

Tartalomjegyzék

I. A lineáris algebra forrásai 13

1 Vektorok 17

Vektorok a 2- és 3-dimenziós térben 17

Írányított szakasz, kötött és szabad vektor 17 • Vektor magadása egy írányított szakasszal 18 • Vektor megadása hossz és írány segítségével 19 • Vektorműveletek a 2- és 3-dimenziós térben 19 • A lineáris kombináció definíciója 21 • Lineáris függetlenség 23 • Speciális lineáris kombinációk* 24

Távolság, szög, orientáció 27

Skaláris szorzás 27 • Hosszúság és szög 28 • Pithagorász-tétel 28 • Két fontos egyenlőtlenség 29 • Egységvektorral való szorzás és a merőleges vetítés 30 • Merőlegesség és orientáció 31 • Vektori szorzás 32 • Parallelepipedon térfogata, és előjeles térfogata 35 • Vegyes szorzat 35

Vektorok koordinátás alakban 38

Descartes-féle koordinátarendszer 38 • Műveletek koordinátás alakban megadott vektorokkal 39 • A derékszögű koordinátarendszer 41 • Az $\mathbb{R}^n$ halmaz 43 • Vektorok összeadása és skalárral szorzása $\mathbb{R}^n$ -ben 44 • Lineáris kombináció, lineáris függetlenség, lineáris összefüggőség 45 • Skaláris szorzás $\mathbb{R}^n$ -ben 47 • Távolság és szög $\mathbb{R}^n$ -ben 48 • Korrelációs együttható* 51 • Bitvektorok, kódvektorok* 52 • Vektorműveletek $\mathbb{Z}_m^n$ -ben* 53

Megoldások 57

2 Lineáris egyenletrendszerek és megoldásuk 59

Egyenes és sík egyenletei 59

Alakzatok és egyenletek 59 • Síkbeli egyenes egyenletei 61
 • Síkbeli pont egyenletei 64 • A 3-dimenziós tér síkjainak
 egyenletei 65 • Térbeli egyenes egyenletei 67 • Térbeli pont
 egyenletei 70 • Egyenletek $\mathbb{R}^n$ -ben 70

A lineáris egyenletrendszer és két modellje 73

Lineáris egyenlet és egyenletrendszer 73 • Ekvivalens lineáris
 egyenletrendszerek 75 • Mátrixok 76 • Egyenletrendszer
 mátrixa és bővített mátrixa 77 • Sormodell: hipersíkok
 metszete 79 • Oszlopmodell: vektor előállítása lineáris
 kombinációként 81

Megoldás kiküszöböléssel 84

Elemi sorműveletek 84 • Lépcsős alak 84 • Gauss-módszer 85
 • Redukált lépcsős alak 89 • Gauss–Jordan-módszer 90 • A
 redukált lépcsős alak egyértelműsége 92 • Szimultán
 egyenletrendszerek 93 • Kiküszöbölés $\mathbb{Z}_p$ -ben* 95

Megoldás a gyakorlatban 98

A kiküszöbölés műveletigénye 98 • Numerikusan instabil
 egyenletrendszerek 98 • Részleges főelemkiválasztás 100
 • Skálázás 102 • Iteratív módszerek 103 • Jacobi-iteráció 104
 • Gauss–Seidel-iteráció 105 • Az iterációk konvergenciája 106

Megoldások 110

3 *Megoldhatóság és a megoldások tere* 113

Homogén és inhomogén egyenletrendszerek megoldásai 113

Kötött változók száma, mátrix rangja 113 • Egyenletrendszer
 megoldhatóságának feltétele 115 • Homogén lineáris
 egyenletrendszer megoldásai 117 • Altér 118 • Kifeszített
 altér 120 • Az inhomogén lineáris egyenletrendszer
 megoldásai 121 • Lineáris függetlenség és összefüggőség 123

Altér tulajdonságai és az egyenletrendszerek 126

Sor- és oszloptér 126 • Bázis 127 • Vektor egy bázisra
 vonatkozó koordináták alakja 129 • Dimenzió és rang 130 • A
 sortér és a nulltér merőlegessége 134 • A lineáris algebra
 alaptétele 135 • Elemi bázistranszformáció* 136

Megoldások 140

II. Mátrixok algebrája és geometriája 143

4 *Mátrixműveletek definíciói* 147

Műveletek táblázatokkal – műveletek mátrixokkal 147

- Táblázatok összeadása 147 • Táblázat szorzása számmal 148
- Táblázatok szorzása 148 • Lineáris helyettesítés 149
- Mátrixok 150 • Elemenkénti mátrixműveletek 151
- Mátrixok lineáris kombinációi 152 • Mátrixszorzás 153
- Műveletek blokkmátrixokkal 154

A mátrixszorzás használata 158

- Skaláris szorzat és diadikus szorzat mátrixszorzatos alakja 158
- Lineáris egyenletrendszer mátrixszorzatos alakja 159
- Lineáris helyettesítés mátrixszorzatos alakja 160 • Szorzás vektorral 160 • Szorzás standard egységvektorral 161 • A báziscsere mátrixszorzatos alakja 161 • Bázisfelbontás* 163
- Egységmátrix, elemi mátrixok 164 • Vektorokra particionált mátrixok 166 • Altér felírása mátrixszorzattal 168 • * 171

Megoldások 172

5 *Mátrixműveletek algebrája* 175

Az alaplmműveletek tulajdonságai 175

- Az összeadás és a skalárral való szorzás tulajdonságai 175 • A szorzás tulajdonságai 175 • Mátrix hatványozása 178 • A transzponálás tulajdonságai 180 • Mátrixszorzás inverze – mátrixok osztása* 181 • Mátrix inverze 181 • Elemi mátrixok inverze 183 • Az inverz kiszámítása 183 • Az inverz tulajdonságai 186 • Az invertálhatóság és az egyenletrendszerek megoldhatósága 187 • Invertálhatóság, bázis, báziscsere 189

Műveletek speciális mátrixokkal 193

- Diagonális mátrixok 193 • Permutációs mátrixok és kigyók 193
- Háromszögmátrixok 195 • Szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrixok 196 • Mátrix és diád összegének inverze* 197 • Gyorsszorítás* 199

Mátrixfelbontások 202

- Az LU-felbontás 202 • Egyenletrendszer megoldása LU-felbontással 205 • Mátrix invertálása LU-felbontással 206
- PLU-felbontás* 207 • Az LU-felbontás a gyakorlatban 207

Mátrixleképezés, lineáris leképezés 210

- A mátrixleképezés fogalma 210 • Műveletek mátrixleképezések között 211 • Mátrixleképezések tulajdonságai 211 • Lineáris leképezés 212 • Példák lineáris leképezésekre 214 • A mátrixleképezés hatásának szemléltetései 215 • Lineáris leképezés mátrixa különböző bázisokban 218 • Hasonlóság 219

*Alkalmazások** 222

- Többszörös függvények differenciálása 222

Megoldások 228

6 *Determináns* 231

Parallelogramma előjeles területe 231 • Parallelepipedon előjeles térfogata 232

A determináns, mint sorvektorainak függvénye 233

A determináns definíciója 233 • A determináns értékének kiszámítása 235 • Mátrixműveletek és determináns 238
• Mikor 0 a determináns értéke 240 • A determináns invariáns mennyiség 242 • Tartományok mértékének változása, orientáció 242 • Jacobi-determináns és az integrál transzformációja 243

A determináns, mint elemeinek függvénye 248

Kígyók determinánsa 248 • Permutációs mátrix determinánsa* 250 • Előjeles aldetermináns 252 • Determináns kifejtése 255 • Cramer-szabály és a mátrix inverze 256
• Blokkmátrixok determinánsa* 260
• Vandermonde-determináns 261

Megoldások 267

7 *Lineáris leképezések geometriája* 273

2- és 3-dimenziós geometriai transzformációk mátrixa 273

Forgatás 273 • Merőleges vetítés 277 • Tükrözés 278
• Vetítés 279 • Eltolás 279

7 *Lineáris leképezések geometriája* 275

2- és 3-dimenziós geometriai transzformációk mátrixa 275

Forgatás 275 • Merőleges vetítés 279 • Tükrözés 280
• Vetítés 281 • Eltolás 281

A lineáris algebra alaptétele 282

A sortér és a nulltér merőlegessége 282 • Kiegészítő altér 284
• A lineáris egyenletrendszer megoldásainak jellemzése 287

Megoldások 291

Merőleges vetítés és a legjobb közelítés 291

Merőleges vetítés $\mathbb{R}^n$ egy alterére 292 • Melyik mátrix merőleges vetítés mátrixa? 293 • Altértől való távolság 294
• Egyenletrendszer optimális megoldása 295 • Lineáris és polinomiális regresszió 297 • Vetítés 299

*Pszéudoinvert** 303

A pszéudoinvert fogalma 303 • A pszéudoinvert tulajdonságai 306 • A pszéudoinvert és a minimális abszolút értékű optimális megoldás 307

Ortonormált bázis, ortogonális mátrixok, ortogonalizáció 311

Ortogonalis és ortonormált bázis 311 • Ortogonalis mátrixok 313 • Ortogonalis mátrixok geometriája 315 • A 2- és 3-dimenziós tér ortogonalis transzformációi 316

- Givens-forgatás, Householder-tükrözés* 318
- Gram–Schmidt-ortogonalizáció* 320 • A QR-felbontás* 322
- QR-felbontás primitív ortogonalis transzformációkkal* 324
- Egyenletrendszer optimális megoldása QR-felbontással* 326

Komplex és véges test feletti terek* 330

Komplex vektorok skaláris szorzata 330 • Önadjungált mátrixok 332 • Távolság és a merőleges vetítés komplex terekben 333 • Unitér mátrixok 333 • Fourier-mátrixok 333

- Diszkrét Fourier-transzformáció 336 • Periodikus összetevők szűrése 339 • Gyors Fourier-transzformáció 340 • Vektorok konvolúciója 344

Megoldások 344

III. Mátrixok sajátosságai 347

8 Sajátérték, diagonalizálás 351

Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér 351

A sajátérték és a sajátvektor fogalma 351 • Karakterisztikus polinom 353 • A valós 2×2 -es mátrixok sajátaltereinek jellemzése 355 • Mátrix összes sajátértékének és sajátvektorának meghatározása 356 • A karakterisztikus egyenlet komplex gyökei 359 • A karakterisztikus egyenlet többszörös gyökei: az algebrai és a geometriai multiplicitás 360 • Sajátértékek és a mátrix hatványai 361 • Speciális mátrixok sajátértékei 363

Hasonlóság, diagonalizálhatóság 366

Lineáris transzformációk sajátértékei 366 • Hasonló mátrixok sajátértékei 367 • Mátrixok diagonalizálása és sajátfelbontása 368 • Bal sajátvektorok és a sajátfelbontás diadikus alakja* 369 • Diagonalizálható mátrixok polinomjai és a Cayley–Hamilton-tétel* 371 • Különböző sajátértékek sajátalterei 372 • Sajátértékek multiplicitása és a diagonalizálhatóság* 374 • Diagonalizálható mátrixok spektrálfelbontása* 377

A sajátérték kiszámítása 378

Gerschgorin-körök 378 • Hatványmódszer 380

Megoldások 382

9 Diagonalizálás ortonormált bázisban 383

Ortogonalis és unitér diagonalizálás 383

Valós mátrixok ortogonalis diagonalizálása, valós spektráltétel 383

- Schur-felbontás* 386
- Mátrixok unitér diagonalizálása* 388
- Spektrálfelbontás szimmetrikus és önadjungált mátrixokra 389

Kvadratikus formák 391

Homogén másodfokú polinomok mátrixszorzatos alakja 391

- Főtengelytétel 392
- Kvadratikus formák és mátrixok definitisége 393
- Definitiség és főminorok 395
- Szélsőérték 395

Megoldások 396

Irodalomjegyzék 397

Tárgymutató 399

Listák

Tételek, állítások, következmények

1.2. Parallelogramma-módszer	20	1.57. Ortogonális vektorrendszer lineáris független-sége	50
1.5. A vektorműveletek tulajdonságai	21	2.5. Síkbeli egyenes explicit vektoregyenlete	61
1.7. Vektorral párhuzamos vektorok	22	2.6. Síkbeli egyenes implicit vektoregyenlete	62
1.8. Két vektorral egy síkba eső vektorok	22	2.7. Síkbeli egyenes explicit egyenletrendszere	62
1.9. Térbeli vektorok	23	2.8. Síkbeli egyenes (implicit) egyenlete	62
1.11. Síkbeli vektor felbontása	24	2.10. Sík explicit vektoregyenlete	65
1.12. Térbeli vektor felbontása	24	2.11. Sík implicit vektoregyenlete	65
1.13. Két ponton átmenő egyenes jellemzése	24	2.12. Sík explicit egyenletrendszere	66
1.14. Intervallum pontjainak jellemzése	25	2.13. Sík implicit egyenlete	66
1.17. Mikor 0 a skaláris szorzat?	27	2.15. Térbeli egyenes explicit vektoregyenlete	67
1.18. A skaláris szorzás műveleti tulajdonságai	28	2.16. Térbeli egyenes explicit egyenletrendszere	68
1.19. Pithagorász-tétel	28	2.17. Térbeli egyenes implicit egyenletrendszere	68
1.21. Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség	29	2.24. Ekvivalens átalakítások	75
1.22. Háromszög-egyenlőtlenség	29	2.28. Sormodell	81
1.23. Egységvektorral való szorzás geometriai jelentése	30	2.30. Oszlopmodell	82
1.24. Vektor felbontása merőleges összetevőkre	30	2.36. Lépcsős alakra hozás	87
1.29. Mikor 0 a vektori szorzat?	34	2.44. A redukált lépcsős alak egyértelmű	92
1.30. Vektori szorzat abszolút értékének geometriai jelentése	34	2.50. A kiküszöbölés műveletigénye	98
1.31. Vektori szorzás műveleti tulajdonságai	34	2.59. Elégséges feltétel az iterációk konvergenciájára .	107
1.35. Ekvivalenciareláció	37	3.1. Főelemek oszlopai	113
1.38. Vektorműveletek koordinátás alakja	40	3.4. Köötött és szabad változók száma	114
1.40. Skaláris szorzat ortonormált koordinátarendszerben	41	3.5. A megoldhatóság mátrixrangos feltétele	115
1.41. Vektori szorzat ortonormált koordinátarendszerben	42	3.6. Homogén lineáris egyenletrendszer megoldhatósága	116
1.46. Az összeadás és skalárral szorzás tulajdonságai	44	3.8. Megoldások lineáris kombinációja	117
1.48. Lineáris függetlenség	46	3.10. Alterek összege	119
1.49. Lineáris összefüggőség	47	3.12. Megoldások altere	120
1.51. A skaláris szorzás tulajdonságai	48	3.15. A kifeszített altér altér	120
1.54. Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség	49	3.17. Homogén és inhomogén egyenletrendszer megoldásai	121
1.55. Háromszög-egyenlőtlenség $\mathbb{R}^n$ -ben	50	3.19. Inhomogén egyenletrendszer megoldhatósága .	123
1.56. Skaláris szorzat és abszolút érték $\mathbb{R}^n$ -ben	50	3.21. Lineáris függetlenség eldöntése	124
		3.23. Elemi sorműveletek hatása a sor- és oszlopvektorokra	126
		3.24. Mátrix lépcsős alakjának vektori	127
		3.28. Bázis ekvivalens definíciói	129
		3.30. Bázis-tétel	130
		3.33. Dimenzió = rang	132

3.36. Dimenziótétel	133	6.15. A determináns invariáns a hasonlóságra	242
3.38. A sortér és a nulltér merőlegessége	134	6.17. Tartomány mértékének változása lineáris transzformációban	242
3.39. A lineáris algebra alaptétele	135	6.18. Felbontás kigyók determinánsainak összegére	249
3.40. Elemi bázistranszformáció	138	6.19. Permutációs mátrix determinánsa	251
4.11. Műveletek blokkmátrixokkal	155	6.21. Determinánsfüggvény létezése	251
4.16. Mátrixszorzás és lineáris kombináció	160	6.24. Determináns rendjének csökkentése	253
4.17. Mátrix elemeinek, sor- és oszlopvektorainak elő- állítás	161	6.26. Determinánsok kifejtési tétele	255
4.21. Koordináták változása a bázis cseréjénél	163	6.28. Cramer-szabály	257
4.22. Bázisfelbontás	163	6.30. Mátrix inverzének elemei	258
4.27. Elemi sorműveletek mátrixszorzással	166	6.32. Determinánsok szorzata blokkmátrixban	260
4.28. A szorzat oszlopai és sorai	168	6.33. 2×2 -es blokkmátrix determinánsa	261
5.2. Mátrixszorzás algebrai tulajdonságai	176	6.36. Vandermonde-determináns értéke	263
5.3. Hatványozás azonosságai	178	7.1. A forgatás mátrixa	273
5.6. Transzponálás tulajdonságai	180	7.4. Tengely körüli forgatás – Rodrigues-formula	275
5.9. Sorművelet inverzének mátrixa	183	7.7. Egyenesre való merőleges vetítés mátrixa	277
5.10. Az inverz létezéséhez elég egy feltétel	183	7.8. Síkra való merőleges vetítés mátrixa	277
5.12. 2×2 -es mátrix inverze	185	7.10. Síkbeli tükrözés mátrixa	278
5.13. Az inverz alaptulajdonságai	186	7.11. Síkra való tükrözés mátrixa	278
5.14. Az invertálhatóság és az egyenletrendszerek	187	7.1. A forgatás mátrixa	275
5.18. Invertálhatóság és bázis	189	7.4. Tengely körüli forgatás – Rodrigues-formula	277
5.19. Az áttérés mátrixának inverze	190	7.7. Egyenesre való merőleges vetítés mátrixa	279
5.22. Műveletek diagonális mátrixokkal	193	7.8. Síkra való merőleges vetítés mátrixa	279
5.26. Műveletek permutációs mátrixokkal	194	7.10. Síkbeli tükrözés mátrixa	280
5.28. Műveletek háromszögmátrixokkal	196	7.11. Síkra való tükrözés mátrixa	280
5.31. Műveletek (ferdén) szimmetrikus mátrixokkal	196	7.14. A sortér és a nulltér merőlegessége	283
5.32. Felbontás szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrix összegére	196	7.15. Kiegészítő alterek tulajdonságai	284
5.33. $A^T A$ és AA^T szimmetrikus	197	7.17. A merőleges kiegészítő altér tulajdonságai	286
5.34. Sherman – Morrison-formula	197	7.18. A lineáris algebra alaptétele	286
5.40. Az LU-felbontás létezése és egyértelműsége	204	7.19. A négy kitüntetett altér	287
5.45. Mátrixleképezések alpműveletei	211	7.20. Lineáris egyenletrendszer megoldásai	287
5.46. Inverz mátrixleképezések	211	7.22. Altérre való vetítés mátrixa	292
5.47. Mátrixleképezések alaptulajdonságai	212	7.24. Merőleges vetítés mátrixai	293
5.49. Az $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineáris leképezések	213	7.26. Legjobb közelítés tétele	294
5.52. Síkbeli forgatás, tükrözés, vetítés	215	7.27. Vektor felbontása összetevőkre	295
5.55. Lineáris leképezés mátrixai közti kapcsolat	218	7.29. Egyenletrendszer optimális megoldása	296
5.58. Hasonló mátrixok hatása	220	7.30. Lineáris regresszió	298
5.59. Hasonlóságra invariáns tulajdonságok	220	7.31. Linearizálható regressziós modellek	298
5.61. Jacobi-mátrix	223	7.34. A projekció tulajdonságai	300
5.64. Láncszabály	226	7.36. A vetítés ekvivalens definíciója	301
6.2. Nullvektort tartalmazó determináns	235	7.37. Mikor merőleges egy vetítés?	301
6.3. Elemi sorműveletek determináns	235	7.40. A pszeudoinverz létezése és egyértelműsége	304
6.4. Elemi mátrixok determinánsa	236	7.42. Moore–Penrose-tétel	306
6.5. Permutációs mátrix determinánsa	236	7.43. $A^+ A$ és AA^+ merőleges vetítés	307
6.6. Háromszögmátrix determinánsa	236	7.44. Optimális megoldás pszeudoinverzrel	307
6.8. Determinánsok szorzásszabálya	239	7.47. Ortogonális vektorok függetlensége	311
6.10. Transzponált determinánsa	239	7.48. Legjobb közelítés ONB esetén	312
6.12. Zérus értékű determináns	240	7.52. Szemiortogonális mátrixok ekvivalens definíciói	314
6.14. Egyenletrendszer megoldhatósága és a determi- náns	241	7.53. Ortogonális mátrixok ekvivalens definíciói	314
		7.55. Ortogonális mátrixhoz tartozó mátrixleképezés	315
		7.56. Ortogonális mátrixok tulajdonságai	316

7.57.	317	1.10. Vektorok függetlensége	23
7.59. Egy vektor tükrözése egy másikba	319	1.15. Két vektor skaláris szorzata	27
7.61. Gram–Schmidt-ortogonalizáció	320	. Egységvektor	30
7.65. QR-felbontás létezése és egyértelműsége	323	1.26. Vektori szorzat	33
7.68. Legkisebb négyzetek QR-felbontással	327	1.33. Vegyes szorzat	36
7.72. Az adjungált tulajdonságai	331	. Vektor koordinátás alakja 2D-ben	38
7.73. A komplex skaláris szorzás tulajdonságai	331	. Vektor koordinátás alakja 3D-ben	38
7.76. Fourier-összeg helyettesítési értékei	334	1.44.	43
7.77. A Fourier-mátrixok tulajdonságai	335	1.45. Vektorműveletek $\mathbb{R}^n$ -ben	44
7.79. A DFT tulajdonságai	338	1.50. Skaláris szorzás $\mathbb{R}^n$ -ben	48
7.82. Gyors Fourier-transzformáció	342	1.52. Abszolút érték, szög, merőlegesség, távolság	48
8.4. A sajátvektorok alterei	352	. Korrelációs együttható	51
8.8. Háromszögmátrixok sajátértékei	355	1.58. Kód	53
8.9. Determináns, nyom és a sajátértékek	355	2.3. Alakzat (implicit) egyenletrendszer	60
8.11. 2×2 -es szimmetrikus mátrixok sajátalterei	356	2.4. Alakzat (explicit) egyenletrendszer	61
8.16. Mátrix invertálhatósága és a 0 sajátérték	361	. Hipersík	71
8.17. Mátrix hatványainak sajátértékei és sajátvektorai	362	2.20. Lineáris egyenlet	73
8.18. Mátrix hatványainak hatása	362	2.21. Lineáris egyenletrendszer	74
8.19. Speciális mátrixok sajátértéke	363	2.22. Lineáris egyenletrendszer megoldása	75
8.20. Speciális komplex mátrixok sajátértéke	364	2.23. Ekvivalens egyenletrendszerek	75
8.23. Sajátértékhez kapcsolódó invariánsok	367	2.31. Elemi sorműveletek	84
8.25. Diagonalizálhatóság szükséges és elégséges fel- tétele	368	2.32. Lépcsős alak	84
8.28. Diagonalizálható mátrix polinomja	371	2.39. Redukált lépcsős alak	89
8.29. Cayley–Hamilton-tétel	372	. rref függvény	93
8.30. Különböző sajátértékek sajátvektorai	372	2.45. Szimultán egyenletrendszerek	93
8.31. Különböző sajátértékek és a diagonalizálhatóság	373	2.58. Soronként domináns főátlójú mátrix	107
8.33. Algebrai és geometriai multiplicitás kapcsolata	374	3.2. Mátrix rangja	114
8.34. Diagonalizálhatóság és a geometriai multiplicitás	375	3.9. Altér	118
8.36. Diagonalizálható mátrixok spektrálfelbontása	377	3.13. Nulltér	120
8.38. Gershgorin-körök tulajdonságai	379	3.14. Kifeszített altér	120
8.40. Domináns főátlójú mátrix invertálhatósága	380	3.18. Sortér, oszloptér	122
9.2. Szimmetrikus mátrix sajátalterei	383	3.25. Bázis	127
9.3. Valós spektráltétel	384	3.31. Dimenzió	131
9.5. Schur-felbontás	387	3.34. Vektorrendszer rangja	132
9.9.	389	. Merőleges altér és merőleges kiegészítő altér	135
9.11. Főtengelytétel	392	4.1. Lineáris helyettesítés	149
9.15. Definitság meghatározása a sajátértékekből	395	4.3. Adott típusú mátrixok tere	151
9.16. Definit mátrixok főminorai és vezető főminorai	395	. Mátrixok egyenlősége	151
		4.4. Mátrixok összege, különbsége	151
		4.6. Zérusmátrix	152
		4.7. Mátrix szorzása skalárral	152
		4.9. Mátrixok szorzása	153
		4.13. Diadikus szorzat	158
		4.20. Áttérés mátrixa	163
		4.24. Egységmátrix	164
		4.25. Elemi mátrixok	165
		5.7. Mátrix inverze	182
			182
		5.24. Permutációs mátrix, kigyó	194
		5.27. Háromszögmátrix	195
		5.29. Szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrixok	196

Definíciók

. Irányított szakasz, kötött vektor	17
. Vektor	18
. Zérusvektor	18
. Vektor hossza	19
. Vektorok szöge	19
1.1. Két vektor összege – háromszögmódszer	19
1.3. Vektorok különbsége	20
1.4. Vektor szorzása skalárral	21
1.6. Lineáris kombináció	21

5.37. LU-felbontás	202
5.43. PLU-felbontás	207
.	210
5.48. Lineáris leképezés	212
5.57. Hasonlóság	219
. Lineáris leképezés rangja	220
5.60. Differenciálhatóság	223
.	231
6.1. Determináns	233
6.16. Lineáris transzformáció determinánsa	242
.	243
6.22. Előjeles aldetermináns	252
6.35. Vandermonde-determináns	262
. Merőleges altér és merőleges kiegészítő altér	283
. Kiegészítő altér	284
7.16. Direkt összeg	285
. Altérre való merőleges vetület	292
. Optimális megoldás	296
. Normálegyenlet-rendszer	296
. Regressziós egyenes	297
7.33. Vetítés altérre	299
7.38. A Moore–Penrose-féle pszeudoinverz	303
. Ortogonális és ortonormált bázis	311
7.50. Ortogonális és szemortogonális mátrix	313
. Givens-forgatás	318
. Householder-tükörözés	319
7.63. QR-felbontás	322
7.70. Komplex mátrix adjungáltja	330
7.71. Komplex vektorok skaláris szorzata	331
.	332
. Komplex vektorok hossza, távolsága, szöge, merőlegessége	333
7.75. Unitér mátrix	333
.	334
7.78. Diszkrét Fourier-transzformáció (DFT)	337
.	340
8.2. Sajátérték, sajátvektor	352
8.5. Sajátaltér	352
.	353
8.21. Lineáris transzformáció sajátértéke, sajátvektora	366
8.24. Diagonalizálhatóság	368
. Bal sajátvektor	369
. Gerschgorin-körök	378
9.1. Ortogonális diagonalizálhatóság	383
9.7. Unitér diagonalizálhatóság	388
9.8. Normális mátrix	388
.	391
9.13. Kvadrátikus formák és mátrixok definitsége	394

Kidolgozott példák

1.16. Skaláris szorzat kiszámítása a definíció alapján	27
1.20. Skaláris szorzat kiszámítása	29
1.25. Merőleges összetevőkre bontás	31
1.27. Vektori szorzat meghatározása	33
1.28. $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ vektori szorzata	33
1.32. Parallelepipedon térfogata	35
1.34. Vegyes szorzat	36
1.36. Vektorok koordinátái	38
1.37. Pontok koordinátái	39
1.39. Skaláris szorzás koordinátarendszerben	40
1.42. Parallelogramma területe	42
1.43. Parallelepipedon térfogata	43
1.47.	45
1.53. Vektorok szöge és távolsága	49
1.59. Lineáris kombináció $\mathbb{Z}_m^n$ -ben	53
1.60. One time pad – a tökéletes titkosítás	54
1.61. Paritásbit	55
2.1. Az $x + y = 1$ egyenlet	59
2.2. Az $x^2 + y^2 = 1$ egyenlet	59
2.9. Síkbeli egyenes egyenletei	63
2.14. Sík egyenletei	66
2.18. Térbeli egyenes egyenletrendszerei	69
2.19. Egyenes és sík explicit vektoregyenlete	71
2.25. Mátrixok és elemeik	77
2.26. Mátrix használata a megoldáshoz	78
2.27. Sormodell két kétismeretlenes egyenlettel	79
2.29. Oszlopmodell	82
2.33. Lépcsős alak	85
2.34. Gauss-módszer, egy megoldás	85
2.35. Gauss-módszer, végtelen sok megoldás	86
2.37. Homogén lineáris egyenletrendszer megoldása	88
2.38. Síkok metszésvonalának meghatározása	88
2.40. Redukált lépcsős alak	89
2.41. Redukált lépcsős alakra hozás	90
2.42. Gauss–Jordan-módszer, egy megoldás	90
2.43. Gauss–Jordan-módszer, végtelen sok megoldás	91
2.46. Szimultán egyenletrendszer megoldása	94
2.47. Szimultán egyenletrendszer bővített mátrixa	94
2.48. Egyenletrendszer $\mathbb{Z}_2$ fölött	95
2.49. Egyenletrendszer $\mathbb{Z}_5$ fölött	96
2.51. Instabil egyenletrendszer	99
2.52. Gauss-módszer lebegőpontos számokkal	100
2.53. Részleges főelemkiválasztás	101
2.54. Sor szorzása	102
2.55. Jacobi-iteráció	104
2.56. Gauss–Seidel-iteráció	105
2.57. Divergens iteráció	106
3.3. Mátrix rangjának kiszámítása	114
3.7. Egyenletrendszer megoldásainak száma	116

3.11. Altér	119	5.62. Jacobi-mátrix kiszámítása	224
3.16. Nulltér	121	5.63. Függvényérték becslése Jacobi-mátrixszal	225
3.20. Kifeszített altér vektorai	123	5.65. Lán szabály	226
3.22. Vektorok lineáris függetlenségének eldöntése	124	6.7. Determináns kiszámítása háromszög alakra hozással	237
3.26. Altér bázisának meghatározása	128	6.9. Determináns kiszámítása PLU-felbontásból	239
3.27. Vektor felírása a bázisvektorok lineáris kombinációjaként	128	6.11. Determináns kiszámítása elemi oszlopműveletekkel	240
3.29. Vektor koordinátás alakja a $\mathcal{B}$ bázisban	130	6.13. Zérus értékű determinánsok	241
3.32. Mátrix transzponáltja	132	6.20. Inverziók száma és a determináns	251
3.35. Dimenzió kiszámítása	132	6.23. Előjeles aldetermináns	252
3.37. Vektorokra merőleges altér	134	6.25. Determináns rendjének csökkentése	254
3.41. Egyenletrendszer megoldása elemi bázistranszformációval	138	6.27. Kifejtési tétel	256
4.2. Lineáris helyettesítések kompozíciója	150	6.29. Cramer-szabály	257
4.5. Mátrixok összege, különbsége	152	6.31. Mátrix inverze	259
4.8. Mátrixok lineáris kombinációja	152	6.34. Interpoláció másodfokú polinomokra	261
4.10. Mátrixok szorzása	154	7.2. Forgatás egy tetszőleges pont körül	274
4.12. Műveletek blokkmátrixokkal	155	7.3. Koordinátatengely körüli forgatás a térben	274
4.14. Skaláris és diadikus szorzat	158	7.5. Forgatás mátrixa	276
4.15. Szimultán egyenletrendszer mátrixszorzatos alakja	159	7.6. A forgatás mátrixának inverze	276
4.18. Áttérés standard bázisra	161	7.9. Síkra eső merőleges vetület kiszámítása	278
4.19. Báziscsere	162	7.12. Vetítés síkra	279
4.23. Bázisfelbontás	163	7.2. Forgatás egy tetszőleges pont körül	276
4.26. Mátrix balról szorzása elemi mátrixszal	165	7.3. Koordinátatengely körüli forgatás a térben	276
4.29. Nulltér	168	7.5. Forgatás mátrixa	278
5.1. Mire vigyázzunk a mátrixszorzásnál?	176	7.6. A forgatás mátrixának inverze	278
5.4. Mátrix hatványozása	178	7.9. Síkra eső merőleges vetület kiszámítása	280
5.5. Polinom helyettesítési értéke	179	7.12. Vetítés síkra	281
5.8. $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ inverze nilpotens $\mathbf{A}$ esetén	182	7.13. Vektorokra merőleges altér	282
5.11. Az inverz kiszámítása	184	7.21. Lineáris egyenletrendszer sortérbe eső megoldása	288
5.15. Egyenletrendszer megoldása mátrixinvertálással	188	7.23. Merőleges vetület kiszámítása	292
5.16. Mátrixegyenlet megoldása mátrixinvertálással	188	7.25.	294
5.17. Mátrix elemi mátrixok szorzatára bontása	188	7.28.	295
5.20. Az áttérés mátrixának inverze	190	7.32.	298
5.21. Műveletek diagonális mátrixokkal	193	7.35. Projekció mátrixa	300
5.23. Sorok permutációja mátrixszorzással	193	7.39. Néhány pszeudo inverz	303
5.25. Kígyók	194	7.41. A pszeudo inverz kiszámítása	305
5.30. Szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrixok	196	7.45. Egyenletrendszer optimális megoldása	308
5.35. Inverz változása	198	7.46. Egyenletrendszer optimális megoldása	309
5.36. Inverz változása számpéldán	198	7.49. Egy pont síkra való merőleges vetülete	313
5.38. Az LU-felbontás kiszámítása	203	7.51. Ortogonális mátrixok	313
5.41. Egyenletrendszer megoldása LU-felbontással	205	7.54. Ortogonális mátrixok inverze	315
5.42. Mátrix invertálása LU-felbontással	206	7.58. Forgatás tengelye és szöge	317
5.44. Vektori szorzással definiált mátrixleképezés	210	7.60. Householder-tükrözés	320
5.50.	214	7.62. Gram-Schmidt-ortogonalizáció	321
5.51. A deriválás és az integrálás lineáris leképezés	214	7.64. QR-felbontás kiszámítása	323
5.53. Mátrixleképezés ábrázolása az egységnyezet-rács képével	216	7.66. QR-felbontás Givens-forgatásokkal	324
5.54. Mátrixleképezés ábrázolása az egységkör képével	217	7.67. QR-felbontás Householder-tükrözéssel	326
5.56. Lineáris leképezés mátrixa másik bázisban	219	7.69. Egyenletrendszer optimális megoldása	327
		7.74. Önadjungált mátrixok	333

7.80. DFT kiszámítása	339	8.26. Matrix diagonalizálása	369
7.81. Magas frekvenciájú összetevők szűrése	339	8.27. Sajátfelbontás diadikus alakja és a bal sajátvek- torok	370
8.1. Jó bázis tükrözéshez	351	8.32. Diagonalizálhatóság megállapítása	373
8.3. Sajátérték, sajátvektor	352	8.35. Lineáris transzformáció diagonalizálása	375
8.6. Sajátaltér bázisának meghatározása	353	8.37. Gerschgorin-körök	378
8.7. Karakterisztikus polinom felírása	354	8.39. Gerschgorin-körök használata	380
8.10. 2×2 -es mátrixok sajátvektorainak ábrázolása	355	9.4.	385
8.12. Az összes sajátérték és sajátvektor meghatározása	357	9.6. Schur-felbontás	387
8.13. Magasabbfokú karakterisztikus egyenlet	358	9.10. Másodfokú polinom mátrixszorzatos alakja	391
8.14. Komplex sajátértékek és komplex elemű saját- vektorok	359	9.12. Főtengely-transzformáció	393
8.15. Sajátérték algebrai és geometriai multiplicitása	360	9.14. Definitség meghatározása a sajátértékekből	394
8.22. Lineáris transzformáció sajátértéke, sajátaltére	366		

I. rész

A lineáris algebra forrásai

A lineáris algebra két fő forrásának egyike a geometria, másika az algebra vidékéről ered. Mindkét forrás jól jellemezhető egy-egy elemi fogalommal: az egyik a vektor, a másik a lineáris egyenletrendszer. E könyv első része e két fogalmat vizsgálja egészen elemi, középiskolai szintről indulva. A lineáris algebra mélyebb fogalmai már itt fölbukkannak, de csak nagyon egyszerű és a legkevésbé absztrakt formájukban. Az első rész végére látni fogjuk, hogy e két forrás már ezen a bevezető szinten szétválaszthatatlanul egyetlen folyamattá válik.



Hang gliding @ Pule (CC) on flickr by purplematfish

1

Vektorok

Általánosan elterjedt nézet szerint a természeti jelenségek leírásakor sok összefüggést számszerű adatokkal, ún. *skalárokkal* vagy *skalármennyiségekkel* fejezünk ki, míg mások leírásához a számadat mellett egy irány megadása is szükséges, és ez utóbbiakat nevezzük *vektoroknak*. A valóság ennél sokkal színesebb: a téridő 4-dimenziós vektoraitól, a bitvektorokon, a gazdasági számítások többszázezer-dimenziós, vagy az internetkeresők által kezelt sokmillió-dimenziós vektorain át a matematika különböző területein gyümölcsöző absztrakt vektorfogalomig széles a skála.

Vektorok a 2- és 3-dimenziós térben

E szakaszban a vektor szemléletes, geometriai fogalmával ismerkedünk. A vektorok összeadásán és skalárral való szorzásán keresztül a lineáris kombináció és a lineáris függetlenség fogalmáig jutunk. E szakasz kulcsfogalma: egy vektor lineárisan független vektorok lineáris kombinációjaként való előállítása.

Irányított szakasz, kötött és szabad vektor Tekintsünk egy sárkányrepülőt repülés közben. Számtalan skalár- és vektormennyiség írja le állapotát. A földtől való távolság, a légnyomás, a légellenállási együttható vagy az emelkedés szöge skalármennyiségek, míg vektormennyiségek a sebesség- és gyorsulásvektor, a szárnyra ható felhajtóerő, a gravitációs erő, a szél ereje vagy az elmozdulást leíró vektor.

A vektor fogalma kapcsolatban van az irányított szakasz fogalmával. Irányított szakaszon olyan szakaszt értünk, melynek végpontjain megadunk egy sorrendet, azaz kijelöljük, hogy melyik a *kezdő*- és melyik a *végpontja*. Más szóhasználatban az irányított szakaszt szokás *kötött vektornak* is nevezni. Az A kezdőpontú és B végpontú irányított szakaszt $\overrightarrow{AB}$ jelöli.

Skalár, skaláris: a lépcső, létra jelentésű latin scalae (scālae) szóból ered. E szó származéka a skála szó is, mely jól őrzí az eredeti jelentést. A skalár vagy skaláris szót a matematikában szám vagy számszerű értelemben használjuk, például olyankor, amikor egy mennyiségről azt akarjuk hangsúlyozni, hogy irány nélküli, azaz nem vektor jellegű.

Több jelenség leírására a kötött vektor alkalmas. Természetes példa az elmozdulásvektor, mely megadja, hogy egy tárgy a tér mely pontjából melyik pontjába jutott. Másik példa kötött vektorra a rugalmas testen alakváltozást okozó erőt leíró vektor (1.1. ábra).

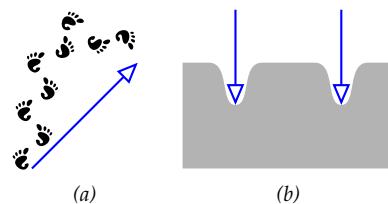
Alkalmazásokban gyakran előfordul, hogy egy jelenség különböző irányított szakaszokkal is ugyanúgy leírható. Például ha egy tárgy mozgását egy olyan irányított szakasszal jellemezzük, melynek hossza az időegység alatt megtett út hosszával egyenlő, iránya pedig a mozgás irányát jelzi, akkor mindegy hogy a tér melyik pontjából indítjuk e szakaszt, a mozgást ugyanúgy leírja (1.2. ábra). Ekkor tehát nem a két pont, hanem azok viszonya a kérdés, azaz hogy az egyik pont a másiktól milyen *távolságra*, és milyen *irányban* van. Az, hogy a két pont pontosan hol van, nem lényeges. Ekkor bármely két irányított szakasz, mely párhuzamosan egymásba tolható, ugyanazt a viszonyt fejezi ki. Az így kapott fogalmat a fizikában *szabad vektornak* nevezik. Ez a lineáris algebra vektor-fogalmának egyik forrása: a *vektor* a geometriában irányított szakasszal reprezentálható azt hozzávéve, hogy két irányított szakasz pontosan akkor reprezentálja ugyanazt a vektort, ha párhuzamosan egymásba tolhatók (ld. 1.3 ábra).

Vektorok jelölésére félkövér kisbetűket használunk, pl. $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, stb. A műszaki és fizikai szakirodalomban a félkövér nagy betű is előfordul, pl. az $\mathbf{F}$ erő, a $\mathbf{B}$ indukció is vektormennyiségek.

