Függvényvizsgálat

Pl $f(x) = x^2 \ln x$

- értelmezési tartomány: $x > 0$ $(0, \infty)$

- $f'(x) = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x$
- $f''(x) = 2 \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} + 1 = 2 \ln x + 3$
  - deriváltak zérushelyei:

$$f'(x) = 2x \ln x + x = 0$$

$x = 0$

itt nem értelmezett $f(x)$

$2 \ln x + 1 = 0$

$\ln x = -\frac{1}{2}$

$x = e^{-\frac{1}{2}}$

$$f''(x) = 2 \ln x + 3 = 0$$

$\ln x = -\frac{3}{2}$

$x = e^{-\frac{3}{2}}$

Észrevétel: $-\frac{3}{2} < -\frac{1}{2}$ és az e^x fv. monoton növő, ezért $e^{-\frac{3}{2}} < e^{-\frac{1}{2}}$

	$(0, e^{-3/2})$	$e^{-3/2}$	$(e^{-3/2}, e^{-1/2})$	$e^{-1/2}$	$(e^{-1/2}, \infty)$
f	$\searrow \cap$	$\searrow$ infl. pont	$\searrow \cup$	lok. min.	$\nearrow \cup$
f'	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f''	$-$	0	$+$	$+$	$+$

$$f(x) = x^2 \ln x$$

$$f'(x) = 2x \ln x + x = x(2\ln x + 1)$$

$$f''(x) = 2\ln x + 3$$

$$f'(x) = \underbrace{x}_{>0}(2\ln x + 1) > 0, \text{ ha } 2\ln x + 1 > 0$$

$$\ln x > -\frac{1}{2}$$

$$x > e^{-1/2}$$

$$f''(x) = 2\ln x + 3 > 0$$

$$\ln x > -\frac{3}{2}$$

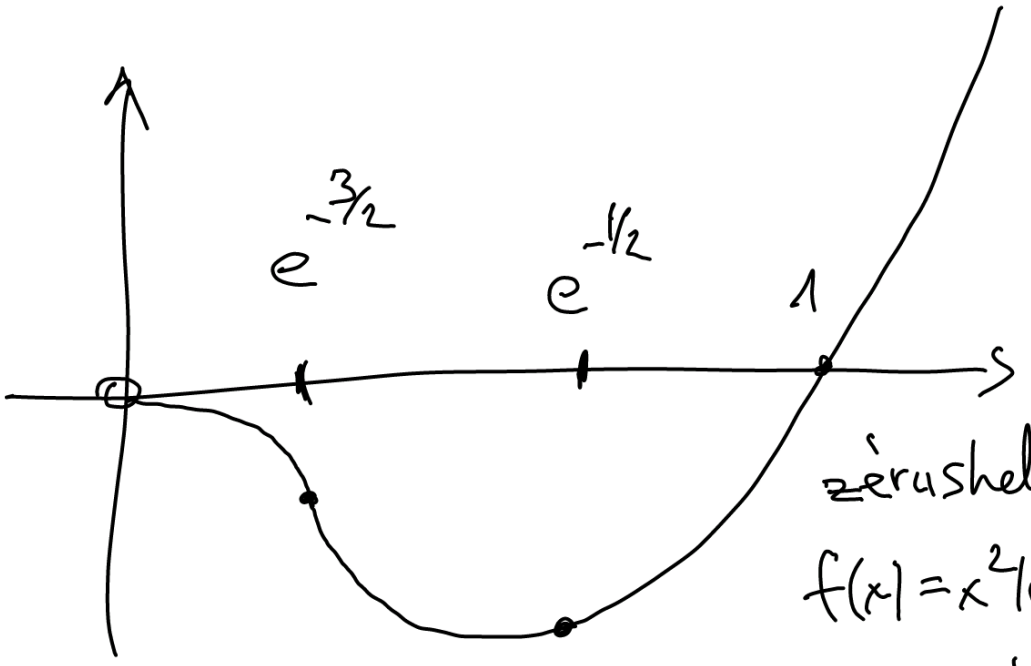
$$x > e^{-\frac{3}{2}}$$

- kiszámoljuk a határértéket az ért. tart. szélein

$$\lim_{x \to \infty} x^2 \ln x = \infty$$

$$\lim_{x \to 0+} x^2 \ln x = \lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{x^{-2}} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0+} \frac{1/x}{-2x^{-3}} = \lim_{x \to 0+} -\frac{x^2}{2}$$

$$= 0$$



zérushely:

