, 1 korrelációval

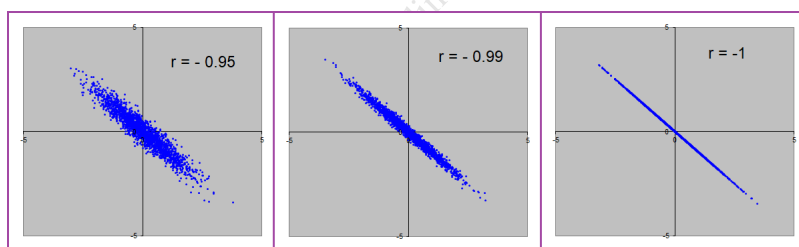
Amikor az r korrelációs együttható negatív:



74. ábra. Standard normális pontfelhő 0 , -0.2 , -0.4 korrelációval



75. ábra. Standard normális pontfelhő -0.6 , -0.8 , -0.9 korrelációval



76. ábra. Standard normális pontfelhő -0.95 , -0.99 , -1 korrelációval

Megjegyzés: (Extra tananyag) A korrelációs együtthatót tetszőleges X és Y valószínűségi változók kapcsán be lehet vezetni. Ehhez érdemes előbb a **kovarianciát** definiálni:

$$\text{COV}(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)])$$

Könnyű belátni, hogy a kovarianciát úgy is megkapjuk, hogy a vegyes momentumból kivonjuk a várható értékek szorzatát:

$$\text{COV}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Ezek után az X és az Y valószínűségi változók **korrelációs együtthatójának** általános definíciója:

$$\text{CORR}(X, Y) = \frac{\text{COV}(X, Y)}{\text{SD}(X) \cdot \text{SD}(Y)}$$

A korrelációs együttható nem más, mint a **kovariancia osztva a szórások szorzatával**.

A korrelációnak a kétdimenziós normális eloszlásoknál betöltött szerepét a fentebbi ábrákkal mutattuk be. További jelentőségére, mely egyéb eloszlások kapcsán is fontos, könyvünkben nem térünk ki.

11.3. Normális eloszlás $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, r$ paraméterekkel

A kétdimenziós normális eloszlásokat az általános esetben is a sűrűségfüggvényükkel definiáljuk:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2r\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)}{1-r^2}}$$

ahol μ_1, μ_2 valós számok, σ_1, σ_2 pozitív számok, az r pedig -1 és 1 közötti valós szám.

A sűrűségfüggvény kitevőjében szereplő tört számlálója, a

$$\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2r\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)$$

kifejezés egy kvadratikus képlet, aminek a szintvonalai koncentrikus ellipszisek. Ezért a sűrűségfüggvénynek megfelelő felület egy deformált harang alakjára emlékeztet, mintha a harangot összenyomtuk volna úgy, hogy – felülnézetben – a kör helyett ellipszis legyen az alakja.

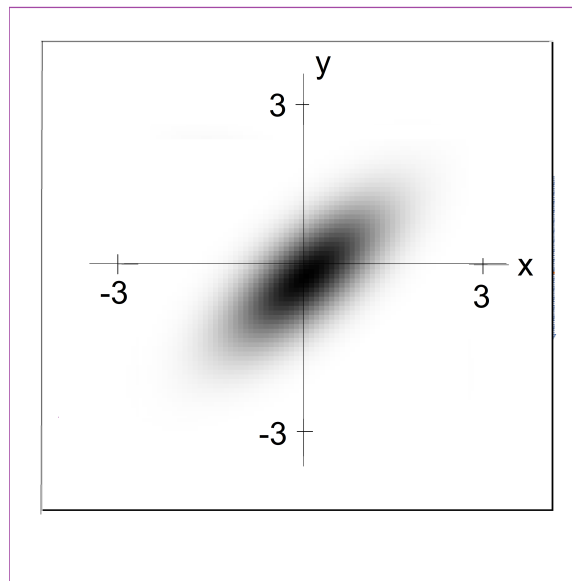
1. Megjegyzés: A $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, r$ paraméterű normális festék eloszlás úgy származtatható az r korrelációval rendelkező kétdimenziós standard normális festék eloszlásból, hogy

- vízszintes irányban σ_1 -szeres,
- függőleges irányban pedig σ_2 -szeres nagyítást hajtunk végre,
- majd pedig vízszintes irányban eltolunk μ_1 -gyel,
- függőleges irányban pedig μ_2 -vel.