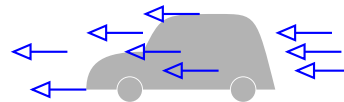
Vektor megadása egy irányított szakasszal Egy vektor megadható egy irányított szakasszal, azaz két pont és a köztük lévő sorrend kijelölésével. Valójában ennyi adat felesleges, hisz egy irányított szakasz önmagával párhuzamosan eltolva ugyanazt a vektort adja meg, ezért például kiköthető, hogy a kezdőpont a sík (tér) egy előre kijelölt rögzített pontja legyen. Ezt a közös kezdőpontot nevezzük *origónak*. Egy origóból induló irányított szakaszt egyértelműen definiálja a végpontja, így a vektorok megadásához elég egyetlen pont, a végpont megadása. Ezzel a sík vagy tér pontjai és vektorai közt kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesíthetünk (1.4. ábra). Az origóból egy P pontba húzott irányított $\overrightarrow{OP}$ szakaszt a ponthoz tartozó *helyvektornak* is szokás nevezni. Világos, hogy minden vektor reprezentánsai közt pontosan egy helyvektor van.

A későbbiekben gyakran fogunk egy ponthalmazt az origóból a ponthalmaz pontjaiba mutató vektorokkal jellemezni. Amikor vektorok végpontjairól beszélünk, mindig a vektorokat megadó, az origóból indított irányított szakaszok végpontjaira gondolunk.

Az olyan vektort, melynek kezdő és végpontja egybeesik, *zérusvektornak* vagy *nullvektornak* nevezzük. A zérusvektort általában félkövér zérussal, azaz $\mathbf{0}$ -val jelöljük. A pontok és vektorok közti megfeleltetésben a zérusvektornak az origó felel meg.

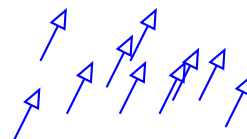


1.1. ábra: Kötött vektorok: (a) elmozdulásvektor (lábnyomokkal), (b) rugalmas testen alakváltozást okozó erő vektora



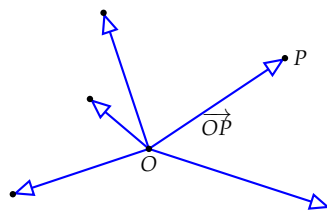
1.2. ábra: Példa szabad vektorra

VEKTOR: a *hordozó*, *vivő*, *utazó* jelentésű latin *vector* szóból származik. A tudomány más területein hordozó anyag, az élettanban vírus-hordozó értelemben használják.



1.3. ábra: Ugyanazt a vektort reprezentáló irányított szakaszok

VEKTOROK JELÖLÉSE: Műszaki, fizikai szövegek szedésének tipográfiai szabályait az ISO 31-11 szabvány írja le. Eszerint a vektorok félkövér betűkkel szedendők. Kézírásban aláhúzással, vagy fölé írt nyíllal szokás jelezni a vektort (pl. $\underline{x}$, $\underline{u}$, $\vec{v}$...), de körültekintő jelölésrendszer és jegyzetelés esetén elhagyhatók a jelzések. Felsőbb matematikai művek nem használják e szabványt, mondván, kiderül a szövegből, hogy vektort jelölnek-e a betűk (x , u , v ...).



1.4. ábra: A sík pontjai és vektorai kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés: egy P pontnak az $\overrightarrow{OP}$ vektor felel meg, az origónak a nullvektor.

Vektor megadása hossz és irány segítségével Ha tudunk távolságot mérni, és irányt meghatározni, akkor a vektor megadható hosszával és irányával is. Vektor *hosszát*, azaz két végpontjának távolságát a vektor *abszolút értékének* is nevezzük. Az $\mathbf{a}$ vektor abszolút értékét $|\mathbf{a}|$ jelöli. Vektor abszolút értékét a vektor *euklideszi normájának* is nevezik, ugyanis speciális esete egy később részletezendő fogalomnak, a normának. Az $\mathbf{a}$ vektor (euklideszi) normájának jelölése az abszolút értékre emlékeztet: $\|\mathbf{a}\|$.

Az irány fogalmát az 1.24. feladatban definiáljuk. Itt megelégszünk annyival, hogy két nemzérus vektort *azonos irányúnak* vagy *egyirányúnak* nevezünk, ha a kezdőpontjukból induló, és a végpontjukon áthaladó félegyenesek párhuzamos eltolással fedésbe hozhatók (1.5 (a) ábra). Két nemzérus vektort *kollineárisnak* vagy *párhuzamosnak* nevezünk, ha az őket tartalmazó egyenesek párhuzamosak. Két vektort, amely párhuzamos, de nem egyirányú, *ellenkező irányúnak* nevezünk (1.5 (b) ábra). A zérusvektor irányát tetszőlegesnek tekintjük, így az bármely vektorral egyirányú. Belátható, hogy a vektort egyértelműen meghatározza hossza és iránya.

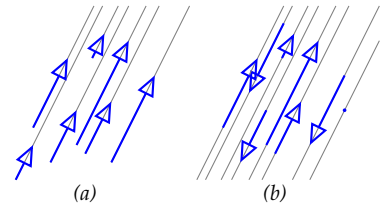
Vektor irányának meghatározásakor gyakran hívjuk segítségül a szög fogalmát. Két vektor szögén azt a szöget értjük, melyet a sík vagy tér egy tetszőleges pontjából kiinduló és az adott vektorokkal egyirányú félegyenesek zárnak be (1.6. ábra). Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok szögét $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle$ jelöli. Két vektor szöge tehát mindig 0° és 180° – radiánban mérve 0 és π – közé esik, beleértve a határokat is. Egyirányú vektorok szöge 0, ellenkező irányúaké π .

Vektorműveletek a 2- és 3-dimenziós térben A vektorműveletek – az összeadás és a számmal való szorzás – definíciója természetes módon adódik, ha a vektorok legtipikusabb alkalmazásaira gondolunk. Pl. magától értetődő, hogy két elmozdulás összegén az elmozgatások egymás után való elvégzését, egy eltolás kétszeresén egy azonos irányú, de kétszer olyan hosszú eltolást értsünk.

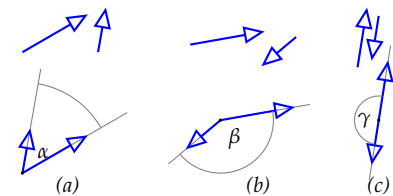
1.1. DEFINÍCIÓ (KÉT VEKTOR ÖSSZEGE – HÁROMSZÖGMÓDSZER). Legyen adva két vektor, $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$. Vegyünk föl egy tetszőleges O pontot. Indítsunk belőle egy $\mathbf{a}$ -val egyenlő $\overrightarrow{OP}$ vektort, ennek végpontjából pedig egy $\mathbf{b}$ -vel egyenlő $\overrightarrow{PQ}$ vektort. Az $\overrightarrow{OQ}$ vektort az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok összegének nevezzük és $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ -vel jelöljük (ld. 1.7. ábra).

Könnyen belátható, hogy az eredmény független az O pont megválasztásától, tehát vektorok összeadásának művelete definiálható e módszerrel (a bizonyítás leolvasható az 1.8. ábráról).

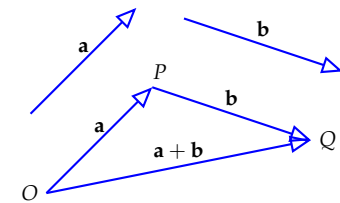
Egy másik módszert is ismertetünk két nem kollineáris vektor összegének megszerkesztésére:



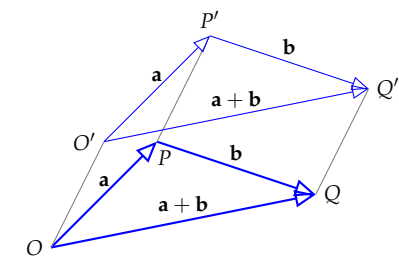
1.5. ábra: (a) egyirányú vektorok, (b) kollineáris (párhuzamos) vektorok, vannak közöttük egyirányúak és ellenkező irányúak



1.6. ábra: Két vektor szöge ($0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \pi$). Az ábra felső felén a két adott vektor, alatta szögük meghatározásának módja szerepel.



1.7. ábra: Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektor összege

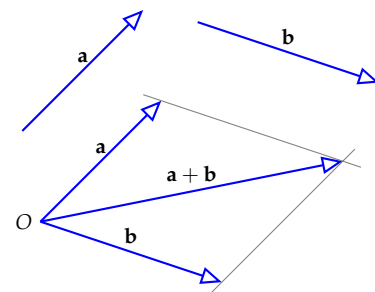
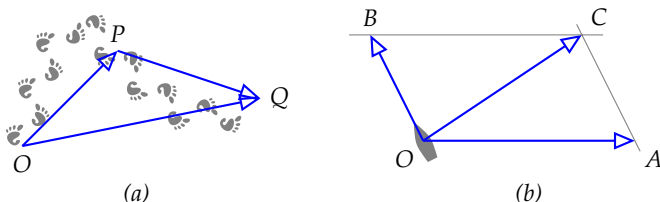


1.8. ábra: Az összeg független az O pont megválasztásától, ugyanis $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{O'Q'}$.

1.2. ÁLLÍTÁS (PARALLELOGRAMMA-MÓDSZER). A közös kezdőpontból indított $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok összege megkapható abból a parallelogrammából, melynek két szomszédos oldala $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$, ekkor az összeg a közös kezdőpontból indított, és a parallelogramma szemközti csúcsába futó vektor.

► Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem kollineárisak, akkor összegük pl. megkapható úgy, hogy $\mathbf{a}$ végpontján át egy $\mathbf{b}$ egyenesével, $\mathbf{b}$ végpontján át egy $\mathbf{a}$ egyenesével párhuzamos egyenest húzunk. A közös kezdőpontból e két egyenes metszéspontjába futó vektor lesz az összeg (ld. 1.9. ábra).

Az alkalmazásokban hol a háromszög-, hol a parallelogramma-módszer tűnik kézenfekvőbbnek (ld. 1.10).



1.9. ábra: Parallelogramma-módszer

1.10. ábra: Az (a) ábrán a lábnyomok O -ból P -be, majd onnan Q -ba vezetnek. Az $\overrightarrow{OP}$ és a $\overrightarrow{PQ}$ elmozdulásvektorok összege $\overrightarrow{OQ}$ (háromszögmódszer). A (b) ábrán a csónak az $\overrightarrow{OB}$ irányba evez, de a folyó $\overrightarrow{OA}$ irányba folyik. A két sebesség eredője, azaz összege $\overrightarrow{OC}$ (parallelogramma módszer).

Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ két térbeli vektor, akkor a háromszögmódszerben és a parallelogramma-módszerben is az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ vektorokat reprezentáló irányított szakaszok egy síkba esnek. Általában azt mondjuk, hogy néhány térbeli vektor egy síkba esik, más szóval *komplanáris*, ha van olyan sík, hogy mindegyik vektort reprezentáló irányított szakasz párhuzamosan betolható e síkba. Eszerint tehát az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ vektorok mindig komplanárisak.

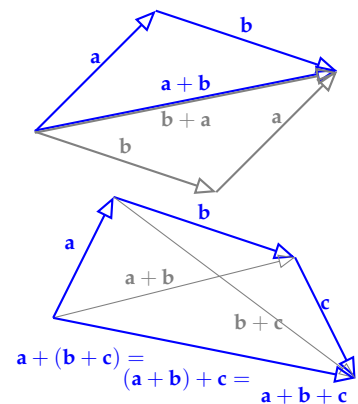
A vektorösszeadás két fontos tulajdonsága, kommutativitása ($\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$) és asszociativitása ($\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$) könnyen leolvasható az 1.11. ábráról. Az asszociativitás következtében több tag összeadásánál elhagyható a zárójel, például az ábrabeli három vektor összegére $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ írható.

Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokat közös kezdőpontból indítva – a háromszögmódszerrel – azonnal látható, hogy csak egyetlen olyan $\mathbf{x}$ vektor létezik, melyre $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{x}$ (ld. 1.12 (a) ábra). Ennek felhasználásával definiálható vektorok különbsége.

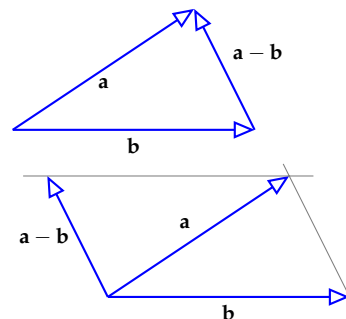
1.3. DEFINÍCIÓ (VEKTOROK KÜLÖNBSÉGE). Adva van az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektor. Azt az egyértelműen létező $\mathbf{x}$ vektort, melyre $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{x}$, az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ különbségének nevezzük és $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ -vel jelöljük.

Könnyen fejben tartható a különbségvektor megszerkesztése akár a háromszög-, akár a parallelogrammamódszerrel (ld. 1.12. ábra), ha a definícióra gondolunk, azaz arra, hogy $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ az a vektor, melyet $\mathbf{b}$ -hez adva $\mathbf{a}$ -t kapunk, azaz

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} + (\mathbf{a} - \mathbf{b}).$$



1.11. ábra: A vektorösszeadás kommutativitása és asszociativitása.



1.12. ábra: A különbségvektor meghatározása háromszög- és parallelogrammamódszerrel.

Az 1.13. ábráról az is leolvasható, hogy ha a $\mathbf{b}$ vektorral egyenlő hosszúságú, de ellenkező irányú vektort $-\mathbf{b}$ jelöli, akkor fennáll az $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ összefüggés, és így az is igaz, hogy $\mathbf{b} + (-\mathbf{b}) = \mathbf{0}$.

Érdekes megjegyezni, hogy ha P és Q két tetszőleges pont, akkor az $\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$ vektort akkor is ismerjük, ha az O pontot nem, hisz az a $\overrightarrow{PQ}$ vektor. Sok hasonló jelenség vezetett a *torzor* fogalmához, melyet egy rövid szelvényzetben ismertetünk.

1.4. DEFINÍCIÓ (VEKTOR SZORZÁSA SKALÁRRAL). Legyen k valós szám. Az $\mathbf{a}$ vektor k -szorosán azt a vektort értjük, melynek hossza az $\mathbf{a}$ hosszának $|k|$ -szorosa, iránya

- tetszőleges, ha $k = 0$ vagy $\mathbf{a} = \mathbf{0}$,
- megegyezik $\mathbf{a}$ irányával, ha $k > 0$, és
- ellentétes, ha $k < 0$ (ld. 1.14. ábra).

A skalárral való szorzás definíciójából azonnal látszik, hogy minden $\mathbf{a}$ vektorra $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$, $0\mathbf{a} = \mathbf{0}$ és $(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$.

E paragrafus végén összefoglaljuk a vektorműveletek legfontosabb tulajdonságait, melyek segítségével később általánosítani fogjuk a vektor fogalmát. Az eddig nem bizonyított tulajdonságok igazolását az olvasóra hagyjuk.

1.5. TÉTEL (A VEKTORMŰVELETEK TULAJDONSÁGAI). Ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ a 2- vagy 3-dimenziós tér tetszőleges vektorai, $\mathbf{0}$ a zérusvektor és r , s két tetszőleges valós szám, akkor fennállnak az alábbi azonosságok:

- | | |
|--|---|
| a) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ | e) $r(s\mathbf{a}) = (rs)\mathbf{a}$ |
| b) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ | f) $r(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = r\mathbf{a} + r\mathbf{b}$ |
| c) $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ | g) $(r + s)\mathbf{a} = r\mathbf{a} + s\mathbf{a}$ |
| d) $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ | h) $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$ és $0\mathbf{a} = \mathbf{0}$ |

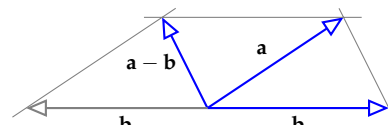
A lineáris kombináció definíciója Ha vektorokra a skalárral való szorzás és az összeadás műveletét alkalmazzuk, akkor e vektorok egy lineáris kombinációját kapjuk. Pontosabban:

1.6. DEFINÍCIÓ (LINEÁRIS KOMBINÁCIÓ). Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ vektorok lineáris kombinációján egy

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \dots + c_k\mathbf{a}_k$$

alakú vektort értünk, ahol $c_1, c_2, \dots, c_k$ valós számok. Azt mondjuk, hogy a $\mathbf{v}$ vektor előáll az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ vektorok lineáris kombinációjaként, ha vannak olyan $c_1, c_2, \dots, c_k$ valós számok, hogy $\mathbf{v} = c_1\mathbf{a}_1 + \dots + c_k\mathbf{a}_k$.

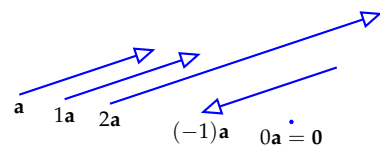
Ha egy vektort egy skalárral beszorzunk, az előző definíció szerint egy lineáris kombinációját kapjuk, mely vele párhuzamos, azaz kollineáris. Így egy nemzérus vektor összes lineáris kombinációja csupa vele párhuzamos vektor (ld. 1.15. ábrát). Ennél több is igaz:



1.13. ábra: Az $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ szemléltetése.

TORZOR: a modern matematika fogalma. Néhány példa, mielőtt definiálnánk: (1) Az energiát a newtoni fizikában nem tudjuk mérni, csak az energiakülönbséget. Ha viszont megállapodunk abban, hogy egy adott rendszernek melyik állapota tartozik a 0 energiaszinthez, beszélhetünk a rendszer energiájáról is. (2) A pontba mutató vektor fogalmának nincs értelme, amíg nincs kijelölve az origó, viszont két pontba mutató vektor különbségét az origótól függetlenül is meg tudjuk határozni. (3) Egy f függvény I intervallumon vett határozatlan integrálja $F + C$ alakú, ahol C konstans. Nincs értelme megkérdezni, hogy f egy konkrét primitív függvényében mennyi a C értéke, de két primitív függvény különbsége mindig egy konstans. (4) Egy hasonló jelenség a zenéből: bármely két hang közti távolság meghatározható, de azt nem mondhatjuk egy hangra, hogy az a „fá”, amíg nem rögzítjük, melyik a „dó”.

A torzort egy *kommutatív csoport* nevű algebrai struktúrával definiálhatjuk, mely egy kommutatív, asszociatív, null-elemes, invertálható művelettel ellátott és e műveletre zárt halmaz. Kommutatív csoport például a valósok az összeadásra nézve, a vektorok az összeadásra nézve, vagy $\mathbb{Z}_{12}$ az összeadásra nézve (ld. a ???. példát és a ??? definíciót). Legyen G egy kommutatív csoport, és X egy nem üres halmaz, melyen definiálva van bármely két elem különbsége, ami G -beli. Ekkor X -et *G -torzornak* nevezzük, ha bármely $x_0, x_1, x_2 \in X$ elem esetén, ha $x_1 - x_0 = g_1$ és $x_2 - x_0 = g_2$, akkor $x_1 - x_2 = g_1 - g_2$. Más-ként fogalmazva, X örzi G struktúráját a zéruselem nélkül úgy, hogy bármely elemét zéruselemnek választva azonnal megkapjuk G -t.



1.14. ábra: Vektor skalárszorosa

1.7. TÉTEL (VEKTORRAL PÁRHUZAMOS VEKTOROK). Ha $\mathbf{a}$ nem zérusvektor, akkor bármely vele párhuzamos $\mathbf{v}$ vektor az $\mathbf{a}$ skalárszorosa, azaz van olyan c valós szám, hogy $\mathbf{v} = c\mathbf{a}$, más szóval $\mathbf{v}$ előáll az $\mathbf{a}$ valamely lineáris kombinációjaként. Ez az előállítás egyértelmű.

BIZONYÍTÁS. Ha a két vektor egyirányú, az előállításban szereplő c konstans egyszerűen a $\mathbf{v}$ és $\mathbf{a}$ vektorok abszolút értékének hányadosa, ha ellenkező irányúak, e hányados (-1) -szerese. $\square$

E tétel következménye, hogy ha $\mathbf{a}$ nem zérusvektor, akkor az $\mathbf{a}$ összes lineáris kombinációjának halmaza és az $\mathbf{a}$ -val párhuzamos vektorok halmaza megegyezik. Másként fogalmazva: egy nemzérus vektor összes lineáris kombinációjának végpontja egy origón átmenő egyenest ad.

A háromszögmódszerből jól látszik, hogy tetszőleges két vektor bármely lineáris kombinációja velük komplanáris vektor lesz. Az állítás megfordítása is igaz:

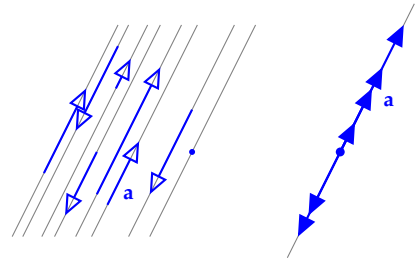
1.8. TÉTEL (KÉT VEKTORRAL EGY SÍKBA ESŐ VEKTOROK). Ha $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ nem párhuzamos vektorok, akkor bármely velük egy síkba eső $\mathbf{v}$ vektor előáll az $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ valamely lineáris kombinációjaként, azaz van olyan v_1 és v_2 konstans, hogy $\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2$. Ez az előállítás egyértelmű.

BIZONYÍTÁS. A bizonyításnak a felbontás létezését biztosító része könnyen leolvasható az 1.16. ábráról. A $\mathbf{v}$ végpontjából húzzunk az $\mathbf{a}_1$ és az $\mathbf{a}_2$ vektorokkal párhuzamos egyeneseket. Az így létrejött nem elfajuló paralelogramma két oldala az előző tétel szerint $\mathbf{a}_1$, illetve $\mathbf{a}_2$ konstansszorosa, melyek összege a paralelogramma szabály szerint épp $\mathbf{v}$. Előállítottuk tehát $\mathbf{v}$ -t $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ lineáris kombinációjaként. Meg kell még mutatnunk, hogy ez az előállítás egyértelmű. Legyen

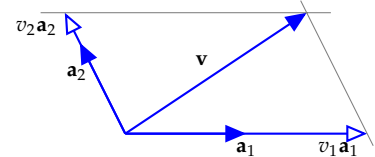
$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 = w_1\mathbf{a}_1 + w_2\mathbf{a}_2.$$

a $\mathbf{v}$ vektor két előállítása. Ekkor átrendezés után $(v_1 - w_1)\mathbf{a}_1 = (w_2 - v_2)\mathbf{a}_2$. Mivel $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ nem kollineárisak, konstansszorosaik csak akkor egyezhetnek meg, ha mindkettő a zérusvektor. Ugyanakkor $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{a}_2 \neq \mathbf{0}$, ezért az előző egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $(v_1 - w_1) = (w_2 - v_2) = 0$, azaz ha $v_1 = w_1$ és $v_2 = w_2$. Tehát a felbontás egyértelmű. $\square$

Látható tehát, hogy két nem párhuzamos vektor összes lineáris kombinációjának halmaza megegyezik a két vektorral komplanáris vektorok halmazával, egyszerűbben fogalmazva két nem párhuzamos vektor összes lineáris kombinációjának végpontja egy origón átmenő síkot ad.



1.15. ábra: Egy nemzérus $\mathbf{a}$ vektor, és néhány lineáris kombinációja kétféle reprezentációban.



1.16. ábra: A $\mathbf{v}$ egyértelműen előáll $\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2$ alakban, ha $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ nem párhuzamos.

Abban nincs semmi meglepő, hogy a tér három nem egy síkba eső vektorának bármely lineáris kombinációja térbeli vektor, az állítás megfordítása viszont igen fontos:

1.9. TÉTEL (TÉRBELI VEKTOROK). Ha $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ nem egy síkba eső vektorok, akkor a tér bármely $\mathbf{v}$ vektora előáll az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ valamely lineáris kombinációjaként, azaz van olyan v_1 , v_2 és v_3 konstans, hogy

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + v_3\mathbf{a}_3. \quad (1.1)$$

Ez az előállítás egyértelmű.

BIZONYÍTÁS. A bizonyítás alapötlete az, hogy a $\mathbf{v}$ vektor V végpontján át párhuzamos egyenest húzunk az $\mathbf{a}_3$ vektorral, mely az $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ vektorok síkját egy C pontban metszi. Az $\overrightarrow{OC}$ vektor az előző tétel szerint egyértelműen előáll $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ lineáris kombinációjaként (1.17. ábra), azaz $\overrightarrow{OC} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2$. Másrészt $\mathbf{v} = \overrightarrow{OV} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CV}$, ahol $\overrightarrow{CV} \parallel \mathbf{a}_3$, így $\overrightarrow{CV} = v_3\mathbf{a}_3$ valamely v_3 valósra. Tehát $\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + v_3\mathbf{a}_3$.

Be kell még látnunk az előállítás egyértelműségét! Tegyük fel, hogy

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + v_3\mathbf{a}_3 = w_1\mathbf{a}_1 + w_2\mathbf{a}_2 + w_3\mathbf{a}_3$$

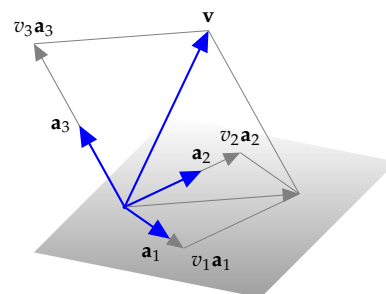
a $\mathbf{v}$ két felbontása. Ekkor $(v_1 - w_1)\mathbf{a}_1 + (v_2 - w_2)\mathbf{a}_2 + (v_3 - w_3)\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$. Így ha $v_1 \neq w_1$, akkor $\mathbf{a}_1$ kifejezhető $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ lineáris kombinációjaként:

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{v_2 - w_2}{v_1 - w_1}\mathbf{a}_2 - \frac{v_3 - w_3}{v_1 - w_1}\mathbf{a}_3.$$

Ez ellentmond annak, hogy $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ nem esnek egy síkba. Így tehát $v_1 = w_1$. Hasonlóan kapjuk, hogy $v_2 = w_2$ és $v_3 = w_3$, azaz az (1.1) előállítás egyértelmű. $\square$

Lineáris függetlenség Az előző két tételből világos, hogy a tér három vektora vagy egy síkba esik, ekkor valamelyikük a másik kettő lineáris kombinációja, vagy nem esik egy síkba, és akkor egyikük sem áll elő a másik kettő lineáris kombinációjaként. Ekkor viszont a tér minden vektora előáll az ő lineáris kombinációjuként. Látjuk, alapvető, hogy egy vektor kifejezhető-e más vektorok lineáris kombinációjaként.

1.10. DEFINÍCIÓ (VEKTOROK FÜGGETLENSÉGE). Azt mondjuk, hogy egy $\mathbf{v}$ vektor lineárisan független az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ ($n \geq 1$) vektoroktól, ha $\mathbf{v}$ nem fejezhető ki e vektorok lineáris kombinációjaként. Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ ($n \geq 2$) vektorok lineárisan függetlenek ha e vektorok egyike sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként. Ha legalább egyikük kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként, azaz legalább egyikük lineárisan függ a többitől, akkor e vektorokat lineárisan összefüggőknek nevezzük. Az egyetlen vektorból álló vektorrendszert lineárisan függetlennek tekintjük, ha a vektor nem a zérusvektor.



1.17. ábra: A térbeli $\mathbf{v}$ vektor előállítása három nem egy síkba eső vektor lineáris kombinációjaként.

Például egy térbeli vektor, mely nem esik egy adott síkba, független a síkba eső vektorok bármely rendszerétől (1.19. ábra).

Egy kocka egy csúcsból kiinduló élvektorai lineárisan függetlenek (1.19. ábra).

Általában: bármely két nem kollineáris vektor lineárisan független, hasonlóképp, a tér bármely három nem komplanáris, azaz nem egy síkba eső vektora lineárisan független.

Az 1.8. tétel tehát a következőképp fogalmazható át:

1.11. TÉTEL (SÍKBELI VEKTOR FELBONTÁSA). Ha $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ egy sík két lineárisan független vektora, akkor a sík minden $\mathbf{v}$ vektora egyértelműen előáll e vektorok lineáris kombinációjaként, azaz egyértelműen léteznek olyan v_1 és v_2 valós számok, hogy

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{a}_1 + v_2 \mathbf{a}_2.$$

Hasonlóképp az 1.9. tétel így fogalmazható át:

1.12. TÉTEL (TÉRBELI VEKTOR FELBONTÁSA). Ha $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ három lineárisan független térbeli vektor, akkor a tér minden $\mathbf{v}$ vektora egyértelműen előáll e vektorok lineáris kombinációjaként, azaz egyértelműen léteznek olyan v_1 , v_2 és v_3 valós számok, hogy

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{a}_1 + v_2 \mathbf{a}_2 + v_3 \mathbf{a}_3.$$

A koordinátákról szóló szakaszban e két tétel lesz alapja a koordinátarendszer bevezetésének.

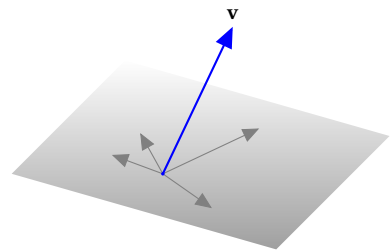
Speciális lineáris kombinációk* A sík és a tér bizonyos konfigurációi jól jellemezhetők lineáris kombinációkkal, ha a kombinációs együtthatókra bizonyos feltételeket kötünk ki.

1.13. ÁLLÍTÁS (KÉT PONTON ÁTMENŐ EGYENES JELLEMZÉSE). Legyen O , A és B a sík vagy a tér három pontja. Az $r\vec{OA} + s\vec{OB}$ alakú lineáris kombináció végpontja pontosan akkor mutat az A és B ponton átmenő egyenes egy pontjába, ha $r + s = 1$.

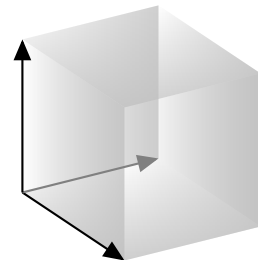
BIZONYÍTÁS. Legyen $\mathbf{a} = \vec{OA}$, $\mathbf{b} = \vec{OB}$, és $\mathbf{x}$ mutasson az AB egyenes valamely X pontjára, azaz legyen $\mathbf{x} = \vec{OB} + r\vec{BA}$ valamilyen r valós számra, tehát

$$\mathbf{x} = \mathbf{b} + r(\mathbf{a} - \mathbf{b}), \text{ azaz } \mathbf{x} = r\mathbf{a} + (1 - r)\mathbf{b}.$$

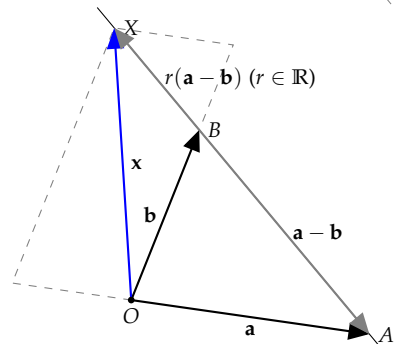
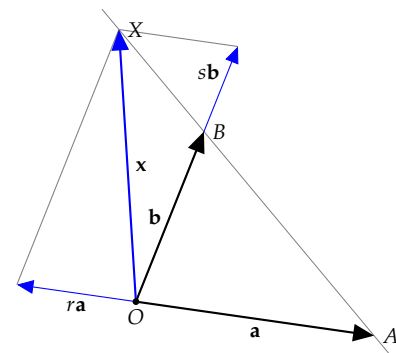
A fenti gondolatmenet lépésein visszafelé haladva látható, hogy minden valós r számra az $r\mathbf{a} + (1 - r)\mathbf{b}$ vektor végpontja az AB egyenesen van. Fogalmazhatunk úgy is, hogy az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok végpontján átmenő egyenes összes pontját pontosan azok az $r\mathbf{a} + s\mathbf{b}$ alakú lineáris kombinációk adják, amelyeknél $r + s = 1$. $\square$



1.18. ábra: A síkba nem eső $\mathbf{v}$ vektor nem áll elő a síkbeli vektorok lineáris kombinációjaként.



1.19. ábra: Egy kocka három egy csúcsból induló élvektora lineárisan független.

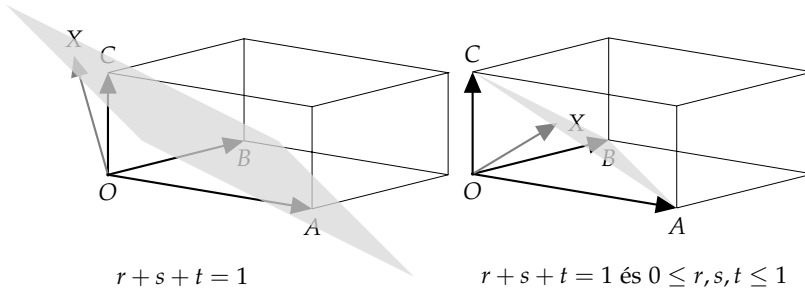


1.20. ábra: Az X pont pontosan akkor van az AB egyenesen, ha valamely r és s valósokra $r + s = 1$ és $\vec{OX} = r\vec{OA} + s\vec{OB}$. Ezen az ábrán $r = -0.5$, $s = 1.5$.

1.14. ÁLLÍTÁS (INTERVALLUM PONTJAINAK JELLEMZÉSE). Legyen O , A és B a sík vagy a tér három pontja. Az $r\vec{OA} + s\vec{OB}$ vektor pontosan akkor mutat az A és B pontot összekötő szakasz valamely pontjába, ha $r + s = 1$ és $0 \leq r, s \leq 1$.

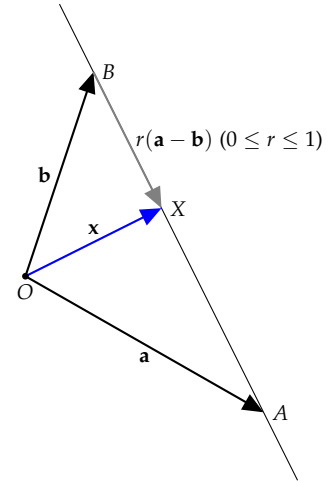
BIZONYÍTÁS. Megismételjük az előző feladat megoldását azzal a különbséggel, hogy itt a $\vec{BX} = r\vec{BA}$ összefüggés csak 0 és 1 közé eső r értékekre igaz. Tehát $\mathbf{x} = r\mathbf{a} + (1-r)\mathbf{b}$, ahol $0 \leq r \leq 1$. Másként fogalmazva az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok végpontjait összekötő szakasz összes pontját pontosan azok a $r\mathbf{a} + s\mathbf{b}$ alakú lineáris kombinációk adják, amelyekben $r + s = 1$ és $0 \leq r, s \leq 1$. $\square$

Hasonló összefüggés igaz három vektor esetén is, azaz megmutatható, hogy a nem kollineáris $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok végpontjaira fektetett sík pontjaiba pontosan azok a vektorok mutatnak, melyeket $r\mathbf{a} + s\mathbf{b} + t\mathbf{c}$ alakba írva $r + s + t = 1$. Ha még azt is kikötjük e három számról, hogy legyen $0 \leq r, s, t \leq 1$, akkor az $r\mathbf{a} + s\mathbf{b} + t\mathbf{c}$ alakú vektorok a három vektor végpontja által meghatározott háromszög pontjaiba mutatnak (ld. az 1.22. ábrát és a ?? feladatot).



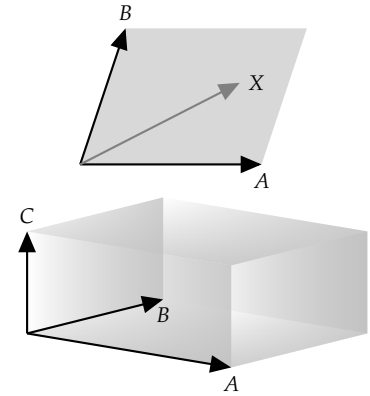
Szemléletesen világos, például a mellékelt 1.23. ábráról leolvasható, de nem bizonyítjuk, hogy két tetszőleges nem kollineáris vektor összes olyan lineáris kombinációja, amelyben az együtthatók 0 és 1 közé esnek, egy parallelogrammát ad. Pontosabban fogalmazva egy $r\mathbf{a} + s\mathbf{b}$ alakú vektor végpontja pontosan akkor tartozik az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által meghatározott (kifeszített) parallelogrammához, ha $0 \leq r, s \leq 1$.

Hasonló mondható három, nem egy síkba eső vektorról: egy $r\mathbf{a} + s\mathbf{b} + t\mathbf{c}$ alakú vektor végpontja pontosan akkor tartozik az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ által kifeszített paralelepipedonhoz, ha $0 \leq r, s, t \leq 1$ (1.23. ábra).



1.21. ábra: Az X pont pontosan akkor van az $\overline{AB}$ intervallumban, ha valamely 0 és 1 közé eső r és s valósokra $\vec{OX} = r\vec{OA} + s\vec{OB}$, és $r + s = 1$.

1.22. ábra: Az X pont pontosan akkor esik az A , B és C pontokon átmenő síkba, ha $\vec{OX} = r\vec{OA} + s\vec{OB} + t\vec{OC}$ és $r + s + t = 1$. Az X az ABC háromszögbe pedig pontosan akkor esik, ha ezen kívül még $0 \leq r, s, t \leq 1$ is fennáll.

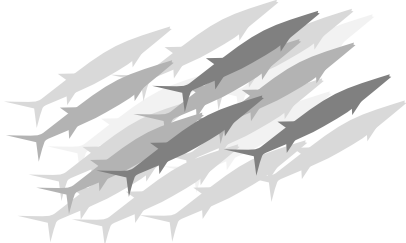


1.23. ábra: A parallelogramma és a paralelepipedon olyan lineáris kombinációkkal állítható elő, ahol az együtthatók nem negatívak, és összegük legfeljebb 1.

Feladatok

Vektor

1.1. Egy matematikán kívüli szemléltetés a vektor fogalmához: hogyan fejeznénk be az alábbi hasonlatot? „Ha az irányított szakasz a hal, akkor a vektor a...”



1.2. **VEKTOROK: IGAZ – HAMIS** Melyek igazak, melyek hamisak az alábbi állítások közül?

- Ha az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok hajlásszöge α , akkor $\mathbf{a}$ és $-\mathbf{b}$ hajlásszöge $\pi - \alpha$.
- Ha A és B két adott pont, akkor az $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ vektor független az O megválasztásától.
- Ha A és B két adott pont, akkor az $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ vektor független az O megválasztásától.
- Ha két vektor egyirányú, akkor egyikük a másik skalárszorosa.
- Ha két vektor egyike a másik skalárszorosa, akkor egyirányúak.
- Ha két vektor egyike a másik skalárszorosa, akkor párhuzamosak.

Vektorműveletek a 2- és 3-dimenziós térben

1.3. Adva van a síkban két tetszőleges vektor, $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$. Szerkesszük meg a következő vektorokat: a) $\mathbf{c} = 2\mathbf{a} + \mathbf{b}$, b) $\mathbf{d} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b}$, c) $\mathbf{e} = \frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}$, d) $\mathbf{f} = \frac{2}{5}\mathbf{a} + \frac{3}{5}\mathbf{b}$.

1.4. Legyen $\mathbf{u} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{v} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$. Fejezzük ki az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektor segítségével a következő vektorokat: a) $2\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$, b) $3\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$, c) $3\mathbf{u} - \mathbf{v}$, d) $2\mathbf{u} - \frac{1}{2}\mathbf{v}$.

1.5. Tekintsük az $ABCD$ négyzetet. Határozzuk meg a következő összegeket! a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$, b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$, c) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, d) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$, e) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$, f) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DB}$, g) $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$

1.6. Tekintsük az $ABCD$ négyzetet. Jelölje a BC oldal felezőpontját E , a CD oldal felezőpontját F , a négyzet középpontját O . Fejezzük ki az egymásra merőleges $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ és $\mathbf{d} = \overrightarrow{AD}$ vektorok segítségével az $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{OF}$ vektorokat!

1.7. Tekintsük az $ABCD$ tetraédert! Határozzuk meg az

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$,
- $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD}$,
- $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$

vektorokat.

1.8. Tekintsük a szabályos $ABCDEF$ hatszöget, melynek geometriai középpontját jelölje O . Fejezzük ki az $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ és $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ vektorok segítségével az a) $\overrightarrow{OC}$, b) $\overrightarrow{OE}$, c) $\overrightarrow{OF}$, d) $\overrightarrow{AC}$, e) $\overrightarrow{BD}$, f) $\overrightarrow{BF}$, g) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}$ vektorokat!

1.9. Adva van n tetszőleges, nem feltétlenül különböző $P_1, P_2, \dots, P_n$ pont a térben. Mivel egyenlő a

$$\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} + \overrightarrow{P_3P_4} + \dots + \overrightarrow{P_{n-1}P_n}$$

és a

$$\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} + \overrightarrow{P_3P_4} + \dots + \overrightarrow{P_{n-1}P_n} + \overrightarrow{P_nP_1}$$

összeg?

1.10. Mutassuk meg, hogy az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok pontosan akkor lehetnek (egy esetleg szakasszá vagy ponttá elfajuló) háromszög oldalvektorai, ha az

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}, \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}, \quad \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}, \quad \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$$

vektorok legalább egyike zérus. Másként fogalmazva: ha a három vektor összege $\mathbf{0}$, vagy valamelyik vektor egyenlő a másik kettő összegével.