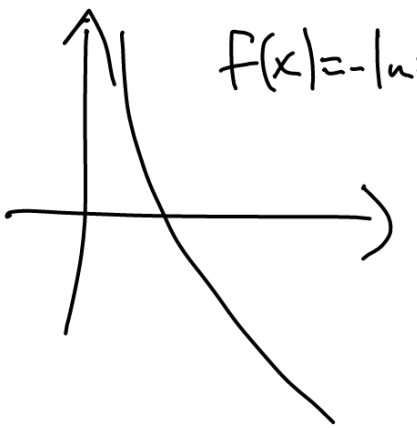
$f(x) = x^2 \ln x = 0$

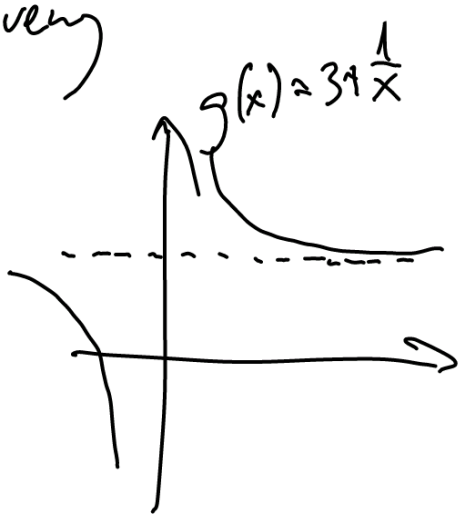
$\ln x = 0$

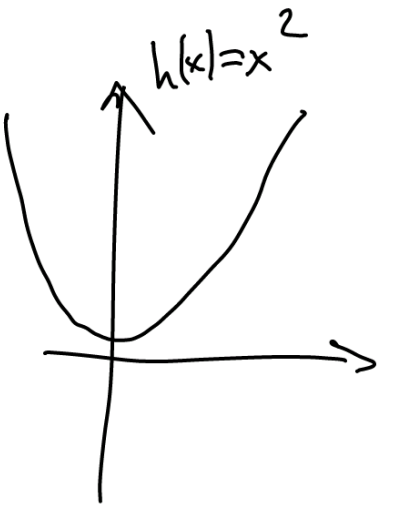
$x = e^0 = 1$

P1

3 konvex függvény







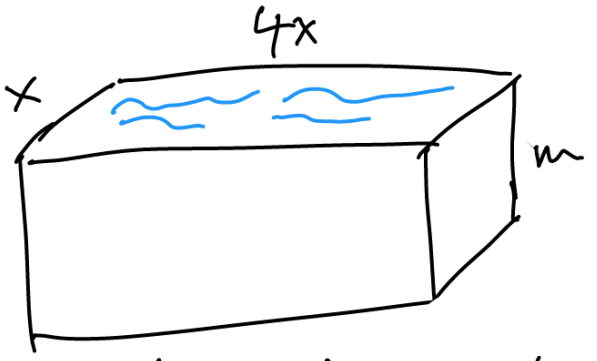
$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to \infty} g(x) = 3$ $\lim_{x \to \infty} h(x) = \infty$

Szöveges szélsőérték-feladatok

P1

Mekkorák az oldalai annak az 1:4 oldalarányú úszómedencének, amelynek maximális a térfogata, és 300 m^2 csempével kicsempézhető.

Mo



térfogata: $V = x \cdot 4x \cdot m = 4x^2 m$

összefüggés a változók (x és m) közötti kicsempézhetőségből

$$\underbrace{x \cdot 4x}_{\text{medence alja}} + \underbrace{\underbrace{(x+4x+x+4x)}_{\text{kerület}}}_{\text{oldalfalak}} m = 300$$

$$\boxed{4x^2 + 10xm = 300}$$

$$\Rightarrow m = \frac{300 - 4x^2}{10x} = \frac{30}{x} - \frac{2}{5}x$$

Ezt beírva a térfogatba:

$$V(x) = 4x^2\left(\frac{30}{x} - \frac{2}{5}x\right) = 120x - \frac{8}{5}x^3$$

$$V(x) = 120x - \frac{8}{5}x^3$$

$$V'(x) = 120 - \frac{8}{5}3x^2 = 0$$

$$120 = \frac{24}{5}x^2$$

$$x^2 = \cancel{120}^{10} \cdot \frac{5}{\cancel{24}_{2}} = 25$$

$$x = \pm 5$$

Ezek közül az $x=5$ érdekes csak.

$$V''(x) = -\frac{8}{5} \cdot 3 \cdot 2x = -\frac{48}{5}x$$

$$V''(5) = -\frac{48}{5} \cdot 5 = -48 < 0$$

Teljesül a lok. max. létezésére vonatkozó elégséges feltétel.

