Számsorozatok

Valós számokból álló végtelen sorozatokat tekintünk.

Pl

- $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ $\qquad a_n = \frac{1}{n}$
- $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ $\qquad b_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$
- $1, 8, 27, 64, 125, \dots$ $\qquad c_n = n^3$
- $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ $\qquad d_n = \frac{1}{2^{n-1}}$
- $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{5}{6}$ $\qquad e_n = (-1)^{n+1} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)}_{\frac{n}{n+1}}$

Def

Az a_n sorozat <u>monoton növő</u>, ha minden n-re $a_{n+1} \geq a_n$.

Az a_n sorozat <u>monoton csökkenő</u>, ha minden n-re $a_{n+1} \leq a_n$.

Def

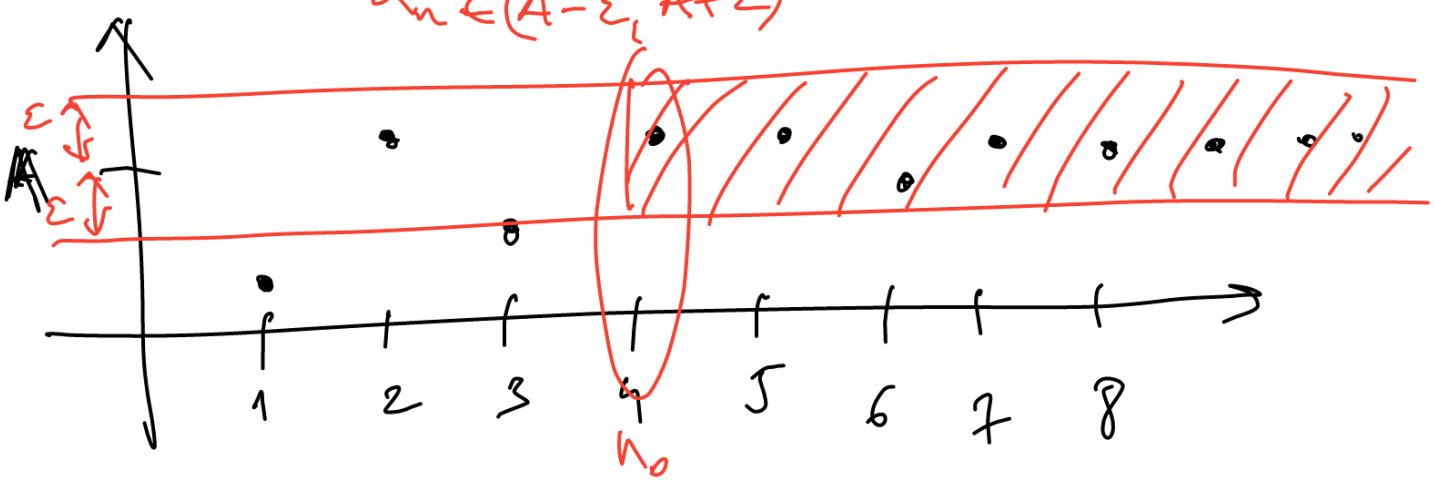
Az a_n sorozat <u>alulról korlátos</u>, ha létezik olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy $K \leq a_n$ minden n-re, <u>felülről korlátos</u>, ha létezik $L \in \mathbb{R}$, hogy $a_n \leq L$ minden n-re. Az a_n <u>korlátos</u>, ha alulról és felülről is korlátos, azaz

$K \leq a_n \leq L$ minden n-re alkalmas $K, L \in \mathbb{R}$.

Def

Az a_n sorozatnak az $A \in \mathbb{R}$ a <u>határértéke</u> (limesze), ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $|a_n - A| < \varepsilon$ minden $n \geq n_0$-ra.

$a_n \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$



Jelölés $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ vagy $a_n \to A$ amint $n \to \infty$, szóban a_n tart A-hoz, amint n tart végtelenhez.

Def

Az a_n sorozat határértéke (∞) $-\infty$, ha minden $L \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, amelyre $(a_n \geq L)$ $a_n \leq L$ minden $n \geq n_0$. Jel.: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ $-\infty$

Szóhasználat

Az a_n sorozat konvergens, ha létezik véges határértéke. Divergens, ha $\pm\infty$ a határértéke, vagy nincs határértéke.

Tétel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Biz.: Legyen adott $\varepsilon > 0$. Keressük, milyen n-ekre áll fenn

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Az n_0 küszöbindex választható $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ -nek. $\square$

Köv Részsorozatképzéssel:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0,$$

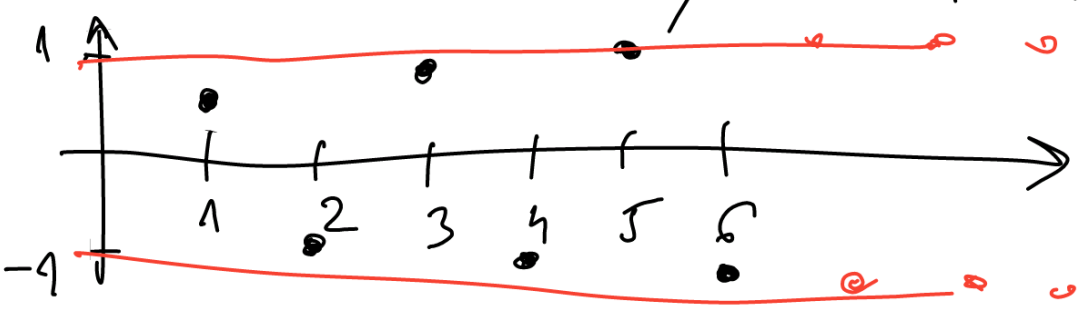
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} = 0$$