1.11. Legyen $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ két tetszőleges vektor. Mutassuk meg, hogy van olyan (esetleg elfajuló) háromszög, melynek oldalvektorai $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ és $3\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

Lineáris kombináció, lineáris függetlenség

1.12. **LINEÁRIS ÖSSZEFÜGGŐSÉG: IGAZ – HAMIS** Melyek igazak, melyek hamisak az alábbi állítások közül?

- Ha három vektor a térben lineárisan összefüggő, akkor bármelyikük a másik kettő lineáris kombinációja.
- Megadható a térben három vektor, hogy egyikük sem lineárisan független a többitől.
- Megadható a térben három vektor, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$, hogy $\mathbf{a}$ független a $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektoroktól, de $\mathbf{b}$ nem független az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{c}$ vektoroktól.
- Ha három térbeli vektor egy síkba esik, akkor mindegyik kifejezhető a másik kettő lineáris kombinációjaként!

Speciális lineáris kombinációk

1.13. **SAKASZT $m : n$ ARÁNYBAN OSZTÓ PONT** Ha az $\overline{AB}$ szakaszt a P pont úgy bontja ketté, hogy $|\overline{AP}| : |\overline{PB}| = m : n$, akkor bármely O pontra igaz, hogy

$$\overrightarrow{OP} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}.$$

Speciálisan, az $\overline{AB}$ szakasz felezőpontjába az

$$\frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$

vektor mutat.

Távolság, szög, orientáció

A címben jelzett három alapfogalomhoz három – vektorok közti – szorzás-művelet visz közelebb. Mindegyik művelet igen szokatlan tulajdonságokkal rendelkezik: az egyik eredményül nem vektort, hanem skalárt ad, a másik nem felcserélhető, és kétváltozós (bináris) műveletként csak a 3-dimenziós térben definiálható, a harmadik pedig nem két- hanem háromváltozós művelet.

Skaláris szorzás A fizikában az erő által végzett munka az út hosszának és az erő elmozdulás irányába eső merőleges vetülete hosszának szorzata. Vagyis két vektorjellegű mennyiségből egy skalármennyiséget kapunk eredményül. Ha $\mathbf{F}$ jelöli az erővektort, $\mathbf{s}$ az elmozdulásvektort, $\mathbf{F}_s$ az erőnek az elmozdulás irányába eső merőleges vetületi vektorát és γ az $\mathbf{F}$ és $\mathbf{s}$ vektorok hajlásszögét, akkor a munka értéke $|\mathbf{F}_s||\mathbf{s}| = |\mathbf{F}||\mathbf{s}| \cos \gamma$. Ez vezet a következő definícióhoz:

1.15. DEFINÍCIÓ (KÉT VEKTOR SKALÁRIS SZORZATA). Két vektor skaláris szorzatán a vektorok abszolút értékének és az általuk bezárt szög koszinuszának szorzatát értjük. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok skaláris szorzatát $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ jelöli, tehát

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle},$$

ahol a két vektor által bezárt szög $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle}$.

Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ valamelyike zérusvektor, akkor a két vektor szöge, s így annak koszinusza sem határozható meg egyértelműen, a skaláris szorzat viszont ekkor is egyértelmű, és pedig 0, hisz a zérusvektor abszolút értéke 0, és 0 bármivel vett szorzata 0.

Szokás $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ skaláris szorzatát $\mathbf{ab}$ -vel is jelölni, de ezt egy később bevezetendő művelettel (a mátrixszorzással) való összekeverés elkerülése érdekében e könyvben nem fogjuk használni.

1.16. PÉLDA (SKALÁRIS SZORZAT KISZÁMÍTÁSA A DEFINÍCIÓ ALAPJÁN). Mennyi a skaláris szorzata egy 1 és egy 2 egység hosszú, és egymással 60° -os szöget bezáró két vektornak?

MEGOLDÁS. A szorzat $1 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$. □

1.17. TÉTEL (MIKOR 0 A SKALÁRIS SZORZAT?). Két vektor skaláris szorzata pontosan akkor 0, ha a két vektor merőleges egymásra.

BIZONYÍTÁS. ($\Leftarrow$) Ha $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, akkor $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle} = \pi/2$, azaz $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle} = 0$, tehát $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

($\Rightarrow$) Ha $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, azaz $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle} = 0$, akkor $|\mathbf{a}| = 0$, $|\mathbf{b}| = 0$ vagy $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle} = 0$. Ha valamelyik vektor zérusvektor, akkor iránya bármely vektorára merőlegesnek tekinthető. Ha viszont $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{b} \neq$

0 , akkor $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle} = 0$, a $\cos$ függvénynek a $[0, \pi]$ intervallumban csak $\pi/2$ -ben van zérushelye, tehát a két vektor merőleges egymásra. $\square$

1.18. TÉTEL (A SKALÁRIS SZORZÁS MŰVELETI TULAJDONSÁGAI). Ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ tetszőleges térbeli (síkbeli) vektorok és r tetszőleges valós szám, akkor igazak az alábbi összefüggések:

- a) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ (kommutativitás)
- b) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ (disztributivitás)
- c) $r(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (r\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (r\mathbf{b})$
- d) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} > 0$, ha $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, és $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$, ha $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

A bizonyítást az olvasóra hagyjuk.

Mivel két vektor skaláris szorzata skalár, ezért az asszociativitás (csoportosíthatóság) kérdése föl sem vethető, hisz az $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ szorzatban két különböző szorzásművelet szerepel. Mindezzel együtt $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \neq \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ (ld. az 1.15. feladatot).

Hosszúság és szög Egy vektor hossza, és ezzel két pont távolsága, valamint két vektor hajlásszöge kifejezhető a skaláris szorzat segítségével.

Egy tetszőleges $\mathbf{a}$ vektorra $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}||\mathbf{a}| \cos 0 = |\mathbf{a}||\mathbf{a}|$, tehát

$$|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}, \text{ azaz } |\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}.$$

E képlet szerint tehát egy vektor hossza megegyezik az önmagával vett skaláris szorzat gyökével. Ebből az is adódik, hogy két pont távolsága megegyezik az őket összekötő vektor önmagával vett skaláris szorzatának négyzetgyökével.

Két pontot összekötő vektor egyenlő az oda mutató helyvektorok különbségével, így ha a két pontba mutató helyvektor $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$, akkor a pontok távolsága – és ezt fogjuk a vektorok távolságának is tekinteni

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|.$$

Két vektor skaláris szorzatának és a vektorok hosszának ismeretében a szögek meghatározható:

$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} \quad (1.2)$$

Pithagorász-tétel A távolságot vagy hosszúságot skaláris szorzattal is ki tudjuk fejezni, így segítségével a rá vonatkozó összefüggések is vizsgálhatók.

1.19. TÉTEL (PITHAGORÁSZ-TÉTEL). Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokra pontosan akkor teljesül az

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$$

összefüggés, ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ merőlegesek egymásra.

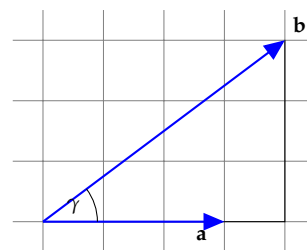
BIZONYÍTÁS.

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \\
 &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} && \text{disztributivitás} \\
 &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} && \text{kommutativitás} \\
 &\stackrel{?}{=} \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} && ? \\
 &= |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2,
 \end{aligned}$$

Világos, hogy a ?-lel megjelölt egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, azaz ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ merőlegesek egymásra. $\square$

1.20. PÉLDA (SKALÁRIS SZORZAT KISZÁMÍTÁSA). Számítsuk ki az ábrán látható két vektor skaláris szorzatát (a szomszédos rácsvonalak távolsága 1 egység).

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{a}$ vektor hossza 3, a $\mathbf{b}$ vektor hossza a Pithagorász-tétellel kiszámolható: $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, a vektorok által közbezárt szög koszinusza $\cos \gamma = \frac{4}{5}$, így a skaláris szorzat $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = 12$. $\square$



1.24. ábra: Két vektor skaláris szorzata

Két fontos egyenlőtlenség Mivel a koszinusz függvény értéke abszolút értékben sosem nagyobb 1-nél, ezért a skaláris szorzat definíciójából azonnal látszik, hogy

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| |\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})| \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|.$$

Ezzel bizonyítottuk a következő tételt:

1.21. TÉTEL (CAUCHY–BUNYAKOVSKIJ–SCHWARZ-EGYENLŐTLENSÉG). Két vektor skaláris szorzatának abszolút értéke sosem nagyobb abszolút értékeik szorzatánál, azaz

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|.$$

A Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség segítségével bizonyítjuk a geometriából jól ismert háromszög-egyenlőtlenséget. Ennek az az értelme, hogy e bizonyítás változtatás nélkül működni fog sokkal általánosabb körülmények között is.

1.22. TÉTEL (HÁROMSZÖG-EGYENLŐTLENSÉG). Bármely két $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorra

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|.$$

BIZONYÍTÁS. Mivel az egyenlőtlenség mindkét oldalán nemnegatív szám áll, ezért vele ekvivalens egyenlőtlenséghez jutunk, ha mindkét oldalt

négyzetre emeljük.

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \\
 &= |\mathbf{a}|^2 + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + |\mathbf{b}|^2 \quad \text{ld. az 1.19. tétel bizonyítását} \\
 &\leq |\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| + |\mathbf{b}|^2 \\
 &\leq |\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| + |\mathbf{b}|^2 \\
 &= (|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^2.
 \end{aligned}$$

És ezt akartuk bizonyítani. $\square$

Egységvektorral való szorzás és a merőleges vetítés Minden olyan vektort, melynek abszolút értéke 1, *egységvektornak* nevezünk.

Ha $\mathbf{a}$ egy tetszőleges nemzérus vektor, akkor $\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ egységvektor, ugyanis abszolút értéke 1:

$$\left| \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \right| = \frac{1}{|\mathbf{a}|} |\mathbf{a}| = 1.$$

1.23. TÉTEL (EGYSÉGVEKTORRAL VALÓ SZORZÁS GEOMETRIAI JELENTÉSE). Ha $\mathbf{e}$ egységvektor, akkor a $\hat{\mathbf{b}} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{b})\mathbf{e}$ vektor a $\mathbf{b}$ vektornak az $\mathbf{e}$ egyenesére való merőleges vetülete. Az $\mathbf{e} \cdot \mathbf{b}$ szorzat $\mathbf{e}$ vetület előjeles hossza, mely pozitív, ha $\hat{\mathbf{b}}$ és $\mathbf{e}$ egyirányúak, és negatív, ha ellenkező irányúak.

BIZONYÍTÁS. Ha $\mathbf{e}$ egységvektor, azaz abszolút értéke 1, akkor $\mathbf{e} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{b}| \cos(\mathbf{e}, \mathbf{b})$, ez pedig a koszinusz függvény definíciója szerint $\mathbf{b}$ merőleges vetületének előjeles hosszát jelenti. E szám $\mathbf{e}$ -szerese pedig egy $\mathbf{e}$ irányú, és ilyen hosszú vektort ad, mely épp $\mathbf{b}$ vetületi vektora. $\square$

Jelölje a továbbiakban a $\mathbf{b}$ vektornak az $\mathbf{a}$ egyenesére eső merőleges vetületi vektorát $\text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b}$. Eszerint ha $\mathbf{e}$ egységvektor, akkor

$$\text{proj}_{\mathbf{e}} \mathbf{b} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{b})\mathbf{e}.$$

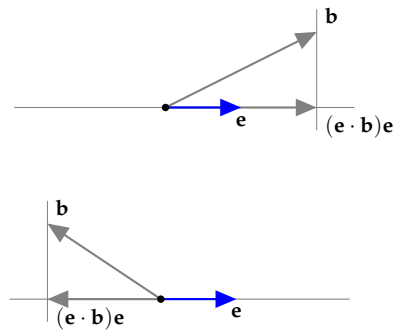
Alapvető feladat egy vektornak egy másikkal párhuzamos és rá merőleges vektorok összegére való felbontása, amit másként *merőleges összetevőkre bontásnak* nevezünk.

1.24. TÉTEL (VEKTOR FELBONTÁSA MERŐLEGES ÖSSZETEVŐKRE). Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ a sík vagy a tér két vektora, és $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{b}$ -nek az $\mathbf{a}$ egyenesére eső merőleges vetülete

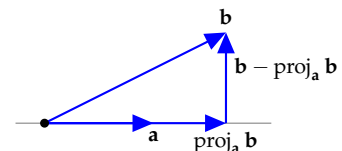
$$\text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a}.$$

A $\mathbf{b}$ -nek az $\mathbf{a}$ egyenesére merőleges összetevője

$$\mathbf{b} - \text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \mathbf{b} - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a}.$$



1.25. ábra: Az $\mathbf{b}$ vektor és az $\mathbf{e}$ egységvektor egyenesére eső vetülete. A felső ábrán $\mathbf{e} \cdot \mathbf{b} > 0$, az alsón $\mathbf{e} \cdot \mathbf{b} < 0$.



1.26. ábra: Az $\mathbf{b}$ vektor felbontása az $\mathbf{a}$ vektorral párhuzamos és rá merőleges vektorok összegére.

BIZONYÍTÁS. Az első képlet az egységvektorral szorzás geometriai jelentéséről szóló 1.23. tételből következik. Legyen $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ az $\mathbf{a}$ -irányú egységvektor. Ekkor

$$\text{proj}_{\mathbf{e}} \mathbf{b} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{b})\mathbf{e} = \left(\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \cdot \mathbf{b} \right) \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{|\mathbf{a}|^2} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a}.$$

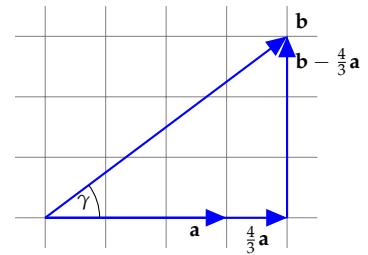
(Az utolsó egyenlőségnél kihasználtuk, hogy $|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$.) Mivel $\mathbf{e}$ és $\mathbf{a}$ párhuzamosak, ezért $\text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \text{proj}_{\mathbf{e}} \mathbf{b}$, ami bizonyítja első állításunkat. Az állítás második fele abból következik, hogy a két összetevő összege $\mathbf{b}$. $\square$

1.25. PÉLDA (MERŐLEGES ÖSSZETEVŐKRE BONTÁS). Az 1.24 ábrabeli $\mathbf{b}$ vektort bontsuk fel az $\mathbf{a}$ -val párhuzamos és rá merőleges összetevőkre.

MEGOLDÁS. Bár a megoldás az 1.27 ábráról is azonnal látszik, kövessük végig a számítást: az 1.20. példa szerint $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 12$, $|\mathbf{a}| = 3$, ezért

$$\text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a} = \frac{12}{9} \mathbf{a} = \frac{4}{3} \mathbf{a},$$

míg az $\mathbf{a}$ -ra merőleges összetevő $\mathbf{b} - \frac{4}{3} \mathbf{a}$. $\square$

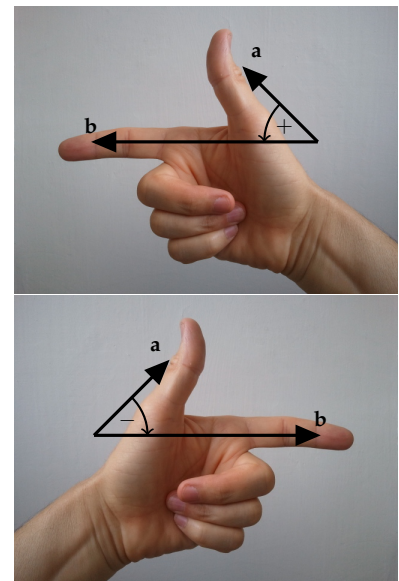


1.27. ábra: Vektor felbontása merőleges összetevőkre

Merőlegesség és orientáció Legyenek $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ egymásra merőleges nem-zérus vektorok a síkban. Ekkor $\mathbf{a}$ és $-\mathbf{b}$ is merőlegesek, azaz $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\perp} = (\mathbf{a}, -\mathbf{b})_{\perp} = \pi/2$. Csak az $\mathbf{a}$ ismeretében meg tudjuk-e különböztetni a $\mathbf{b}$ és $-\mathbf{b}$ vektorokat? Hasonló kérdés a térben is fölmerül: ha $\mathbf{c}$ merőleges a nem kollineáris $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok mindegyikére, akkor $-\mathbf{c}$ is. Vajon $\mathbf{c}$ és $-\mathbf{c}$ megkülönböztethető-e egymástól csak $\mathbf{a}$ -hoz és $\mathbf{b}$ -hez való viszonyukat tekintve?

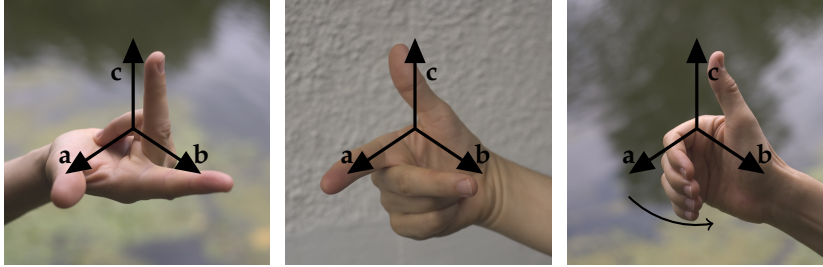
A válaszhoz az *irányítás*, más szóval *orientáció* fogalma vezet. E fogalmat precízen később definiáljuk (ld. ??? szakasz), az alapgondolat viszont egyszerű. A síkban a két független vektorból álló párokat két osztályba sorolhatjuk aszerint, hogy a tenyérrel fölfelé fordított jobb vagy bal kezünk első két ujjával szemléltethetőek (1.28. ábra) (hüvelyk az első, mutató a második vektor).

Hasonlóképp: a térben a független vektorokból álló hármasokat két osztályba sorolhatjuk aszerint, hogy jobb vagy bal kezünk első három ujjával szemléltethetőek (1.29. és 1.30. ábra). Kézenfekvőnek tűnik az első vektornak a hüvelyk, a másodiknak a mutató, a harmadiknak a középső ujjunkat megfeleltetni, de azokban a kultúrákban, ahol a mutató és középső ujjal mutatják a kettőt, ott a mutató-középső-hüvelyk a sorrend. Aszerint, hogy egy vektorpár a síkban, illetve egy vektorhármas a térben melyik osztályba esik, azt mondjuk, hogy *jobbrendszer*, illetve *balrendszer* alkot. Az 1.29. ábra harmadik képén látható mód (az ökölbe szoruló jobb kéz mozgása) azt is megmutatja, hogy milyen egy egyenes körül való pozitív forgás iránya. A síkban ezt

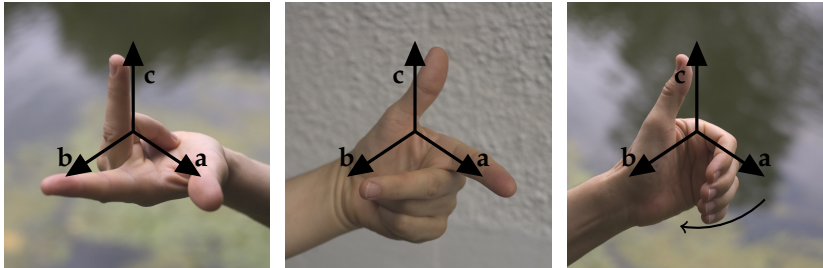


1.28. ábra: Két vektor egymáshoz való viszonya jobbrendszer (felső ábra) vagy balrendszer (alsó ábra) alkot. A közbe zárt irányított szög az előbbi esetben pozitív, utóbbiban negatív.

azzal is ki tudjuk fejezni, hogy két független vektor szögét előjellel látjuk el, nevezetesen pozitívvval, ha jobbrendszert, és negatívval, ha balrendszert alkotnak. Az így kapott szöget a két vektor *irányított szögének* nevezzük. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ irányított szögét $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\triangleleft}$ jelöli. Tehát míg $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle} = (\mathbf{b}, \mathbf{a})_{\angle}$, addig $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\triangleleft} = -(\mathbf{b}, \mathbf{a})_{\triangleleft}$, és ha $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\triangleleft} = \pi/2$, akkor $(\mathbf{a}, -\mathbf{b})_{\triangleleft} = -\pi/2$. Ez tehát a válasz a paragrafus elején feltett kérdésre.



1.29. ábra: Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok ebben a sorrendben jobbrendszert alkotnak, ha irányuk a jobb kezünkkel mutatható a mellékelt három ábra bármelyike szerint: (1) hüvelyk-mutató-középső ujj, (2) mutató-középső-hüvelykujj, (3) a hüvelyk mutatja a $\mathbf{c}$ vektort, ökölbe szoruló kezünk ujjai pedig az $\mathbf{a}$ felől a $\mathbf{b}$ felé haladnak.



1.30. ábra: Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok ebben a sorrendben balrendszert alkotnak, ha irányuk a bal kezünkkel mutatható a következők bármelyike szerint: (1) hüvelyk-mutató-középső ujj, (2) mutató-középső-hüvelykujj, (3) a hüvelyk mutatja a $\mathbf{c}$ vektort, ökölbe szoruló kezünk ujjai pedig az $\mathbf{a}$ felől a $\mathbf{b}$ felé haladnak.

Vektori szorzás A fizikában több olyan jelenség is van, melyben két térbeli vektorhoz keresünk egy mindkettőre merőleges harmadikat. Legismertebb példa a *forgatónyomaték*.

Hasson egy $\mathbf{F}$ erő egy test $\mathbf{P}$ pontjában, és legyen a test rögzítve az O pontjában. A P ponton átmenő, $\mathbf{F}$ irányú egyenesnek az O -tól való távolságát az erő karjának nevezzük. Az $\mathbf{F}$ hatására a test O körül elfordul. Ennek jellemzésére tudnunk kell a forgás tengelyét, a forgás „nagyságát”, és azt, hogy a tengely körüli két forgásirány közül melyikről van szó. Erre alkalmas lehet egy vektor – ezt nevezzük *forgatónyomatéknak* –, melynek iránya a forgástengellyel párhuzamos, hossza a forgás nagyságát írja le, és a forgástengellyel párhuzamos két vektorirány a két forgásirányhoz tartozik. Hogyan definiálható a forgatónyomaték-vektor, ha tudjuk, hogy abszolút értéke az erőkar hosszának és az erő abszolút értékének szorzata?

Az erő karja $|\vec{OP}| \sin(\vec{OP}, \mathbf{F})_{\angle}$, így az $\mathbf{M}$ forgatónyomaték abszolút értéke:

$$|\mathbf{M}| = |\mathbf{F}| |\vec{OP}| \sin(\vec{OP}, \mathbf{F})_{\angle}.$$

A forgás tengelye nyilván merőleges $\mathbf{F}$ -re és $\overrightarrow{OP}$ -re is, csak abban kell megegyezni, hogy az $\overrightarrow{OP}$, $\mathbf{F}$ és $\mathbf{M}$ vektorok jobb- vagy balrendszert alkossanak. A fizikusok a jobbrendszert választották.

A forgatónyomaték, és több hasonló fizikai fogalom a következő definícióhoz vezet:

1.26. DEFINÍCIÓ (VEKTORI SZORZAT). A 3-dimenziós tér két vektorának vektori szorzatán azt a vektort értjük, melynek

- abszolút értéke a két vektor abszolút értékének és a közbezárt szög szinuszának szorzata,
- iránya merőleges mindkét vektor irányára és – ha a két tényező és a szorzat egyike sem a nullvektor, akkor – az első tényező, a második tényező és a szorzat ebben a sorrendben jobbrendszert alkot.

► E definíció bármely két 3-dimenziós vektor vektori szorzatát egyértelműen definiálja, ugyanis minden olyan esetben, amikor nem tudnánk eldönteni, hogy a vektorok jobbrendszert alkotnak-e, a szorzat a nullvektor (gondoljuk meg!).

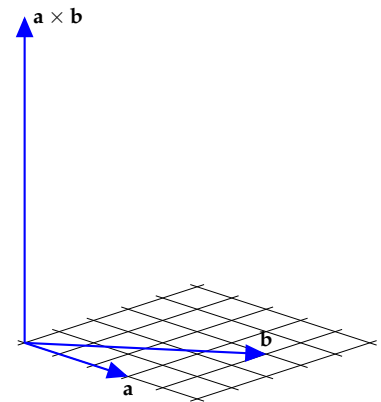
► Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok vektori szorzatát $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ jelöli, amit „a kereszt b”-nek olvasunk. Képletekkel megfogalmazva: $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ egy vektor, melyre

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle},$$

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{b}$, továbbá $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ebben a sorrendben jobbrendszert alkot.

1.27. PÉLDA (VEKTORI SZORZAT MEGHATÁROZÁSA). Tegyük fel, hogy a tér két vektora 3 illetve 5 hosszú, az általuk bezárt szög koszinusza $\frac{4}{5}$, mint az 1.20. példában. Mit tudunk a vektori szorzatról?

MEGOLDÁS. Ha $\cos \gamma = \frac{4}{5}$, akkor $\sin \gamma = \sqrt{1 - (\frac{4}{5})^2} = \frac{3}{5}$, így a vektori szorzat hossza $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle} = 3 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5} = 9$, iránya merőleges mindkét vektorra és $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ebben a sorrendben jobbrendszert alkot (ld. 1.31. ábra). $\square$



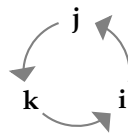
1.31. ábra: Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektorok

1.28. PÉLDA ($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ VEKTORI SZORZATA). Legyen $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ három, páronként egymásra merőleges, ebben a sorrendben jobbrendszert alkotó egységvektor. Készítsünk művelettáblát vektori szorzataikról!

MEGOLDÁS. Mivel $(\mathbf{i}, \mathbf{i})_{\angle} = 0$, ezért $|\mathbf{i} \times \mathbf{i}| = 0$, így $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}$. Hasonlóan $\mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$.

Mivel $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = 1$ és $(\mathbf{i}, \mathbf{j})_{\angle} = 90^\circ$, ezért $|\mathbf{i} \times \mathbf{j}| = 1$, azaz $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$ is egységvektor. Ráadásul $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$ merőleges $\mathbf{i}$ -re és $\mathbf{j}$ -re, és $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ valamint $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$ jobbrendszert alkotnak épp úgy, mint $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$. Ebből következik, hogy $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$. Hasonlóképp $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$ és $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$. Ha $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ jobbrendszert alkot, akkor $\mathbf{j}$, $\mathbf{i}$ és $\mathbf{k}$ balrendszert, így $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$. Mindezeket összefoglalva a következő művelettáblát kapjuk.

$\times$	i	j	k
i	0	k	$-j$
j	$-k$	0	i
k	j	$-i$	0



E három vektor közti szorzatok könnyen megjegyezhetők, ha egy szabályos háromszög csúcsaira írjuk őket pozitív körüljárás szerint, mint azt a táblázat melletti ábra mutatja. Ekkor két különböző vektor szorzata a harmadik, ha a két vektor pozitív körüljárás szerint követi egymást. Ha negatív körüljárás szerint követik egymást, a szorzat a harmadik vektor -1 -szerese. $\square$

1.29. TÉTEL (MIKOR 0 A VEKTORI SZORZAT?). Két térbeli vektor vektori szorzata pontosan akkor zérusvektor, ha a két vektor párhuzamos.

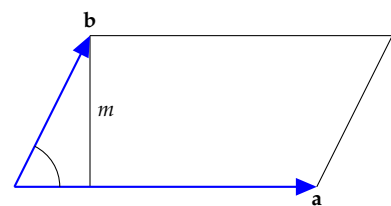
BIZONYÍTÁS. Ha $\mathbf{a}$ vagy $\mathbf{b}$ valamelyike zérusvektor, akkor egyrészt a két vektor tekinthető párhuzamosnak, másrészt $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$, az állítás tehát igaz, ezért a továbbiakban feltesszük, hogy a két tényező egyike sem zérusvektor.

($\Leftarrow$) Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ párhuzamosak (más szóval kollineárisak), akkor $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle} = 0$ vagy π , tehát $\sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle} = 0$, így $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|0 = 0$, azaz $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

($\Rightarrow$) Ha $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$, azaz $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle} = 0$, akkor $|\mathbf{a}| = 0$, $|\mathbf{b}| = 0$ vagy $\sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle} = 0$. Az $|\mathbf{a}| = 0$ vagy $|\mathbf{b}| = 0$ eseteket már elintéztük a bizonyítás elején, így marad a $\sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle} = 0$ eset. A szinusz függvénynek a $[0, \pi]$ intervallumban a 0 és a π helyen van zérushelye, tehát a két vektor vagy egyirányú, vagy ellenkező irányú, vagyis párhuzamos. $\square$

1.30. TÉTEL (VEKTORI SZORZAT ABSZOLÚT ÉRTÉKÉNEK GEOMETRIAI JELENTÉSE). Két vektor vektori szorzatának abszolút értéke a két vektor által kifeszített paralelogramma területének mérőszámával egyenlő.

BIZONYÍTÁS. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma oldalainak hossza $|\mathbf{a}|$ és $|\mathbf{b}|$, az $\mathbf{a}$ oldalhoz tartozó magassága pedig $m = |\mathbf{b}|\sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle}$. A paralelogramma területe $|\mathbf{a}|m = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ (1.32. ábra). $\square$



1.32. ábra: $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ megegyezik a paralelogramma területével

1.31. TÉTEL (VEKTORI SZORZÁS MŰVELETI TULAJDONSÁGAI). Tetszőleges $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorokra, valamint tetszőleges r valós számra igazak az alábbi összefüggések:

- a) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ (alternáló tulajdonság)
- b) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$
 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ (disztributivitás)
- c) $r(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (r\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (r\mathbf{b})$
- d) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|^2}$

A tétel bizonyítását feladatnak tűzzük ki.

- E tétel *a)* pontja szerint a vektori szorzás *nem kommutatív!*
- Egy egyszerű példa mutatja, hogy a vektori szorzás nem is asszociatív. Az 1.28. példa eredményét használva könnyen látható, hogy

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j} \neq \mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}),$$

ugyanis $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$, másrészt $\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Parallelepipedon térfogata, és előjeles térfogata Az 1.30. tételben megmutattuk, hogy a vektori szorzat abszolút értéke a két vektor által kifeszített paralelogramma területét adja. Hogy számítható ki a parallelepipedon térfogata?

1.32. PÉLDA (PARALLELEPIPEDON TÉRFOGATA). *Határozzuk meg az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített parallelepipedon térfogatát!*

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által kifeszített paralelogramma területe $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$, és mivel $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ merőleges a paralelogramma síkjára, ezért a parallelepipedon magassága $\mathbf{c}$ -nek az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ egyenesére eső merőleges vetületi hosszával egyenlő. Ez az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ irányú egységvektorral való skaláris szorzással számolható. Az egységvektor

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|},$$

a magasság $|\mathbf{e} \cdot \mathbf{c}|$, és így a térfogat (azaz az alapterületszer magasság) értéke

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \left| \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} \cdot \mathbf{c} \right| = |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|.$$

Tehát a parallelepipedon térfogata $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$. □

A térfogat tehát az $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ skalár abszolút értéke. Kérdés: vajon mit jelent e skalár előjele? Ez pontosan akkor negatív, ha a $\mathbf{c}$ vektor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ egyenesére eső merőleges vetülete és $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ellenkező irányú. Vagyis ha a $\mathbf{c}$ vektor az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ síkjának másik oldalán van, mint az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektor, azaz ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ balrendszert alkot!

Összefoglalva: Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorokból képzett $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ skalár abszolút értéke a három vektor által kifeszített parallelepipedon térfogatával egyenlő, míg előjele a három vektor orientációját adja, nevezetesen pontosan akkor pozitív, ha a három vektor jobbrendszert alkot. Az is következik a fentiekből, hogy a három vektor pontosan akkor esik egy síkba, azaz pontosan akkor lineárisan összefüggők, ha $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$.

Vegyes szorzat Az előző paragrafusban megmutattuk az $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ kifejezés fontosságát. Ez vezet a következő definícióhoz.

1.33. DEFINÍCIÓ (VEGYES SZORZAT). A 3-dimenziós tér három tetszőleges $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorából képzett

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

kifejezést a három vektor vegyes szorzatának nevezzük.

- A vegyes szorzat eredménye skalár.
- Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok vegyes szorzatának szokás jelölése $\mathbf{abc}$, de mi a későbbi fejezetekben nem fogjuk használni.
- Mivel a skaláris szorzás kommutatív, ezért $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.
- A paralelepipedon térfogatára ugyanazt az értéket kell kapnunk, bármelyik oldallapot is választjuk alapnak, így e három vektorból a vektorok különböző sorrendjeivel képzett vegyes szorzatok csak előjelben térhetnek el egymástól. Mivel az előjel az orientáció függvénye, ezért – figyelembe véve az előző megjegyzést is – kapjuk, hogy

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

Az ellenkező előjelű szorzatok:

$$(\mathbf{c} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{b}).$$

Ezeket a vegyes szorzatra használt jelöléssel fölírva:

$$\mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab} = -\mathbf{acb} = -\mathbf{cba} = -\mathbf{bac}.$$

1.34. PÉLDA (VEGYES SZORZAT). Határozzuk meg egy egységélű kocka egy csúcsból induló három lapátló-vektorának vegyes szorzatát!

MEGOLDÁS. Jelölje a kocka egyik csúcsából induló három élvektorát $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$. E három vektor ebben a sorrendben alkotson jobbrendszert. Ekkor az előző megjegyzés szerint $\mathbf{ijk} = \mathbf{jki} = \mathbf{kij} = 1$, $\mathbf{kji} = \mathbf{jik} = \mathbf{ikj} = -1$. Mivel a vegyes szorzat egy paralelepipedon térfogatát, vagy annak ellentettjét adja, ezért ha egy szorzatban egy vektor többször is szerepel, akkor annak értéke 0. Például $\mathbf{iji} = (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \cdot \mathbf{i} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$. A három lapátló-vektor: $\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{k} + \mathbf{i}$. Ezek vegyes szorzata

$$\begin{aligned} ((\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times (\mathbf{j} + \mathbf{k})) \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{i}) &= \mathbf{ijk} + \mathbf{iji} + \mathbf{ikk} + \mathbf{iki} + \mathbf{jjk} + \mathbf{jji} + \mathbf{jkk} + \mathbf{jki} \\ &= 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1 \\ &= 2, \end{aligned}$$

tehát a három lapátló-vektor vegyes szorzata 2. □

Feladatok

Skaláris szorzás

1.14. Mutassuk meg, hogy $|\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2$ pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ három egymásra páronként merőleges vektor.

1.15. Igazoljuk, hogy

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \neq \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}).$$

Merőlegesség és orientáció: vektori szorzás Vektori szorzat

1.16. Tekintsünk egy egységélű kockát, melynek egyik csúcsát jelölje P . Számítsuk ki a P -ből induló

- valamelyik két lapátló-vektor,
- egyik lapátló- és a testátló-vektor skaláris szorzatát, valamint a P -ből induló
- valamelyik élvektor és egy vele egy lapon lévő lapátló-vektor,
- valamelyik élvektor és a vele nem egy lapon lévő lapátló-vektor vektori szorzatát.

1.17. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{u}$ merőleges $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektorokra, akkor merőleges minden lineáris kombinációjukra is.

1.18. Három lineárisan független vektornak hány sorrendje van? E sorrendek közül hány alkot jobb- és hány balrendszert?

1.19. [Szögfelező] Legyenek $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nemzérus vektorok. Mutassuk meg, hogy a $|\mathbf{b}|\mathbf{a} + |\mathbf{a}|\mathbf{b}$ vektor felezi $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ szögét!

1.20. [Háromszög szögfelezője] Az előző feladat eredményét felhasználva mutassuk meg, hogy a háromszög egyik szögének szögfelezője a szemközti oldalt a két szomszédos oldal hosszának arányában osztja fel.

1.21. [Mit cserél föl a tükör?] Hogy lehet az, hogy a tükör fölcseréli a jobbat a ballal, de nem cseréli föl a föntet a lenttel?

Projekt: ekvivalencia reláció

Egy X halmazon értelmezett reláción (pontosabban bináris reláción) az X elempárjainak egy R halmazát értjük. Ha

egy (a, b) pár benne van ebben a halmazban, azt mondjuk, hogy a az R relációban van b -vel, és úgy jelöljük, hogy $a R b$. Például, ha X az összes valaha élt ember halmaza, akkor az összes olyan (a, b) emberpár halmaza, ahol a anyja b -nek, egy reláció. Ez a köznyelvből is ismert anyagyermek reláció. Egy matematikai példa: ha X a valósok halmaza, és R azokból az (a, b) párokból áll, melyekre a kisebb vagy egyenlő, mint b , akkor R egy reláció, melyet a valósok rendezési relációjának nevezünk. E reláció szokásos jele $\leq$, így ha $(a, b) \in R$, akkor az $a \leq b$ jelölést használjuk.

Az halmazon értelmezett ekvivalenciareláció egy olyan reláció, mely megadja a halmaz elemeinek egy osztályozását (osztályfelbontását, partícióját), azaz diszjunkt részhalmazok (osztályok, cellák), uniójára való fölbontását, melyben a halmaz minden eleme pontosan egy osztályba tartozik. Két elem pontosan akkor van relációban, ha ugyanabba az osztályba tartozik. Ekkor azt mondjuk, hogy a két elem ekvivalens (e relációra vonatkozóan). Ha tehát adva van egy halmaz elemeinek osztályozása, az az előbbiektől szerint megad egy relációt. Kérdés, ha adva van egy reláció, hogyan állapítható meg, hogy ekvivalencia reláció-e?

1.35. TÉTEL (EKVIVALENCIARELÁCIÓ). Legyen R egy tetszőleges reláció az X halmazon. R pontosan akkor ekvivalenciareláció, ha tetszőleges $a, b, c \in X$ elemre fennáll az alábbi három tulajdonság:

- R reflexív, azaz $a R a$, vagyis minden elem relációban van önmagával,
- R szimmetrikus, azaz ha $a R b$, akkor $b R a$,
- R tranzitív, azaz ha $a R b$ és $b R c$, akkor $a R c$.

1.22. Legyen R a fenti tétel szerinti reláció, és jelölje R_a az a -val relációban lévő elemek halmazát. Mutassuk meg, hogy bármely két $a, b \in X$ elemre R_a és R_b vagy azonos, vagy diszjunkt. Ezzel bizonyítsuk az előző tételt!

1.23. [Szabad vektor fogalma] Mutassuk meg, hogy a 3-dimenziós tér szabad vektorai definiálhatók egy – az irányított szakaszok halmazán értelmezett – ekvivalenciareláció ekvivalenciaosztályaival. Mi ez a reláció?

1.24. [Vektor iránya] Milyen halmazon értelmezett ekvivalenciareláció segítségével definiálható a vektor irányának és állásának fogalma?

Vektorok koordinátás alakban

A koordináták bevezetésével egyrészt új algebrai eszközökhöz jutunk a vektorok és a különféle geometriai alakzatok vizsgálatában, másrészt lehetővé válik a vektor fogalmának kiterjesztése. Így jutunk a sokdimenziós terek fogalmához, ami nélkülözhetetlen a közgazdaságtanban, az internetes keresők matematikájában, vagy véges struktúrák fölötti változatában a kódelméletben és a kriptográfiában.

Descartes-féle koordinátarendszer Descartes 1637-ben *La Géométrie* című művében egy szép ötlettel összekapcsolta a geometriát az algebraival. Alapgondolata az volt, hogy a geometria alapelemei (pl. pontok) és a valós számok/számpárok/számhármasok közt kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés hozható létre, így bizonyos geometriai alakzatok algebrai egyenletekkel leírhatók és vizsgálhatók válnak.

Az 1.11. tétel szerint a sík bármely $\mathbf{v}$ vektora felírható két adott lineárisan független $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_2$ vektor lineáris kombinációjaként, és e felírás egyértelmű. Ha e lineáris kombináció $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2$ alakú, akkor a $\mathbf{v}$ vektorhoz a (v_1, v_2) számpárt rendeljük, amit a $\mathbf{v}$ vektor *koordinátás alakjának* nevezünk, a v_1 és v_2 skalárokat pedig a $\mathbf{v}$ *koordinátáinak* nevezzük. Azt mondjuk, hogy az $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ vektorpár e koordinátázási rendszer – egyszerűbben *koordinátarendszer* – *bázisa*, az $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_2$ vektorok a *bázisvektorok* vagy *alapvektorok*. Tetszőleges vektor koordinátáinak meghatározásához elég a bázisvektorokat ismerni.

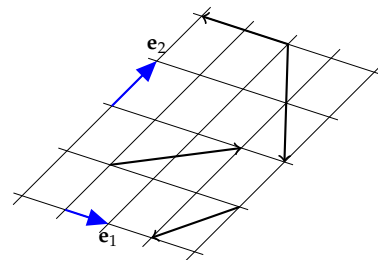
1.36. PÉLDA (VEKTOROK KOORDINÁTÁI). Határozzuk meg az 1.33. ábrán megadott vektoroknak – az $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_2$ vektorokra, mint bázisra vonatkozó – koordinátáit!