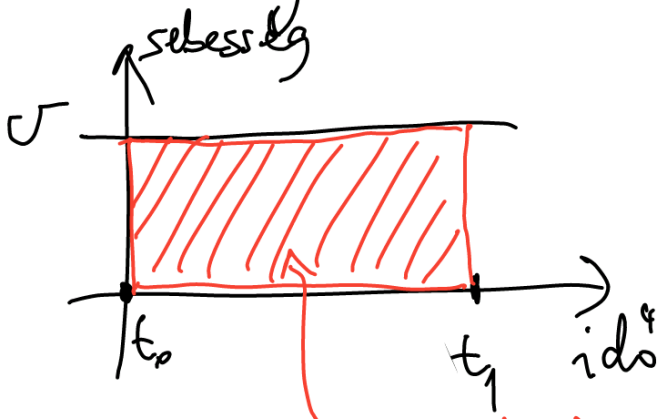
$$x = 5 \qquad 4x = 20$$

$$m = \frac{30}{5} - \frac{2}{5} \cdot 5 = 6 - 2 = 4$$

Integrálás

Motiváció: egyenes vonalú mozgás

① egyenes vonalú pályán mozgó test sebessége állandó (jel. v)

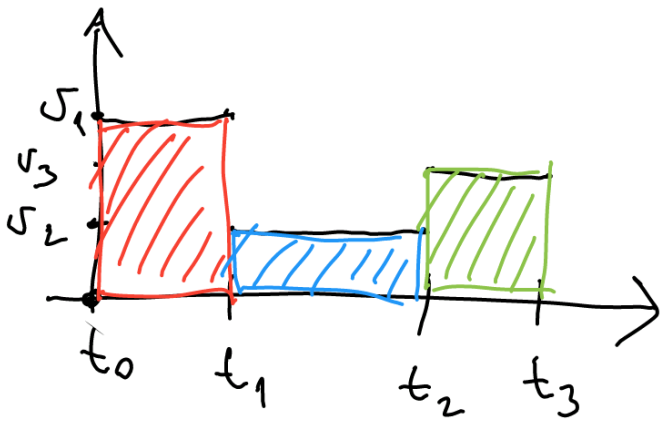


Mennyi a test által megtett út t_0 és t_1 között.

megtett út $= v(t_1 - t_0)$

ez a terület éppen $v(t_1 - t_0)$

② sebesség szakaszonként állandó

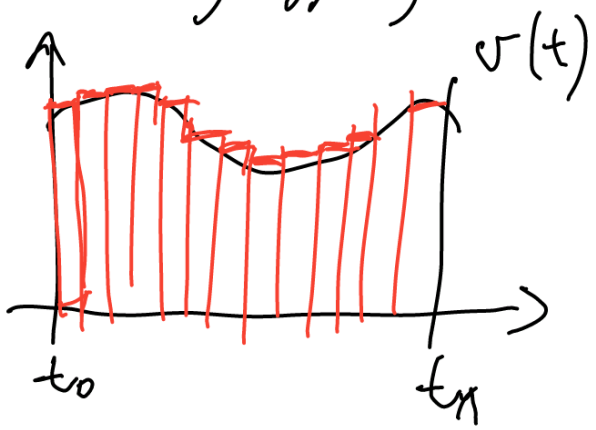


Megtett út t_0 és t_3 között:

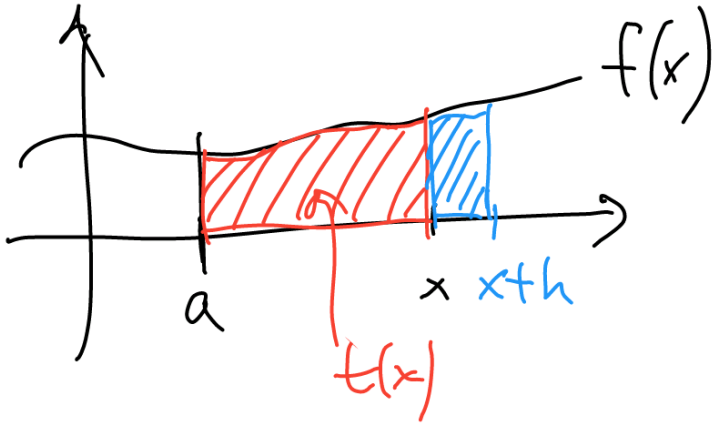
$v_1(t_1 - t_0) + v_2(t_2 - t_1) + v_3(t_3 - t_2)$

Észrevétel: itt is a megtett út megegyezik a sebességgörbe alatti területtel.

③ sebességfüggvény általános



t_0 és t_1 közt megtett út a sebességfv. görbe alatti területe



Legyen $a \in \mathbb{R}$ rögzített.

Az adott $f(x)$ függvényhez rendeljük hozzá azt a $t(x)$ függvényt, amely az $f(x)$ görbéje alatti terület az $[a,x]$ intervallumon.

Kiszámoljuk

az $[x, x+h]$ intervallumon az $f(x)$ görbe alatti ter.

$$\frac{d}{dx} t(x) = \lim_{h \to 0} \frac{t(x+h) - t(x)}{h} = f(x)$$

az $[x, x+h]$ intervallumon az $f(x)$ fv. átlagmagassága

<u>Def</u>

Legyen $f(x)$ az I intervallumon értelmezett függvény. A $F(x)$ a $f(x)$ <u>primitív függvénye</u> I-n, ha $F'(x) = f(x)$ ha $x \in I$.

<u>Pl</u> $f(x) = 2x+3$

$F(x) = x^2 + 3x$ primitív fv.

$G(x) = x^2 + 3x + 10$ is primitív fv.

Tétel

Adott $f(x)$ függvénynek az I intervallumon bármely két primitív függvénye csak konstansban tér el egymástól.

Def

A $f(x)$ függvény <u>határozatlan integrálja</u> az I intervallumon a primitív függvényeinek összességét értjük.

Jel.: $\int f(x)\,dx$

Pl $f(x) = 2x+3$

$$\int (2x+3)\,dx = x^2 + 3x + c$$

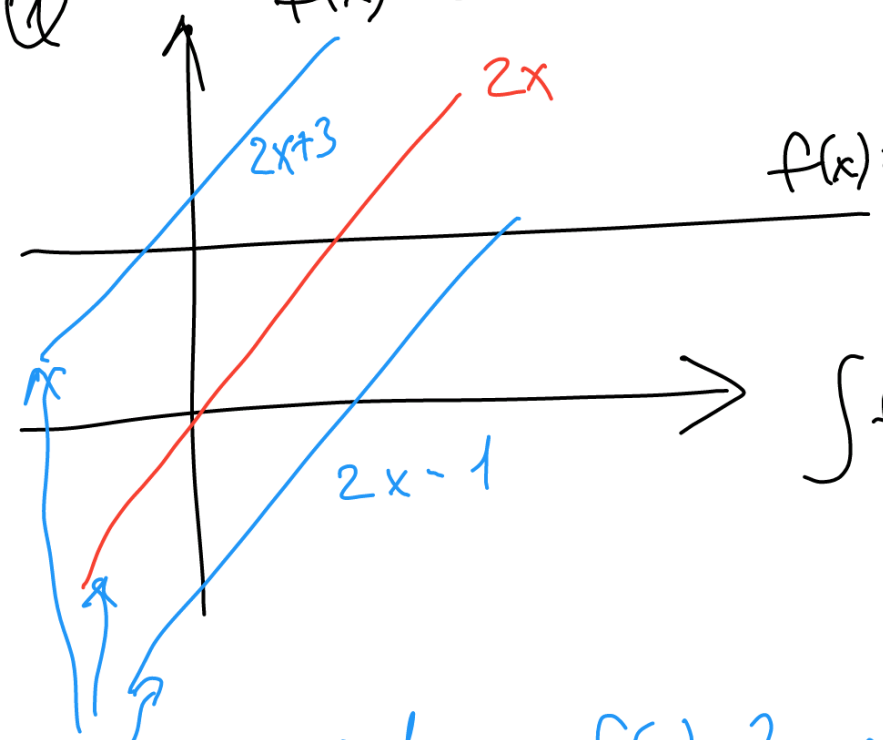
Tulajdonságok

- $\int \left(f(x) \pm g(x)\right) dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$
- $\int c f(x)\,dx = c \int f(x)\,dx$