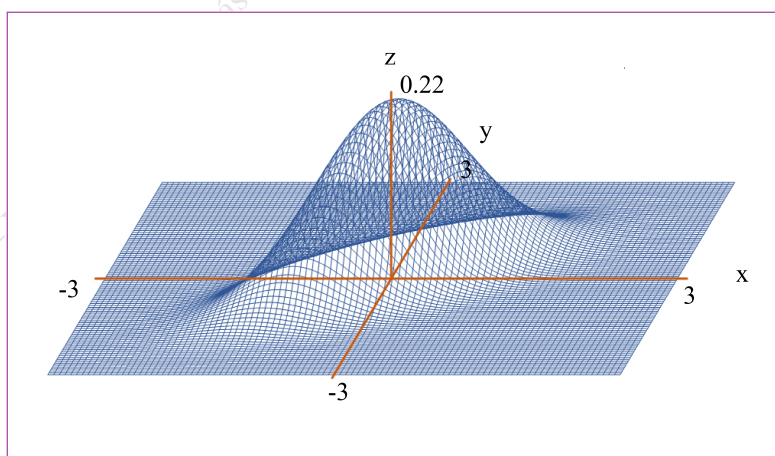
2. Megjegyzés: (Extra tananyag): Meg lehet mutatni, hogy

- a sűrűségfüggvény szintvonalai koncentrikus ellipszisek
- az ellipszisek közös középpontja a (μ_1, μ_2) pont
- az ellipszisek tengelyeinek irányát a (a később tárgyalandó) kovariancia mátrix sajátvektorai adják
- a tengelyek hossza pedig arányos a kovariancia mátrix sajátértékeinek négyzetgyökeivel

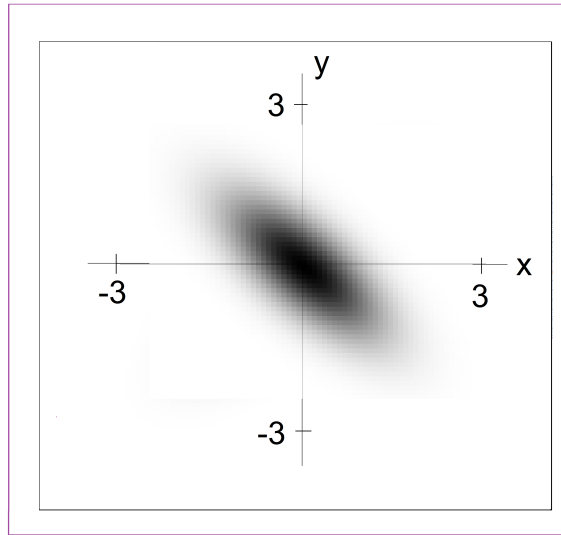
Normális eloszlás szemléltetése festékkal és a sűrűségfüggvény ábrája felülettel



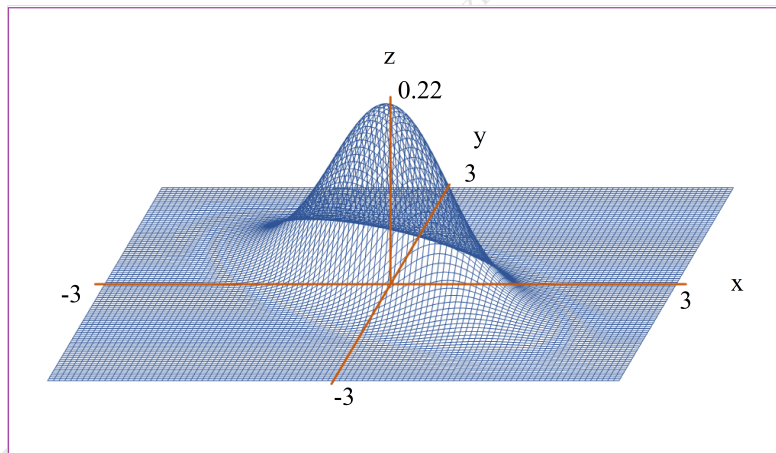
77. ábra. 2-dimenziós normális eloszlás festékkal szemléltetve; $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 1$, $r = 0.7$



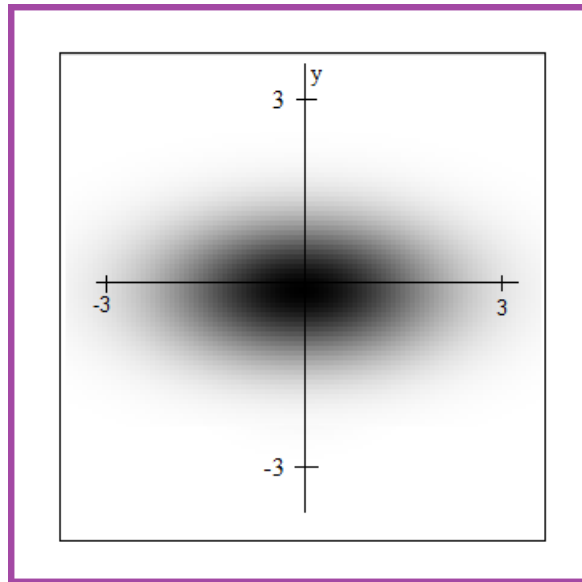
78. ábra. 2-dimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvénye; $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 1$, $r = 0.7$