MEGOLDÁS. A megoldás könnyen leolvasható az 1.34. ábráról. Áttekinthetőbb, ha az összes vektort egyetlen pontból indítjuk. Ezt mutatja az 1.35. ábra. □

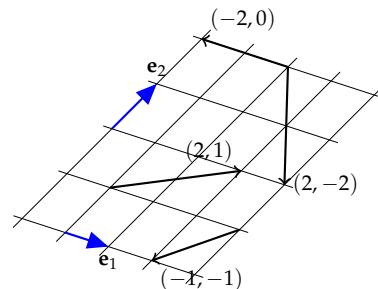
A koordinátarendszer a 3-dimenziós térben is hasonló módon építhető fel. Az 1.12. tétel szerint a tér bármely $\mathbf{v}$ vektora felírható három adott lineárisan független $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ és $\mathbf{e}_3$ vektor lineáris kombinációjaként, és e felírás egyértelmű. Ha e lineáris kombináció $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$ alakú, akkor a $\mathbf{v}$ vektorhoz a (v_1, v_2, v_3) számhármaszt rendeljük, amit a $\mathbf{v}$ vektor *koordinátás alakjának* nevezünk, a v_1 , v_2 és v_3 skalárokat pedig a $\mathbf{v}$ *koordinátáinak* nevezzük, a bázis pedig az $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ vektorhármas.

Sőt, a koordinátázás az 1-dimenziós térben is megvalósítható: ha $\mathbf{e}$ egy nemnulla vektor (tehát lineárisan független vektorrendszer!), akkor bármely vele párhuzamos $\mathbf{v}$ vektor egyértelműen felírható $\mathbf{v} = v\mathbf{e}$

René Descartes (Renatus Cartesius) (1596–1650) francia filozófus és matematikus, a modern filozófia atyja, az analitikus geometria egyik megalkotója. Filozófiáját a pusztá hitre alapozott állításokkal szemben a racionális érvelések útján kívánta fölépíteni (lásd *descartes-i kételkedés* és „gondolkodom, tehát vagyok”). Orvostudományt és jogot tanult, végül hadmérnöki képesítést szerzett. Több háborúban is részt vett. 1619-ben egy Magyarországot is érintő hosszú útján egy Ulm melletti parasztházban három álmot látott, melyek megfejtése „egy csodálatos tudományhoz” vezette, ami filozófiája alapjává vált.



1.33. ábra: Mik a vektorok koordinátái?



1.34. ábra: A megoldás

alakban. E v skálár lesz a $\mathbf{v}$ koordinátás alakja (a zárójel használata itt szükségtelen). Így a $\mathbf{v} \leftrightarrow v$ hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít a vektorok és a skálárok közt.

Ha kijelölünk egy pontot az egyenesen/síkban/térben – ez lesz az origó –, akkor az egyenes/sík/tér pontjai és a helyvektorok végpontjai közti kölcsönösen egyértelmű megfeleltetéssel egyúttal a pontok is koordinátát kapnak.

1.37. PÉLDA (PONTOK KOORDINÁTÁI). Határozzuk meg az 1.36. ábrán kijelölt pontok – megadott bázisvektorokra és origóra vonatkozó – koordinátáit!

MEGOLDÁS. E feladat megoldása lényegében azonos az előzőével, mint-hogy a kijelölt pontokba mutató helyvektorok megegyeznek az ott megadott vektorokkal (ld. 1.37. ábra). $\square$

A helyvektorok és a pontok közti kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést a jelölésben is kifejezzük azzal, hogy nem teszünk különbséget a vektor és a pont koordinátás alakja közt, azaz a $\mathbf{v} = (a, b)$ vektorhoz adott origó mellett rendelt pontot is (a, b) jelöli. Ha a pontnak nevet is adunk, pl. e pont a P pont, akkor a $P(a, b)$ jelölés a nevet és a koordinátákat is megadja. Ekkor a helyvektort $\overrightarrow{OP}$ is jelölheti. Tehát $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$. Szokás a vektorok koordinátás alakját úgynevezett *oszlopvektor* alakba is írni, mi e könyvben ekkor kerek helyett szögletes zárójelet használunk, például:

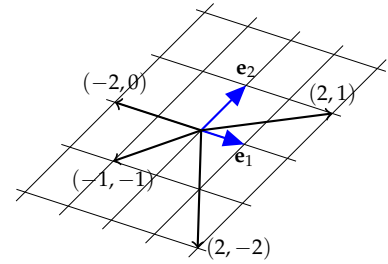
$$\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

E jelölés előnyeivel hamarosan találkozunk.

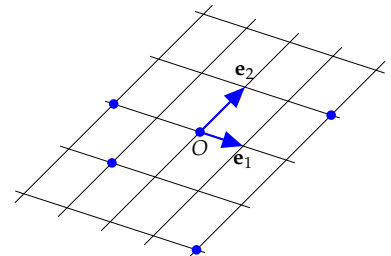
Látható, hogy ha egy pont az első tengelyen van, és azon az egyenesen x az 1-dimenziós koordinátája, akkor síkbeli koordinátás alakja $(x, 0)$ lesz. Hasonlóképp a második tengely minden pontjának $(0, y)$ a koordinátás alakja. Az origóé $(0, 0)$ (ld. 1.38. ábra). Az alapvektorok koordinátás alakja $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ és $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$.

Hasonlóképp a 3-dimenziós esetben a koordinátatengelyekre eső pontok 3-dimenziós koordinátás alakja $(x, 0, 0)$, $(0, y, 0)$, illetve $(0, 0, z)$ attól függően, hogy melyik tengelyről van szó. Az origón átmenő és 2 tengelyt tartalmazó síkokat *koordinátasíkoknak* nevezzük. Ezekből is három van. Könnyen látható, hogy a koordinátasíkok pontjainak alakja $(x, y, 0)$, $(x, 0, z)$, illetve $(0, y, z)$. Az origóé $(0, 0, 0)$, míg az alapvektoroké $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ (ld. 1.39. ábra).

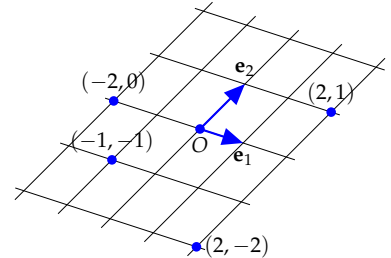
Műveletek koordinátás alakban megadott vektorokkal Legyen adva a térben egy koordinárendszer, és abban két tetszőleges $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektor. E paragrafusban megkeressük a vektorműveletek koordinátás alakját. A kérdés tehát az, hogy hogyan kapható meg $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, $c\mathbf{u}$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ koordinátás alakja.



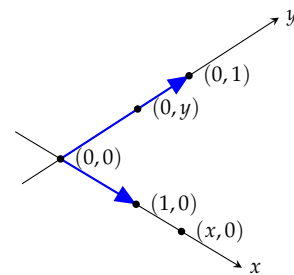
1.35. ábra: A megoldás helyvektorokkal ábrázolva.



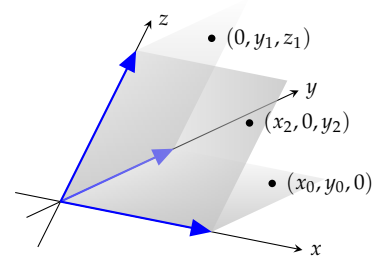
1.36. ábra: Mik a pontok koordinátái?



1.37. ábra: Pontok és koordinátáik



1.38. ábra: Pontok a koordinárendszer tengelyein.



1.39. ábra: Pontok a koordinátasíkokon

Mindegyik műveletnél felhasználjuk a vektoroknak a bázisvektorok lineáris kombinációjaként való előállítását. Az adott két vektor összege

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + \mathbf{v} &= (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) \\ &= (u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3) + (v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3) \\ &= (u_1 + v_1)\mathbf{e}_1 + (u_2 + v_2)\mathbf{e}_2 + (u_3 + v_3)\mathbf{e}_3 \\ &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3).\end{aligned}$$

Hasonló képlet adódik a különbségre

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = (u_1, u_2, u_3) - (v_1, v_2, v_3) = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3).$$

A skalárral való szorzás is a koordinátánként való végrehajtás lehetőségét mutatja:

$$\begin{aligned}c\mathbf{u} &= c(u_1, u_2, u_3) = c(u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3) \\ &= cu_1\mathbf{e}_1 + cu_2\mathbf{e}_2 + cu_3\mathbf{e}_3 \\ &= (cu_1, cu_2, cu_3).\end{aligned}$$

Összefoglalva tehát a következő állítást kapjuk:

1.38. ÁLLÍTÁS (VEKTORMŰVELETEK KOORDINÁTÁS ALAKJA). *Adva van a térben egy koordinátarendszer, és abban két tetszőleges $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektor, valamint egy tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ valós szám. Ekkor a vektorok összegének, különbségének és skalárszorosának koordinátás alakja rendre*

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + \mathbf{v} &= (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3), \\ \mathbf{u} - \mathbf{v} &= (u_1, u_2, u_3) - (v_1, v_2, v_3) = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3), \\ c\mathbf{u} &= c(u_1, u_2, u_3) = (cu_1, cu_2, cu_3).\end{aligned}$$

Az oszlopvektor jelölést használva

$$\mathbf{u} \pm \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \pm v_1 \\ u_2 \pm v_2 \\ u_3 \pm v_3 \end{bmatrix}, \quad c\mathbf{u} = c \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cu_1 \\ cu_2 \\ cu_3 \end{bmatrix}.$$

A síkbeli vektorokra hasonló állítások igazak, csak két koordinátával. Érdekesebb a helyzet a skaláris szorzással. Kezdjük két síkbeli vektorral.

1.39. PÉLDA (SKALÁRIS SZORZÁS KOORDINÁTARENDSZERBEN). *Tekintsünk egy olyan síkbeli koordinátarendszert, ahol az első alapvektor hossza 1, a másodiké 2, és a kettőjük közti szög $\pi/3$. Számítsuk ki az $\mathbf{a} = (1, 1)$ és $\mathbf{b} = (-5/2, 1)$ vektorok skaláris szorzatát.*

MEGOLDÁS. Az alapvektorok hosszát és szögét ismerve ki tudjuk számítani az alapvektorok skaláris szorzatait:

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1, \quad \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 2^2 = 4, \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 1 \cdot 2 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 1.$$

Ezt fölhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \cdot \left(-\frac{5}{2}\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\right) \\ &= -\frac{5}{2}\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \left(1 - \frac{5}{2}\right)\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 \\ &= -\frac{5}{2} - \frac{3}{2} + 4 \\ &= 0, \end{aligned}$$

tehát a két vektor merőleges egymásra (ld. az 1.40. ábrát).

Érdekességként meghatározzuk e koordináta-rendszerben a skaláris szorzás általános képletét:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2) \cdot (v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2) \\ &= u_1v_1\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + (u_1v_2 + u_2v_1)\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + u_2v_2\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 \\ &= u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + 4u_2v_2. \end{aligned}$$

Ebből látható, hogy a skaláris szorzat koordinátás alakja függ a koordináta-rendszer-től is. $\square$

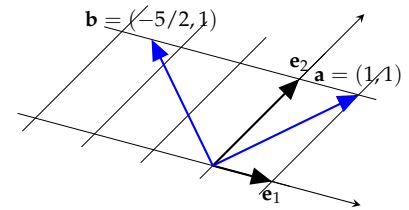
A derékszögű koordináta-rendszer A természeti törvények különös fontosságot adnak az egymásra merőleges irányoknak, ezért például igen gyakran érdemes olyan koordináta-rendszert választani, amelyben az alapvektorok merőlegesek, más szóval *ortogonálisak* egymásra. A bázisvektorok szöge mellett azok hosszát is érdemes standardizálni, nevezetesen egységnyi hosszúnak választani, így mindegyik koordináta egyúttal távolságot is jelent. Az egységvektorokból álló ortogonális bázist *ortonormálnak* nevezzük.

Az egységes tárgyalás érdekében a bázisvektorok körüljárását is előírhatjuk: általánosan elterjedt szokás a jobbrendszer választani. Az így konstruált bázis vektorait síkban gyakran $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, térben $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$ jelöli.

A két és háromdimenziós térben a skaláris szorzat egyszerű alakot ölt, ha a koordináta-rendszer alapvektorai ortonormáltak.

1.40. ÁLLÍTÁS (SKALÁRIS SZORZAT ORTONORMÁLT KOORDINÁTARENDSZERBEN). A síkbeli $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, illetve a térbeli $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektorok skaláris szorzata ortonormált koordináta-rendszerben

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2, \text{ illetve } \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$



1.40. ábra: Két vektor skaláris szorzata

BIZONYÍTÁS. A síkbeli esetben kihasználjuk, hogy $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1$ és $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j}) \cdot (v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j}) \\ &= u_1 v_1 \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + (u_1 v_2 + u_2 v_1) \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + u_2 v_2 \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} \\ &= u_1 v_1 + u_2 v_2\end{aligned}$$

A térbeli eset hasonlóan bizonyítható. □

1.41. ÁLLÍTÁS (VEKTORI SZORZAT ORTONORMÁLT KOORDINÁTAREND-SZERBEN). A térbeli $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektorok vektori szorzata derékszögű koordinátarendszerben

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

► Az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ koordinátáinak könnyű memorizálására két sémát mutatunk a széljegyzetben.

BIZONYÍTÁS. Az alapvektorok egymással való vektori szorzatait már kiszámoltuk az 1.28. példában. Kihasználva, hogy $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$, ..., kapjuk hogy

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}) \times (b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) \\ &= a_2 b_3 \mathbf{j} \times \mathbf{k} + a_3 b_2 \mathbf{k} \times \mathbf{j} + a_3 b_1 \mathbf{k} \times \mathbf{i} + a_1 b_3 \mathbf{i} \times \mathbf{k} + a_1 b_2 \mathbf{i} \times \mathbf{j} + a_2 b_1 \mathbf{j} \times \mathbf{i} \\ &= a_2 b_3 \mathbf{i} - a_3 b_2 \mathbf{i} + a_3 b_1 \mathbf{j} - a_1 b_3 \mathbf{j} + a_1 b_2 \mathbf{k} - a_2 b_1 \mathbf{k} \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1).\end{aligned}$$
 □

1.42. PÉLDA (PARALLELOGRAMMA TERÜLETE). Mutassuk meg, hogy az (a, b) és (c, d) vektorok által kifeszített paralelogramma területe

$$|ad - bc|.$$

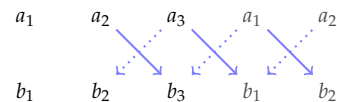
Mi a jelentése az $ad - bc$ előjelének?

MEGOLDÁS. Két 3-dimenziós vektor által kifeszített paralelogramma területe a vektori szorzatuk abszolút értéke. Ággyazzuk be a megadott két vektort a tér egyik koordinátságjába, tekintsük például az $(a, b, 0)$ és $(c, d, 0)$ vektorokat. Vektori szorzatuk

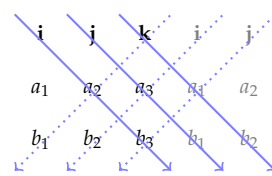
$$(a, b, 0) \times (c, d, 0) = (0, 0, ad - bc),$$

ennek abszolút értéke $|ad - bc|$.

Mivel az $(a, b, 0)$, $(c, d, 0)$ és $(0, 0, ad - bc)$ vektorok jobbrendszert alkotnak, ezért $ad - bc$ pontosan akkor pozitív, ha a síkban az (a, b) és (c, d) vektorok jobbrendszert alkotnak, és $ad - bc$ pontosan akkor negatív, ha az (a, b) és (c, d) vektorok balrendszert alkotnak (gondoljuk meg!). □



$$a) \quad (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$



$$b) \quad (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{k}$$

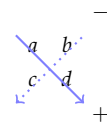
1.41. ábra: A vektori szorzat kiszámítása a két vektor koordinátáiból:

a) Írjuk a két vektort egymás alá, majd az első két koordinátát másoljuk a vektorok végére, végül az X alakba rakott nyíl pároknál a ↘ nyíl végén lévő számok szorzatából vonjuk ki a ↙ szerinti szorzatot. Az eredmény:

$$(a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

b) Írjuk a két vektor koordinátái fölé az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ vektorokat, majd az előzőhöz hasonlóan másoljuk e táblázat után az első két oszlopot, végül a ↘ nyíl menti szorzatokból vonjuk ki a ↙ menti szorzatokat. Megjegyezzük, hogy e séma a később tanulandó determinánsok kiszámítására emlékeztet, formálisan föl is szokás írni a determinánsokat jelölő függőleges zárójelek segítségével:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

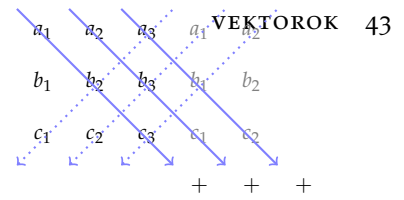


1.42. ábra: A paralelogramma előjeles területe $ad - bc$, melynek memorizálására a fenti séma használatos. Ez megegyezik két 2-dimenziós vektor – később tanulandó – determinánsával, melyet úgy jelöljük, hogy a két vektor koordinátáiból képzett táblázatot függőleges zárójelek közé zárjuk:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Vigyázzunk, e jel nem az abszolút értéket jelöli, ahhoz egy további zárójelpár szükséges, azaz

$$|ad - bc| = \left| \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right|.$$



1.43. PÉLDA (PARALELEPIPEDON TÉRFOGATA). Mutassuk meg, hogy az $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ és $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata

$$|a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1|$$

Mi a jelentése az $a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$ előjelének?

MEGOLDÁS. Az 1.32. példában láttuk, hogy a három vektor által kifeszített paralelepipedon térfogata $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$, amit a koordinátás alakból kiszámolhatunk:

$$(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \cdot (c_1, c_2, c_3) = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1. \quad \square$$

Az $\mathbb{R}^n$ halmaz Láttuk, hogy 2-dimenziós, illetve 3-dimenziós vektorjellegű mennyiségek leírhatók egy rendezett számpárral, illetve számhármassal. Izgalmas a fordított helyzet, amikor legalább 4, de akár több millió szorosan összefüggő adatból képzett, rendezett szám- n -essel dolgozunk. Vajon értelmes dolog-e e szám- n -eket egy n -dimenziós tér vektorainak, vagy pontjainak tekinteni? És van-e értelme a 2- és 3-dimenziós térben használt fogalmak általánosításának n dimenzióra? A válasz mindegyik kérdésre határozott igen, amit a fizika 4-dimenziós tér-idő fogalma, számtalan gazdasági, vagy internettel kapcsolatos probléma megoldása fényesen bizonyít.

1.44. DEFINÍCIÓ. Egy tetszőleges H halmaz elemeiből képzett rendezett elem- n -esek halmazát H^n -nel jelöljük.

Például ha $H = \{0, 1\}$, akkor H^3 a H elemeiből képzett rendezett elemhármassok halmaza, azaz:

$$\{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}.$$

A fenti jelölésnek megfelelően $\mathbb{R}^n$ a valós számokból képzett rendezett szám- n -esek halmazát jelöli. Eszerint a sík pontjait és vektorait $\mathbb{R}^2$, a térét $\mathbb{R}^3$ elemeivel koordinátáztuk. Később $\mathbb{R}^n$ elemein vektorműveleteket fogunk bevezetni, és $\mathbb{R}^n$ -ről, mint vektortéréről fogunk beszélni. Hasonlóképp, $\mathbb{R}^n$ -t geometriai vagy ponttérnek fogjuk tekinteni, ha elemeire, mint pontokra gondolunk, és köztük geometriai műveleteket végezzünk. E sokféleség sosem fog gondot okozni: $\mathbb{R}^n$ szerepét mindig az fogja meghatározni, hogy mit teszünk elemeivel, vagyis a szám- n -esekkel.

Az $\mathbb{R}^n$ megismerésében az *analógia* fonalán haladunk, a 2- és 3-dimenziós tér fogalmait fogjuk átvinni, általánosítani n dimenzióra. Ez

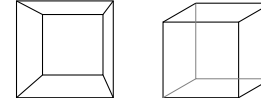
1.43. ábra: A paralelepipedon térfogata megegyezik az azt kifeszítő három vektor vegyes szorzatának abszolút értékével. A vektori szorzáshoz használt séma itt is működik: a három vektort egymás alá írjuk, az így kapott táblázat első két oszlopát utána másoljuk, végül a $\searrow$ nyílt szorzatokból kivonjuk a $\swarrow$ menti szorzatokat. A később tanulandó determinánsokra használt jelöléssel tehát a paralelepipedon előjeles térfogata:

$$\mathbf{abc} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

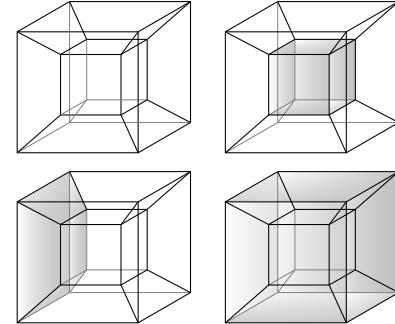
2D



3D



4D



1.44. ábra: 4-dimenziós kocka ábrázolása 2-dimenzióban. A 0-dimenziós „kocka” egyetlen pontból áll, az 1-dimenziós kockát két 0-dimenziós határolja, azaz ez egy szakasz. A 2-dimenziós „kockát”, azaz a négyzetet minden tengelyirányból két-két egybevágó 1-dimenziós „kocka” határolja (azaz összesen négy), míg a 3-dimenziós kockát minden tengelyirányból két-két négyzet (azaz összesen hat). A 3-dimenziós kocka ábrázolása 2-dimenzióban csak a határoló négyzetek torzításával oldható meg. A 4-dimenziós kockát mind a négy tengelyirányból két-két 3-dimenziós kocka határolja, összesen nyolc. Az ábrán három ilyen 3-dimenziós kockát kiszíneztünk.

az analógia fog segíteni abban, hogy valamit „lássunk” n dimenzióban is (ha nem is olyan jól, mint 3 dimenzióban). Példaként az analógiára egy 4-dimenziós kocka 2-dimenziós vetületét mutatjuk az 1.44. ábrán.

Vektorok összeadása és skalárral szorzása $\mathbb{R}^n$ -ben A 2- és 3-dimenziós vektorok műveleteinek koordinátás alakja az összeadás, kivonás és skalárral szorzás esetén analóg módon átvihető az n -dimenziós vektorokra.

1.45. DEFINÍCIÓ (VEKTORMŰVELETEK $\mathbb{R}^n$ -BEN). Legyen $c \in \mathbb{R}$ egy tetszőleges valós, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ az $\mathbb{R}^n$ tér két tetszőleges vektora. E két vektor összegét és egyikük c -szeresét a következő képletekkel definiáljuk:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + \mathbf{v} &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n) \\ c\mathbf{u} &= (cu_1, cu_2, \dots, cu_n).\end{aligned}$$

Összefoglaljuk e műveletek legfontosabb tulajdonságait. Ezekre többször is hivatkozni fogunk a későbbiekben.

1.46. TÉTEL (AZ ÖSSZEADÁS ÉS SKALÁRRAL SZORZÁS TULAJDONSÁGAI). Legyen $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ az $\mathbb{R}^n$ három tetszőleges vektora, és legyen c, d két tetszőleges valós, jelölje $\mathbf{0}$ a $(0, 0, \dots, 0)$ vektort és $-\mathbf{u}$ a $(-u_1, -u_2, \dots, -u_n)$ vektort. Ekkor

a)	$\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$	$a +$ művelet nem vezet ki $\mathbb{R}^n$ -ből
b)	$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$	a művelet fölcserélhető (kommutatív)
c)	$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{v} + \mathbf{u}) + \mathbf{w}$	csoportosítható (asszociatív)
d)	$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$	zérusvektor
e)	$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$	ellentett vektor
f)	$c\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$	e szorzás nem vezet ki $\mathbb{R}^n$ -ből
g)	$c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$	a két szorzás kompatibilis
h)	$c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$	disztributív
i)	$(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$	disztributív
j)	$1\mathbf{u} = \mathbf{u}$	szorzás 1-gyel

E tíz tulajdonság később kitüntetett szerepet fog játszani, ezért elkülönítjük a további felsorolandóktól:

- 1) $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$
- 2) $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$
- 3) $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$
- 4) a skalár hátra is írható, azaz $c\mathbf{u} = \mathbf{uc}$ és így $\mathbf{u}/c = \frac{1}{c}\mathbf{u}$

► E tulajdonságok mindegyike könnyen visszavezethető a valós számok algebrai tulajdonságaira, ezért ezek ellenőrzését (bizonyítását) az

Olvasóra hagyjuk. Mintaként megmutatjuk a *b)* bizonyítását:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + \mathbf{v} &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n) \\ &= (v_1 + u_1, v_2 + u_2, \dots, v_n + u_n) \\ &= \mathbf{v} + \mathbf{u}.\end{aligned}$$

► Az *a)–e)* tulajdonságok az összeadás, az *f)–j)* tulajdonságok a skalárral szorzás tulajdonságait írják le. Mindkét csoport első tulajdonsága csak annyit mond, hogy a művelet eredménye is ugyanabba a vektorhalmazba, azaz $\mathbb{R}^n$ -be esik, ahová a műveletben szereplő vektor való.

1.47. PÉLDA. Mutassuk meg, hogy az $\mathbb{R}^n$ -beli $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)$, ..., $\mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$ vektorok lineárisan függetlenek, és hogy $\mathbb{R}^n$ minden vektora egyértelműen előáll ezek lineáris kombinációjaként!

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{e}_1$ biztosan nem áll elő a többi vektor lineáris kombinációjaként, hisz a többi vektor első koordinátája 0, így azok bármely lineáris kombinációjában is 0 az első koordináta, $\mathbf{e}_1$ -ben pedig 1. Hasonlóan igazolható, hogy egyik $\mathbf{e}_i$ sem áll elő a többi vektor lineáris kombinációjaként ($i = 2, 3, \dots, n$). A megadott vektorok tehát lineárisan függetlenek.

Mivel az i -edik koordináta egyedül csak az $\mathbf{e}_i$ vektorban 1, a többiben 0, ezért ha egy tetszőleges $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ vektor előáll az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ vektorok lineáris kombinációjaként, akkor abban $\mathbf{e}_i$ együtthatója csak v_i lehet. Másrészt az is világos, hogy

$$(v_1, v_2, \dots, v_n) = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + \dots + v_n \mathbf{e}_n.$$

Ezzel igazoltuk, hogy $\mathbb{R}^n$ minden vektora egyértelműen áll elő az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ vektorok lineáris kombinációjaként. $\square$

Lineáris kombináció, lineáris függetlenség, lineáris összefüggőség Hiába definiáltuk vektorok lineáris függetlenségének fogalmát tetszőleges számú vektorból álló vektorhalmazra, láttuk, hogy a 3-dimenziós térben legföljebb csak 3 vektor lehet lineárisan független. Viszont az $\mathbb{R}^n$ térben találtunk n lineárisan független vektort is.

Az 1.10. definíció szerint egy legalább kételemű vektorrendszer lineárisan független, ha mindegyik vektor független a többitől, azaz egyik sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként, egyetlen vektor pedig lineárisan független, ha nem a zérusvektor. Ez nehézkes feltétel, hisz mindegyik vektorra külön ellenőrizni kell, ezért egy könnyebben ellenőrizhető, de ekvivalens feltételt keresünk. A háromdimenziós térben láttuk, hogy ha három vektor független, akkor a tér bármely vektora egyértelműen előáll lineáris kombinációjuként. Ez igaz a nullvektorra is. A nullvektor egyféleképp biztosan előáll: a három vektor nullákkal vett lineáris kombinációjaként. Ezt nevezzük a nullvektor

triviális előállításának. És a fentiek szerint más előállítása nincs is, ha a három vektor lineárisan független. Ez az alapja a következő tételnek:

- 1.48. TÉTEL (LINEÁRIS FÜGGETLENSÉG). *Tetszőleges $\mathbb{R}^n$ -beli $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ vektorrendszerre az alábbi két állítás ekvivalens:*
1. $\mathcal{V}$ lineárisan független, azaz $k > 1$ esetén egyik vektora sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként, $k = 1$ esetén pedig a vektor nem a zérusvektor.
 2. A zérusvektor csak egyféleképp – a triviális módon – áll elő $\mathcal{V}$ lineáris kombinációjaként. Másként fogalmazva, a $c_1, c_2, \dots, c_k$ skalárokkal vett lineáris kombináció csak akkor lehet a nullvektor, azaz

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

csak akkor állhat fenn, ha

$$c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0.$$

BIZONYÍTÁS. Először tegyük fel, hogy a vektorrendszer csak egyetlen $\mathbf{v}$ vektorból áll. Ekkor a tétel azt állítja, hogy $\mathbf{v}$ pontosan akkor lineárisan független, azaz pontosan akkor nem a nullvektor, ha a $c\mathbf{v} = \mathbf{0}$ csak $c = 0$ esetén állhat fenn. Ez nyilvánvaló, hisz ha $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ és $c \neq 0$, akkor $c\mathbf{v} = \mathbf{0}$ sem állhat fenn. A továbbiakban tegyük fel, hogy a vektorrendszer legalább két vektorból áll.

($\Leftarrow$) Megmutatjuk, hogy ha $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ csak $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$ esetén állhat fenn, akkor semelyik $\mathbf{v}_i$ vektor sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként ($i = 1, 2, \dots, k$). Tegyük fel indirekt módon, hogy valamelyik vektor – például a $\mathbf{v}_1$ – kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként, azaz

$$\mathbf{v}_1 = d_2\mathbf{v}_2 + \dots + d_k\mathbf{v}_k,$$

vagyis átrendezés után

$$(-1)\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + \dots + d_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

Mivel $\mathbf{v}_1$ együtthatója nem 0, ezért feltevésünkkel ellentmondásban előállítottuk a nullvektort olyan lineáris kombinációjaként, melyben nem minden együttható 0. Ez az ellentmondás bizonyítja az állítást.

($\Rightarrow$) Megmutatjuk, hogy ha a vektorrendszer egyik vektora sem áll elő a többi lineáris kombinációjaként, akkor a egyedül csak a csupa zérus együtthatójú lineáris kombinációja lehet zérusvektor. Ismét indirekt módon bizonyítunk: tegyük fel, hogy van olyan – nem csupa 0 együtthatójú – lineáris kombináció, mely a nullvektorral egyenlő, azaz

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0},$$

de valamelyik együttható – például a c_1 – nem 0. Ekkor $\mathbf{v}_1$ kifejezhető a többi vektor lineáris kombinációjaként:

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{c_2}{c_1}\mathbf{v}_2 - \dots - \frac{c_k}{c_1}\mathbf{v}_k,$$

ami bizonyítja az állítást. $\square$

Egy vektorrendszert *lineárisan összefüggőnek* nevezünk, ha nem független, azaz egyelemű vektorrendszer esetén ha az a vektor a zérusvektor, többelemű vektorrendszer esetén pedig ha van olyan vektora, mely kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként. Az előző tétel szerint ez azzal ekvivalens, hogy a vektorrendszernek van olyan zérusvektort adó lineáris kombinációja, melyben nem mindegyik együttható zérus. A lineáris összefüggőség definíciója kicsit élesíthető:

1.49. TÉTEL (LINEÁRIS ÖSSZEFÜGGŐSÉG). Egy nullvektortól különböző elemekből álló, legalább kételemű $\mathbb{R}^n$ -beli $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ vektorrendszer pontosan akkor lineárisan összefüggő, ha van olyan $t \geq 2$ index, hogy $\mathbf{v}_t$ a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{t-1}$ vektorok lineáris kombinációja.

Másként fogalmazva, ha egy nullvektort nem tartalmazó vektorrendszerben találunk olyan vektort, mely a többi lineáris kombinációja, akkor olyat is találunk, mely sorrendben csak az őket megelőző vektor(ok) lineáris kombinációja.

BIZONYÍTÁS. Legyen t az a legkisebb egész, melyre a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_t$ vektorok már összefüggők. Mivel $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, ezért az első vektor nem lehet összefüggő, ezért $t \geq 2$. E vektorok összefüggősége miatt vannak olyan c_i konstansok, melyekkel

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_t\mathbf{v}_t = \mathbf{0}.$$

Biztos, hogy $c_t \neq 0$, különben már a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{t-1}$ vektorok is lineárisan összefüggők lennének, és ez ellentmond t definíciójának. Így

$$\mathbf{v}_t = \frac{-c_1}{c_t}\mathbf{v}_1 + \frac{-c_2}{c_t}\mathbf{v}_2 + \dots + \frac{-c_{t-1}}{c_t}\mathbf{v}_{t-1},$$

ami bizonyítja, hogy összefüggő vektorrendszerben létezik ilyen vektor. Az állítás másik fele definíció szerint igaz, hisz ha létezik ilyen $\mathbf{v}_t$ vektor, akkor ez valóban lineáris kombinációja az összes többi vektornak. $\square$

Skaláris szorzás $\mathbb{R}^n$ -ben A skaláris szorzást először abból az alakból általánosítjuk, amelyet a 2- és 3-dimenziós térben ortonormált bázis esetén láttunk. A tetszőleges bázis esetére való általánosításra később térünk vissza.

1.50. DEFINÍCIÓ (SKALÁRIS SZORZÁS $\mathbb{R}^n$ -BEN). Legyen $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ az $\mathbb{R}^n$ tér két tetszőleges vektora. Skaláris szorzatukon a következő kifejezést értjük:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n.$$

1.51. TÉTEL (A SKALÁRIS SZORZÁS TULAJDONSÁGAI). Legyen $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ az $\mathbb{R}^n$ három tetszőleges vektora, és legyen c egy tetszőleges valós. Ekkor

-
- a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ *a művelet fölcserélhető (kommutatív)*
b) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ *disztributív*
c) $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ *a két szorzás kompatibilis*
d) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ és $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
-

BIZONYÍTÁS. A bizonyítás itt is igen egyszerű, ezért csak az a) pontét mutatjuk meg, a többi az Olvasóra hagyjuk:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n \\ &= v_1 u_1 + v_2 u_2 + \dots + v_n u_n \\ &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}. \end{aligned}$$

□

Távolság és szög $\mathbb{R}^n$ -ben Két 2- vagy 3-dimenziós vektor (végpontja) távolságának, és szögének a skaláris szorzatukkal való kapcsolatát használjuk a fogalmaknak a magasabb dimenziós terekben való definíciójához.

1.52. DEFINÍCIÓ (ABSZOLÚT ÉRTÉK, SZÖG, MERŐLEGESSÉG, TÁVOLSÁG). Legyen $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ az $\mathbb{R}^n$ tér két tetszőleges vektora.

- a) Az $\mathbf{u}$ vektor hosszán önmagával vett skaláris szorzatának gyökét értjük, azaz

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}. \quad (1.3)$$

- b) Az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok (hajlás)szögének koszinusza az alábbi törttel definiálható:

$$\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\angle} := \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|} \quad (1.4)$$

- c) Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok merőlegesek egymásra, ha

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (1.5)$$

- d) A két vektor végpontjának távolságán, amit egyszerűen a két vektor távolságának nevezünk, a

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |\mathbf{u} - \mathbf{v}| \quad (1.6)$$

értéket értjük.

► A fenti definíciókat érdemes megtekinteni koordinátás alakjukba átírva. Eszerint például

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2},$$

$$\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\angle} = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2} \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}}$$

► A fenti definíciók közül a vektorok hajlásszögének definíciója még hiányos. Egy szög koszinusza csak a $[-1, 1]$ intervallumba eső szám lehet, ezért e definíció csak akkor értelmes, ha az (1.4) képlet számlálójára és nevezőjére igaz, hogy $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| |\mathbf{v}|$, azaz ha n -dimenziós vektorokra is fennáll a CBS-egyenlőtlenség. Ezt hamarosan igazolni fogjuk!

1.53. PÉLDA (VEKTOROK SZÖGE ÉS TÁVOLSÁGA). Az $\mathbf{u} = (2, 3, 4, 14)$ vektornak mennyi az abszolút értéke, mennyi a $\mathbf{v} = (4, 6, -10, 10)$ vektortól való távolsága, és mennyi a $\mathbf{w} = (0, 3, 6, -2)$ vektorral bezárt szögének koszinusza?

MEGOLDÁS. A válaszhoz az (1.3), az (1.6) és az (1.4) képleteket használjuk:

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2 + 14^2} = \sqrt{225} = 15,$$

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{(2-4)^2 + (3-6)^2 + (4-(-10))^2 + (14-10)^2}$$

$$= \sqrt{2^2 + 3^2 + 14^2 + 4^2} = 15$$

$$\cos(\mathbf{u}, \mathbf{w})_{\angle} = \frac{2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 6 + 14 \cdot (-2)}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2 + 14^2} \sqrt{0^2 + 3^2 + 6^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{21}. \quad \square$$

1.54. TÉTEL (CAUCHY–BUNYAKOVSKIJ–SCHWARZ-EGYENLŐTLENSÉG).
Tetszőleges $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| |\mathbf{v}|. \quad (1.7)$$

Egyenlőség pontosan akkor áll, ha $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ lineárisan összefüggők, azaz egyik vektor a másik skalárszorosa.

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel először, hogy $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Ekkor a tétel állításának mindkét része nyilván igaz, hisz egyenlőség áll fenn, és a két vektor lineárisan összefüggő. Ha $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, akkor legyen $\mathbf{e} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ a $\mathbf{v}$ irányú egységvektor. Az $\mathbf{u}$ vektor $\mathbf{e}$ egyenesére merőleges összetevőjének hossza,

illetve annak négyzete nyilván nem negatív, azaz

$$\begin{aligned}
 0 &\leq |\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}|^2 \\
 &= |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}|^2 - 2|\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}|^2 \\
 &= |\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}|^2 \\
 &= |\mathbf{u}|^2 - \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|^2}{|\mathbf{v}|^2},
 \end{aligned}$$

Innen átrendezéssel azonnal megkapjuk a bizonyítandó állítást. Másrészt az is világos, hogy $0 = |\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}|$ csak akkor állhat fenn, ha $\mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}$, azaz ha $\mathbf{u}$ és $\mathbf{e}$ párhuzamosak, azaz ha $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ skalárszorosa, vagyis ha a két vektor lineárisan összefüggő. $\square$

1.55. TÉTEL (HÁROMSZÖG-EGYENLŐTLENSÉG $\mathbb{R}^n$ -BEN). *Tetszőleges $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra*

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|.$$

A bizonyítás megegyezik a 3-dimenziós változatra, azaz az 1.22. tételre adott bizonyítással.

A vektor abszolút értékét a skaláris szorzat segítségével definiáltuk, de fordítva, a skaláris szorzat is kifejezhető a vektor abszolút értékével.

1.56. TÉTEL (SKALÁRIS SZORZAT ÉS ABSZOLÚT ÉRTÉK $\mathbb{R}^n$ -BEN). *Tetszőleges $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{4} (|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2) \quad (1.8)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} (|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2) \quad (1.9)$$

BIZONYÍTÁS. A bizonyításban az abszolút érték (1.3)-beli definícióját használjuk:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4} (|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2) &= \frac{1}{4} ((\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) - (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v})) \\
 &= \frac{1}{4} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \\
 &= \frac{1}{4} (4\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}.
 \end{aligned}$$

A másik formula hasonlóan bizonyítható. $\square$

Végül egy fontos összefüggés az ortogonális vektorrendszerekről:

1.57. ÁLLÍTÁS (ORTOGONÁLIS VEKTORRENDSZER LINEÁRIS FÜGGETLENSÉGE). *Tegyük fel, hogy a zérusvektortól különböző $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorok páronként ortogonálisak, azaz bármely $i \neq j$ esetén $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$. Ekkor a vektorok lineárisan függetlenek.*

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy valamely $c_1, c_2, \dots, c_k$ konstansokra

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

Szorozzuk be az egyenlőség mindkét oldalát skalárisan a $\mathbf{v}_i$ vektorral. Mivel $i \neq j$ esetén $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$, ezért azt kapjuk, hogy

$$c_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = 0,$$

amiből $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i \neq 0$ miatt következik, hogy $c_i = 0$. Mivel ez minden $i = 1, 2, \dots, k$ indexre igaz, ezért a vektorok valóban lineárisan függetlenek. $\square$

► Ha e vektorok az $\mathbb{R}^n$ tér vektorai, akkor felvetődik a kérdés, hogy mi k és n viszonya. Később látni fogjuk, hogy $k \leq n$.

► Később azt is meg fogjuk mutatni, hogy bármely független vektorrendszerből kiindulva megkonstruálható egy vele azonos elemszámú ortogonális vektorrendszer. A műszaki alkalmazásokban is gyakori, hogy egy meglévő alapvektorrendszerből egy ortogonális, majd abból egy ortonormált vektorrendszert konstruálunk.

Korrelációs együttható* Az n -dimenziós térben szerzett friss szemléletünk segítségünkre legyen egy fontos fogalom megértésében.