ahol $c \in \mathbb{R}$ konstans

Grafikus integrálás

① $f(x)=2$ konstans



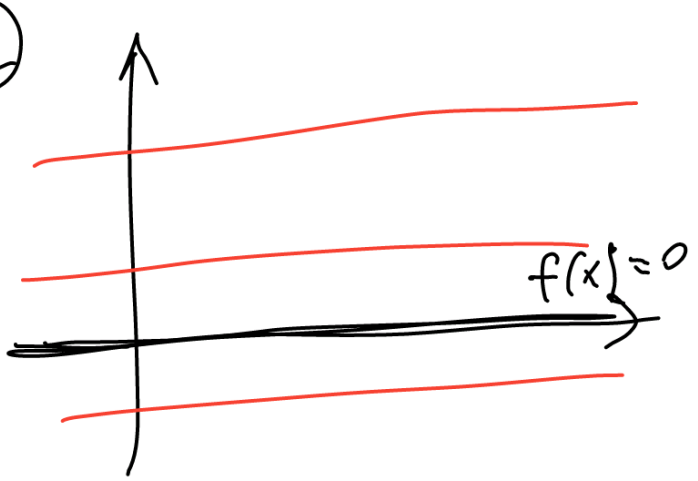
$f(x)=2$

Keressük

$$\int f(x)dx=\int 2dx$$
$$=2x+c$$

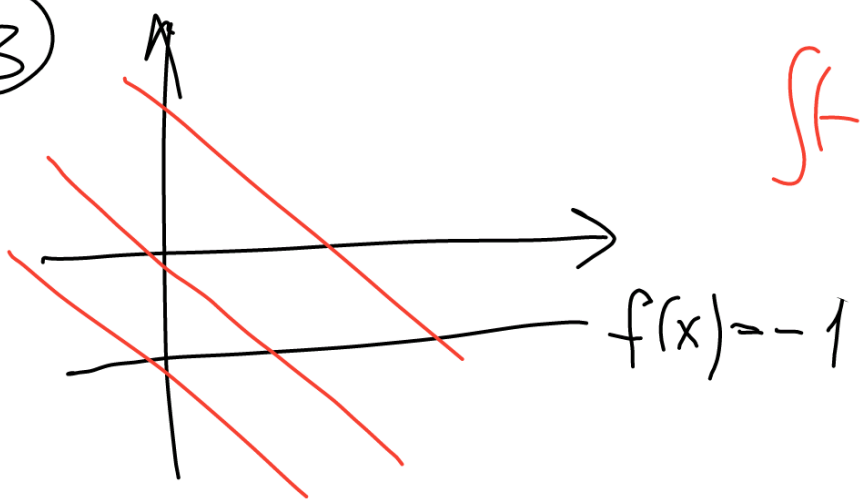
Ezek mind az $f(x)=2$ primitív függvényei