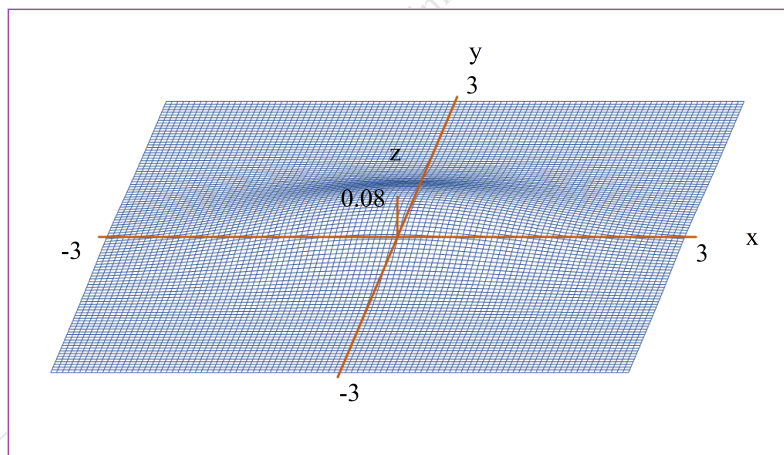
79. ábra. 2-dimenziós normális eloszlás festékekkel szemléltetve; $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 1$, $r = -0.7$



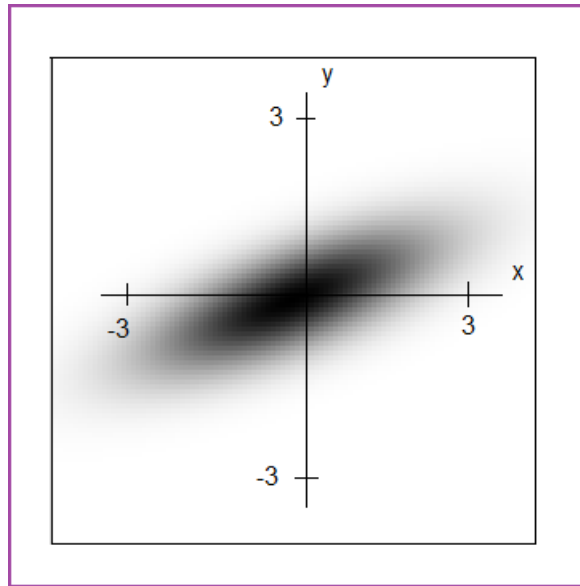
80. ábra. 2-dimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvénye; $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 1$, $r = -0.7$



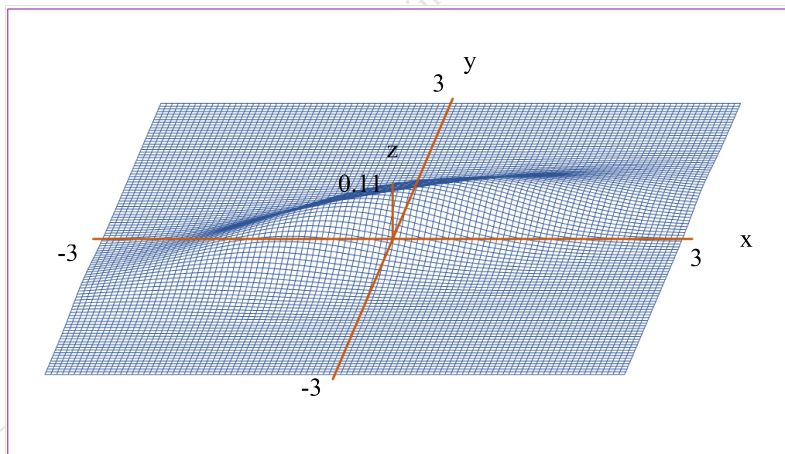
81. ábra. 2-dimenziós normális eloszlás festékekkel szemléltetve; $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$, $r = 0$



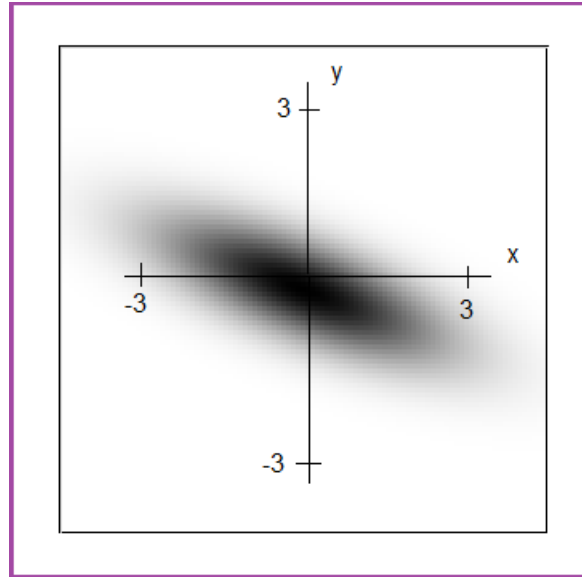
82. ábra. 2-dimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvénye; $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$, $r = 0$