Adva van két adatsor: $x_1, x_2, \dots, x_n$ és $y_1, y_2, \dots, y_n$. Átlagukat jelölje $\bar{x}$, illetve $\bar{y}$, azaz

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}.$$

Az r -rel jelölt ún. *korrelációs együttható* azt méri, hogy a két adatsor közti lineáris függvénykapcsolat milyen erős. Az erre használt képlet a következő:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}.$$

Vajon hogyan méri r a lineáris függvénykapcsolat erősségét?

Tegyük fel, hogy a két adatsor közt fennáll az $y_i = cx_i + d$ lineáris függvénykapcsolat minden $i = 1, 2, \dots, n$ indexre valamely c, d konstansokkal. Ha mindkét adatsorból levonjuk az átlagukat (más szóval a két adatsort *normáljuk*), akkor az így kapott

$$a_i = x_i - \bar{x}, \quad b_i = y_i - \bar{y} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

adatsorokra igaz a $b_i = ca_i$ összefüggés. Ugyanis

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n cx_i + d \right) = c\bar{x} + d,$$

amiből $b_i = y_i - \bar{y} = cx_i + d - c\bar{x} - d = c(x_i - \bar{x}) = ca_i$.

Tehát az $y_i = cx_i + d$ lineáris függvénykapcsolat pontosan akkor áll fenn, ha a normált adatsorokra $b_i = ca_i$. Az adatsorokat n -dimenziós vektorokba foglalva ez azzal ekvivalens, hogy $\mathbf{b} = c\mathbf{a}$, azaz ha a vektorok kollineárisak. A korrelációs együttható nem más, mint a két utóbbi vektor szögének koszinusza, ugyanis

$$\begin{aligned}\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle} &= \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = r.\end{aligned}$$

Valóban, a két vektor szögének koszinusza pontosan akkor 1, ha a vektorok szöge 0, és akkor -1 , ha a szög π . A korreláció tehát -1 és 1 közt változik, és abszolút értéke annál kisebb, minél nagyobb az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok hajlásszöge, azaz minél kevésbé kollineárisak, azaz minél kevésbé erős a két számsorozat közti lineáris függvénykapcsolat.

Ha $r = 0$, akkor $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ merőlegesek, ekkor lineáris függvénykapcsolat nincs az eredeti két mennyiség közt (más kapcsolat még lehet, tehát nem feltétlenül független a két adatsor egymástól valószínűség-számítási értelemben). A fogalom mélyebb megértése a valószínűség-számítás ismeretét is megkívánja, ezzel mi itt nem foglalkozunk.

Bitvektorok, kódvektorok* A modern számítógépek memóriájában vagy háttértárolóin az adatok tárolásának legkisebb egysége a bit. Egy bittel két állapot tárolható, melyeket a 0 és 1 számokkal jelölünk, de amelyek több mindent is reprezentálhatnak: hamis/igaz, nem/igen, ki/be,... A biteket a hardver lehetőségei és a feladat igényei szerint csoportokba, sorozatokba, vektorokba gyűjtik, melyekkel különféle műveletek végezhetők. Ezek attól is függenek, hogy a bitvektorok milyen adatokat kódolnak. E műveletek közül minket azok fognak érdekelni, melyek algebrailag a korábban megismert vektorműveletekre hasonlítanak.

Az egyszerűség kedvéért a bitvektorokat gyakran a biteket jelölő számjegyek egyszerű egymás mellé írásával adjuk meg, pl. 01110101 a $(0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1)$ vektort jelöli.

A modern számítástechnika számtalan kódot használ, mely bitvektorokkal (is) leírható. Például karakterek kódolására használatos a 7-dimenziós bitvektorokból álló ASCII-kód, a decimális számok kódolására a 4-dimenziós bitvektorokból álló BCD-kód.

Az emberek által is elolvasható kódok gyakran decimális számokból állnak. Például az emberek azonosítására használt *személyi szám* egy olyan vektornak tekinthető, amelynek koordinátái a 10-elemű $\{0, 1, \dots, 9\}$ halmazból valók.

A kódoláshoz mi a továbbiakban mindig egy rögzített, véges kód-

Bit: az angol *binary digit* kifejezésből képzett szó, ami magyarul bináris, azaz kettes számrendszerbeli számot jelent. A szoftver (software) szót is megalkotó John W. Tukey ötlete.

Az ASCII-kód eredendően az angol nyelvű szövegek kódolására tervezett 8-hosszú bináris kód (azaz 1 bájt). Az angol nyelv betűi, írásjelei, és néhány számítógépet vezérlő karakter mindegyikének egy olyan vektor felel meg, melynek első koordinátája 0. Tehát a lehetséges 256 darab 8-hosszú vektorból 128 tartozik a kódba. Pl. a „z” betű ASCII-kódja 0111010, decimális alakban 122.

A BCD-kód decimális számok egyik szokásos kódolása, mely a szám kettes számrendszerbe való átírása helyett a számjegyenként való kódolást választja. Több változata is van, a legegyszerűbbikben minden számjegynek 4-4 bit felel meg, így a 16 lehetséges 4-hosszú kódszó helyett csak tízet használ: a 0, 1, ..., 9 jegyek kódja rendre 0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111, 1000, 1001. Így az 561 BCD-kódja három kódvektorból áll: 0101 0110 0001. A kettes számrendszerbeli alak 1000110001.

ábécét használunk, amelynek betűi általában a 0-tól $n - 1$ -ig terjedő egészek lesznek. Az ábécé „betűiből”, azaz elemeiből képzett vektorokat *kódvektoroknak* vagy *kódszavaknak* nevezzük. A bitvektorok is kódvektorok, ahol a kódábécé a kételemű $\{0, 1\}$ halmaz.

A kódvektorok koordinátáinak számát, vagyis a kódvektor dimenzióját a kód *hosszának* nevezzük. Ez természetesen nem analóg fogalom a vektor abszolút értékével.

A személyi szám tehát egy 10-elemű ábécéből képzett 11-hosszú kódszó. Nem minden 11-hosszú decimális vektor lehet személyi szám, mert az utolsó koordináta egy ellenőrző jegy, vagyis a személyi szám, mint kód, matematikailag a 11-hosszú kódvektorok halmazának egy részhalmazaként írható le. Ezért általában a kódábécé betűiből képzett vektorok részhalmazait fogjuk kódnak nevezni.

1.58. DEFINÍCIÓ (KÓD). A kód egy közös ábécéből képzett azonos hosszúságú kódszavak egy halmaza. Kódolás során a kódolandó objektumokhoz kódszavakat rendelünk, dekódolás az ellenkező irányú folyamat.

Főként az információelméletben változó hosszú kódszavak is tartozhatnak egy kódhoz. Mi ilyenekkel nem fogunk foglalkozni, de megemlítjük, hogy a karakterek manapság elterjedt UTF-8 kódolása is ilyen, amelyben egy karakterkódja 8-, 16-, 24- vagy 32-bites lehet.

Vektorműveletek $\mathbb{Z}_m^n$ -ben* A $\mathbb{Z}_m$ -re vonatkozó ismereteket a függelékben részletezzük. Az 1.44. definíció szerint $\mathbb{Z}_m^n$ a $\mathbb{Z}_m$ -beli n -hosszú vektorokból áll. E vektorok összeadása, skalárral való szorzása és skaláris szorzása a $\mathbb{Z}_m$ -beli műveletekkel az $\mathbb{R}^n$ -beli vektorműveletekhez hasonlóan végezhető el. Ennek következtében a lineáris kombináció, lineáris függetlenség itt is ugyanúgy definiálható és használható.

1.59. PÉLDA (LINEÁRIS KOMBINÁCIÓ $\mathbb{Z}_2^n$ -BEN). Számítsuk ki a $\mathbb{Z}_2^5$ -beli

$$\mathbf{a} = (1, 0, 0, 1, 1, 0), \mathbf{b} = (0, 1, 0, 1, 0, 1) \text{ és } \mathbf{c} = (0, 0, 1, 0, 1, 1)$$

vektorok összes lineáris kombinációját $\mathbb{Z}_2$ -beli együtthatókkal, valamint a $\mathbb{Z}_3^3$ -beli

$$\mathbf{u} = (1, 1, 0) \text{ és } \mathbf{v} = (0, 1, 1)$$

vektorok összes lineáris kombinációját $\mathbb{Z}_3$ -beli együtthatókkal.

MEGOLDÁS. A lehetséges $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$ alakú lineáris kombinációk száma 8, hisz $x, y, z \in \mathbb{Z}_2$, vagyis mindegyik együtthatónak 0 vagy 1 az értéke, és ez $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ eshetőség. Az $x = y = z = 0$ eset a zérusvektort adja. Ha x, y és z közül csak egyikük értéke 1, a többi 0, akkor a három adott vektort kapjuk vissza. Azok az esetek maradnak, amikor legalább két vektort kell összeadni. Például $1\mathbf{a} + 1\mathbf{b} + 0\mathbf{c} = (1, 0, 0, 1, 1, 0) + (0, 1, 0, 1, 0, 1) = (1, 1, 0, 0, 1, 1)$. Az

összes lineáris kombináció az 1.1. (a) táblázatban látható.

Az $x\mathbf{u} + y\mathbf{v}$ alakú lineáris kombinációk száma 9, mivel $x, y \in \mathbb{Z}_3$, azaz lehetséges értékük 0, 1 vagy 2, ami $3 \cdot 3 = 9$ lehetőséget ad. Példaként egy lineáris kombináció, a többi az 1.1. (b) táblázatban látható: $2\mathbf{u} + 1\mathbf{v} = 2(1, 1, 0) + (0, 1, 1) = (2, 2, 0) + (0, 1, 1) = (2, 0, 1)$. $\square$

E paragrafus további részében a vektorműveletekre két alkalmazást mutatunk.

1.60. PÉLDA (ONE TIME PAD – A TÖKÉLETES TITKOSÍTÁS). Az üzenet küldése előtt a küldő és a fogadó megegyezik egy titkos kulcsban, mely egy olyan hosszú véletlen bitvektor, mint amilyen az üzenet legfőljebb lehet. Legyen a kulcs $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_2^m$. Legyen a titkosítandó üzenet $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}_2^m$. A titkosítás során a küldő kiszámolja az $\mathbf{u} + \mathbf{k}$ vektort, és azt küldi a fogadónak, aki a titkosított üzenethez maga is hozzáadja a kulcsot, és mivel bármely $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_2^m$ vektorra $\mathbf{x} + \mathbf{x} = \mathbf{0}$, ezért $(\mathbf{u} + \mathbf{k}) + \mathbf{k} = \mathbf{u} + (\mathbf{k} + \mathbf{k}) = \mathbf{u}$, vagyis a fogadó így valóban megfejti az üzenetet.

► Példaként egy üzenet, egy kulcs és a kettő összege – a titkosított üzenet – a tömör bitvektor-jelöléssel

az üzenet: $\mathbf{u} = 010101010000111111111111$
a kulcs: $\mathbf{k} = 0010111000101101001011010$
a titkosított üzenet: $\mathbf{u} + \mathbf{k} = 011110010101010110100101$

► A bitvektorok ilyen módon való összeadása megegyezik a kizáró vagy nevű logikai művelettel, melyet a XOR szóval (exclusive or), vagy a $\oplus$ műveleti jellel is szoktak jelölni (ld. ??). példa).

► E titkosítás hátránya, hogy a $\mathbf{k}$ kulcs csak egyszer használható fel, mert két különböző $\mathbf{u}_1 + \mathbf{k}$ és $\mathbf{u}_2 + \mathbf{k}$ üzenetet elcsípve és összeadva az $(\mathbf{u}_1 + \mathbf{k}) + (\mathbf{u}_2 + \mathbf{k}) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ vektorban már nem szerepel $\mathbf{k}$, és ez statisztikai módszerekkel már megfejthető.

► Bizonyítható, hogy e kód megfejthetetlen, ha $\mathbf{k}$ valóban véletlen bitsorozat, és csak egyetlen üzenet titkosítására használjuk.

A kódelmélet egyik célja, hogy redundáns információ hozzáadásával elérje az elküldött üzenet megérkezését zajos, veszteséges csatornán keresztül is. Ennek két gyakran alkalmazott típusa a hibajelző és a hibajavító kód: az előbbi az átvitel során bekövetkezett bizonyos hibákat jelez a fogadó számára, míg az utóbbi bizonyos hibák kijavítását is lehetővé teszi. Az 1.59. példában előállított lineáris kombinációk hibajelző kódok, egyikük hibajavító is. Az 1.25. feladat arra kérdez, hogy milyen hibát jeleznek, illetve javítanak.

Az elektronikus számítógépek adatkezelésének egyik első ötlete az adattárolás vagy továbbítás biztonságosabbá tételére a paritásbit. Ha egy n -hosszú $\mathbf{b}$ bitvektorhoz még egy bitet csatolunk, melynek értéke

$x \ y \ z$	$x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$	$x \ y$	$x\mathbf{u} + y\mathbf{v}$
0 0 0	(0, 0, 0, 0, 0, 0)	0 0	(0, 0, 0)
1 0 0	(1, 0, 0, 1, 1, 0)	1 0	(1, 1, 0)
0 1 0	(0, 1, 0, 1, 0, 1)	2 0	(2, 2, 0)
0 0 1	(0, 0, 1, 0, 1, 1)	0 1	(0, 1, 1)
1 1 0	(1, 1, 0, 0, 1, 1)	1 1	(1, 2, 1)
1 0 1	(1, 0, 1, 1, 0, 1)	2 1	(2, 0, 1)
0 1 1	(0, 1, 1, 1, 1, 0)	0 2	(0, 2, 2)
1 1 1	(1, 1, 1, 0, 0, 0)	1 2	(1, 0, 2)
		2 2	(2, 1, 2)

(a)

(b)

1.1. táblázat: Vektorok lineáris kombinációi (a) $\mathbb{Z}_2$ és (b) $\mathbb{Z}_3$ fölött.

1, ha $\mathbf{b}$ -ben páratlan sok bit egyenlő 1-gyel, egyébként 0, akkor olyan $(n+1)$ -hosszú vektort kapunk, melyben páros sok 1-esnek kell lenni. Ha egy bit elromlik, páratlan sok 1-es lesz, tehát ez az $(n+1)$ -edik bit hibajelző. Ezt nevezzük *paritásbitnek*.

1.61. PÉLDA (PARITÁSBIT). Írjuk fel a paritásbitet skaláris szorzatként!

MEGOLDÁS. A paritásbit $\mathbb{Z}_2$ fölött $\mathbf{1} \cdot \mathbf{b}$ alakba írható, ahol $\mathbf{1}$ a $\mathbf{b}$ -vel azonos hosszúságú és csupa 1-esből álló vektor. $\square$

A paritásbit általánosítása az ún. *ellenőrző összeg*, melyre számtalan példát találunk a mindennapi életben.

A magyar személyi szám a személyre jellemző 10 jegyből, és az azt követő e ellenőrző összegből áll. Az e kiszámítási képlete

$$\mathbb{Z}_{11}\text{-ben számolva: } e = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10) \cdot \mathbf{u},$$

ahol $\mathbf{u}$ a személyi szám első 10 jegye. A személyi szám 8-10-edik jegyét úgy választják ki, hogy $e \neq 10$, így az ellenőrző összeg mindig egyjegyű.

A termékek EAN-kódja (European Article Number) egy 13-jegyű, a termék azonosítására szolgáló kód, melyhez egy vonalkód is tartozik. A 13-dik jegy az ellenőrző összeg. Ha az EAN kódvektort $\mathbf{v}$ jelöli, akkor fönn kell állni

$$\mathbb{Z}_{10}\text{-ben számolva az } (1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1) \cdot \mathbf{v} = 0$$

összefüggésnek (1.45. ábra).

ISBN 978-963-545-398-6



9 789635 453986 >

1.45. ábra: Egy könyv ISBN-13 kódja, ami egyúttal az EAN kódja is. Az EAN-kódhoz tartozik egy vonalkód is. 2007 óta a könyvek ISBN-száma (ISBN-13) megegyezik EAN-kódjával (korábban az ISBN-szám 10-jegyű volt).

Feladatok

1.25.▲ Az 1.1. (a) táblázatban egy 8 bináris kódszóból, a (b) táblázatban egy 9 ternér kódszóból álló kód kódszavai vannak felsorolva. Határozzuk meg, hogy e kódok hány hiba jelzésére és hány hiba javítására képesek! (Az, hogy egy kód képes k hibát jelezni, azt jelenti, hogy ha legfőljebb k jelet megváltoztatunk bármelyik kódszóban, akkor egy kódba nem tartozó vektort kapunk. Az, hogy a kód képes d hibát javítani, azt jelenti, hogy bármely kódszóban legfőljebb d jelet megváltoztatva olyan vektort kapunk, amelyből más kódszó nem kapható meg legfőljebb d jel megváltoz-

tatásával.)

1.26. Mely bitvektorokra igaz, hogy minden bitjük a vektor maradék részének paritásbitje.

1.27.▲ ELLENŐRZŐ ÖSSZEG Csak az ellenőrző összeget nézve érvényes személyi szám-e a 26012310018, és érvényes EAN-kód-e a 9998887776665?

1.28.▲ 2007 előtt a személyi számhoz hasonló módon számolták ki a könyvek ún. ISBN-10 kódjának ellenőrző jegyét, ami ha 10 volt, X-et írtak (római 10-es). A képlet:

$$\mathbb{Z}_{11}\text{-ben számolva: } (10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1) \cdot \mathbf{u} = 0$$

ahol $\mathbf{u}$ a könyv ISBN-kódja, aminek utolsó jegye az ellenőrző összeg. Egy könyv kódjának első 9 jegye 963076198. Mi e könyv teljes ISBN-száma?

Megoldások

1.1. „Ha az irányított szakasz a hal, akkor a vektor a halraj.”

1.2. a) Igaz. b) Hamis, például ha $O = A$, akkor $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{AB}$, míg ha $O = B$, akkor $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{BA}$. c) Igaz, az eredmény O választásától függetlenül $\vec{BA}$. d) Igaz. e) Hamis, lehetnek ellenkező irányúak is. f) Igaz.

1.9. $\vec{P_1P_2} + \vec{P_2P_3} + \vec{P_3P_4} + \dots + \vec{P_{n-1}P_n} = \vec{P_1P_n}$, $\vec{P_1P_2} + \vec{P_2P_3} + \vec{P_3P_4} + \dots + \vec{P_{n-1}P_n} + \vec{P_nP_1} = \vec{0}$.

1.12. a) Hamis, lehet, hogy a három közül két vektor egy egyenesbe esik, és a harmadik független tőlük: ez a harmadik nem állítható elő a másik kettő lineáris kombinációjaként. b) Igaz, például $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ ilyenek. De bármely három egy síkba eső nemzérus-vektor ilyen, ha közülük bármely kettő lineárisan független. c) Igaz, például ha $\mathbf{b} = \mathbf{c}$ és $\mathbf{a}$ független $\mathbf{b}$ -től. d) Hamis, például ha $\mathbf{b} = \mathbf{c}$ és $\mathbf{a}$ független $\mathbf{b}$ -től, akkor $\mathbf{a}$ nem fejezhető ki $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ lineáris kombinációjaként.

1.13. Ha $|\vec{AP}| : |\vec{PB}| = m : n$, akkor $|\vec{AB}| : |\vec{PB}| = (m+n) : n$, amiből $\vec{BP} = \frac{n}{m+n}\vec{BA}$. De $\vec{OP} = \vec{OB} + \vec{BP}$ és $\vec{BA} = \vec{OA} - \vec{OB}$, így $\vec{OP} = \vec{OB} + \frac{n}{m+n}(\vec{OA} - \vec{OB})$, amiből azonnal következik a bizonyítandó formula. A felezőpontot az $m = n = 1$ esetben kapjuk, és ekkor valóban $\vec{OP} = \frac{1}{2}\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB}$.

1.15. Legyenek $\mathbf{a}$ és $\mathbf{c}$ független vektorok, $\mathbf{b}$ pedig tetszőleges. Ekkor az $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ szorzat párhuzamos a $\mathbf{c}$ vektorral, míg az $\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ szorzat az $\mathbf{a}$ vektorral, tehát $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \neq \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$.

1.16. Jelölje P szomszédait Q, R és S .

a) Ekkor két lapátló-vektor például a $\vec{PQ} + \vec{PR}$ és a $\vec{PR} + \vec{PS}$ vektorok. Ezek szorzata:

$$\begin{aligned} (\vec{PQ} + \vec{PR}) \cdot (\vec{PR} + \vec{PS}) &= \\ \vec{PQ} \cdot \vec{PR} + \vec{PQ} \cdot \vec{PS} + \vec{PR} \cdot \vec{PR} + \vec{PR} \cdot \vec{PS} &= \\ \vec{PR} \cdot \vec{PR} &= 1. \end{aligned}$$

Kihasználtuk, hogy merőleges vektorok skaláris szorzata 0.

b) Hasonlóan kapható meg egy lapátló-vektor és a testátló-vektor $(\vec{PQ} + \vec{PR} + \vec{PS})$ szorzata:

$$(\vec{PQ} + \vec{PR}) \cdot (\vec{PQ} + \vec{PR} + \vec{PS}) = \vec{PQ} \cdot \vec{PQ} + \vec{PR} \cdot \vec{PR} = 2.$$

c) A Q, R és S csúcsok olyan sorrendben legyenek megválasztva, hogy $\vec{PQ}$, $\vec{PR}$ és $\vec{PS}$ ebben a sorrendben

jobbrendszert alkosson. Ki fogjuk használni, hogy ekkor $\vec{PQ} \times \vec{PR} = \vec{PS}$. Egy élvektor és egy szomszédos lapátló-vektor vektori szorzata:

$$\begin{aligned} \vec{PQ} \times (\vec{PQ} + \vec{PR}) &= \\ \vec{PQ} \times \vec{PQ} + \vec{PQ} \times \vec{PR} &= \\ \vec{0} + \vec{PS} &= \vec{PS}, \end{aligned}$$

vagyis a szorzat a két vektor lapjára merőleges élvektor.

d) Legyen a lapvektor a $\vec{PR}$, a nem szomszédos lapátló-vektor $\vec{PR} + \vec{PS}$. Ezek szorzata:

$$\begin{aligned} \vec{PQ} \times (\vec{PR} + \vec{PS}) &= \\ \vec{PQ} \times \vec{PR} + \vec{PQ} \times \vec{PS} &= \vec{PS} - \vec{PR}, \end{aligned}$$

ami a lapátló-vektor síkjának másik lapátló-vektora.

1.18. Három különböző dolog (így három vektor is) hatféléképp rakható sorba. Ha az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok jobbrendszert alkotnak, akkor ugyancsak jobbrendszert alkotnak a $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{c}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektorhármassok is. A további három esetben, azaz a $\mathbf{c}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}$, valamint a $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$ és az $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{b}$ hármassok esetén balrendszert kapunk. A „bizonyítás” egyelőre a kezünk három ujjáról való leolvasással történik. Később matematikai bizonyítást is adunk, lásd ???.

1.19. Egyik lehetőség a megoldásra: $||\mathbf{b}||\mathbf{a}|| = ||\mathbf{a}||\mathbf{b}|| = ||\mathbf{a}||\mathbf{b}||$, ezért a parallelogramma-módszert egy rombuszra kell alkalmazni. Egy másik lehetőség: az $\mathbf{a}/||\mathbf{a}||$ és $\mathbf{b}/||\mathbf{b}||$ két egységvektor, így összegük szögfelező, mivel a parallelogramma-módszer rombuszt ad. E vektor $||\mathbf{a}||\mathbf{b}||$ -szereze ugyanúgy szögfelező, és épp ez a feladatbeli vektor.

1.21. Milyen irányokat cserél föl a tükör, és milyeneket nem? Nem cseréli föl a síkkal párhuzamos irányokat: minden, a tükör síkjával párhuzamos vektor tükörképe önmagá. Tehát, ha a tükör előtt állunk, és a tükör is függőleges, akkor a „fölfelé” irány a tükörképen sem változik. Viszont a tükör fölcseréli a tükörrre merőleges irányokat. Mielőtt megnézzük, hogy hogy cserélődik fel a jobb és a bal, definiálnunk kell mi az, hogy jobb és bal? Egy lehetőség a definiálásra: ha értelmezve van egy viszonyítási rendszerben (pl. az emberi testhez képest, vagy a mozgó járműben, ...) a *föl* és az *előre*, melyek egymásra merőleges irányok, akkor a *jobb* irány az *előre* $\times$ *föl* vektori szorzattal definiálható. Ennek képe a tükörben viszont $(-előre) \times föl = -jobb$, ami épp a *bal*.

1.22. A feladat szerint $c \in R_a$ pontosan akkor teljesül, ha $a R c$. Tegyük fel, hogy R_a és R_b nem diszjunkt. Ha c egy közös elemük, akkor c az a -val és b -vel is relációban van,

azaz $a R c$ és $b R c$, de a szimmetria miatt $c R b$, a tranzitivitás miatt pedig az $a R c$ és $c R b$ relációkból következik az $a R b$. Ekkor pedig a tranzitivitást használva bármely x elemere $b R x$ -ből következik $a R x$, azaz $x \in R_b$ -ből következik $x \in R_a$, azaz $R_b \subseteq R_a$. Az a és b szerepét megfordítva kapjuk $R_a \subseteq R_b$, tehát $R_a = R_b$. Végül be kell még látnunk, hogy e halmazok uniója kiadja az egész X halmazt. Ez igaz, hisz minden a elemre $a R a$, azaz $a \in R_a$.

1.25. ...

1.26. Minden olyan vektor, amelyben páros sok 1-es van, eleget tesz a feladatbeli feltételnek, a többi nem.

1.27. Ez a személyi szám érvényes, mert

$$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10) \cdot (2, 6, 0, 1, 2, 3, 1, 0, 0, 1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 9 \cdot 0 + 10 \cdot 1 \bmod 11 = 63 \bmod 11 = 8.$$

Ez az EAN-kód nem érvényes, mert

$$(1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1) \cdot (9, 9, 9, 8, 8, 8, 7, 7, 7, 6, 6, 6, 5) = (9 + 3 \cdot 9 + 9 + 3 \cdot 8 + 8 + 3 \cdot 8 + 7 + 3 \cdot 7 + 7 + 3 \cdot 6 + 6 + 3 \cdot 6 + 5) \bmod 10 = 183 \bmod 10 = 3 \neq 0.$$

1.28. Mivel $(10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1) \cdot (9, 6, 3, 0, 7, 6, 1, 9, 8, e) = 10 \cdot 9 + 9 \cdot 6 + 8 \cdot 3 + 6 \cdot 7 + 5 \cdot 6 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 9 + 2 \cdot 8 + e = 287 + e \bmod 11 = 1 + e = 0$, ezért $e = 10$, azaz a teljes kód 963076198X (a könyvre olvashatóbban írva 963-07-6198-X).

2

Lineáris egyenletrendszerek és megoldásuk

A lineáris egyenletrendszerek geometriai megközelítése után megismerjük a megoldás technikáit, végül a megoldások halmazának szerkezetét!

Egyenes és sík egyenletei

A sík és a tér pontjainak és vektorainak koordinátáit használva lehetővé válik geometriai alakzatok algebrai vizsgálata, vagy algebrai problémák jobb megértése geometriai szemléltetéssel.

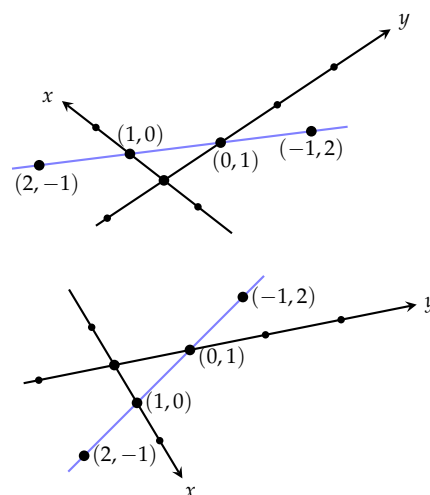
Alakzatok és egyenletek

2.1. PÉLDA (AZ $x + y = 1$ EGYENLET). Egy tetszőleges síkbeli koordinátarendszerben ábrázoljunk néhány pontot, melynek koordinátái kielégítik az $x + y = 1$ egyenletet. Fogalmazzunk meg sejtést az egyenlet összes megoldásának megfelelő pontok halmazáról!

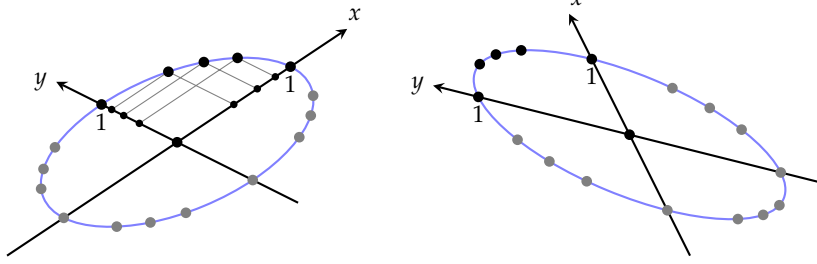
MEGOLDÁS. A 2.1 ábrán két különböző koordinátarendszert ábrázolunk, és azokban a fenti egyenletet kielégítő pontok közül néhányat. Ennek alapján azt sejtethetjük, hogy az $x + y = 1$ egyenletet kielégítő pontok egy egyenesen vannak. Ezt az egyenest is berajzoltuk. A sejtést hamarosan bizonyítjuk. $\square$

2.2. PÉLDA (AZ $x^2 + y^2 = 1$ EGYENLET). Egy tetszőleges síkbeli koordinátarendszerben ábrázoljunk néhány pontot, melynek koordinátái kielégítik az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletet. Fogalmazzunk meg sejtést az egyenlet összes megoldásának megfelelő pontok halmazáról!

MEGOLDÁS. Az alábbi ábrán néhány koordinátarendszert ábrázoltunk, az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletet kielégítő néhány ponttal. A ??? fejezetben visszatérünk e feladatra, és meg fogjuk mutatni, hogy az egyenletet kielégítő pontok egy ellipszisen vannak. $\square$



2.1. ábra: Az $x + y = 1$ egyenletet kielégítő néhány pont két különböző koordinátarendszerben.



2.2. ábra: Az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletet kielégítő (x, y) pontok halmaza két koordináta-rendszerben.

2.3. DEFINÍCIÓ (ALAKZAT (IMPLICIT) EGYENLETRENDSZERE). Egy geometriai alakzat egy adott koordináta-rendszerre vonatkozó (implicit) egyenletrendszerén olyan egyenletrendszert értünk, melynek egyszerre minden egyenletét kielégítik a térnek az alakzathoz tartozó pontjai, de más pontok nem. Ha az egyenletrendszer egy egyenletről áll, az alakzat egyenletéről beszélünk. Az egyenletet vektoregyenletnek nevezzük, ha nem a pontok koordinátáira, hanem a pontokba mutató vektorokra írjuk fel. Egy alakzat m egyenletről álló egyenletrendszerének, illetve m vektoregyenletről álló egyenletrendszerének általános alakja

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad \text{illetve} \quad \begin{cases} F_1(\mathbf{r}) = 0 \\ F_2(\mathbf{r}) = 0 \\ \vdots \\ F_m(\mathbf{r}) = 0 \end{cases}$$

ahol $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ a tér egy pontja, és $\mathbf{r}$ az oda mutató vektor.

Középiskolai tanulmányainkban több példát láttunk alakzat egyenletére, például tudjuk, hogy a síkban a koordinátatengelyek szögét felező egyenes egyenlete $y = x$, azaz $x - y = 0$. Ortonormált bázist választva az origó közepű egységsugarú kör egyenlete $x^2 + y^2 = 1$. Az előző két egyenlet mindegyikéből kifejezhető a két koordináta egy paraméter bevezetésével. Az $y = x$ egyenlet ekvivalens az

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= t \end{aligned}$$

egyenletrendszerrel, míg az $x^2 + y^2 = 1$ egyenlet ekvivalens az

$$\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t \end{aligned}$$

egyenletrendszerrel. Mindkettő átírható vektoralakba is. Használjuk a oszlopvektoros jelölést:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{illetve} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi) \subseteq \mathbb{R}.$$

A latin eredetű *implicit* szó jelentése *nem kifejtett, rejtett*, ami az összeköt, össze-függ, összekever, körülcsavar jelentésű *implico* (implicō) szó származéka. E szó a matematikában az implicit alak, implicit függvény, stb. kifejezésekben arra utal, hogy valamely fontosnak tekintett mennyiség, változó, stb. nincs kifejezve a képletből. Ugyanennek a szónak a származéka a magába foglal, maga után von jelentésű *implikál* szó is, mely a matematikai logika „ha... akkor...” szerkezetű műveletével, az *implikációval* is kapcsolatban van.

E két példa vezet a következő általános fogalomhoz.

2.4. DEFINÍCIÓ (ALAKZAT (EXPLICIT) EGYENLETRENDSZERE). Egy geometriai alakzat egy adott koordináta-rendszerre vonatkozó (explicit) egyenletrendszerén olyan egyenletrendszert értünk, melyben az egyenletek bal oldalán a pontok koordinátáit megadó változók, jobb oldalán adott paraméterek függvényei szerepelnek. Általános alakja

$$\begin{aligned}x_1 &= f_1(t_1, t_2, \dots, t_k) \\x_2 &= f_2(t_1, t_2, \dots, t_k) \\&\vdots \\x_n &= f_n(t_1, t_2, \dots, t_k)\end{aligned}$$

ahol $t_1 \in I_1, t_2 \in I_2, \dots, t_n \in I_n$, és $I_1, \dots, I_n \subseteq \mathbb{R}$. Az ilyen egyenletrendszer egyetlen vektoregyenletté fogható össze:

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}(t_1, t_2, \dots, t_k),$$

ahol $\mathbf{f}$ egy $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény. Az explicit egyenletrendszereket szokás paraméteres egyenletrendszernek is nevezni.

A következő paragrafusokban egyenes és sík különböző egyenleteit, egyenletrendszereit fogjuk áttekinteni példákat adva a fenti két általános definícióra.

Síkbeli egyenes egyenletei Tekintsük a sík egy tetszőleges e egyenesét, és jelöljük ki a síkban az O origót. Legyen a nemzérus $\mathbf{v}$ egy tetszőleges, az egyenessel párhuzamos vektor. Az ilyen vektorokat az egyenes *irányvektorának* nevezzük. Mutasson $\mathbf{r}_0$ az egyenes egy tetszőleges, kijelölt pontjába. Világos, hogy az e egyenes bármely pontjába mutató $\mathbf{r}$ vektor előáll $\mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ alakban, ahol t valós szám. Másrészt ha Q a sík egy tetszőleges, nem az e egyenesre eső pontja, akkor az $\overrightarrow{OQ} - \mathbf{r}_0$ vektor nem párhuzamos $\mathbf{v}$ -vel, tehát nem is konstansszoros, azaz $\overrightarrow{OQ} - \mathbf{r}_0 \neq t\mathbf{v}$ semmilyen t -re sem, így $\overrightarrow{OQ}$ nem áll elő $\mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ alakban. Tehát az e tetszőleges pontjába mutató $\mathbf{r}$ vektor felírható $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ alakban, és ez csak e pontjaira igaz.

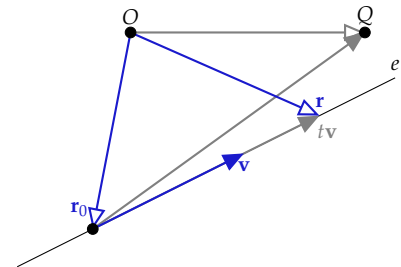
2.5. ÁLLÍTÁS (SÍKBELI EGYENES EXPLICIT VEKTOREGYENLETE). A sík minden egyenesének van

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

alakú vektoregyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy egyenes egyenlete, ahol $\mathbf{v}$ az egyenes egy irányvektora, és $\mathbf{r}_0$ az egyenes egy tetszőleges, rögzített pontjába mutató vektor.

A síkbeli egyenesre merőleges vektorokat az egyenes *normálvektora*

A latin eredetű *explicit* szó jelentése *ki-fejtett, világosan kimondott*, ami a kibont, szétterít, kiszabadít, átvitt értelemben tisztáz, kifejti, megfejt jelentésű *explico* (explicō) szó származéka. E szó a matematikában az explicit alak, explicit függvény, stb. kifejezésekben arra utal, hogy valamely fontosnak tekintett mennyiség, változó, stb. ki van fejezve a többi segítségével.



2.3. ábra: Egyenes explicit vektoregyenlete: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$.

rainak nevezzük. Legyen $\mathbf{n}$ egy tetszőleges, a $\mathbf{v}$ -re merőleges vektor, azaz legyen $\mathbf{n}$ az e egy normálvektora. Azt, hogy $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ az e tetszőleges pontjába mutató $\mathbf{r}$ vektorra párhuzamos $\mathbf{v}$ -vel, úgy is kifejezhetjük, hogy $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ merőleges $\mathbf{n}$ -re. A merőlegesség pedig kifejezhető a skaláris szorzattal. Így az egyenes egy implicit vektoregyenletéhez jutunk: $\mathbf{r}$ pontosan akkor mutat az e egy pontjába, ha $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$. Ez az egyenlet átrendezés után $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0$ alakra, majd a $C = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0$ jelölés bevezetésével $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = C$ alakra hozható.

2.6. ÁLLÍTÁS (SÍKBELI EGYENES IMPLICIT VEKTOREGYENLETE). *A sík minden egyenesének van*

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0, \quad (2.2)$$

és vele ekvivalens

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = C \quad (2.3)$$

alakú vektoregyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy egyenes egyenlete, ahol $\mathbf{n}$ az egyenes egy normálvektora, $\mathbf{r}_0$ az egyenes egy tetszőleges, de rögzített pontjába mutató vektor és C konstans.

A (2.2) alakú egyenlet könnyen átírható (2.3) alakúvá a $C = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0$ jelöléssel. Az átalakítás fordított irányban is egyszerű, hisz ha $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = C$, akkor találunk olyan $\mathbf{r}_0$ vektort, melyre $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0 = C$. Ez azért igaz, mert ha tetszőleges $\mathbf{n}$ -re nem merőleges $\mathbf{v}$ vektorra $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = D$, akkor $\mathbf{n} \cdot (\frac{C}{D}\mathbf{v}) = C$, így az $\mathbf{r}_0 = \frac{C}{D}\mathbf{v}$ megfelel.

Az $\mathbf{r} = (x, y)$, $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0)$ és $\mathbf{v} = (a, b)$ jelöléseket használva az explicit vektoregyenlet azonnal egyenletrendszerre alakítható.

2.7. ÁLLÍTÁS (SÍKBELI EGYENES EXPLICIT EGYENLETRENDSZERE). *A sík minden egyenesének van*

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \end{aligned} \quad (2.4)$$

alakú egyenletrendszere, ahol (a, b) az egyenes egy irányvektora, és (x_0, y_0) az egyenes egy tetszőleges rögzített pontja.

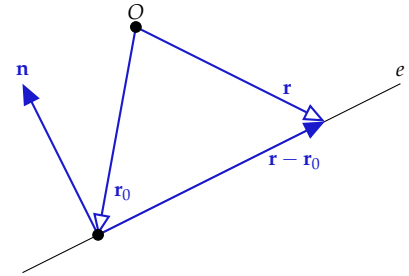
A következőkben megmutatjuk, hogy az explicit egyenletrendszerből a t paraméter kiküszöbölhető, és így egy implicit egyenletet kapunk.

2.8. ÁLLÍTÁS (SÍKBELI EGYENES (IMPLICIT) EGYENLETE). *A sík minden egyenesének van*

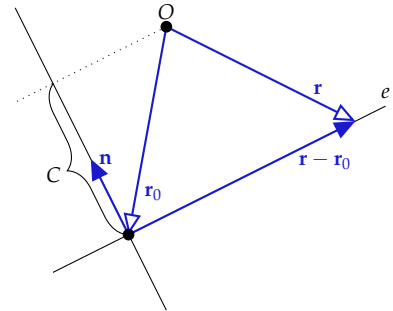
$$Ax + By = C \quad (2.5)$$

alakú egyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy egyenes egyenlete, ahol A és B közül nem mindkettő nulla, és $(-B, A)$ az egyenes egy irányvektora.

► A bizonyítás előtt érdemes megjegyezni, hogy az egyenes fenti imp-



2.4. ábra: Síkbeli egyenes implicit vektoregyenlete: $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$.



2.5. ábra: Síkbeli egyenes (implicit) vektoregyenlete: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = C$. Ha $\mathbf{n}$ egységvektor, akkor az $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = C$ geometriai jelentése az, hogy az egyenes bármely pontjába mutató vektornak az $\mathbf{n}$ egyenesére eső merőleges vetülete C . Ez az ábra is ezt az esetet szemlélteti.

licit egyenlete az egyenes $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$ alakú vektoregyenletéből azonnal megkapható, de ezt egyelőre csak *ortonormált* koordinátarendszerben tudjuk könnyen igazolni. Legyen $(A, B) = (b, -a)$. Ez az egyenes egy normálvektora, hisz merőleges az (a, b) irányvektorra. Továbbá $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (x - x_0, y - y_0)$, ezért a vektoregyenlet

$$(A, B) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0$$

alakú lesz, ami a skaláris szorzást elvégezve az $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ formulát adja. Ha a koordinátarendszer nem ortonormált, az (A, B) vektor nem szükségképpen normálvektor, és a skaláris szorzás képlete is más, de azért a (2.5) egyenletről mondott állítás igaz. Erre olyan bizonyítást adunk, mely az explicit egyenletrendszerre épül.