②



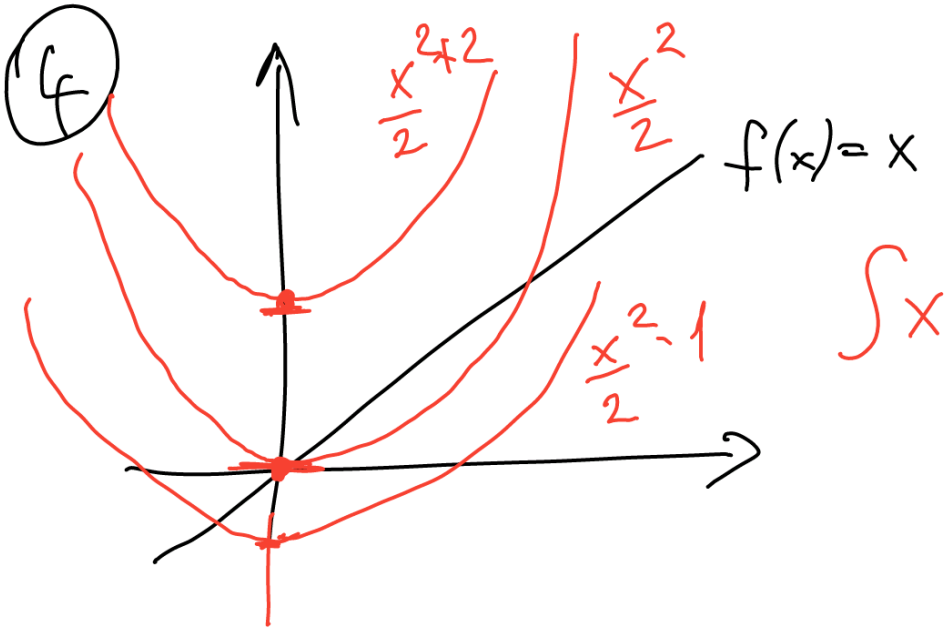
$$\int 0\,dx=0+c$$

③



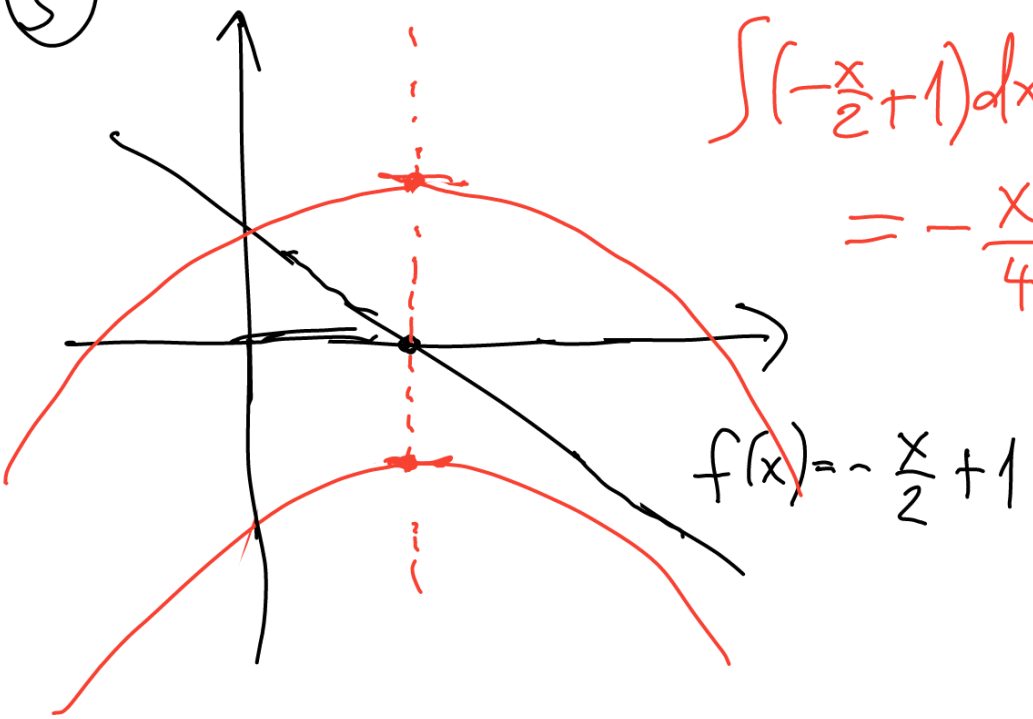
$$\int(-1)dx=-x+c$$

4



$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c$$

5



$$\int\left(-\frac{x}{2}+1\right)dx =$$

$$= -\frac{x^2}{4} + x + c$$

Nevezetes függvények integrálja

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
x^{α}	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$ ha $\alpha \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + c$
e^x	$e^x + c$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + c$
$\sinh x$	$\cosh x + c$
$\cosh x$	$\sinh x + c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + c$

P1

$$\int (3x - 8x^3 + 7)\,dx = 3 \cdot \frac{x^2}{2} - 8\frac{x^4}{4} + 7x + c$$

$$\int \left(2x - \underbrace{\sqrt{x}}_{x^{1/2}} + \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{x^{-2}}\right) dx = 2 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{-1}}{-1} + c$$

$$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$