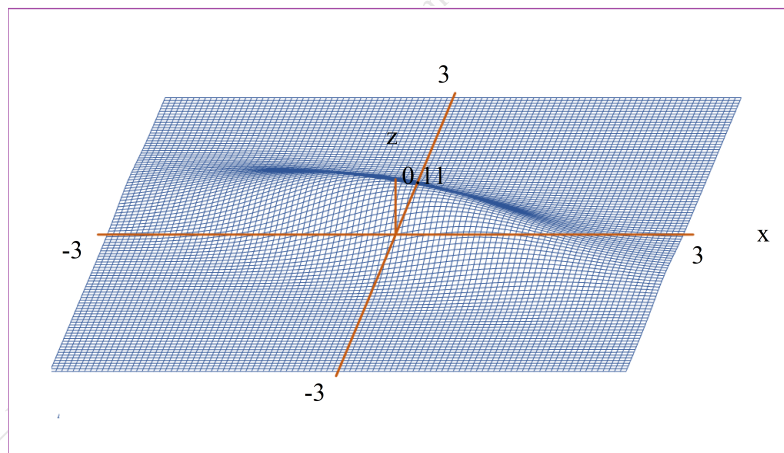
83. ábra. 2-dimenziós normális eloszlás festékkel szemléltetve; $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$, $r = 0.7$



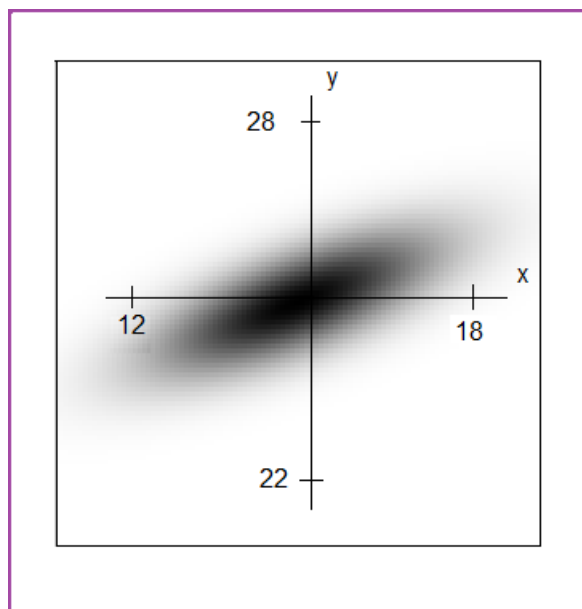
84. ábra. 2-dimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvénye; $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$, $r = 0.7$



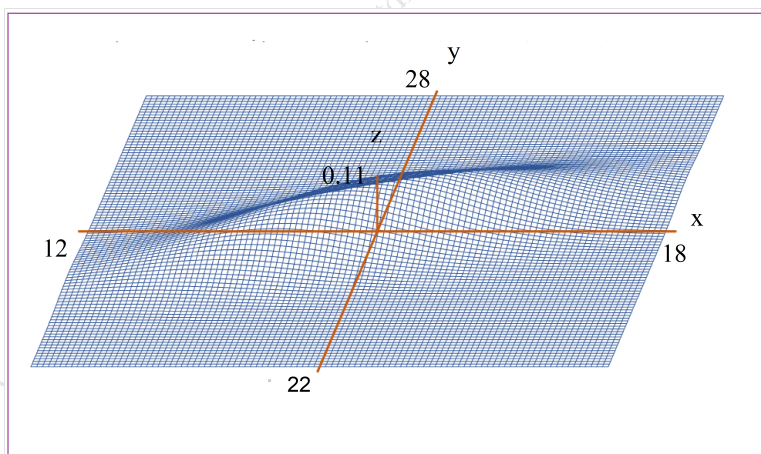
85. ábra. 2-dimenziós normális eloszlás festékekkel szemléltetve; $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$, $r = -0.7$



86. ábra. 2-dimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvénye; $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$, $r = -0.7$



87. ábra. 2-dimenziós normális eloszlás festékekkel szemléltetve; $\mu_1 = 15$, $\mu_2 = 25$, $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$, $r = 0.7$



88. ábra. 2-dimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvénye; $\mu_1 = 15$, $\mu_2 = 25$, $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$, $r = 0.7$

Mikor használunk kétdimenziós normális eloszlásokat?

1. Ha egy kétdimenziós valószínűségi változó sok, független, *kis szórású* koordinátákkal rendelkező kétdimenziós valószínűségi változó összege, akkor ez a kétdimenziós valószínűségi változó normális eloszlásúnak vehető valamilyen $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, r$ paraméterekkel.

Ezt a kijelentést *kétdimenziós centrális határeloszlás tételek* támasztják alá, melyek tárgyalása meghaladja lehetőségeinket. Ha egy valószínűségi változó kis értékeket vesz fel, akkor szórása is szükségképpen kicsi. Ezért az előző kijelentésnek következménye az alábbi:

2. Ha egy kétdimenziós valószínűségi változó sok, független, *kis értékű* koordinátákkal rendelkező kétdimenziós valószínűségi változó összege, akkor ez a kétdimenziós valószínűségi változó normális eloszlásúnak vehető valamilyen $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, r$ paraméterekkel, hiszen kis értékek esetén a szórások is kicsik.
3. Sokszor csak kényelmi okokból használjuk a kétdimenziós normális eloszlásokat, mert úgy látjuk, úgy gondoljuk, hogy a normális eloszlás jó közelítése az igazi eloszlásnak, és kétdimenziós problémák esetén normális eloszlásokkal nagyon kényelmesen lehet dolgozni. Ilyen alkalmazásra hamarosan mutatunk példát.
4. A standard normális eloszlás jelentősége abban rejlik, hogy
 - lineáris transzformációk segítségével tetszőleges normális eloszlás kapcsolatba hozható a standard normálissal, és
 - a standard normális eloszlással – speciális tulajdonságai miatt – az elméleti és a gyakorlati számítások könnyebben végezhetők el.