BIZONYÍTÁS. Ha a vagy b valamelyike 0, akkor a két egyenlet egyike felesleges, például ha $a = 0$, akkor az egyenletrendszer alakja

$$\begin{aligned} x &= x_0 \\ y &= y_0 + bt \end{aligned}$$

ami ekvivalens az $x = x_0$ egyenlettel, hisz az $y = y_0 + bt$ semmi mást nem mond, mint hogy y egy valós szám. Mivel $(a, b) \neq (0, 0)$, ezért csak az az eset marad, amikor a és b egyike sem 0. Ekkor mindkét egyenletből kifejezhető t , és a két értéket egyenlővé téve kapjuk, hogy

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b},$$

azaz

$$bx - ay = bx_0 - ay_0, \text{ vagy } b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0.$$

Legyen a továbbiakban $A = b$ és $B = -a$. Ekkor a fenti egyenlet $Ax + By = Ax_0 + By_0$ lesz. Az egyenlet jobb oldalán lévő konstanst C -vel jelölve az egyenes egyenlete $Ax + By = C$ alakot ölt. Másrészt könnyen látható, hogy minden ilyen alakú egyenlet egy egyenes egyenlete, mert ekvivalens egy egyenes paraméteres egyenletrendszerével. Nevezetesen az $Ax + By = C$ egyenlet visszaírható $Ax + By = Ax_0 + By_0$ alakba, hisz az $Ax_0 + By_0 = C$ egyenletben $A \neq 0$ esetén egy tetszőleges y_0 -t választva, egyértelműen kifejezhető x_0 . (A $B \neq 0$ eset analóg.) Ennek alapján felírható a (2.4) egyenletrendszer. $\square$

2.9. PÉLDA (SÍKBELI EGYENES EGYENLETEI). Írjuk fel annak az egyenesnek összes egyenletét vagy egyenletrendszerét, mely átmegy a $(2, 3)$ és az $(1, 1)$ koordinátájú pontokon.

MEGOLDÁS. Ha egy egyenes átmegy e két ponton, akkor irányvektora a két pontba mutató vektorok különbsége, azaz $\mathbf{v} = (2, 3) - (1, 1) = (1, 2)$. Legyen $\mathbf{r}_0 = (1, 1)$, de az $\mathbf{r}_0 = (2, 3)$ választás is megfelelő.

Az irányvektor segítségével kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Explicit (paraméteres) egyenletrendszer alakban:

$$\begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 1 + 2t. \end{aligned}$$

Az irányvektorból $(A, B) = (2, -1)$, innen az egyenes egyenlete $2x - y = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1$, azaz

$$2x - y = 1.$$

Ortonormált koordináta-rendszerben a

$$(2, -1) \cdot (x - 1, y - 1) = 0$$

egyenletet kapjuk vektoregyenletként, mely kiszámolva az előző egyenletet adja. $\square$

Síkbeli pont egyenletei Tekintsük a síkbeli (x_0, y_0) pontot. Ennek explicit egyenletrendszere, illetve vektoregyenlete:

$$\begin{aligned} x &= x_0 \\ y &= y_0 \end{aligned} \quad \text{illetve} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

Ez annyira nyilvánvaló, semmitmondó, hogy a gyakorlatban nem is szoktunk pont egyenleteiről beszélni, e könyvbe is csak didaktikai okokból került, ugyanis a matematikai fogalmak megértésében gyakran nagy segítségünkre van a szélső, extrémális esetek megértése, vizsgálata.

Mivel itt az alakzat csak egyetlen pontból áll, nincs szükség paraméterre, így ez az alak egyúttal implicitnek is tekinthető. Ekkor úgy tekintünk ugyanerre az egyenletrendszerre, mint két egyenes egyenletére, melyek normálvektorai $(1, 0)$ illetve $(0, 1)$, és amelyek metszéspontja a keresett pont:

$$\begin{aligned} x &= x_0 \\ y &= y_0 \end{aligned} \quad \text{vagy minden együtthatót kiírva} \quad \begin{aligned} x + 0y &= x_0 \\ 0x + y &= y_0 \end{aligned}$$

Ez adja az ötletet, egy pont implicit egyenletrendszerének tekinthetnénk két egyenletet, melyek egymást az adott pontban metsző egy-egy egyenes egyenletei. Tehát mondhatjuk, hogy a pont implicit egyenletrendszerének általános alakja:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y &= C_1 \\ A_2x + B_2y &= C_2 \end{aligned}$$

Az azonban nem igaz, hogy minden ilyen alakú egyenletrendszer egy pont egyenletrendszere, mert két egyenes metszheti egymást egyetlen pontban, de lehet, hogy nincs közös pontjuk, és lehet végtelen sok közös pontjuk is. Épp ennek a kérdésnek a részletes vizsgálata lesz a 2. fejezet témája.

A 3-dimenziós tér síkjainak egyenletei Tudjuk, hogy két lineárisan független $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektor bármely lineáris kombinációja a két vektor által meghatározott síkban van, továbbá hogy e sík bármely vektora előáll a megadott két vektor lineáris kombinációjaként (ld. 1.8. és 1.11. tételek). Ebből azonnal adódik, hogy a sík egy rögzített pontjába mutató $\mathbf{r}_0$ vektor segítségével a sík bármelyik pontjába mutató $\mathbf{r}$ vektor felírható $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ alakban.

2.10. ÁLLÍTÁS (SÍK EXPLICIT VEKTOREGYENLETE). *Bármely síknak van*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v} \quad (2.6)$$

alakú vektoregyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy sík egyenlete, ahol $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ a sík két lineárisan független vektora és $\mathbf{r}_0$ a sík egy tetszőleges, de rögzített pontjába mutató vektor.

Hasonlóan a síkbeli egyeneshez, a térbeli sík egyenletéből is kiküszöbölhető a paraméter a merőlegesség felhasználásával. Az 1.17. feladat állítása szerint, ha egy vektor merőleges két tetszőleges vektor mindegyikére, akkor merőleges azok lineáris kombinációjára is. Mivel az $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ merőleges $\mathbf{u}$ -ra és $\mathbf{v}$ -re is, ezért merőleges azok minden lineáris kombinációjára is, azaz az $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ vektorra is. Ez az észrevétel az alapja az alábbi tételnek.

2.11. ÁLLÍTÁS (SÍK IMPLICIT VEKTOREGYENLETE). *A háromdimenziós térben minden síknak van*

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0, \quad (2.7)$$

és a vele ekvivalens

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = C \quad (2.8)$$

alakú vektoregyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy sík egyenlete, ahol $\mathbf{n}$ a sík egy normálvektora, $\mathbf{r}_0$ a sík egy tetszőleges, de rögzített pontjába mutató vektor és C konstans.

Az állítás igazolása analóg a síkbeli egyenesnél leírtakkal (ld. 2.2. feladat).

Az $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ és $\mathbf{u} = (a_1, b_1, c_1)$ $\mathbf{v} = (a_2, b_2, c_2)$ jelöléseket használva az explicit vektoregyenlet azonnal egyenletrendszerré alakítható.

2.12. ÁLLÍTÁS (SÍK EXPLICIT EGYENLETRENDSZERE). *A háromdimenziós tér minden síkjának van*

$$\begin{aligned}x &= x_0 + a_1s + a_2t \\y &= y_0 + b_1s + b_2t \\z &= z_0 + c_1s + c_2t\end{aligned}\tag{2.9}$$

alakú egyenletrendszer, ahol (a_1, b_1, c_1) és (a_2, b_2, c_2) a sík két lineárisan független vektora, és (x_0, y_0, z_0) a sík egy tetszőleges rögzített pontja.

Az explicit egyenletrendszerből kiküszöbölhető a két paraméter, ha például két egyenletből kifejezzük a paramétereket, és behelyettesítjük a harmadik egyenletbe. Így egy implicit egyenletet kapunk. A számításokat nem részletezzük, az eredmény

$$(b_1c_2 - b_2c_1)(x - x_0) + (c_1a_2 - c_2a_1)(y - y_0) + (a_1b_2 - a_2b_1)(z - z_0) = 0.$$

Az $(A, B, C) = (b_1c_2 - b_2c_1, c_1a_2 - c_2a_1, a_1b_2 - a_2b_1)$ jelöléssel a sík egyenlete $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ alakra hozható, vagy ami vele ekvivalens, $Ax + By + Cz = D$ alakra.

2.13. ÁLLÍTÁS (SÍK IMPLICIT EGYENLETE). *A háromdimenziós térben minden síknak van*

$$Ax + By + Cz = D\tag{2.10}$$

alakú egyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy sík egyenlete, ha A, B és C legalább egyike nem nulla, és $D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$, ahol (x_0, y_0, z_0) a sík valamely pontja.

A sík fenti egyenlete a sík $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$ alakú vektoregyenletéből is megkapható, de ezt egyelőre csak *ortonormált* koordináta-rendszerben tudjuk könnyen igazolni. Mivel

$$(A, B, C) = (b_1c_2 - b_2c_1, c_1a_2 - c_2a_1, a_1b_2 - a_2b_1),\tag{2.11}$$

ami épp az $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ vektorral egyenlő, ezért (A, B, C) merőleges a sík minden vektorára, vagyis a sík egy normálvektora. Az $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$ egyenletet koordináták alakba átírva kapjuk, hogy

$$(A, B, C) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$

2.14. PÉLDA (SÍK EGYENLETEI). *Írjuk fel annak a síknak az egyenleteit, mely átmegy a $(0, -1, 2)$, a $(-1, 0, 7)$ és a $(2, 1, 4)$ pontokon.*

MEGOLDÁS. A három pontba mutató vektorok különbségei a síkkal párhuzamos vektorok, így azokkal felírható a sík mindegyik egyenlete. Két vektor a lehetséges háromból:

$$\mathbf{u} = (2, 1, 4) - (0, -1, 2) = (2, 2, 2), \text{ és}$$

$$\mathbf{v} = (-1, 0, 7) - (0, -1, 2) = (-1, 1, 5).$$

Ezek alapján például az $\mathbf{r}_0 = (0, -1, 2)$ választás mellett a sík explicit vektoregyenlete

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix},$$

explicit egyenletrendszere

$$\begin{aligned} x &= 2s - t \\ y &= -1 + 2s + t \\ z &= 2 + 2s + 5t. \end{aligned}$$

Mivel a (2.11) képlet szerint $(A, B, C) = (8, -12, 4)$, ezért a sík implicit egyenlete $8(x - 0) - 12(y - (-1)) + 4(z - 2) = 0$, azaz 4-gyel való osztás és átrendezés után

$$2x - 3y + z = 5.$$

Így ortonormált koordinátarendszerben a

$$(2, -3, 1) \cdot (x, y, z) = 5, \text{ vagy } (2, -3, 1) \cdot (x, y + 1, z - 2) = 0$$

a sík implicit vektoregyenlete. □

Térbeli egyenes egyenletei Mindaz, amit a síkbeli egyenes explicit vektoregyenletéről mondtunk a 61. oldalon, lényegében változtatás nélkül megismételhető. Jelöljük ki a térben az origót, és tekintsük azt az e egyenest, melynek irányvektora $\mathbf{v}$, és amely átmegy azon a ponton, melybe az $\mathbf{r}_0$ vektor mutat. Világos, hogy az e egyenes bármely pontjába mutató $\mathbf{r}$ vektor előáll $\mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ alakban, ahol t valós szám, és az e -re nem illeszkedő pontokra ez nem áll. Így igaz a következő állítás:

2.15. ÁLLÍTÁS (TÉRBELI EGYENES EXPLICIT VEKTOREGYENLETE). *A háromdimenziós tér minden egyenesének van*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} \tag{2.12}$$

alakú vektoregyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy egyenes egyenlete, ahol $\mathbf{v}$ az egyenes egy irányvektora, és $\mathbf{r}_0$ egy tetszőleges, de rögzített pontjába mutató vektor.

Itt nem tudjuk a paramétert egyetlen vektoregyenletben kiküszöbölni, de az explicit egyenletrendszerré való átírás megy, ha felvesszünk egy koordinátarendszert, melyben $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ és $\mathbf{v} = (a, b, c)$:

2.16. ÁLLÍTÁS (TÉRBELI EGYENES EXPLICIT EGYENLETRENDSZERE). *A tér minden egyenesének van*

$$\begin{aligned}x &= x_0 + at \\y &= y_0 + bt \\z &= z_0 + ct\end{aligned}\tag{2.13}$$

alakú egyenletrendszere, ahol (a, b, c) az egyenes egy irányvektora, és (x_0, y_0, z_0) az egyenes egy tetszőleges rögzített pontja.

A fenti explicit (paraméteres) egyenletrendszerből a paraméter ki-küszöbölhető. Ha az a , b és c számok valamelyike 0, akkor a neki megfelelő fenti egyenletben már nem szerepel t , akkor nincs is mit tennünk. Ha legalább két egyenletben szerepel t , akkor mindegyikből kifejezve t -t, majd egyenlővé téve őket paraméter nélküli egyenleteket kapunk. Például ha a , b és c egyike sem 0, akkor

$$t = \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

A t -t elhagyva valójában három egyenletet kaptunk:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}, \quad \frac{x - x_0}{a} = \frac{z - z_0}{c}, \quad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Annak az egyenletnek nincs értelme, amelyikben a nevező 0, de a nevezőkkel való bővítés után kapott

$$b(x - x_0) = a(y - y_0), \quad c(x - x_0) = a(z - z_0), \quad c(y - y_0) = b(z - z_0)$$

egyenletek mindegyike korrekt akkor is, ha 0 valamelyik együttható. E három egyenlet három sík egyenlete, melyek metszésvonala az adott egyenes. Kivétel az az eset, amikor az egyik egyenlet $0 = 0$ alakú, ilyenkor a másik két egyenlet egy-egy sík egyenlete. Egy egyenes azonban megadható két sík metszésvonalaként, így adódik a következő tétel, melynek bizonyítását feladatként tűzzük ki (ld. 2.3. feladat):

2.17. ÁLLÍTÁS (TÉRBELI EGYENES IMPLICIT EGYENLETRENDSZERE). *A tér minden egyenesének van két egyenletből álló egyenletrendszere. Ha az egyenes egy irányvektora (a, b, c) , akkor a két egyenlet az alábbi három közül bármelyik kettő, amelyik nem $0 = 0$ alakú:*

$$\begin{aligned}b(x - x_0) &= a(y - y_0) \\c(x - x_0) &= a(z - z_0) \\c(y - y_0) &= b(z - z_0)\end{aligned}\tag{2.14}$$

► A (2.14) egyenletrendszer a következő alakba is átírható:

$$\begin{aligned} bx - ay &= bx_0 - ay_0 \\ cx - az &= cx_0 - az_0 \\ cy - bz &= cy_0 - bz_0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Erről könnyen leolvasható, hogy ha pl. $a \neq 0$, akkor a második egyenlet b -szereséből kivonva az első egyenlet c -szeresét, a harmadik egyenlet a -szorosát kapjuk. Hamarosan látni fogjuk, hogy eszerint a harmadik egyenlet elhagyható, anélkül, hogy az egyenletrendszert kielégítő pontok halmaza megváltozna.

2.18. PÉLDA (TÉRBELI EGYENES EGYENLETRENDSZEREI). Írjuk fel annak az egyenesnek az explicit és implicit egyenletrendszerét, mely átmegy az $A(1, 3, 4)$ és $a) a B(3, 3, 1)$, illetve $b) a C(5, 5, -2)$ ponton.

MEGOLDÁS. *a)* Az A és B pontot összekötő vektor $= (2, 0, -3)$. Innen az egyenes explicit egyenletrendszere

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2t \\ y &= 3 \\ z &= 4 - 3t, \end{aligned}$$

melynek második egyenlete, $y = 3$, egy xz -síkkal párhuzamos sík egyenlete. A másik két egyenletből kiküszöbölve t -t, egy másik sík egyenletét kapjuk. Az egyenes ennek a két síknak a metszészvonala. Az első egyenletből $t = \frac{1}{2}(x - 1)$, a harmadikból $t = -\frac{1}{3}(z - 4)$ ezért $3x + 2z = 11$. Így az előző egyeneshez a következő implicit (paraméter nélküli) egyenletrendszer tartozik, mely két sík egyenletéből áll:

$$\begin{aligned} 3x + 2z &= 11 \\ y &= 3. \end{aligned}$$

b) Az A és C pontot összekötő vektor itt $= (4, 2, -6)$. Innen az egyenes explicit egyenletrendszere

$$\begin{aligned} x &= 1 + 4t \\ y &= 3 + 2t \\ z &= 4 - 6t. \end{aligned}$$

Mindegyik egyenletből kifejezve t -t kapjuk, hogy

$$t = \frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{-6}.$$

Ez a következő három sík egyenletét adja:

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{2}, \quad \frac{z-4}{-6} = \frac{x-1}{4}, \quad \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{-6}.$$

Átrendezve

$$\begin{aligned}x - 2y &= -5 \\3x + 2z &= 11 \\3y + z &= 13.\end{aligned}$$

E három sík közül bármely kettő meghatározza az adott egyenest, így e három egyenlet közül bármely kettő az egyenes (implicit) egyenletrendszere. $\square$

Térbeli pont egyenletei Csak a teljesség és az analógiák megértése céljából vizsgáljuk meg a tér egy pontjának lehetséges egyenleteit. A térbeli (x_0, y_0, z_0) pont explicit egyenletrendszere, illetve vektoregyenlete:

$$\begin{aligned}x &= x_0 \\y &= y_0, \text{ illetve } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}. \\z &= z_0\end{aligned}$$

Az explicit egyenletrendszert implicit alaknak is tekinthetjük, ekkor három – a koordinátasíkokkal párhuzamos – sík egyenletét látjuk, melyek egyetlen közös pontban metszik egymást.

$$\begin{aligned}x &= x_0 & x + 0y + 0z &= x_0 \\y &= y_0, \text{ vagy minden együtthatót kiírva} & 0x + y + 0z &= y_0. \\z &= z_0 & 0x + 0y + z &= z_0\end{aligned}$$

A síkbeli esethez hasonlóan egy pont implicit egyenletrendszerének tekinthetnénk három egyenletet, melyek egymást az adott pontban metsző egy-egy sík egyenletei. Tehát mondhatjuk, hogy a pont implicit egyenletrendszerének általános alakja:

$$\begin{aligned}A_1x + B_1y + C_1z &= D_1 \\A_2x + B_2y + C_2z &= D_2 \\A_3x + B_3y + C_3z &= D_3.\end{aligned}$$

Itt is óvatosnak kell lennünk, mert nem minden ilyen alakú egyenletrendszer egy pont egyenletrendszere. Például három sík metszheti egymást egy egyenesben, de párhuzamos síkok esetén az is előfordulhat, hogy nincs közös pontjuk. E kérdés vizsgálatára visszatérünk a 2. fejezetben.

Egyenletek $\mathbb{R}^n$ -ben Az egyenes és a sík explicit vektoregyenlete $\mathbb{R}^n$ -ben is ugyanolyan alakú, mint $\mathbb{R}^3$ -ben, azaz az egyenes explicit vektoregyenlete $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$, a síké $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ alakú.

2.19. PÉLDA (EGYENES ÉS SÍK EXPLICIT VEKTOREGYENLETE). Írjuk fel az $A(1,1,1,1)$, $B(2,3,2,4)$ pontokon átmenő egyenes, valamint az A , B és $C(3,2,1,0)$ pontokon átmenő sík explicit vektoregyenletét!

MEGOLDÁS. Az $\overrightarrow{AB} = (1,2,1,3)$ és az $\overrightarrow{AC} = (2,1,0,-1)$ vektorok segítségével azonnal fölírható az egyenes és a sík egyenlete is:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \text{ illetve } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad \square$$

A síkbeli egyenes és a térbeli sík vektoregyenlete $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = c$ alakú. E két esetben ez az egyenlet az n -dimenziós tér egy $n-1$ -dimenziós alakzatának egyenlete ($n = 2, 3$). A későbbiekben látni fogjuk, hogy ez általában is igaz, de e pillanatban még a dimenzió fogalmát sem definiáltuk, ezért egyelőre csak nevet adunk ennek az alakzatnak. Az $\mathbb{R}^n$ térben $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ esetén az $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = c$ egyenletet kielégítő $\mathbf{r}$ vektorok végpontjainak halmazát *hipersíknak* nevezzük. Koordinátás alakban

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = c,$$

ahol $\mathbf{n} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ a hipersík *normálvektora* (ld. 2.1. feladat), $\mathbf{r} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ a hipersík egy tetszőleges pontjába mutató vektor.

A következő táblázat összefoglalja geometriai alakzatoknak a továbbiak szempontjából legfontosabb egyenleteit.

		Explicit vektoregyenlet	Implicit egyenlet(rendszer)
Síkban	egyenes	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$	$Ax + By = C$
	pont	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$	$A_1x + B_1y = C_1$ $A_2x + B_2y = C_2$
Térben	sík	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$	$Ax + By + Cz = D$
	egyenes	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$	$A_1x + B_1y + C_1z = D_1$ $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$
	pont	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$	$A_1x + B_1y + C_1z = D_1$ $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$ $A_3x + B_3y + C_3z = D_3$
$\mathbb{R}^n$ -ben	hipersík	???	$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$
	sík	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$	???
	egyenes	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$	???
	pont	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$	???

2.1. táblázat: Geometriai alakzatok egyenletei: az $\mathbb{R}^n$ -beli egyenletek közül többet még nem ismerünk, ezeket három kérdőjel jelzi, de arra biztatjuk az Olvasót, hogy az analógia fonalán haladva fogalmazza meg sejtéseit.

Feladatok

2.1. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}^n$ egy tetszőleges $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = c$ egyenletű hipersíkjának bármely két pontját összekötő vektor merőleges $\mathbf{n}$ -re.

2.2. Igazoljuk a sík implicit vektoregyenletére vonatkozó 2.11. állítást.

2.3. Igazoljuk a térbeli egyenes implicit egyenletrendszerére vonatkozó 2.17. állítást!

A lineáris egyenletrendszer és két modellje

E szakasz témája a lineáris egyenletrendszerek fogalma és a lineáris egyenletrendszer megoldásának két geometriai interpretációja: hipersíkok metszetének meghatározása és egy vektor lineáris kombinációként való előállítása. A számítások kényelmes könyvelésére bevezetjük a mátrix fogalmát.

Lineáris egyenlet és egyenletrendszer Az előző rész végén láttuk, hogy a síkbeli egyenes egyenletének általános alakja $Ax + By = C$, ahol A , B és C konstansok. Ennek általánosításaként jutunk a lineáris egyenlet fogalmához.¹

2.20. DEFINÍCIÓ (LINEÁRIS EGYENLET). Az

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \quad (2.16)$$

alakra hozható egyenletet az $x_1, x_2, \dots, x_n$ ismeretlenekben lineáris egyenletnek nevezzük, ahol $a_1, a_2, \dots$ és a_n , valamint b konstansok. Az $a_1, a_2, \dots$ és a_n konstansokat az egyenlet együtthatóinak, b -t az egyenlet konstans tagjának nevezzük.

¹ *Lineáris*: a vonalas jelentésű latin lineāris szóból ered, mely a lenfonal, horgászszinór, átvitt értelemben vonal, határvonal jelentésű linea (línea) szó származéka. A matematikában egyenessel kapcsolatba hozható, illetve elsőfokú értelemben szokás használni.

► Például az alábbi egyenletek lineárisak:

$$x - 2y = 1, \quad \frac{1}{2}x_1 - \sqrt{2}x_2 + (5 - \pi)x_3 = 0, \quad a \cos 0.87 - 0.15c = 0.23.$$

► A következő egyenletek nem lineárisak az x , y és z ismeretlenekben:

$$xz - y = 0, \quad x + 2y = 3^z, \quad x \sin z + y \cos z + y = z^2,$$

viszont mindegyikük lineáris az x és y ismeretlenekben, hisz ekkor z paraméter, melynek bármely értéke mellett lineárisak az egyenletek.

► Az

$$x = y, \quad x = 3 - y + 2z$$

egyenletek az x , y és z ismeretlenekben lineárisak, mert azonos átalakítással a definícióbeli alakra hozhatók:

$$x - y + 0z = 0, \quad x + y - 2z = 3.$$

► Másrészt az

$$\frac{x}{z} + \frac{y}{z} + 2 = 0$$

egyenlet nem lineáris, mert a z -vel való beszorzás nem azonos átalakítás, tehát a lineáris $x + y + 2z = 0$ egyenlettel nem ekvivalens.

Lineáris egyenletek egy véges halmazát *lineáris egyenletrendszernek* nevezzük. Az egyenletrendszer ismeretlenek mindazok az ismeretlenek, amelyek legalább egy egyenletben szerepelnek. Ha egy ismeretlen egy egyenletben nem szerepel, akkor úgy tekintjük, hogy 0 az együtthatója. A jobb áttekinthetőség kedvéért az egyenletrendszereket úgy írjuk fel, hogy az ismeretlenek mindegyik egyenletben ugyanabban a sorrendben szerepeljenek. Egy egyenletrendszer egy egyenletből is állhat.

► Lineáris egyenletrendszerek például a következők:

$$\begin{array}{rclcl} 3x - y = 2 & x_1 & = 3 & & \\ -x + 2y = 6 & x_2 & = 1 & 2x - 3y + z - w = 6. & (2.17) \\ x + y = 6 & x_3 & = 4 & & \end{array}$$

► Elképzelhető, hogy egy egyenletrendszer azonos átalakítása közben olyan egyenletet kapunk, melyben minden együttható 0, azaz amely $0 = b$ alakú. Az is lehet, hogy egy egyenletrendszerben egyes együtthatók paraméterek. Ilyenkor tudnunk kell, mely változók az ismeretlenek, melyek a paraméterek. Így a következő egyenletrendszerek is lineárisak az x és y ismeretlenekben:

$$\begin{array}{rclcl} ax + y = 2a & 3x - y = 0 & x + y = 1 & & \\ x - \frac{1}{a}y = 0 & -x + 2y = 0 & 0 = 2. & & (2.18) \\ & 0 = 0 & & & \end{array}$$

Mindezek után fölírjuk az egyenletrendszer általános alakját:

2.21. DEFINÍCIÓ (LINEÁRIS EGYENLETRENDSZER). Lineáris egyenletrendszeren ugyanazokban a változóknak lineáris egyenletek egy véges halmazát értjük. Általános alakja m egyenlet és n ismeretlen esetén

$$\begin{array}{rclcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 & & \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 & & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m, & & \end{array} \quad (2.19)$$

ahol $x_1, x_2, \dots, x_n$ az ismeretlenek, a_{ij} az i -edik egyenletben az x_j ismeretlen együtthatóját jelöli, és b_i az i -edik egyenlet konstans tagja. Ha mindegyik egyenlet konstans tagja 0, a lineáris egyenletrendszer homogén, ha csak egy is különbözik 0-tól, inhomogén.

► A (2.17) egyenletrendszerei mind inhomogének, míg a (2.18) középső egyenletrendszere homogén.

2.22. DEFINÍCIÓ (LINEÁRIS EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSA). Azt mondjuk, hogy a rendezett $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ szám- n -es megoldása a (2.19) egyenletrendszernek, ha megoldása minden egyenletnek, azaz ha minden egyenletet kielégít az $x_1 = u_1, x_2 = u_2, \dots, x_n = u_n$ helyettesítéssel. Ha a szám- n -est vektornak tekintjük, megoldásvektorról beszélünk. Az összes megoldás halmazát az egyenletrendszer megoldáshalmazának nevezzük. Egy egyenletrendszert konzisztensnek (vagy megoldhatónak) nevezzük, ha megoldáshalmaza nem üres. Ellenkező esetben az egyenletrendszer inkonzisztens (nem megoldható).

► A (2.17) egyenletrendszerének egy-egy megoldása: $(x, y) = (2, 4)$, $(x_1, x_2, x_3) = (3, 1, 4)$, $(x, y, z, w) = (2, 0, 2, 0)$. A harmadik egyenletrendszernek több megoldása is van, például egy másik megoldás az $(x, y, z, w) = (3, 0, 0, 0)$.

► A (2.18) első egyenletrendszerének megoldása $(x, y) = (1, a)$, a második $(x, y) = (0, 0)$. A harmadik egyenletrendszernek nincs megoldása, hisz nincs olyan x és y érték, melyre fennállna a $0x + 0y = 2$ egyenlőség.

► Általában, a

$$0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = 0$$

egyenletnek minden szám- n -es megoldása, míg a

$$0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = b, \quad (b \neq 0)$$

egyenletnek egyetlen megoldása sincs.

Ekvivalens lineáris egyenletrendszerek Tekintsük az alábbi három egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rcl} x + y = 3 & x + y = 3 & x = 2 \\ x + 2y = 4 & y = 1 & y = 1 \end{array} \quad (2.20)$$

Mindháromnak $(x, y) = (2, 1)$ az egyetlen megoldása.

2.23. DEFINÍCIÓ (EKVIVALENS EGYENLETRENDSZEREK). Azonos ismeretlenekkel felírt két egyenletrendszert ekvivalensnek nevezzük, ha megoldásaik halmaza azonos.

2.24. TÉTEL (EKVIVALENS ÁTALAKÍTÁSOK). Az alábbi transzformációk minden egyenletrendszert ekvivalens egyenletrendszerbe visznek át:

1. két egyenlet felcserélése;
2. egy egyenlet nem nulla számmal való szorzása;
3. egy egyenlet konstansszorosának egy másikhoz adása.

Ezen kívül

4. egy $0 = 0$ alakú egyenlet elhagyása
is ekvivalens átalakítás, de ez egyel csökkenti az egyenletek számát.

Ha egy egyenletrendszer több egyenletből áll, mint ahány ismeretlene van, *túlhatalozottnak* nevezzük, míg ha kevesebb egyenletből áll, *alulhatalozottnak*. E fogalmak időnként félrevezető megfogalmazásokhoz és téves következtetésekre vezetnek, ha az az elképzelés alakul ki, hogy a túlhatalozottság azt jelenti: az egyenletek (a feltételek) már „túl sokan” vannak ahhoz, hogy akár csak egy szám- n -es is kielégítse. Később látni fogjuk, hogy ezzel ellentétben nem a „túl sok” egyenlet, hanem az egymásnak ellentmondó egyenletek okozzák az inkonzisztenciát. Hasonlóképp az alulhatalozottság nem jelenti azt, hogy szükségképpen több megoldás is van. Alulhatalozott egyenletrendszer is lehet inkonzisztens. Egyedül annyi mondható: alulhatalozott egyenletrendszernek nem lehet csak egyetlen megoldása.

BIZONYÍTÁS. Az első kettő és a negyedik átalakítás nyilvánvalóan nem változtatja meg a megoldások halmazát (a negyedikkel kapcsolatban lásd a 2.11. feladatot). Nézzük a harmadik átalakítást. Tekintsük az *eredeti* egyenletrendszer egy megoldását, és azt az *új* egyenletrendszert, melyet az i -edik egyenlet c -szeresének a j -edikhez adásával kapunk. Világos, az átalakítás előtt is elvégezhetjük a behelyettesítést, akkor viszont egy kielégített egyenlőség konstansszorosát adjuk egy másikhoz, ami így ugyancsak ki lesz elégítve. Tehát az eredeti egyenletrendszer minden megoldása az újnak is megoldása. Másrészt viszont az új egyenletrendszer minden megoldása az eredetinek is megoldása, hisz az visszakapható az újból az i -edik egyenlet $-c$ -szeresének a j -edikhez adásával. Vagyis a két megoldáshalmaz megegyezik. Tehát ez az átalakítás is ekvivalens. $\square$

Mátrixok Az egyenletrendszer megoldásában az ekvivalens átalakítások során a műveleteket csak az egyenletrendszer együtthatóival és konstans tagjaival végezzük, ezért az egyenletrendszer megoldásainak lépéseit elég csak egy olyan táblázaton elvégezni, mely az együtthatókat és a konstansokat tartalmazza. Az ilyen számtáblázatokat *mátrixoknak* nevezzük, ezekkel később külön fejezetben foglalkozunk. A mátrixba írt számokat a *mátrix elemeinek* nevezzük.

A mátrix méretének jellemzéséhez mindig előbb a sorok, majd az oszlopok számát adjuk meg, tehát egy $m \times n$ -es mátrixnak m sora és n oszlopa van. Egy ilyen mátrix általános alakja:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

A mátrixokat² általában nagy betűvel jelöljük, e könyvben – követve a műszaki nyelv szokásait – félkövér nagy betűvel. A matematikában elterjedt az a szokás, hogy a mátrixot jelölő nagy betűvel azonos kis betűk jelölik a mátrix elemeit, tehát $\mathbf{A}$ elemei $a_{11}, a_{12}, \dots$. A fenti mátrixra szokás még a tömörebb

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n} \text{ vagy egyszerűen az } \mathbf{A} = [a_{ij}]$$

jelölést használni. Sokan használnak szögletes helyett kerek zárójelet a mátrixok jelölésére.

Mindig az első index jelöli a sor, a második az oszlop számát, tehát a_{23} a 2-dik sor 3-adik oszlop kereszteződésében álló elemet jelöli. Időnként, a félreérthetőség elkerülésére a_{ij} helyett $a_{i,j}$ -t írunk (pl. $a_{n,n-1}$).

A mátrix *főátlójába* azok az elemek tartoznak, amelyek ugyanannyi-adik sorban vannak, mint ahányadik oszlopban, azaz a például a fenti mátrixban a főátló elemei $a_{11}, a_{22}, \dots$

Mátrix: a latin mater (māter) (*anya, szülőanya, forrás*) szó származéka a matrix (mātrīx), melynek jelentése az európai nyelvekben a következő változásokon ment át: *anyaállat, vemhes állat, anyaméh, bezárt hely, ahonnan valami kifejlődik, bezárt, körülzárt dolgok sokasága, tömbje*. Jelentése az élettanban méh, a geológiában finomszemcsés kő, melybe fossziliák, kristályok, drágakövek vannak zárva, az anatómiában a körmöt, fogat kialakító szövet.

² A programnyelvekben – ellentétben a matematikával – a kisbetűvel/nagybetűvel való jelölésnek nincs a mátrixot az elemétől való megkülönböztető szerepe. A legtöbb magasszintű nyelvben az $\mathbf{A}$ -val jelölt mátrix (informatikai szóhasználatnál *tömb*) i -edik sorának j -edik elemét $\mathbf{A}[i,j]$ vagy $\mathbf{A}(i,j)$ jelöli. Az alacsonyabb szintű C-típusú nyelvekben nincs 2-dimenziós tömb, a mátrixot egy olyan 1-dimenziós tömb reprezentálja, melynek minden eleme 1-dimenziós tömb, így $\mathbf{A}[i]$ az i -edik sort, $\mathbf{A}[i][j]$ az i -edik sor j -edik elemét jelöli. A mátrix alapú nyelvekben egy mátrix egy sorvektora vagy oszlopvektora könnyen kiemelhető, pl. az $\mathbf{A}$ mátrix 2. sorát az $\mathbf{A}(2,:)$, 3. oszlopát a $\mathbf{A}(:,3)$ kóddal érhetjük el. Sok programnyelvben a tömbök elemeit nem 1-től, hanem 0-tól indexelik, ilyen például a C és a Python is.

A vektorokat is szokás *mátrix jelöléssel, mátrix alakban*, azaz egy 1-soros vagy 1-oszlopos mátrixszal leírni – ahogy azt az első fejezetben mi is tettük. Az $n \times 1$ -es mátrixot *oszlopvektornak* vagy *oszlopmátrixnak*, az $1 \times n$ -es mátrixot *sorvektornak* vagy *sormátrixnak* is szokás nevezni. Annak a kérdésnek az eldöntése, hogy egy n -dimenziós vektort sor- vagy oszlopvektorral reprezentáljunk, döntés (szokás, ízlés) kérdése. Manapság jobban el van terjedve a vektorok oszlopvektoros jelölése, ezért e könyvben alapértelmezésként mi is ezt a jelölést fogjuk használni, de egyes témáknál a másik használatát is bemutatjuk. Így tehát az $(1, 2)$ vektornak megfelelő sorvektor és oszlopvektor alakja

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ illetve } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

amelyek közül, ha mást nem mondunk, az utóbbit fogjuk a vektor mátrixos jelöléseként használni.

Általában $\mathbf{a}_j$ jelöli az $\mathbf{A}$ mátrixból kiválasztható j -edik oszlopvektort, ha csak oszlopvektorokkal dolgozunk. Ha sor- és oszlopvektorok is együtt szerepelnek, az i -edik sorvektort $\mathbf{a}_{i*}$, a j -edik oszlopvektort $\mathbf{a}_{*j}$ jelöli összhangban az elemek indexelésével. Ehhez hasonló jelölést használnak a mátrix alapú nyelvek is (ld. a széljegyzetet). Az $\mathbf{A}$ mátrix i -edik sorára az $(\mathbf{A})_{i*}$, j -edik oszlopára az $(\mathbf{A})_{*j}$, elemére az $(\mathbf{A})_{ij}$ jelölés is használatos.

2.25. PÉLDA (MÁTRIXOK ÉS ELEMEIK). Ha

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}, \text{ akkor } c_{23} = 7, \mathbf{c}_2 = \mathbf{c}_{*2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_{2*} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Egyenletrendszer mátrixa és bővített mátrixa Az egyenletrendszer *együtthatómátrixa* az egyenletek együtthatóit, míg *bővített mátrixa*, vagy egyszerűen csak *mátrixa* az egyenletek együtthatóit és konstans tagjait tartalmazza. Az áttekinthetőség érdekében a bővített mátrixban egy függőleges vonallal választhatjuk el az együtthatókat a konstans tagoktól.

A 2.21. definícióbeli általános alak együttható- és bővített mátrixa:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right].$$

A gyakorlatban nagy méretű egyenletrendszereket, s így nagy méretű mátrixokat is kezelni kell. Ha elemeik nagy része 0, *ritka mátrixoknak* nevezzük. A nem ritka mátrixokat *sűrűnek* nevezzük. Előbb a kis méretű sűrű mátrixokra hatékony módszerekkel ismerkedünk meg.

VEKTOROK MAGYAR IRODAI és általános iskolában használt jelölése – a tizedes vessző használata miatt – pontosvesszőt tesz a vektor koordinátái közé *elválasztó-jelként*. Magyar nyelvű felsőbb matematika szövegekben ez nem szokás, mi is elkerüljük, és tizedespontot, vektor koordinátái közt vesszőt használunk. Vegyük észre, hogy vektorok sorvektorral (sormátrixszal) való megadásnál írásjelet nem használunk, csak szóközzel választjuk el a koordinátákat!

2.26. PÉLDA (MÁTRIX HASZNÁLATA A MEGOLDÁSHOZ). *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert!*

$$2x + 3y + 2z = 7$$

$$x + y + z = 3$$

$$2x + 2y + 3z = 6$$

MEGOLDÁS. Két lehetséges megoldást mutatunk. A (2.20) egyenletrendszereinek látott utolsó két egyszerűbb alak elérése a cél. Először írjuk fel az egyenletrendszer bővített mátrixát!

$$\begin{array}{l} 2x + 3y + 2z = 7 \\ x + y + z = 3 \\ 2x + 2y + 3z = 6 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 6 \end{array} \right]$$

Kicseréljük az első két egyenletet:

$$x + y + z = 3$$

$$2x + 3y + 2z = 7$$

$$2x + 2y + 3z = 6$$

Kicseréljük az első két sort:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 7 \\ 2 & 2 & 3 & 6 \end{array} \right]$$

Az első egyenlet 2-szeresét kivonjuk a második, majd a harmadik egyenletből (azaz -2 -szeresét hozzáadjuk a második majd a harmadik egyenlethez).

$$x + y + z = 3$$

$$y = 1$$

$$z = 0$$

Az első sor kétszeresét kivonjuk a második és harmadik sorból (azaz az első sor -2 -szeresét hozzáadjuk a második majd a harmadik sorhoz).

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Az egyenletrendszerről azonnal leolvasható y és z értéke. Ezeket az első egyenletbe helyettesítve megkapjuk x értékét is, nevezetesen $x + y + z = 3$, azaz $y = 1$ és $z = 0$ behelyettesítése után: $x + 1 + 0 = 3$, vagyis $x = 2$. Másik megoldási módszerhez jutunk, ha a visszahelyettesítés helyett folytathatjuk az ekvivalens átalakítások sorozatát:

Kivonjuk a második, majd a harmadik egyenletet az elsőből:

$$x = 2$$

$$y = 1$$

$$z = 0$$

Kivonjuk a második, majd a harmadik sort az elsőből:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Így olyan alakra hoztuk az egyenletrendszert, illetve a bővített mátrixot, amiből azonnal leolvasható a megoldás: $(x, y, z) = (2, 1, 0)$. $\square$

Sormodell: hipersíkok metszete A lineáris egyenletrendszerek szemléltetésére két geometriai modellt mutatunk, melyek segíteni fognak az általánosabb fogalmak megértésében, szemléltetésében.