Továbbá $\lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 0$

Pl

$c_n = n^3 \longrightarrow \infty$ amint $n \to \infty$

$e_n = (-1)^{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$ $\quad \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \dots$



Az e_n sorozatnak nincs határértéke, az 1 és -1 a torlódási pontjai.

Def

Az a_n sorozatnak $A \in \mathbb{R}$ vagy $\pm\infty$ a <u>torlódási pontja</u>, ha létezik A-hoz ill. $\pm\infty$-hez tartó részsorozata.

Áll

- Ha A az a_n sorozat határértéke, akkor torlódási pontja is.
- Ha korlátos sorozatnak egyetlen torlódási pontja van, akkor konvergens, és a torlódási pont határértéke.
- Egy sorozatnak csak egy határértéke lehet.

Tétel

Konvergens sorozat egyben korlátos is.

Tétel

Korlátos és monoton sorozat konvergens.

Tétel (Bolzano–Weierstrass)

Korlátos sorozatból kiválasztható konvergens részsorozat.

Tétel

Ha a_n és b_n konvergens, akkor

- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\right)$
- ha $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$,

Pl

$$a_n = \frac{3n^2 - 8n}{4 - n^2} = \frac{n^2\left(3 - \underbrace{8/n}_{\to 0}\right)}{n^2\left(\underbrace{4/n^2}_{\to 0} - 1\right)} \to \frac{3}{-1} = -3$$

$$b_n = \frac{3n^3 - 8n}{4 - n^2} = \frac{\underbrace{n^3}_{=n \to \infty}\left(\underbrace{3 - 8/n^2}_{\to 3}\right)}{n^2\left(\underbrace{4/n^2 - 1}_{\to -1}\right)} \to -\infty$$

$$c_n = \frac{3n^2 - 8n}{4 - n^3} = \frac{\underbrace{n^2}_{=\frac{1}{n} \to 0}\left(\underbrace{3 - 8/n}_{\to 3}\right)}{n^3\left(\underbrace{4/n^3 - 1}_{\to -1}\right)} \to 0$$

Tétel

① Ha $a_n \le b_n$ minden n-re, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

② (Rendőrelv) Ha $a_n \le b_n \le c_n$ minden n-re, továbbá $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$, akkor létezik $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Pl

$$b_n = \frac{\sin(n)}{n}$$

Rendőrelvet alkalmazzuk, legyen

$a_n = -\frac{1}{n}$, $c_n = \frac{1}{n}$, amelyekre

$$\underbrace{-\frac{1}{n}}_{\to 0} \le \frac{\sin(n)}{n} \le \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \quad \left(\text{mert } -1 \le \sin(n) \le 1\right)$$

Ezért $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$.

Nevezetes határértékek

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0 & \text{ha } |a| < 1 \\ 1 & \text{ha } a = 1 \\ \infty & \text{ha } a > 1 \\ \text{nem létezik, ha} & a \le -1 \end{cases}$$

Def

Ha a_n és b_n pozitív tagú sorozatok, akkor az a_n kisebb nagyságrendű b_n-nél (jel. $a_n \ll b_n$) amint $n \to \infty$, ha $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ (ami pontosan akkor áll fenn, ha $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \infty$).

Sorozatok nagyságrendi összehasonlítása

Tétel

tetsz 1 és 2 közötti alap

$$n \ll n^2 \ll n^3 \ll \ldots \ll 2^n \ll 3^n \ll \ldots \ll n! \ll n^n$$

amint $n \to \infty$.

Spec $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^8}{5^n} = 0$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5^n}{n^8} = \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{1000}}{1{,}001^n} = 0$$

Pl

$$\frac{n^5 - 2^n}{4^n - n!} = \frac{\overbrace{2^n}^{\to 0}\left(\overbrace{\frac{n^5}{2^n} - 1}^{\to -1}\right)}{\left(\underbrace{\frac{4^n}{n!} - 1}_{\to -1}\right)} \to 0$$

PL/tétel

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e \approx 2{,}7$$

Tétel

Legyen a_n pozitív tagú sorozat.

- Ha $a_n \to A \in [0,1)$, akkor

  $(a_n)^n \to 0$ amint $n \to \infty$.

- Ha $a_n \to A > 1$, akkor

  $(a_n)^n \to \infty$ amint $n \to \infty$.

- Ha $a_n \to 1$, akkor felírható

  $a_n = 1 + b_n$ alakban, ahol $b_n \to 0$,

továbbá $$\lim_{n\to\infty} (1+b_n)^{c_n} = e^{\lim_{n\to\infty} b_n \cdot c_n}$$

ha $c_n \to \infty$ amint $n \to \infty$.