11.4. Vetület eloszlások

Az x -tengelyre vetett vetület sűrűségfüggvényét a tengely tetszőleges x pontjában az alábbi integrál adja:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2r\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)}{(1-r^2)} dy$$

Ennek a – kissé bonyolult – integrálnak a kiszámolása a $z = \frac{y-\mu_2}{\sigma_2}$ helyettesítéssel elvégezhető. Az eredmény:

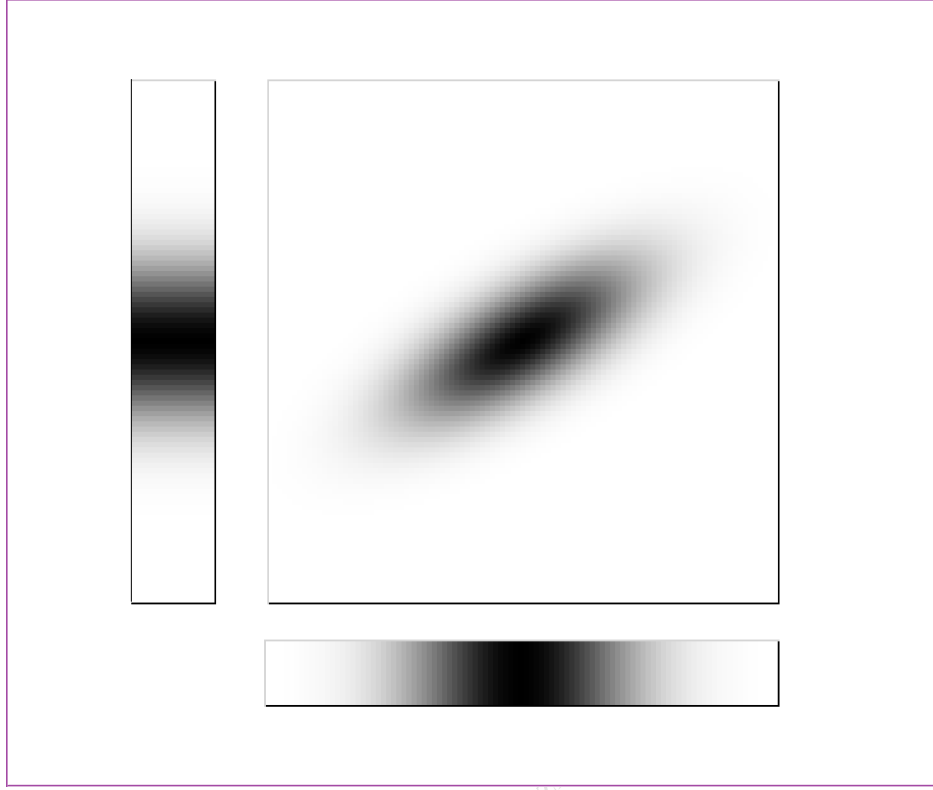
$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}}$$

Hasonlóképp meghatározható a függőleges tengelyre vetett vetület eloszlás sűrűségfüggvénye is:

$$f_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{1}{2} \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}}$$

Látjuk, hogy a tengelyekre vetett vetületek normális eloszlások μ_1, σ_1 , illetve μ_2, σ_2 paraméterekkel.

Ezzel a $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$ paraméterek jelentését megtaláltuk. μ_1 és μ_2 a vetületek várható értékét jelenti, σ_1, σ_2 pedig a vetületek szórását.



89. ábra. 2-dimenziós normális eloszlás és vetületei festékekkel szemléltetve; $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\sigma_1 = 1.5$, $\sigma_2 = 1$, $r = 0.7$

11.5. Feltételes sűrűségfüggvény

A feltételes sűrűségfüggvényt az $X = x$ feltétel mellett a megfelelő függőleges egyenes mentén az alábbi hányados adja:

$$f_{2|1}(y | x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \frac{\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2r\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)}{(1-r^2)}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}}$$

Egyszerűsítésekkel az alábbi eredmény adódik:

$$f_{2|1}(y | x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y - \left(\mu_2 + r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1)\right)}{\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \right)^2}$$

A kapott képletből kiolvashatjuk, hogy az $X = x$ feltétel mellett az Y feltételes eloszlása normális eloszlás, melynek várható értéke

$$\mu_2 + r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1)$$

és szórása

$$\sigma_2\sqrt{1-r^2}$$

A feltételes sűrűségfüggvény az $Y = y$ feltétel mellett a megfelelő vízszintes egyenes mentén hasonló:

$$f_{1|2}(x | y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \left(\mu_1 + r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - \mu_2)\right)}{\sigma_1\sqrt{1-r^2}} \right)^2}$$