Tudjuk, hogy a kétváltozós lineáris $ax + by = c$ egyenletet kielégítő pontok halmaza egyenest alkot, ha a és b legalább egyike nem 0. (Ha $a = b = c = 0$, akkor az egyenlet alakja $0x + 0y = 0$, azaz $0 = 0$, ami minden (x, y) számpárra fennáll, tehát a megoldások halmaza a sík összes pontjának halmazával azonos. Ha $a = b = 0$, de $c \neq 0$, akkor az egyenletnek nincs megoldása, a megoldáshalmaz üres.)

2.27. PÉLDA (SORMODELL KÉT KÉTISMERETLENES EGYENLETTEL). Ábrázoljuk az alábbi egyenletrendszereket és megoldásukat a sormodellben!

$$\begin{array}{rcl} x + y = 3 & \text{az} & x + 2y = 3 \\ x + 2y = 4 & \text{és az} & 2x + 4y = 7 \end{array}$$

MEGOLDÁS. Az első egyenletrendszer szerinti ábra egy metsző egyenespárt tartalmaz. Metszéspontjuk a megoldás. Ezt a 2.6 ábra felső rajza mutatja. Oldjuk meg az egyenletrendszert! A megoldás közben két újabb egyenletrendszert kapunk:

$$\begin{array}{rcl} x + y = 3 & \Rightarrow & x + y = 3 \\ x + 2y = 4 & \Rightarrow & y = 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \end{array}$$

A 2.6 ábrán az így kapott egyenletrendszerek sormodell szerinti ábráit is megrajzoltuk.

A második egyenletrendszerben két párhuzamos egyenes egyenlete szerepel. Ezeknek nincs közös pontjuk, így az egyenletrendszer nem oldható meg. Ha az első egyenlet kétszeresét kivonjuk a másodikból, az ellentmondó $0 = 1$ egyenletet kapjuk, vagyis így is arra jutottunk, hogy az egyenletrendszer nem oldható meg. Valóban, a $0x + 0y = 1$ egyenletet kielégítő pontok üres halmazt adnak.

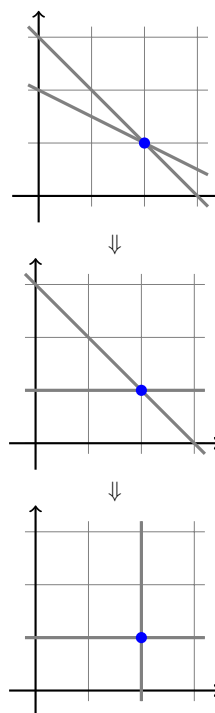
A harmadik egyenletrendszer egyenleteihez két egybeeső egyenes tartozik. Az egyenletrendszer megoldáshalmaza tehát ennek az egyenesnek a pontjaiból áll.

Ha az első egyenlet kétszeresét kivonjuk a másodikból, itt egy $0 = 0$ egyenletet kapjuk, amely így elhagyható. A megmaradó $x + 2y = 3$ egyenlet összes megoldása paraméteres alakba írva például $(x, y) = (3 - 2t, t)$. □

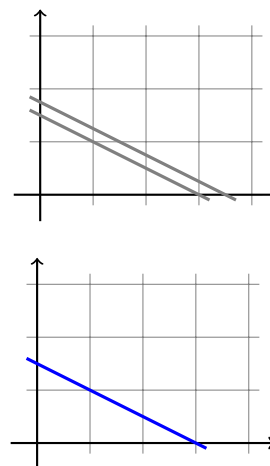
► Hasonlóan szemléltethető a 3-dimenziós térben a háromismeretlenes egyenletrendszerek megoldása. Föl soroljuk a három háromismeretlenes egyenletből álló egyenletrendszerre vonatkozó lehetőségeket:

- Ha a három egyenlettel meghatározott három sík általános helyzetű, akkor az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van (ld. 2.8.

Egyenletrendszer megoldásának szemléltetése a sormodellben jól nyomon követhető a SagePlayer sormodell című demonstrációján. Ott saját bővített mátrixokkal is lehet kísérletezni.



2.6. ábra: Egyenletrendszer megoldásának szemléltetése



2.7. ábra: A megoldás szemléltetése, ha a két egyenlet egyikének bal oldala nullává tehető

(a) ábra). Például a 2.26. példában szereplő egyenletrendszernek egyetlen megoldása van: $(x, y, z) = (2, 1, 0)$.

- Lehet, hogy a három sík metszete egy egyenes. Ilyen például a

$$\begin{aligned} 2x + y + 2z &= 5 \\ x + y + z &= 3 \\ 3x + 2y + 3z &= 8 \end{aligned} \quad (2.21)$$

egyenletrendszer. Ekkor a három normálvektor egy síkba (de nem egy egyenesbe) esik. Itt például a normálvektorok közt fennáll a

$$(2, 1, 2) + (1, 1, 1) - (3, 2, 3) = \mathbf{0}$$

összefüggés. Ugyanez a lineáris kapcsolat áll fenn az egyenletek közt is, vagyis a harmadik egyenlet az első kettő összege, ami azt jelenti, hogy a harmadik egyenlet el is hagyható.

- Változtassuk meg a fenti egyenletrendszer harmadik egyenletének konstans tagját:

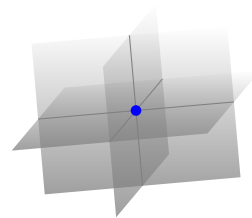
$$\begin{aligned} 2x + y + 2z &= 5 \\ x + y + z &= 3 \\ 3x + 2y + 3z &= 9 \end{aligned} \quad (2.22)$$

Ennek sormodell szerinti ábrája három olyan síkot tartalmaz, melyek párhuzamosak egy egyenessel, de nincs közös pontjuk, mint az a 2.9. (b) ábrán látható. Ha kivonjuk az első és második egyenletet a harmadikból, akkor az ellentmondó $0 = 1$ egyenletre jutunk, míg az imént a 2.21 egyenletrendszer esetén az elhagyható $0 = 0$ egyenletet kaptuk. Ennek oka, hogy bár a normálvektorok közt ugyanaz a lineáris kapcsolat van mint az imént (egy síkba esnek), az egyenletek lineárisan függetlenek! Általában is igaz, nincs megoldása az olyan egyenletrendszereknek, ahol bizonyos normálvektorok lineárisan összefüggők, de a hozzájuk tartozó egyenletek már nem. Gondoljuk meg, ilyen eseteket mutat a 2.9. (a) ábra is.

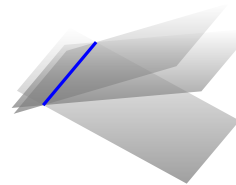
- Végül tekintsük az

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x + 2y + 2z &= 6 \\ 3x + 3y + 3z &= 9 \end{aligned} \quad (2.23)$$

egyenletrendszert! Látható, hogy a második és a harmadik egyenlet az első konstansszorososa, azaz ugyanannak a síknak az egyenletei, az egyenletrendszer tehát ekvivalens az egyetlen $x + y + z = 3$ egyenletből álló egyenletrendszerrel. Az y -nak és z -nek tetszőleges értéket választunk, például legyen $y = s$, $z = t$, akkor $x = 3 - y - z$, azaz $x = 3 - s - t$. Így az összes megoldás: $(x, y, z) = (3 - s - t, s, t)$. Ezt



(a) Három általános helyzetű sík: egyetlen megoldás

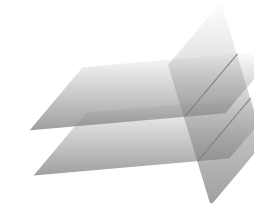


(b) Egy egyenesen átmenő, de nem csupa azonos sík: végtelen sok megoldás, a megoldások egy egyenest alkotnak



(c) Azonos síkok: végtelen sok megoldás, a megoldások egy síkot alkotnak

2.8. ábra: Konzisztens (megoldható) egyenletrendszerek ábrázolása (a megoldáshalmazt kék szín jelzi)



(a) A síkok közül legalább kettő párhuzamos, de nem azonos.



(b) Egy egyenessel párhuzamos, de egymással nem párhuzamos és közös egyenest sem tartalmazó három sík.

2.9. ábra: Nem megoldható egyenletrendszerek szemléltetése

oszlopvektorokkal fölírva kapjuk, hogy a megoldás

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ez a 2.8. (c) ábra szerint eset.

► A 2- és 3-dimenziós esetek analógiájára kialakíthatunk egy elképzelést az n -dimenziós esetre is. Itt minden egyenlet megoldáshalmaza a tér egy hipersíkja, kivéve a $0 = 0$ egyenletet, mert annak megoldáshalmaza az egész tér, és a $0 = 1$ egyenletet, mert annak megoldáshalmaza az üreshalmaz.

2.28. ÁLLÍTÁS (SORMODELL). *Ha egy n -ismeretlenes egyenlet bal oldalán nem minden együttható 0, akkor az egyenletet kielégítő pontok (azaz az egyenlet megoldásai) egy hipersíkot alkotnak $\mathbb{R}^n$ -ben. Ha egy n -ismeretlenes egyenletrendszer m ilyen egyenletből áll, akkor az egyenletrendszer megoldása a nekik megfelelő m hipersík közös része $\mathbb{R}^n$ -ben.*

Az m egyenlet a skaláris szorzás segítségével tömörebb alakban is fölírható. Az $m \times n$ -es $\mathbf{A}$ együtthatómátrixú lineáris egyenletrendszer i -edik egyenletének alakja

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i.$$

Ha $\mathbf{a}_{i*}$ jelöli az $\mathbf{A}$ mátrix i -edik sorvektorát, és $\mathbf{x}$ az ismeretlenek vektorát, akkor az előző egyenlet a következő alakot ölti:

$$\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} = b_i. \quad (2.24)$$

Ez különösen akkor lesz érdekes, ha homogén lineáris egyenletrendszereket fogunk vizsgálni, mert ott mindegyik egyenlet $\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} = 0$ alakot ölt, ami azt jelenti, hogy olyan $\mathbf{x}$ vektort keresünk, mely merőleges az $\mathbf{a}_{i*}$ vektorok mindegyikére.

Oszlopmodell: vektor előállítása lineáris kombinációként E modellben az egyenletrendszerre úgy tekintünk, mint egy olyan vektoregyenletre, amelyben egy vektort kell előállítani adott vektorok lineáris kombinációjaként. Például a 2.27. példabeli

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

egyenletrendszer ekvivalens az

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Az oszlopmodell lépései jól nyomon követhetők a SagePlayer oszlopmodell című demonstrációján. Ott saját bővített mátrixokkal is lehet kísérletezni.

vektoregyenlettel. Itt az a feladat, hogy megkeressük az $(1, 1)$ és $(1, 2)$ vektoroknak azt a lineáris kombinációját, amely egyenlő a $(3, 4)$ vektorral.

2.29. PÉLDA (OSZLOPMODELL). Ábrázoljuk a 2.27. példában megadott

$$\begin{array}{rcl} x + y = 3 & x + 2y = 3 & x + 2y = 3 \\ x + 2y = 4 & 2x + 4y = 7 & \text{és} & 2x + 4y = 6 \end{array}$$

egyenletrendszereket az oszlopmodellben!

MEGOLDÁS. Az első egyenletrendszer esetén két lineárisan független vektor lineáris kombinációjaként kell előállítani egy harmadik vektort. Ezt szemlélteti a 2.10 ábra. Érdekességgént itt is megmutatjuk, hogy az egyenletrendszer megoldásának lépései hogy mutatnak e modellben. Az ekvivalens átalakítások lépései:

$$\begin{array}{rcl} x + y = 3 & \Rightarrow & x + y = 3 \Rightarrow x = 2 \\ x + 2y = 4 & \Rightarrow & y = 1 \Rightarrow y = 1 \end{array}$$

Vektoros alakban:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A második és harmadik egyenletrendszer vektoros alakja

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \text{illetve} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

A 2.11 ábráról szemléletesen is látható, hogy az egyik vektoregyenletnek nincs megoldása, míg a másiknak végtelen sok is van. □

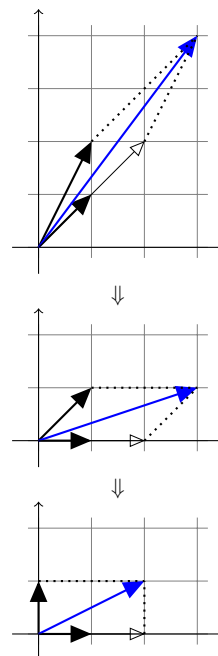
Általánosan kimondható a következő:

2.30. ÁLLÍTÁS (OSZLOPMODELL). A 2.21. definícióban megadott (2.19) egyenletrendszer a következő vektoregyenlettel ekvivalens:

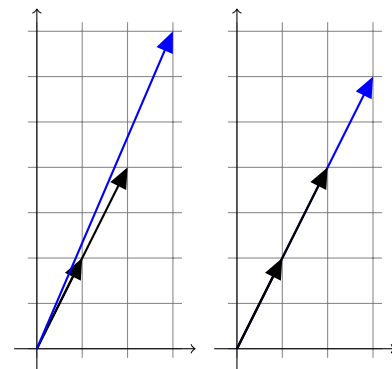
$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} x_2 + \dots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer megoldása ekvivalens egy vektoregyenlet megoldásával, ahol az egyenletrendszer konstans tagjaiból álló vektort kell az együtthatómátrix oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként előállítani.

E modell szerint egy egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha az együtthatómátrix oszlopvektorainak összes lineáris kombinációjából álló halmazban a konstans tagokból álló vektor is szerepel (ld. 2.13. feladat).



2.10. ábra: A megoldás lépései a oszlopmodellben.



2.11. ábra: Oszlopmodell lineárisan összefüggő vektorok esetén.

Feladatok

2.4.* Melyek lineáris egyenletek az x , y és z változóiban az alábbiak közül?

- a) $3x - (\ln 2)y + e^3z = 0.4$ b) $a^2x - b^2y = 0$
 c) $xy - yz - zx = 0$ d) $(\sin 1)x + y - \pi z = 0$
 e) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ f) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$

Igazoljuk, hogy az alábbi egyenletrendszerek ekvivalensek!

$$2.5. \quad \begin{cases} x + 3y = 5 \\ y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 3 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$2.6. \quad \begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 0x + 0y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

Oldjuk meg (fejben számolva) az alábbi lineáris egyenletrendszereket az $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ paraméterválasztás esetén!

$$2.7. \quad \begin{cases} (2a - b)x + (3a - c)y = 0 \\ (3b - 2c)x + (b - 2a)y = 0 \end{cases}$$

$$2.8. \quad \begin{cases} (b - a)x + (3a - c)y = 1 \\ (3b - 2c)x + (b - 2a)y = 0 \end{cases}$$

$$2.9. \quad \begin{cases} (b - a)x + (3a - c)y = 1 \\ (3b - 2c)x + (b - 2a)y = 1 \end{cases}$$

$$2.10. \quad \begin{cases} (b - a)x + (3a - c)y = 1 \\ (3b - 2c)x + (c - b)y = 2 \end{cases}$$

2.11. **EGYENLETRENDSZEREK KÖZÖS MEGOLDÁSA** Tekintsük az azonos ismeretleneket tartalmazó $\mathcal{E}_1$ és $\mathcal{E}_2$ egyenletrendszereket. Legyen ezek megoldáshalmaza $\mathcal{M}_1$, illetve $\mathcal{M}_2$. Mutassuk meg, hogy ha $\mathcal{E}$ az $\mathcal{E}_1$ és $\mathcal{E}_2$ egyenletrendszerek egyesítése, azaz $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$, és $\mathcal{M}$ az $\mathcal{E}$ megoldáshalmaza, akkor $\mathcal{M}$ az $\mathcal{M}_1$ és $\mathcal{M}_2$ közös része, azaz $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$.

Vizsgáljuk meg ezt az állítást az alábbi esetekben:

- a) $\mathcal{E}_1 = \{x + y = 2\}$, $\mathcal{E}_2 = \{x - y = 0\}$;
 b) $\mathcal{E}_1 = \{x + y = 2, x - y = 0\}$, $\mathcal{E}_2 = \{x - y = 0\}$;
 c) $\mathcal{E}_1 = \{x + y = 2, x - y = 0\}$, $\mathcal{E}_2 = \{x - y = 1\}$;
 d) $\mathcal{E}_1 = \{x + y = 2, x - y = 0\}$, $\mathcal{E}_2 = \{0x + 0y = 0\}$;
 e) $\mathcal{E}_1$ tetszőleges egyenletrendszer, $\mathcal{E}_2 = \{0 = 0\}$.

2.12.* **SOR ÉS OSZLOPMODELL** Rajzoljuk fel a következő két egyenletrendszerhez tartozó sormodell és oszlopmodell szerinti ábrát!

$$a) \quad \begin{array}{l} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 2y = 4 \end{array} \quad b) \quad \begin{array}{l} 2x + 4y = 3 \\ 3x + 6y = 4 \end{array}$$

2.13. **SOR- ÉS AZ OSZLOPMODELL 3D-BEN** Vizsgáljuk meg az alábbi két – azonos együtthatómátrixú – egyenletrendszer

megoldhatóságát a sor- és az oszlopmodellben:

$$\begin{array}{ll} x + y + 2z = 3 & x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + 4z = 3 & x + 2y + 4z = 3 \\ 3x + 4y + 8z = 9 & 3x + 4y + 8z = 1 \end{array}$$

2.14. **SOR ÉS OSZLOPMODELL $m \neq n$ ESETÉN** Vizsgáljuk meg az alábbi három egyenletrendszer megoldhatóságát a sor- és az oszlopmodellben:

$$\begin{array}{lll} x + y = 3 & x + y = 3 & x + y = 3 \\ a) \quad x + y = 4 & b) \quad x + 2y = 4 & c) \quad x + 2y = 3 \\ x + 3y = 5 & x + 3y = 5 & x + 3y = 5 \end{array}$$

2.15.* **IGAZ – HAMIS** Mely állítások igazak, melyek hamisak az alábbiak közül?

- a) Ha egy n -ismeretlenes egyenletrendszer olyan hipersíkok egyenleteiből áll, melyek közt van két párhuzamos, akkor az egyenletrendszer nem oldható meg.
 b) Ha egy n -ismeretlenes egyenletrendszer nem oldható meg, akkor az egyenletek olyan hipersíkok egyenletei, melyek közt van két párhuzamos, de nem azonos hipersík.
 c) Ha egy n -ismeretlenes egyenletrendszer csak két egyenletből áll, akkor az oszlopmodell szerint pontosan akkor oldható meg tetszőleges jobb oldal esetén, ha a vektor-egyenlet bal oldalán szereplő vektorok közt van kettő lineárisan független.

2.16.* Egészítsük ki az alábbi állításokat úgy, hogy igazak legyenek!

- a) Egy két egyenletből álló háromismeretlenes egyenletrendszer sormodellje szerinti ábra $a(z)$ $\dots$ -dimenziós térben $\dots$ darab $\dots\dots\dots$ ból/ből áll, melyek ha $\dots\dots\dots$, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása, egyébként megoldásainak száma $\dots$. Oszlopmodellje $a(z)$ $\dots$ -dimenziós térben $\dots$ darab $\dots\dots\dots$ ból/ből áll.
 b) Egy három egyenletből álló kétismeretlenes egyenletrendszer sormodellje szerinti ábra $a(z)$ $\dots$ -dimenziós térben $\dots$ darab $\dots\dots\dots$ ból/ből áll, míg az oszlopmodellje a $\dots$ -dimenziós térben $\dots$ darab $\dots\dots\dots$ ból/ből áll.
 c) Egy négy egyenletből álló ötismeretlenes egyenletrendszer sormodellje szerinti ábra $a(z)$ $\dots$ -dimenziós térben $\dots$ darab $\dots\dots\dots$ ból/ből áll. Oszlopmodellje $a(z)$ $\dots$ -dimenziós térben $\dots$ darab $\dots\dots\dots$ ból/ből áll.

Megoldás kikiűszűbűlűssel

Elemi sorműveletek A lineáris egyenletrendszerek egyik megoldási módszerének lényege, hogy ekvivalens átalakításokkal olyan alakra hozzuk az egyenletrendszert, melybűl visszahelyettesítések után, vagy azok nélkül azonnal leolvasható az eredmény. Az átalakításokat a bővített mátrixon hajtjuk végre úgy, hogy a nekik megfelelő átalakítások az egyenletrendszeren ekvivalens átalakítások legyenek. A 2.24. tételben felsorolt első három ekvivalens átalakítás nem változtatja meg az egyenletrendszer egyenleteinek számát sem. Az egyenletrendszer bővített mátrixán az ezeknek megfelelő átalakításokat elemi sorműveleteknek nevezzük.³

2.31. DEFINÍCIÓ (ELEMI SORMŰVELETEK). Egy mátrix sorain végzett alábbi műveleteket elemi sorműveleteknek nevezzük:

1. Sorcsere: két sor cseréje.
2. Beszorzás: egy sor beszorzása egy nemnulla számmal.
3. Hozzáadás: egy sorhoz egy másik sor konstansszorosának hozzáadása.

Természetesen egy sort el is oszthatunk egy nemnulla c számmal, hisz az az $1/c$ -vel való beszorzással egyenértékű. Hasonlóképp levonhatjuk egy sorbűl egy másik sor c -szeresét, hisz az a $-c$ -szeresének hozzáadásával ekvivalens.

Az elemi átalakításokra a következő jelöléseket fogjuk használni:

1. $S_i \leftrightarrow S_j$: az i -edik és a j -edik sorok cseréje.
2. cS_i : az i -edik sor beszorzása c -vel.
3. $S_i + cS_j$: a j -edik sor c -szeresének az i -edik sorhoz adása.

Az elemi sorműveletek mintájára elemi oszlopműveletek is definiálhatók, de azokat ritkán használjuk. Jelölésűkre értelemszerűen az $O_i \leftrightarrow O_j$, cO_i , $O_i + cO_j$ formulákat használjuk.

Lépcsűs alak Az eddig megoldott egyenletrendszerekben igyekeztűnk átlűs, vagy legalább átlű alatt kinullázott alakra hozni az egyenletrendszert, mint azt például a 2.26. példában tettűk. Ez nem mindig sikerűl, mert néha megtartani kívánt elemek is kinullázódnak, de a következőkben definiált lépcsűs alakhoz mindig el tudűnk jutni.

2.32. DEFINÍCIÓ (LÉPCSŰS ALAK). Egy mátrix lépcsűs, vagy sorlépcsűs alakű, ha kielégíti a következő két feltételt:

1. a csupa 0-bűl állű sorok (ha egyáltalán vannak) a mátrix utolsó sorai;
2. bármely két egymás után következő nem-0 sorban az alsű sor elején (legalább egyfel) több 0 van, mint a fűlűtte lévű sor elején.

A nemnulla sorok első zűrustűl kűlűnbűzű elemét fűelemnek, vezűrelemnek vagy pivotelemnek hívűjuk. Egy fűelem oszlopának fűoszlop vagy bázisoszlop a neve.

³ Lineáris egyenletrendszerek felírása és megoldása már idűszámításűnk előtt 300 kűrűl babiloni iratokban szerepelt. Az első századra teszik a kűnai Jiűzhāng Suānshű című mű megjelenését, mely az előző ezer évben összegyűűt matematikai tudást foglalja össze (címének magyar fordítása „A matematikai művészet kilenc fejezete” vagy „Kilenc fejezet a matematikai eljárásokrűl” lehet). E műben már a kikiűszűbűlés (azaz a Gauss-elimináció) néven ismert technikát alkalmazzzák lineáris egyenletrendszer megoldására. A két fenti műben szereplű egyenletrendszerek, és további történeti részletek olvashatók a [The MacTutor History of Mathematics archive](#) című weboldalon.

2.33. PÉLDA (LÉPCSŐS ALAK). A következő mátrixok lépcsős alakúak:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Gauss-módszer A Gauss-módszer, más néven Gauss-kiküszöbölés vagy Gauss-elimináció a lineáris egyenletrendszerek megoldásának egy módszere. Lényege, hogy a lineáris egyenletrendszer bővített mátrixát elemi sorműveletekkel lépcsős alakra hozzuk, és abból visszahelyettesítéssel meghatározzuk a megoldás általános alakját. A Gauss-módszer könnyen algoritmizálható, ha sorban haladunk az oszlopokon. A módszerre láttunk már példát, ilyen volt a 2.26. példa első megoldása. Most lássunk két további példát.

2.34. PÉLDA (GAUSS-MÓDSZER, EGY MEGOLDÁS). Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert Gauss-módszerrel:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 0 \\ 2x + 2y + 3z &= 2 \\ x + 3y + 3z &= 4 \\ x + 2y + z &= 5 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. Írjuk fel az egyenletrendszer bővített mátrixát, és oszloponként haladva küszöböljük ki – nullázzuk ki – a főelemek alatti elemeket!

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right] & \xrightarrow{\substack{S_2 - 2S_1 \\ S_3 - S_1 \\ S_4 - S_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array} \right] & \xrightarrow{S_2 \leftrightarrow S_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array} \right] & \xrightarrow{S_4 - \frac{1}{2}S_2} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 3 \end{array} \right] & \xrightarrow{S_4 - \frac{3}{2}S_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & \Rightarrow \begin{aligned} x + y + 2z &= 0 \\ 2y + z &= 4 \\ -z &= 2 \end{aligned} \end{aligned}$$

A harmadik egyenletből $z = -2$, ezt a másodikba helyettesítve $y = 3$, ezeket az elsőbe helyettesítve kapjuk, hogy $x = 1$, azaz az egyetlen megoldás $(x, y, z) = (1, 3, -2)$. $\square$

Mit csinálunk akkor, ha a lépcsős alak szerint kevesebb a főelemek, mint az oszlopok száma? Egyelőre bevezetünk két elnevezést, melyek jelentése hamarosan világos lesz: az egyenletrendszer azon változó-

it, melyek főelemek oszlopaihoz tartoznak, *kötött változóknak*, míg az összes többi változót *szabad változónak* nevezzük.

2.35. PÉLDA (GAUSS-MÓDSZER, VÉGTELEN SOK MEGOLDÁS). Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert Gauss-módszerrel:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 1 \\x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 &= 0 \\3x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 3x_5 &= 1\end{aligned}$$

MEGOLDÁS. Írjuk fel az egyenletrendszer bővített mátrixát, és oszloponként haladva küszöböljük ki a főelemek alatti elemeket!

$$\begin{aligned}\left[\begin{array}{ccccc|c}1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\1 & 2 & 3 & 3 & 1 & 0 \\3 & 6 & 7 & 8 & 3 & 1\end{array}\right] &\xrightarrow{\substack{s_2-s_1 \\ s_3-3s_1}} \left[\begin{array}{ccccc|c}1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\0 & 0 & 4 & 2 & 0 & -2\end{array}\right] \xrightarrow{s_3-2s_2} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c}1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right] &\Rightarrow \begin{aligned}x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 1 \\2x_3 + x_4 &= -1\end{aligned}\end{aligned}$$

Az egyenletrendszer kötött változói a lépcsős alak főoszlopaihoz tartozó változók, azaz x_1 és x_3 . A szabad változók: x_2, x_4, x_5 . A szabad változóknak tetszőleges értékeket adhatunk, a kötöttek értéke kifejezhető velük. Legyen például a szabad változók értéke $x_2 = s, x_4 = t, x_5 = u$. Ezek behelyettesítése után a fenti egyenletek közül először a másodikból kifejezzük x_3 -at, majd azt behelyettesítjük az elsőbe, ahonnan kifejezzük az x_1 -et, azaz a fenti egyenletekből kifejezzük a kötött változókat:

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u \\x_3 &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t\end{aligned}$$

. Innen az egyenletrendszer megoldása

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(\frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u, s, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t, t, u\right),$$

vagy mátrixjelöléssel

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Később különösen az utóbbi – vektorok lineáris kombinációjára bontással való – felírás lesz hasznos. $\square$

Világos, hogy ha a szabad változóknak tetszőleges értéket adhatunk, melyből a kötött változók egyértelműen kifejezhetők, akkor a fenti példában mutatott módszerrel az egyenletrendszer összes megoldását leírtuk. Az ilyen módon megadott megoldást az egyenletrendszer *általános megoldásának*, a konkrét paraméterértékekhez tartozó megoldásokat *partikuláris megoldásnak* nevezzük. Például az előző példabeli egyenletrendszer egy partikuláris megoldása az $s = 0$, $t = 1$, $u = 2$ értékekhez tartozó

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-2, 0, -1, 1, 2).$$

Lényeges e megoldási módban, hogy a bővített mátrixot lépcsős alakra tudtuk hozni. Ez vajon mindig sikerül?

2.36. TÉTEL (LÉPCSŐS ALAKRA HOZÁS). *Bármely mátrix elemi sorműveletekkel lépcsős alakra hozható.*

BIZONYÍTÁS. Tekintsünk egy tetszőleges $m \times n$ -es mátrixot. A következő eljárás egyes lépéseiben e mátrixnak le fogjuk takarni egy-egy sorát vagy oszlopát. Az egyszerűség kedvéért a letakarás után keletkezett mátrix sorainak és oszlopainak számát ismét m és n fogja jelölni, a_{ij} pedig a letakarások után maradt mátrix i -edik sorának j -edik elemét.

1. Ha az első oszlopban csak 0 elemek állnak, takarjuk le ezt az oszlopot, és tekintsük a maradék mátrixot. Ha ennek első oszlopában ismét csak 0 elemek vannak, azt is takarjuk le, és ezt addig folytassuk, míg egy olyan oszlopot nem találunk, amelyben van nem 0 elem. Ha ilyen oszlopot nem találunk, az eljárásnak vége, a mátrix lépcsős alakú.
2. Ha az első oszlop első sorában álló elem 0, akkor cseréljük ki e sort egy olyannal, melynek első eleme nem 0. Így olyan mátrixot kaptunk, amelyben $a_{11} \neq 0$.
3. Vegyük az i -edik sort $i = 2$ -től $i = m$ -ig, és ha a sor első eleme $a_{i1} \neq 0$, akkor az első sor $-a_{i1}/a_{11}$ -szeresét adjuk hozzá. Mivel $a_{i1} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{11} = 0$, ezért e lépés után az a_{11} alatti elemek 0-vá válnak.
4. A fenti átalakítás után takarjuk le az első sort és az első oszlopot. Ha ekkor nem marad a mátrixban több sor, vége az eljárásnak, a korábban letakart sorokat feltárva megkaptuk a lépcsős alakot. Egyébként ugorjunk vissza az 1. lépéshez, és folytassuk az eljárást. Világos, hogy ez az eljárás véges sok lépésben véget ér, melynek eredményeként eljutunk az eredeti mátrix egy lépcsős alakjához. $\square$

Egy *inhomogén lineáris egyenletrendszerhez tartozó homogén lineáris egyenletrendszeren* azt a homogén egyenletrendszert értjük, melyet az inhomogénból a konstans tagok 0-ra változtatásával kapunk.

2.37. PÉLDA (HOMOGÉN LINEÁRIS EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSA).

Oldjuk meg a 2.35. példabeli egyenletrendszerhez tartozó homogén lineáris

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 = 0$$

$$3x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 3x_5 = 0$$

egyenletrendszert.

MEGOLDÁS. Mivel homogén lineáris egyenletrendszerről van szó, a megoldáshoz szükségtelen a bővített mátrixot használni, hisz annak utolsó oszlopa csak nullákból áll, így az elemi sorműveletek alatt nem változik. Az együtthatómátrix lépcsős alakja ugyanazokkal a sorműveletekkel megkapható, mint a 2.35. példa megoldásában, azaz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0 \\ 2x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Innen a megoldás is ugyanúgy kapható meg, sőt, ugyanaz a lineáris kombináció szerepel benne, csak a konstans tagok nem szerepelnek:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(-2s - \frac{3}{2}t - u, s, -\frac{1}{2}t, t, u\right),$$

vagy mátrixjelöléssel

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A homogén és inhomogén egyenletrendszerek e példából sejtethető kapcsolatára még visszatérünk a 3.17. tételben. $\square$

Végül egy alkalmazás:

2.38. PÉLDA (SÍKOK METSZÉSVONALÁNAK MEGHATÁROZÁSA).

Határozzuk meg az alábbi két sík metszésvonalának explicit (paraméteres) alakját!

$$x + y + z = 1$$

$$3x + 4y = 2$$

MEGOLDÁS. A fenti egyenletekkel megadott két sík metszésvonalának meghatározásához, pontosabban a metszésvonal explicit, paraméteres egyenletrendszerének felírásához egyszerűen meg kell oldani a két

egyenletből álló egyenletrendszert:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{s_2 - 3s_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ y - 3z = -1 \end{array}$$

Ebből $z = t$ paraméterválasztással $y = -1 + 3t$ és $x = 2 - 4t$, azaz

$$(x, y, z) = (-4t + 2, 3t - 1, t) = (2, -1, 0) + t(-4, 3, 1),$$

vagy mátrixjelöléssel

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad \square$$

Redukált lépcsős alak A 2.26. példa második megoldási módszerében átlós alakra hoztuk az együtthatómátrixot, azaz nem elégedtünk meg azzal, hogy a főelemek alatt kinulláztunk minden együtthatót, hanem a főelemeket 1-re változtattuk a sor beszorzásával, és a főelemek fölött is kinulláztunk minden elemet.

2.39. DEFINÍCIÓ (REDUKÁLT LÉPCSŐS ALAK). Egy mátrix redukált lépcsős, vagy redukált sorlépcsős alakú, ha kielégíti a következő feltételeket:

1. lépcsős alakú;
2. minden főelem egyenlő 1-gyel;
3. a főelemek oszlopaiban a főelemeken kívül minden elem 0;

A főelemet itt vezéregyesnek vagy vezető egyesnek is szokás nevezni.

2.40. PÉLDA (REDUKÁLT LÉPCSŐS ALAK). A következő mátrixok redukált lépcsős alakúak:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Minden valós, vagy racionális elemű mátrix redukált lépcsős alakra hozható, azonban az egészegyütthatós mátrixok általában nem, ha az egészekben belül akarunk maradni. De az egészegyütthatós mátrixok is redukált lépcsős alakra hozhatók a racionálisok számkörében. Az kiküszöbölés lépéseinek követésére használható a [SagePlayer redukált lépcsős alak](#) című szemléltető munkalapja.

2.41. PÉLDA (REDUKÁLT LÉPCSŐS ALAKRA HOZÁS). Hozzuk redukált lépcsős alakra az

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrixot!

MEGOLDÁS. Egy lehetséges megoldás:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} &\xrightarrow[S_3-2S_1]{S_2-S_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}S_2} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} &\xrightarrow{S_3+4S_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1-3S_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Egy másik lehetséges megoldás:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} &\xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[S_3-2S_1]{S_2-S_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}S_2} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} &\xrightarrow{S_1-3S_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Bár különböző úton, de mindkétszer azonos eredményre jutottunk. Valóban, hamarosan be fogjuk látni, hogy a redukált lépcsős alak egyértelmű, míg e példából is látjuk, hogy a lépcsős alak nem: a megadott mátrixnak a megoldás során négy különböző lépcsős alakját is előállítottuk. $\square$

Gauss–Jordan-módszer A Gauss–Jordan-módszer, más néven Gauss–Jordan-kiküszöbölés vagy Gauss–Jordan-elimináció a lineáris egyenletrendszerek egy megoldási módszere. Lényege, hogy a lineáris egyenletrendszer bővített mátrixát elemi sorműveletekkel redukált lépcsős alakra hozzuk. Ebből az alakból azonnal leolvasható a megoldás. Adjunk új megoldást a Gauss-módszernél bemutatott egyenletrendszerekre.

2.42. PÉLDA (GAUSS–JORDAN-MÓDSZER, EGY MEGOLDÁS). Oldjuk meg a 2.34. példában felírt egyenletrendszert Gauss–Jordan-módszerrel!

MEGOLDÁS. Felírjuk az egyenletrendszer bővített mátrixát, és a 2.34. példában látott módon eljutunk a lépcsős alakhoz, majd folytatjuk, először beszorozzuk a sorokat a főátlóbeli elem reciprokával, majd a har-

madik oszlopot, végül a másodikat kinullázzuk:

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right] &\xrightarrow{\dots} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{1/2S_2 \\ -S_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{S_2 - \frac{1}{2}S_3 \\ S_1 - 2S_3}} \\
 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] &\xrightarrow{S_1 - S_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 3 \\ z &= -2 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

Tehát az egyenletrendszer egyetlen megoldása $(x, y, z) = (1, 3, -2)$. $\square$

2.43. PÉLDA (GAUSS–JORDAN-MÓDSZER, VÉGTELEN SOK MEGOLDÁS).

Oldjuk meg a 2.35. példabeli

$$\begin{aligned}
 x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 1 \\
 x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 &= 0 \\
 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 3x_5 &= 1
 \end{aligned}$$

egyenletrendszert Gauss–Jordan-módszerrel!

MEGOLDÁS. A 2.35. példában eljutottunk egy lépcsős alakig. Az eljárást folytatjuk, míg a redukált lépcsős alakra nem jutunk.

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 3 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{\dots} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{1/2S_2 \\ S_1 - S_2}} \\
 \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] &\Rightarrow \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + \frac{3}{2}x_4 + x_5 &= \frac{3}{2} \\ x_3 + \frac{1}{2}x_4 &= -\frac{1}{2} \end{aligned}
 \end{aligned}$$

Végezzük el az $x_2 = s$, $x_4 = t$, $x_5 = u$ helyettesítést, az x_1 és x_3 változók azonnal kifejezhetők. Így a megoldás:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(\frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u, s, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t, t, u \right),$$

vagy mátrixjelöléssel

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Természetesen ugyanazt a megoldást kaptuk, mint a 2.35. példában. $\square$

A redukált lépcsős alak egyértelműsége Fontos következményei vannak a következő tételnek:

2.44. TÉTEL (A REDUKÁLT LÉPCSŐS ALAK EGYÉRTELMŰ). Minden mátrix redukált lépcsős alakra hozható, amely egyértelmű.

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel indirekt módon, hogy van egy olyan mátrix, mely elemi sorműveletekkel két különböző redukált lépcsős alakra hozható. Jelölje ezeket $\mathbf{R}$ és $\mathbf{S}$. Mivel mindketten ugyanazzal a mátrixszal ekvivalensek, elemi sorműveletekkel egymásba alakíthatóak, vagyis egymással is ekvivalensek. Válasszuk ki oszlopaik közül azt a balról első oszlopot, melyben különböznek, valamint az összes előttük álló vezéroszlopot. Az így kapott mátrixokat jelölje $\hat{\mathbf{R}}$ és $\hat{\mathbf{S}}$. Tehát $\hat{\mathbf{R}} \neq \hat{\mathbf{S}}$, mert különböznek az utolsó oszlopukban. Például, ha

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

akkor

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \hat{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ez az oszlop, melyben különböznek, nem lehet az első oszlop, mert ha az a zérusvektor az egyik mátrixban, akkor a sorkvivalencia miatt a másikban is az lenne, egyébként pedig ez az oszlop mindenképp az első helyen 1-est, alatta 0-kat tartalmaz.

Tekintsük az így kapott $\hat{\mathbf{R}}$, $\hat{\mathbf{S}}$ mátrixokat egy-egy egyenletrendszer bővített együttthatómátrixának. Ezek általános alakja tehát a következő:

$$\hat{\mathbf{R}} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & r_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & r_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & r_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \text{vagy} \quad \hat{\mathbf{R}} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right]$$

és

$$\hat{\mathbf{S}} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & s_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \text{vagy} \quad \hat{\mathbf{S}} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Mivel oszlopok kihagyása nem változtat a sorkvivalencián – hisz elemi sorműveletekben műveletet csak egy oszlopon belül végzünk –, ezért az $\hat{\mathbf{R}}$ és $\hat{\mathbf{S}}$ mátrixok ekvivalensek, azaz a hozzájuk tartozó két egyenletrendszernek ugyanaz a megoldása. Ez csak úgy lehet, ha vagy minden $i = 1, \dots, k$ indexre $r_i = s_i$, vagy egyik egyenletrendszer sem oldható meg, azaz mindkét esetben azt kaptuk, hogy $\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{S}}$, ami ellentmondás. Ez az ellentmondás bizonyítja, hogy a kiinduló $\mathbf{R} \neq \mathbf{S}$ feltevés helytelen volt, tehát $\mathbf{R} = \mathbf{S}$. (E bizonyítás Holzmann⁴ Interneten publikált cikkén alapul). $\square$

⁴ Wolf Holzmann. Uniqueness of reduced row echelon form. <http://www.cs.uleth.ca/~holzmann/notes/reduceduniq.pdf>, 2002

Mivel a redukált lépcsős alak egyértelmű, definiálhatunk egy függvényt, mely minden mátrixhoz annak ezt az alakját rendeli. Az $\text{rref}(\mathbf{A})$ jelölést mi arra a függvényre fogjuk alkalmazni, mely egy $m \times n$ -es mátrixhoz a redukált lépcsős alakjának a zérussorok elhagyásával kapott alakját rendeli. Például

$$\text{rref} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Szimultán egyenletrendszerek Gyakori feladat az alkalmazásokban, hogy sok olyan egyenletrendszert kell megoldani, amelyek csak a konstans tagokban térnek el egymástól. A kiküszöböléses módszerekkel ezek egyszerre is megoldhatók alig több erőforrás felhasználásával, mint ami egyetlen egyenletrendszer megoldásához szükséges.