A képletből látjuk, hogy az $Y = y$ feltétel mellett az X feltételes eloszlása normális eloszlás, melynek várható értéke

$$\mu_1 + r \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (y - \mu_2)$$

szórása:

$$\sigma_1 \sqrt{1 - r^2}$$

11.6. Feltételes medián és várható érték

A fentiek szerint tehát az $X = x$ feltétel mellett az Y várható értéke és mediánja:

$$E(Y | X = x) = \mu_2 + r \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x - \mu_1)$$

Hasonlóképpen az $Y = y$ feltétel mellett az X várható értéke és mediánja:

$$E(X | Y = y) = \mu_1 + r \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (y - \mu_2)$$

Látjuk, hogy a feltételes várható érték és medián lineárisan függ a feltételtől. A lineáris függésben a meredekség $r \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$, illetve $r \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$. Az

$$y = \mu_2 + r \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x - \mu_1)$$

egyenletű egyenest **első regressziós egyenesnek** nevezzük. Hasonlóképpen az

$$x = \mu_1 + r \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (y - \mu_2)$$

egyenletű egyenest **második regressziós egyenesnek** nevezzük.

11.7. Feltételes szórás

Az $X = x$ feltétel mellett az Y szórása is kiolvasható a feltételes sűrűségfüggvény képletéből:

$$SD(Y | X = x) = \sigma_2 \sqrt{1 - r^2}$$

Hasonlóképpen az $Y = y$ feltétel mellett az X szórása:

$$SD(X | Y = y) = \sigma_1 \sqrt{1 - r^2}$$

Látjuk, hogy a feltételes szórás nem függ a feltételtől, és kisebb, mint a feltétel nélküli szórás.

$$SD(Y | X = x) = \sigma_2 \sqrt{1 - r^2} < \sigma_2$$

illetve

$$SD(X | Y = y) = \sigma_1 \sqrt{1 - r^2} < \sigma_1$$

11.8. Példa: testmagasság és testsúly

Véletlenszerűen választunk egy felnőtt férfit, és megmérjük testmagasságát centiméterekben és testsúlyát (pontosabban: testtömegét) kilogramokban:

$$X = \text{testmagasság} \quad Y = \text{testsúly}$$

Tegyük fel, hogy

- a testmagasság várható értéke 180 (cm),
- a testmagasság szórása 15 (cm),
- a testsúly várható értéke 80 (kg),
- a testsúly szórása 10 (kg),
- a korrelációs együttható pedig 0.6 .

Ha az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változóval kapcsolatos számításokban kétdimenziós normális eloszlással dolgozunk, az alábbi numerikus eredményeket kapjuk.

1. Annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott felnőtt férfi 90 kg-nál súlyosabb:

$$P(Y > 90) = 1 - \text{NORM.DIST}(90; 80; 10; \text{TRUE}) = 0.16$$

2. Tekintsünk egy tetszőleges x testmagasság értéket! Ha a véletlenszerűen választott felnőtt férfiak közül csak azokat tekintjük, akiknek a testmagassága körülbelül x (cm), akkor az ő testsúlyaik szórása nem 10 (kg), hanem csak:

$$\text{SD}(Y | X = x) = 10 \sqrt{1 - 0.6^2} = 8$$

Kiemeljük, hogy ennek a feltételes szórásnak az értéke nem függ x -től.

3. Ha a véletlenszerűen választott felnőtt férfiak testmagassága körülbelül egyforma, mondjuk x , akkor a testsúly várható értéke – a feltételezett x függvényében – így alakul:

- $x = 170$ esetén Y feltételes várható értéke:

$$E(Y | X = 170) = 80 + 0.6 \frac{10}{15}(170 - 180) = 76$$

Tehát a körülbelül 170 cm magas felnőtt férfiak átlagos testsúlya körülbelül 76 kg.

- $x = 180$ esetén Y feltételes várható értéke:

$$E(Y | X = 180) = 80 + 0.6 \frac{10}{15}(180 - 180) = 80$$

Tehát a körülbelül 180 cm magas felnőtt férfiak átlagos testsúlya körülbelül 80 kg.

- $x = 190$ esetén Y feltételes várható értéke:

$$E(Y | X = 190) = 80 + 0.6 \frac{10}{15}(190 - 180) = 84$$

Tehát a körülbelül 190 cm magas felnőtt férfiak átlagos testsúlya körülbelül 84 kg.

- $x = 200$ esetén Y feltételes várható értéke:

$$E(Y | X = 200) = 80 + 0.6 \frac{10}{15}(200 - 180) = 88$$

Tehát a körülbelül 200 cm magas felnőtt férfiak átlagos testsúlya körülbelül 88 kg.

A számadatokból kiolvashatjuk, hogy 10 cm-rel magasabb felnőtt férfiak átlagosan 4 kg-mal nehezebbek, mint a 10 cm-rel alacsonyabbak. Tehát 1 cm magasságnövekedés átlagosan 0.4 kg testsúly növekedést eredményez. Vegyük észre, hogy a testsúly szórása és a testmagasság szórásának aránya a korrelációs együtthatóval szorozva adja ki ezt az átlagos testsúly növekedést:

$$\frac{10}{15} \cdot 0.6 = 0.4$$

4. Annak a valószínűsége, hogy egy felnőtt férfi 90 kg-nál súlyosabb – a feltételezett testmagasság függvényében – így alakul:

- $x = 170$ esetén a feltételes valószínűség értéke:

$$P(Y > 90 | X = 170) = 1 - \text{NORM.DIST}(90; 76; 8; \text{TRUE}) = 0.04$$

Tehát a körülbelül 170 cm magas felnőtt férfiaknak körülbelül 4 %-a súlyosabb 90 kg-nál.

- $x = 180$ esetén a feltételes valószínűség értéke:

$$P(Y > 90 | X = 180) = 1 - \text{NORM.DIST}(90; 80; 8; \text{TRUE}) = 0.11$$

Tehát a körülbelül 180 cm magas felnőtt férfiaknak körülbelül 11 %-a súlyosabb 90 kg-nál.

- $x = 190$ esetén a feltételes valószínűség értéke:

$$P(Y > 90 | X = 190) = 1 - \text{NORM.DIST}(90; 84; 8; \text{TRUE}) = 0.23$$

Tehát a körülbelül 190 cm magas felnőtt férfiaknak körülbelül 23 %-a súlyosabb 90 kg-nál.

- $x = 200$ esetén a feltételes valószínűség értéke:

$$P(Y > 90 | X = 200) = 1 - \text{NORM.DIST}(90; 88; 8; \text{TRUE}) = 0.40$$

Tehát a körülbelül 200 cm magas felnőtt férfiaknak körülbelül 40 %-a súlyosabb 90 kg-nál.

5. Annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott felnőtt férfi 200 cm-nél magasabb:

$$P(X > 200) = 1 - \text{NORM.DIST}(200; 180; 15; \text{TRUE}) = 0.09$$

6. Tekintsünk egy tetszőleges y testsúly értéket! Ha a véletlenszerűen választott felnőtt férfiak közül csak azokat tekintjük, akiknek a testsúlya körülbelül y (kg), akkor az ő testmagasságaik szórása nem 15 (cm), hanem csak:

$$SD(X | Y = y) = 15 \sqrt{1 - 0.6^2} = 12$$

Kiemeljük, hogy ennek a feltételes szórásnak az értéke nem függ y -től.

7. Ha a véletlenszerűen választott felnőtt férfiak testsúlya körülbelül egyforma, mondjuk y (kg), akkor a testmagasság várható értéke – a feltételezett y függvényében – így alakul:

- $y = 76$ esetén X feltételes várható értéke:

$$E(X | Y = 76) = 180 + 0.6 \frac{15}{10}(76 - 80) = 176.4$$

Tehát a körülbelül 76 kg testsúlyú felnőtt férfiak átlagos testmagassága körülbelül 176.4 cm.

- $y = 80$ esetén X feltételes várható értéke:

$$E(X | Y = 80) = 180 + 0.6 \frac{15}{10}(80 - 80) = 180.0$$

Tehát a körülbelül 80 kg testsúlyú felnőtt férfiak átlagos testmagassága körülbelül 180.0 cm.

- $y = 84$ esetén X feltételes várható értéke:

$$E(X | Y = 84) = 180 + 0.6 \frac{15}{10}(84 - 80) = 183.6$$

Tehát a körülbelül 84 kg testsúlyú felnőtt férfiak átlagos testmagassága körülbelül 183.6 cm.

- $y = 88$ esetén X feltételes várható értéke:

$$E(X | Y = 88) = 180 + 0.6 \frac{15}{10}(88 - 80) = 187.2$$

Tehát a körülbelül 88 kg testsúlyú felnőtt férfiak átlagos testmagassága körülbelül 187.2 cm.

A számadatokból kiolvashatjuk, hogy 4 kg-mal nehezebb felnőtt férfiak átlagosan 3.6 cm-rel magasabbak, mint a 4 kg-mal könnyebbek. Tehát 1 kg súlynövekedés átlagosan 0.9 cm testmagasság növekedést eredményez. Vegyük észre, hogy a testmagasság szórása és a testsúly szórásának aránya a korrelációs együtthatóval szorozva adja ki ezt az átlagos testsúly növekedést:

$$\frac{15}{10} \cdot 0.6 = 0.9$$

8. Annak a valószínűsége, hogy egy felnőtt férfi 200 cm-nél magasabb – a feltételezett testsúly függvényében – így alakul:

- $y = 76$ esetén a feltételes valószínűség értéke:

$$P(X > 200 | Y = 76) = 1 - \text{NORM.DIST}(200; 176.4; 12; \text{TRUE}) = 0.02$$

Tehát a körülbelül 76 kg testsúlyú felnőtt férfiaknak körülbelül 2 %-a súlyosabb magasabb 200 cm-nél.

- $y = 80$ esetén a feltételes valószínűség értéke:

$$P(X > 200 | Y = 80) = 1 - \text{NORM.DIST}(200; 180.0; 12; \text{TRUE}) = 0.05$$

Tehát a körülbelül 80 kg testsúlyú felnőtt férfiaknak körülbelül 5 %-a súlyosabb magasabb 200 cm-nél.

- $y = 84$ esetén a feltételes valószínűség értéke:

$$P(X > 200 | Y = 84) = 1 - \text{NORM.DIST}(200; 183.6; 12; \text{TRUE}) = 0.09$$

Tehát a körülbelül 84 kg testsúlyú felnőtt férfiaknak körülbelül 9 %-a súlyosabb magasabb 200 cm-nél.

- $y = 88$ esetén a feltételes valószínűség értéke:

$$P(X > 200 | Y = 88) = 1 - \text{NORM.DIST}(200; 187.2; 12; \text{TRUE}) = 0.14$$

Tehát a körülbelül 88 kg testsúlyú felnőtt férfiaknak körülbelül 14 %-a súlyosabb magasabb 200 cm-nél.

Kiemelünk két tény a fentiek közül:

- $x = 190$ esetén Y feltételes várható értéke:

$$E(Y | X = 190) = 80 + 0.6 \frac{10}{15}(190 - 180) = 84$$

vagyis a körülbelül 190 cm magas felnőtt férfiak átlagos testsúlya körülbelül 84 kg.

- $y = 84$ esetén X feltételes várható értéke:

$$E(X | Y = 84) = 180 + 0.6 \frac{15}{10}(84 - 80) = 183.6$$

vagyis a körülbelül 84 kg testsúlyú felnőtt férfiak átlagos testmagassága körülbelül 183.6 cm.

Lehet, hogy furcsának tűnik, de mégis ez az igazság: a 190 cm magas férfiak átlagos testsúlya 84 kg, de a 84 kg testsúlyú férfiak átlagos testmagassága nem 190 cm, hanem csak 183.6 cm.

11.9. Példa: A műszer hibáját korrigáljuk

Tegyük fel, hogy egy áramkörben a feszültség névleges értéke 230 V, de az igazság az, hogy a tényleges feszültség ingadozik, egyszer több, máskor kevesebb, mint 230 V. Tegyük fel, hogy a tényleges feszültség normális eloszlású valószínűségi változó 230 várható értékkel és 10 szórással.

Ha valakinek tökéletes műszere van, akkor a tényleges feszültséget pontosan ki tudja mérni. De ha a műszer tévedhet, és a leolvasott feszültség a tényleges feszültségnél több is és kevesebb is lehet, akkor felmerül a kérdés: hogyan következtessünk a leolvasott feszültségből a tényleges feszültségre?

Tegyük fel, hogy a műszer hibája – a tényleges feszültségtől független, és normális eloszlást követ 0 V várható értékkel és 5 V szórással. Ha a leolvasott érték a tényleges feszültség és a műszer hibájának az összege, akkor így okozható.

Legyen X a tényleges feszültség, H a műszer hibája, Y a leolvasott érték: $Y = X + H$. A feltételek szerint

- X normális eloszlású $\mu_1 = 230$ várható értékkel és $\sigma_1 = 10$ szórással,
- H független X -től, és normális eloszlású $\mu_H = 0$ várható értékkel és $\sigma_H = 5$ szórással,

amiből következik, hogy

- Y normális eloszlású

$$\mu_2 = \mu_1 + \mu_H = 230 + 0 = 230$$

várható értékkel és

$$\sigma_2 = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_H^2} = \sqrt{10^2 + 5^2} = \sqrt{125}$$

szórással.

Y feltételes szórása X adott értéke esetén a hiba szórásával, vagyis 5 -tel egyenlő. Ezért az

$$SD(Y | X = x) = \sigma_2 \sqrt{1 - r^2}$$

összefüggés miatt az

$$5 = \sqrt{125} \sqrt{1 - r^2}$$

egyenletet kapjuk, amiből a korrelációs együtthatóra az alábbi érték jön ki:

$$r = \sqrt{\frac{4}{5}}$$

Ezek alapján – a tanultak szerint – a legjobb tipp Y -ból X -re az alábbi képlettel adódik:

$$x = \mu_1 + r \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (y - \mu_2)$$

$$x = 230 + \sqrt{\frac{4}{5}} \frac{10}{\sqrt{125}} (y - 230)$$

$$x = 230 + \frac{20}{25} (y - 230)$$

$$x = 230 + 0.8 (y - 230)$$

Ezek szerint, ha valaki rendszeresen következtet a leolvasott feszültségből a tényleges feszültségre, és a hiba négyzetének (vagy abszolút értékének) a várható értékét igyekszik minimalizálni, akkor – például – 240 V feszültség leolvasása esetén a tényleges feszültséget 238 V -nak kell vennie.