2.45. DEFINÍCIÓ (SZIMULTÁN EGYENLETRENDSZEREK). Több egyenletrendszer halmazát szimultán egyenletrendszernek nevezzük, ha együtt-hatómátrixaik azonosak.

2.46. PÉLDA (SZIMULTÁN EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSA). Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket!

$$\begin{array}{lll} x + y + z = 3 & u + v + w = 3 & r + s + t = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 7 & 2u + 3v + 2w = 7 & 2r + 3s + 2t = 0 \\ 2x + 2y + 3z = 6 & 2u + 2v + 3w = 7 & 2r + 2s + 3t = 1 \end{array}$$

MEGOLDÁS. Mivel e három egyenletrendszer együtthatómátrixa azonos, a bal oldal átalakítását elég egyszer elvégezni, a jobb oldalak átalakítását pedig vele együtt. Ehhez a szimultán egyenletrendszerre a következő bővített mátrixot érdemes képezni:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 7 & 7 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 7 & 1 \end{array} \right]$$

A megoldáshoz használjuk a Gauss–Jordan-módszert:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 7 & 7 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 7 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow[S_3-2S_1]{S_2-2S_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[S_1-S_3]{S_1-S_2} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right], \end{aligned}$$

és ebből leolvasható mindhárom egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad \square$$

Ha tudjuk, hogy több egyenletrendszerből álló szimultán egyenletrendszerről van szó, mindegyik egyenletrendszerben használhatjuk ugyanazokat a változókat.

2.47. PÉLDA (SZIMULTÁN EGYENLETRENDSZER BŐVÍTETT MÁTRIXA). Oldjuk meg azt a szimultán egyenletrendszert, melynek bővített mátrixa

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

MEGOLDÁS. A Gauss–Jordan-módszer lépései:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{s_2 - \frac{5}{2}s_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{2s_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{s_1 - s_2} \\ &\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{2}s_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array} \right]. \quad \square \end{aligned}$$

Kiküszöbölés $\mathbb{Z}_p$ -ben* Ha p prím, akkor a modulo p maradékosztályok közti műveletek rendelkeznek minden olyan tulajdonsággal, melyet a kiküszöbölés során a valós számok körében használtunk. Ennek következtében a Gauss- és Gauss–Jordan-módszerek minden további nélkül használhatók $\mathbb{Z}_p$ fölötti egyenletrendszerekre is. (Lásd még a ?? oldalon az algebrai testről írtakat.)

2.48. PÉLDA (EGYENLETRENDSZER $\mathbb{Z}_2$ FÖLÖTT). 4-bites kódszavakat küldünk, bitjeit jelölje a, b, c és d . Hibajavító kódot készítünk úgy, hogy minden kódszó végére három paritásbitet teszünk, nevezetesen $a + b + c + d$, $a + c + d$ és $a + b + d$ bitet. Az összeadás itt természetesen $\mathbb{Z}_2$ fölött értendő. Például a 0110 kódszó helyett a 0110011 kódszót küldjük. Egy üzenetben az egyik ilyen 7-bites kódszó első 4 bitjét a vevő szerkezet bizonytalanul érzékeli, amit kapunk, az $(?, ?, ?, ?, 1, 0, 1)$ kódvektor. Mi lehetett az eredeti üzenet, ha az utolsó 3 bit biztosan jó?

MEGOLDÁS. Az a, b, c és d bitek ismeretlenek, csak annyit tudunk, hogy

$$\begin{aligned} b + c + d &= 1 \\ a + \quad c + d &= 0 \\ a + b + \quad d &= 1 \end{aligned}$$

Oldjuk meg ezt az egyenletrendszert Gauss–Jordan kiküszöböléssel $\mathbb{Z}_2$ fölött. Ne felejtsük, hogy $\mathbb{Z}_2$ -ben $1 + 1 = 0$, így $1 = -1$, azaz a kivonás nem különbözik az összeadástól.

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{s_1 \leftrightarrow s_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{s_3 + s_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{s_3 + s_2} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] &\xrightarrow{\substack{s_2 + s_3 \\ s_1 + s_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \implies \begin{aligned} a + c &= 0 \\ b + c &= 1 \\ d &= 0 \end{aligned} \end{aligned}$$

Az utolsó egyenletből $d = 0$. A szabad változó c , legyen $c = s$. Így a második egyenletből $b = 1 + c$, azaz $b = 1 + s$ és az elsőből $a = c$, azaz $a = s$. A megoldás általános alakban $(a, b, c, d) = (s, 1 + s, s, 0)$, azaz

$(a, b, c, d) = (0, 1, 0, 0) + s(1, 1, 1, 0)$. Az $s = 0$ és az $s = 1$ értékekhez tartozó megoldások tehát: $(0, 1, 0, 0)$ és $(1, 0, 1, 0)$.

Ha az egyenletrendszert vektoregyenletnek tekintjük, akkor az első megoldás azt mutatja, hogy az együtthatómátrix második oszlopa megegyezik a jobb oldallal (és valóban), a második megoldás pedig azt, hogy az első és a harmadik oszlop összege a jobb oldalt adja.

Megjegyezzük e kódról, melyet $[7, 4, 3]_2$ bináris *Hamming-kódnak* neveznek, hogy a kód 16 szóból áll, bármely szavának bármely 4 bite egyértelműen meghatározza a maradék hármat. Így ha legföljebb 3 bit megváltozik egy szóban, akkor az kimutatható, és ha csak egy bit változik meg, az kijavítható. $\square$

2.49. PÉLDA (EGYENLETRENDSZER $\mathbb{Z}_5$ FÖLÖTT). *Oldjuk meg az alábbi két egyenletrendszert $\mathbb{Z}_5$ fölött.*

$$\begin{array}{rcl} 2x + 3y & = & 1 \\ 3x + 2y & = & 4 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 2x + 3y & = & 1 \\ 3x + 4y & = & 3 \end{array}$$

MEGOLDÁS. A számolás megkönnyítésére vagy készítsünk osztási táblát, vagy használjuk a ?? oldalon található ?? ábra szorzástábláját.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{3S_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{S_2 - 3S_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

azaz az egyenletrendszernek több megoldása van. Itt ez nem azt jelenti, hogy végtelen sok, hanem azt, hogy legalább egy paraméter végigfut $\mathbb{Z}_5$ összes elemén. Szabad változó az y , legyen $y = s$, így $x = 3 - 4s = 3 + s$, tehát $(x, y) = (3 + s, s)$, azaz a vektorok mátrixjelölésével:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s \in \mathbb{Z}_5$$

Mivel $\mathbb{Z}_5$ -nek öt eleme van, ezért s -nek is ennyi értéke lehet, azaz az első egyenletrendszer összes megoldása $(3, 0)$, $(4, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 4)$.

A másik egyenletrendszer megoldása:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{3S_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{S_2 - 3S_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{array} \right],$$

amiből $2y = 4$, azaz $y = 2$, $x + 4 \cdot 2 = 3$, azaz $x = 0$. Tehát a megoldás $(x, y) = (0, 2)$. $\square$

Feladatok

2.17.* LÉPCSŐS ALAK: IGAZ – HAMIS Melyek igazak, melyek hamisak az alábbi állítások közül?

- Egy mátrix minden lépcsős alakjában ugyanannyi nem-zérus sor van.
- Egy mátrix minden lépcsős alakjában ugyanannyi fő-oszlop (bázisoszlop) van.
- Minden valós mátrixnak van lépcsős alakja, ami egyértelmű.
- Különböző mátrixoknak különböző a redukált lépcsős alakjuk.
- Ha egy mátrix elemi sorműveletekkel egy másikba vihető, akkor redukált lépcsős alakjuk megegyezik.

2.18.* EGYENLETRENDSZEREK: IGAZ – HAMIS Melyek igazak, melyek hamisak az alábbi állítások közül?

- A bővített mátrixon végrehajtott elemi sorműveletek közben az egyenletrendszer megoldáshalmaza nem változik.
- Egy lineáris egyenletrendszer nem konzisztens, ha több egyenletről áll, mint ahány ismeretlenes.
- Ha egy valószínűsíthető lineáris egyenletrendszernek van két különböző megoldása, akkor végtelen sok is van.
- Egy homogén lineáris egyenletrendszer mindig konzisztens.

Határozzuk meg valamely lépcsős alakját, majd a redukált lépcsős

alakját az alábbi mátrixoknak!

$$2.19. \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2.20. \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Ekvivalensek-e az alábbi egyenletrendszerek?

$$2.21. \begin{cases} 3x + 2y - 2z = 1 \\ 2x + 3y - 3z = -1 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 2y - 2z = 0 \\ 3x + 3y - 2z = 3 \\ 5x - 3y + 2z = 5 \end{cases}$$

$$2.22. \begin{cases} 2x + 3y + 5z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = 3 \\ 5x - 4z = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y - 3z = 3 \\ 5x + 5y + 7z = 3 \end{cases}$$

2.23. Csak egész számokkal számolva megoldható-e az az egyenletrendszer, melynek bővített mátrixa a következő:

$$a) \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 \\ 7 & 8 & 3 & 7 \\ 11 & 7 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 \\ 7 & 8 & 3 & 7 \\ 11 & 7 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

2.24. SORMŰVELETEK REVERZIBILITÁSA Mutassuk meg, hogy minden elemi sorművelettel átalakított mátrixhoz van egy olyan sorművelet, mely azt visszaalakítja.

Megoldás a gyakorlatban

Bár e szakasz tartalma elsősorban nem a lineáris algebra, hanem a numerikus analízis témakörébe tartozik, ismerete elengedhetetlen annak, aki a gyakorlatban lineáris algebrai eszközöket alkalmaz. Először a Gauss- és Gauss–Jordan-kiküszöbölés műveletigényét, majd numerikus megbízhatóságának kérdését vizsgáljuk. Ezután az iterációs módszerek lényegét vázoljuk, melyek alkalmazásakor az együtthatómátrix nem változik, így a számítási hibák sem halmozódnak. Ráadásul e módszerek a ritka mátrixokat sem „rontják el”, mint a Gauss-módszer, mely sok zérust ír fölül.

A kiküszöbölés műveletigénye Ahhoz, hogy a lineáris egyenletrendszer különböző megoldási módszereit össze tudjuk hasonlítani, azt is tudnunk kell, mennyi a műveletigényük. A flop mértékegységről részletesen a függelékben írunk a ?? oldalán.

2.50. TÉTEL (A KIKÜSZÖBÖLÉS MŰVELETIGÉNYE). A Gauss- és a Gauss–Jordan-módszer műveletigénye egy n -ismeretlenes, n egyenletből álló egyenletrendszer esetén egyaránt

$$\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6} \text{ összeadás/kivonás, } \frac{n^3}{3} + n^2 - \frac{n}{3} \text{ szorzás/osztás.}$$

azaz összesen

$$\frac{2}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{7}{6}n \text{ flop,}$$

azaz jó közelítéssel $2n^3/3$ flop.

BIZONYÍTÁS. Először felelevenítünk két elemi összefüggést, amire a bizonyításban szükség van:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

A továbbiakban feltételezzük, hogy a kiküszöbölés során a főátlóba kerülő elemek egyike sem 0. A Gauss-módszernél a főátló alatti elemek eliminálásához $\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n$ összeadás és $\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n$ szorzás szükséges. A visszahelyettesítés $\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$ összeadásból és $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ szorzásból áll. Ha a Gauss–Jordan-módszernél a főátló alatti elemek kiküszöbölése mellett a főátló elemeit is 1-re változtatjuk, az $\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n$ összeadás mellett $\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$ szorzás szükséges. A főátló feletti elemek eliminálásához $\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$ összeadás és ugyanennyi szorzás kell. A számítások részletezését az olvasóra bízunk. $\square$

Numerikusan instabil egyenletrendszerek A gyakorlati feladatokban gyakran mérési eredményekkel, így nem pontos adatokkal dolgozunk.

2.51. PÉLDA (INSTABIL EGYENLETRENDSZER). Oldjuk meg a következő egyenletrendszert!

$$6.73x - 8.97y = 5.61$$

$$4.79x - 6.39y = 3.99$$

Mutassuk meg, hogy az együtthatók 0.01-dal való megváltoztatása a megoldások nagy megváltozását okozhatja, sőt az is elérhető, hogy az egyenletrendszernek ne legyen, vagy épp végtelen sok megoldása legyen!

MEGOLDÁS. Az egyenletrendszer megoldása: $x = 1.5$, $y = 0.5$. Az első egyenletben az x együtthatóját újra mérjük, és másodszorra egy századdal kevesebbnek, 6.72-nek adódik. Oldjuk meg ezt az egyenletrendszert is! Az eredmény meglepő módon nagyon messze van az előzőtől: $x \approx -2.26$, $y \approx -2.32$. Újabb mérés az y együtthatóját -8.96 -nak mutatja. E két együttható egy századdal való megváltozása után a megoldás messze van mindkét előző eredménytől: $x \approx 4.35$, $y \approx 2.64$. Ha végül az első egyenlet konstans tagját is megváltoztatjuk egy századdal 5.62-re, akkor $x \approx 7.21$, $y \approx 4.78$ lesz az eredmény, ha pedig 5.60-ra, akkor – csemegeként – ismét a kerek $x = 1.5$, $y = 0.5$ értékeket kapjuk.

A fenti egyenletrendszeren tovább változtatva az együtthatókat az is elérhető, hogy végtelen sok megoldása legyen:

$$6.72x - 8.96y = 5.60$$

$$4.80x - 6.40y = 4.00$$

ugyanis itt a két egyenlet egymás konstansszorososa. Ha pedig a második egyenlet konstans tagját visszaírjuk 3.99-re, egy ellentmondó egyenletrendszert kapunk. $\square$

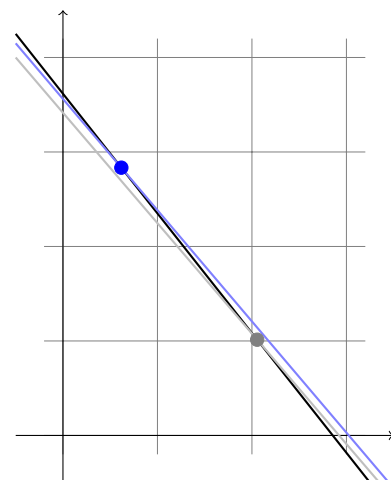
Ilyen megbízhatatlan eredményekkel a gyakorlatban semmit nem lehet kezdeni!

Az olyan egyenletrendszert, melyben az együtthatók vagy a konstans tagok kis változása a megoldásban nagy változást okoz, *numerikusan instabillnak* vagy *rosszul kondicionáltnak* nevezzük. Egyébként *numerikusan stabil*, illetve *jól kondicionált* egyenletrendszerről beszélünk.

Világos, hogy a fentiek nem precíz matematikai fogalmak. Később precízen definiálva számmal fogjuk mérni a kondicionáltság fokát, de azt, hogy egy adott egyenletrendszer megoldásai elfogadhatóak-e vagy nem, csak a feladat döntheti el.

A numerikus instabilitás okát szemlélteti a 2.12. ábra. Kétváltozós egyenletrendszerek esetén, ha a két egyenes grafikonja „közel” van egymáshoz, azaz majdnem egybe esnek, akkor kis változások az egyeneseken messze vihetik a metszéspontot, de párhuzamossá is tehetik a két egyenest.

Ha a gyakorlatban numerikusan instabil egyenletrendszerrel találkozunk, vizsgáljuk meg, hogy az egyenleteink közti „majdnem” lineá-



2.12. ábra: Instabil egyenletrendszer, melyben az egyenletek együtthatóinak kis megváltoztatása a megoldás nagy megváltozását okozza.

ris összefüggőség mögött nem valódi lineáris összefüggőség van-e kis mérési hibával.

Részleges főelemkiválasztás A következő példákban lebegőpontos aritmetikát használunk. A számításokat úgy kell elvégezni, hogy az adott pontosságnak megfelelően minden részeredményt p értékes jegyre kerekítünk.

2.52. PÉLDA (GAUSS-MÓDSZER LEBEGŐPONTOS SZÁMOKKAL). Oldjuk meg az alábbi – numerikusan stabil – egyenletrendszert pontosan, majd 3 értékes jegy pontossággal számolva.

$$\begin{aligned} 10^{-4}x + y &= 2 \\ x - y &= 0 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. Pontosán számolva

$$\left[\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{s_2 - 10^4 s_1} \left[\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 0 & -1 - 10^4 & -2 \cdot 10^4 \end{array} \right]$$

amiből az eredmény $x = y = \frac{2 \cdot 10^4}{1 + 10^4}$. Igazolható, hogy az egyenletrendszer numerikusan stabil, ami azt jelenti, hogy például 10^{-4} helyébe 0-t helyettesítve, vagyis kicsit változtatva egy együtthatót, a kapott

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

egyenletrendszer megoldása csak kicsit különbözik az előzőtől: $x = y = 2$. Végezzük most el a Gauss-kiküszöbölést 3 értékes jeggyel számolva:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{s_2 - 10^4 s_1} \left[\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 0 & -1 - 10^4 & -2 \cdot 10^4 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 0 & -10^4 & -2 \cdot 10^4 \end{array} \right],$$

ahol a közelítésnél a $\text{fl}(-1 - 10^4) = -10^4$ összefüggést használtuk. Az így kapott egyenletrendszernek viszont $x = 0, y = 2$ a megoldása, ami nagyon messze van az eredeti egyenletrendszer megoldásától! Most végezzünk egy apró változtatást: először cseréljük fel a két egyenletet!

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 10^{-4} & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{s_2 - 10^{-4} s_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 + 10^{-4} & 2 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right],$$

amelynek megoldása $x = y = 2$, ami nagyon közel van a pontos megoldáshoz! $\square$

Mi az oka a két megoldás közti különbségnek, és fel tudnánk-e használni minél jobb megoldás megtalálásában?

Mindkét megoldásban az első egyenlet konstansszorosát hozzáadtuk a második egyenlethez, de az első esetben a kisebb, a másodikban az első oszlop nagyobb elemét választottuk főelemnek. Amikor a kisebbet választottuk, akkor az első sort egy kis számmal osztottuk, vagyis reciprokával – egy nagy számmal – szoroztuk, és ezt adtuk a második sorhoz. A nagy számmal való beszorzás következtében a második egyenlet együtthatóit „elnyomták” e nagy számok, nagyon megváltoztatva az egyenletet, aminek következtében a megoldások is nagyon megváltoztak! A $\text{fl}(-1 - 10^4) = -10^4$ kerekítés hatása, vagyis a -1 „eltüntetése”, ekvivalens azzal, mintha az eredeti egyenletrendszer helyett a következőt kéne megoldani:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

És ennek valóban $x = 0$, $y = 2$ a megoldása! Amikor viszont az első oszlop nagyobbik elemét választottuk főelemnek, a sort egy kis számmal kellett beszorozni, és ezt hozzáadni a másik sorhoz, vagyis kerekítéskor az eredeti egyenlet együtthatói megmaradtak, az egyenletrendszer kevésbé torzult. Ennek alapján megfogalmazható egy széles körben elterjedt szabály: a Gauss-féle kiküszöbölési eljárás során, lebegőpontos adatokkal dolgozva minden oszlopban a szóbajöhető elemek közül – sorcserék segítségével – mindig a legnagyobb abszolút értékűt válasszuk főelemnek! E módszert *részleges főelemkiválasztásnak*, illetve *részleges pivotálásnak* nevezik.

Bizonyos – a gyakorlatban ritkán előforduló – esetekben jobb eredmény kapható a *teljes főelemkiválasztás* módszerével. Ekkor főelemnek az összes még hátralévő elem abszolút értékben legnagyobbikát választjuk. Itt oszlopcserékre is szükség van, és műveletigényesebb is ez az eljárás, ezért ritkán alkalmazzák.

2.53. PÉLDA (RÉSZLEGES FŐELEMKIVÁLASZTÁS). *Részleges főelemkiválasztással hozzuk lépcsős alakra az alábbi mátrixot!*

$$\begin{bmatrix} 1.8 & 3.0 & 3.0 & 3.7 & 7.5 \\ 3.6 & 3.2 & 3.6 & 6.2 & 7.8 \\ 7.2 & 3.6 & 4.8 & 2.4 & 1.2 \\ 2.4 & 5.4 & 5.2 & 2.6 & 5.2 \end{bmatrix}$$

MEGOLDÁS. Az első oszlop legnagyobb eleme a harmadik sorban van,

így az első és a harmadik sor cseréjével kezdünk:

$$\begin{array}{l}
 \xrightarrow{s_1 \leftrightarrow s_3} \begin{bmatrix} 7.2 & 3.6 & 4.8 & 2.4 & 1.2 \\ 3.6 & 3.2 & 3.6 & 6.2 & 7.8 \\ 1.8 & 3.0 & 3.0 & 3.7 & 7.5 \\ 2.4 & 5.4 & 5.2 & 2.6 & 5.2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} s_2 - s_1/2 \\ s_3 - s_1/4 \\ s_4 - s_1/3 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 7.2 & 3.6 & 4.8 & 2.4 & 1.2 \\ 0.0 & 1.4 & 1.2 & 5.0 & 7.2 \\ 0.0 & 2.1 & 1.8 & 3.1 & 7.2 \\ 0.0 & 4.2 & 3.6 & 1.8 & 4.8 \end{bmatrix} \\
 \xrightarrow{s_1 \leftrightarrow s_3} \begin{bmatrix} 7.2 & 3.6 & 4.8 & 2.4 & 1.2 \\ 0.0 & 4.2 & 3.6 & 1.8 & 4.8 \\ 0.0 & 2.1 & 1.8 & 3.1 & 7.2 \\ 0.0 & 1.4 & 1.2 & 5.0 & 7.2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} s_3 - s_2/2 \\ s_4 - s_2/3 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 7.2 & 3.6 & 4.8 & 2.4 & 1.2 \\ 0.0 & 4.2 & 3.6 & 1.8 & 4.8 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 2.2 & 4.8 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 4.4 & 5.6 \end{bmatrix} \\
 \xrightarrow{s_3 \leftrightarrow s_4} \begin{bmatrix} 7.2 & 3.6 & 4.8 & 2.4 & 1.2 \\ 0.0 & 4.2 & 3.6 & 1.8 & 4.8 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 4.4 & 5.6 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 2.2 & 4.8 \end{bmatrix} \xrightarrow{s_4 - s_3/2} \begin{bmatrix} 7.2 & 3.6 & 4.8 & 2.4 & 1.2 \\ 0.0 & 4.2 & 3.6 & 1.8 & 4.8 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 4.4 & 5.6 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 2.0 \end{bmatrix} \quad \square
 \end{array}$$

Skálázás A részleges főelemkiválasztásban mindig az oszlop legnagyobb elemét választottuk. Nem lehet egy elemet nagyobbá tenni, és ezzel az egész módszert elrontani úgy, hogy egy sorát egyszerűen beszorozzuk?

2.54. PÉLDA (SOR SZORZÁSA). A 2.52. példában szorozzuk meg az első egyenletet 10^5 -nel, azaz a kisebb elemből csináljunk nagyot, és ezt az egyenletrendszert is oldjuk meg részleges főelemkiválasztással.

$$\begin{array}{rcl}
 10x + 10^5y & = & 2 \cdot 10^5 \\
 x - y & = & 0
 \end{array}$$

MEGOLDÁS. Egy egyenlet beszorozása egy nemzérus számmal ekvivalens átalakítás, így ennek az egyenletrendszernek is $x = y = \frac{2 \cdot 10^4}{1+10^4}$ a pontos megoldása. Ha 3 értékes jegyre számolunk, és alkalmazzuk a részleges főelemkiválasztás módszerét, akkor ismét rossz eredményt kapunk:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 10 & 10^5 & 2 \cdot 10^5 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{s_2 - 10s_1} \left[\begin{array}{cc|c} 10 & 10^5 & 2 \cdot 10^5 \\ 0 & -1 - 10^4 & -2 \cdot 10^4 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 0 & -10^4 & -2 \cdot 10^4 \end{array} \right],$$

amiből $x = 0$ és $y = 2$. □

Hasonlóképp zavart okozhat az együtthatómátrix egy oszlopának beszorozása is, ami az egyenletrendszeren például úgy valósítható meg, ha egyik változó mértékegységét megváltoztatjuk. (Ha például a korábban kilométerben meghatározott ismeretlent milliméterben keressük, együtthatóját minden egyenletben 10^6 -al kell osztani.)

Az együtthatók ilyen „egyenletlenségeiből” származó számítási hibák csökkentésére a *skálázás* nevű gyakorlati módszer ajánlható. Ez a

következő két skálázási szabály követéséből áll, mely a tapasztalatok szerint a gyakorlati feladatok nagy részében nagyon jó eredményt ad a részleges főelemkiválasztással együtt alkalmazva:

1. *Oszlopok skálázása:* Válasszunk a feladatban szereplő mennyiségeknek természetes mértékegységet, ezzel általában elkerülhetők az együttthathók közti tetemes nagyságrendi különbségek. Ezen kívül nincs szükség az oszlopok elemeinek beszorzására.
2. *Sorok skálázása:* Az egyenletrendszer $[A|b]$ bővített mátrixának minden sorát osszuk el az A együttthatomátrix adott sorbeli legnagyobb abszolút értékű elemével. Így A minden sorának 1 a legnagyobb eleme.

Nem ismeretes olyan módszer, mely a lebegőpontos ábrázolás korlátai mellett hatékonyan megtalálná a lehető legpontosabb eredményt. Az elmélet és a tapasztalatok alapján sűrű, nem túlzottan nagy méretű egyenletrendszerekre a skálázott főelem kiválasztásos Gauss-módszer ajánlható. A ritka egyenletrendszerekre a következőkben ismertetendő iteratív módszerek általában jobb eredményt adnak.

Iteratív módszerek A továbbiakban is csak olyan egyenletrendszerekkel foglalkozunk, melyek n -ismeretlenek és n egyenletből állnak, tehát melyek együttthatomátrixa négyzetes.

Az iteratív módszerek lényege, hogy olyan

$$x_0, x_1, \dots, x_k, \dots$$

vektorsorozatot generálunk, mely az adott egyenletrendszer megoldásvektorához konvergál. Első pillanatra meglepőnek tűnhet egy végtelen sorozat generálásával keresni a megoldást, de mivel számításaink eleve csak véges pontosságúak, gyakran igen kevés lépésben elérhetjük a megkívánt pontosságot. Ráadásul a kerekítési hibák még növelhetik is a konvergencia sebességét.

A kiindulási pont – a matematika több más területén is gyümölcsöző módszer – a fixpontkeresés. Ennek lényegét egy egyváltozós függvény példáján mutatjuk be. Legyen f egy minden valós helyen értelmezett függvény, mely bármely két a és b pontot két olyan pontba visz, melyek távolsága a és b távolságának legfeljebb a fele. Képletben:

$$|f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2}|b - a|, \text{ azaz } \frac{|f(b) - f(a)|}{|b - a|} \leq \frac{1}{2}.$$

Ez azt jelenti, hogy f összes különbségi hányadosa legfeljebb $1/2$. A sokkal általánosabban megfogalmazható Banach-féle fixpont tétel szerint ekkor egyetlen olyan $\bar{x}$ pont létezik, hogy $\bar{x} = f(\bar{x})$, és ez megkapható úgy, hogy egy tetszőleges x_0 pontból kiindulva képezzük az

$$x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots, x_{k+1} = f(x_k), \dots$$

sorozatot, és vesszük a határértékét. Ekkor

$$\bar{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k.$$

A 2.13. ábra szemlélteti a fenti állítást. Az $1/2$ -es szorzó kicserélhető tetszőleges 0 és 1 közé eső konstansra.

A **Banach fixponttétel** könnyen szemléltethető hétköznapi módon: képzeljük el, hogy egy nagyobb gumilapot néhányan körbeállva egy kerek asztal tetején széthúznak az asztal széléig, majd (most jön a leképezés!) visszaengedik eredeti állapotába. Ekkor igaz az, hogy az asztalon pontosan egy olyan pont van, mely fölött a gumilap helyben marad. E pont megkapható, ha kiválasztunk az asztalon egy tetszőleges P_0 pontot, és megnézzük, hogy a kinyújtott gumilap e fölötti pontja összehúzódáskor hová ugrik, legyen ez a P_1 pont az asztalon. A kinyújtott gumilap P_1 fölötti pontja összehúzódáskor az P_2 pont fölé ugrik, stb. Az így kapott pontsorozat a fixponthoz konvergál.

Jacobi-iteráció Az előző paragrafusban leírtakat követve megpróbáljuk az egyenletrendszert átrendezni úgy, hogy az $\mathbf{x} = f(\mathbf{x})$ alakú legyen, ahol $\mathbf{x}$ jelöli az ismeretlenek vektorát.

2.55. PÉLDA (JACOBI-ITERÁCIÓ). Oldjuk meg a

$$4x - y = 2$$

$$2x - 5y = -8$$

egyenletrendszert, majd hozzuk $\mathbf{x} = f(\mathbf{x})$ alakra, és egy tetszőleges $\mathbf{x}_0$ vektorból indulva végezzünk az $\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k)$ formulával iterációt. Számoljunk 3 tizedes pontossággal. Hová tart az így kapott vektorsorozat?

MEGOLDÁS. Az egyenletrendszert kiküszöböléssel megoldva kapjuk, hogy $\mathbf{x} = (1, 2)$ az egyetlen megoldás.

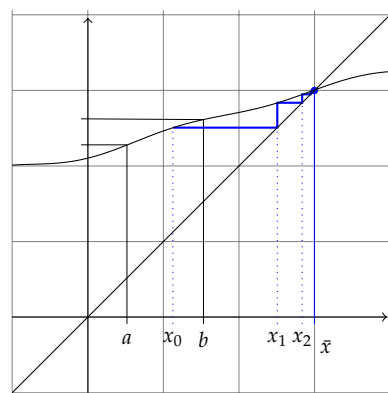
Hozzuk az egyenletrendszert $\mathbf{x} = f(\mathbf{x})$, azaz $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)$ alakra. Erre több lehetőség is adódik. Ezek közül talán az a legkézenfekvőbb, hogy az első egyenletből az x -et, a másodikból y -t kifejezzük:

$$x = \frac{y+2}{4}$$

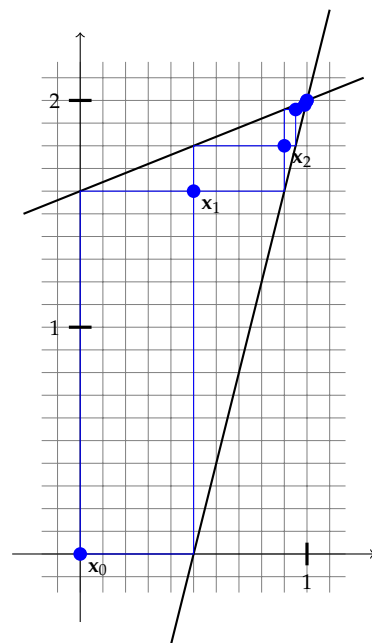
$$y = \frac{2x+8}{5}$$

Válasszunk egy $\mathbf{x}_0$ vektort tetszőlegesen, legyen pl. $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$, azaz $x = y = 0$. A fenti képletekbe helyettesítve kapjuk, hogy $\mathbf{x}_1 = \left(\frac{0+2}{4}, \frac{0+8}{5}\right) = (0.5, 1.6)$. A további értékeket egy táblázatban adjuk meg:

	$\mathbf{x}_0$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$	$\mathbf{x}_5$	$\mathbf{x}_6$	$\mathbf{x}_7$	$\mathbf{x}_8$
x	0	0.5	0.9	0.95	0.99	0.995	0.999	1.000	1.000
y	0	1.6	1.8	1.96	1.98	1.996	1.998	2.000	2.000



2.13. ábra: Egy függvény, mely bármely a és b pontot két olyan pontba visz, melyek távolsága a és b távolságának legfölbbe a fele, így a függvény minden különbségi hányadosa abszolút értékben legfölbbe $1/2$. E függvénynek pontosan egy fixpontja van, mely megkapható egy tetszőleges x_0 pontból induló $x_k = f(x_{k-1})$ sorozat határértékéént.



2.14. ábra: A Jacobi-iteráció szemléltetése

E példa esetén tehát a végtelen sorozat konvergensenek mutatkozott, de a kerekítési hiba folytán véges sok lépés után megtalálta a konvergenciapontot. $\square$

Az általános eset hasonlóan írható le. Tegyük fel, hogy az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

egyenletrendszer egyértelműen megoldható és főátlójának minden eleme különbözik 0-tól. A *Jacobi-iteráció* menete tehát a következő. A k -adik egyenletből fejezzük ki az x_k változót:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1,n-1}x_{n-1} - a_{1n}x_n) \\ x_2 &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - \dots - a_{2,n-1}x_{n-1} - a_{2n}x_n) \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Válasszunk az ismeretlenek $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektorának egy $\mathbf{x}_0$ kezdőértéket, pl. legyen $\mathbf{x}_0 = (0, 0, \dots, 0)$. A (2.25) egyenletrendszer jobb oldalába helyettesítsük be $\mathbf{x}_0$ koordinátáinak értékét, a bal oldal adja $\mathbf{x}_1$ koordinátáit. Ezt a lépést ismételjük meg, generálva az $\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots$ vektorokat addig, míg el nem érjük a megfelelő pontosságot.

Gauss–Seidel-iteráció A Jacobi-iteráció gyorsaságán könnyen javíthatunk, ha a (2.25) egy egyenletének jobb oldalába való behelyettesítés után a bal oldalon kapott változó értékét azonnal fölhasználjuk, nem várunk vele a ciklus végéig. Ezt a módosított algoritmust nevezzük *Gauss–Seidel-iterációnak*.

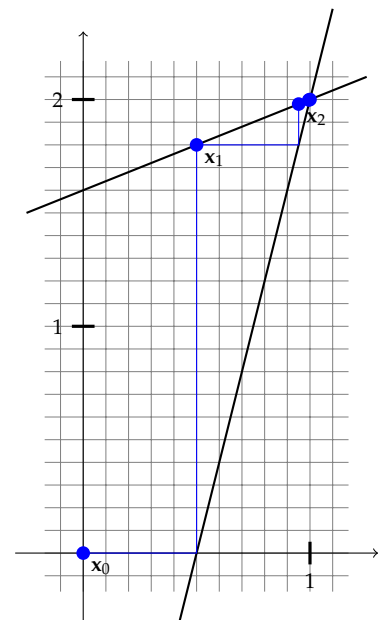
2.56. PÉLDA (GAUSS–SEIDEL-ITERÁCIÓ). Oldjuk meg a

$$\begin{aligned} 4x - y &= 2 \\ 2x - 5y &= -8 \end{aligned}$$

egyenletrendszert Gauss–Seidel-iterációval.

MEGOLDÁS. Itt is, mint a Jacobi-iterációnál az

$$\begin{aligned} x &= \frac{y+2}{4} \\ y &= \frac{2x+8}{5} \end{aligned}$$



2.15. ábra: A Gauss–Seidel-iteráció szemléltetése

egyenleteket használjuk, de míg a Jacobi-iterációnál $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$ kezdőérték után az $x = \frac{0+2}{4} = \frac{1}{2}$, $y = \frac{0+8}{5} = \frac{8}{5}$ értékek következtek, a Gauss–Seidel-iterációnál a második egyenletben 0 helyett már az első egyenletben kiszámolt $x = \frac{1}{2}$ értéket helyettesítjük, azaz $y = \frac{2\frac{1}{2}+8}{5} = \frac{9}{5}$. A további értékeket egy táblázatban adjuk meg de úgy, hogy jelezzük a kiszámítás sorrendjét:

	$\mathbf{x}_0$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$
x	0	0.5	0.95	0.995	1.000
y	0	1.8	1.98	1.998	2.000

Hasonlítsuk össze az eredményt a Jacobi iterációnál készített táblázattal. □

Mindkét iteráció jól szemléltethető a 2-ismeretlenes esetben. A 2.14. és a 2.15. ábrák ezt mutatják. Ha pontosan számolunk, végtelen sok pontot kapunk, az ábrák csak néhány pontot mutatnak.

Az iterációk konvergenciája A fenti példákból nem látszik, hogy vajon a Jacobi- és a Gauss–Seidel-iterációk mindig konvergálnak-e.

2.57. PÉLDA (DIVERGENS ITERÁCIÓ). Oldjuk meg Jacobi- és Gauss–Seidel-iterációval a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}x - y &= 2 \\ 2x - y &= 5\end{aligned}$$

MEGOLDÁS. Alakítsuk át az egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}x &= y + 2 \\ y &= 2x - 5\end{aligned}$$

Először próbálkozzunk Jacobi-iterációval:

	$\mathbf{x}_0$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$	$\mathbf{x}_5$	$\mathbf{x}_6$	$\mathbf{x}_7$	$\mathbf{x}_8$
x	0	2	-3	1	-9	-1	-21	-5	-45
y	0	-5	-1	-11	-3	-23	-7	-47	-15

Úgy tűnik, nem konvergens a vektorsorozat, mint ahogy nem tűnik annak a Gauss–Seidel-iterációnál sem:

	$\mathbf{x}_0$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$
x	0	2	1	-1	-5
y	0	-1	-3	-7	-15

A divergencia leolvasható az iterációkat szemléltető ábrákról is! □

2.58. DEFINÍCIÓ (SORONKÉNT DOMINÁNS FŐÁTLÓJÚ MÁTRIX). Azt mondjuk, hogy az $n \times n$ -es $\mathbf{A}$ mátrix soronként (szigorúan) domináns főátlóval rendelkezik, vagy soronként (szigorúan) domináns főátlójú, ha a főátló minden eleme abszolút értékben nagyobb a sorában lévő többi elem abszolút értékeinek összegénél, azaz képletben

$$\begin{array}{rcl} |a_{11}| & > & |a_{12}| + \dots + |a_{1,n-1}| + |a_{1n}| \\ |a_{22}| & > & |a_{21}| + \dots + |a_{2,n-1}| + |a_{2n}| \\ \vdots & & \ddots \\ |a_{n-1,n-1}| & > & |a_{n-1,1}| + |a_{n-1,2}| + \dots + |a_{n-1,n}| \\ |a_{nn}| & > & |a_{n1}| + |a_{n2}| + \dots + |a_{n,n-1}| \end{array}$$

Hasonlóan definiálható az oszloponként domináns főátlójú mátrix is.

Világos, hogy az alábbi mátrixok soronként domináns főátlójúak:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -10 & 1 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \\ -1 & -2 & 10 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & .25 & .25 & .25 \\ .25 & 1 & .25 & .25 \\ .25 & .25 & 1 & .25 \\ .25 & .25 & .25 & 1 \end{bmatrix}.$$

Az alábbi mátrixok nem soronként domináns főátlójúak, de sorcserékkel azzá tehetők:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & -2 & 10 \\ -10 & 1 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} .25 & .25 & .25 & 1 \\ 1 & .25 & .25 & .25 \\ .25 & .25 & 1 & .25 \\ .25 & 1 & .25 & .25 \end{bmatrix}.$$

Az alábbi egyenletrendszer együtthatómátrixa soronként domináns főátlójú:

$$\begin{array}{rcl} 4x - y & = & 11 \\ 2x - 5y & = & -17 \end{array}$$

2.59. TÉTEL (ELÉGSÉGES FELTÉTEL AZ ITERÁCIÓK KONVERGENCIÁJÁRA). Ha az n egyenletből álló n -ismeretlenes egyenletrendszer együtthatómátrixa soronként domináns főátlójú, akkor bármely indulóvektor esetén a Jacobi- és a Gauss–Seidel-iteráció is konvergens.

E tételt nem bizonyítjuk. Megjegyezzük, hogy a tételbeli feltétel nem szükséges, csak elégséges, azaz olyan egyenletrendszeren is konvergens lehet valamelyik iteráció, melynek nem domináns főátlójú az együtthatómátrixa. Hasonló tétel igaz oszloponként domináns főátlójú együtthatómátrixok esetén is.

A domináns főátlójú mátrixokon a Gauss–Seidel-iteráció sosem lassabb, mint a Jacobi-iteráció, sőt, gyakran érezhetően gyorsabb. Az

viszont előfordulhat, hogy a Gauss–Seidel-iteráció divergens, míg a Jacobi-iteráció konvergens (ld. 2.26. feladat).

A gyakorlatban ezeknek az iterációknak különböző, hatékonyabb javításait használják. E témában az olvasó figyelmébe ajánljuk a „numerikus módszerek” témában írt könyveket, web-oldalakat.

Feladatok

Jacobi-iteráció

2.25. Oldjuk meg a

$$4x - y = 8$$

$$2x - 5y = -5$$

egyenletrendszert Jacobi-iterációval! Számoljunk 3, majd 4 értékes jegyre!

Vegyes feladatok

2.26. ■ **JACOBI-ITERÁCIÓ KONVERGÁL, GAUSS–SEIDEL-ITERÁCIÓ NEM** Írjunk programot annak az állításnak az ellenőrzésére, hogy a

$$x + z = 0$$

$$-x + 5/6y = 0$$

$$x + 2y - 3z = 1$$

egyenletrendszeren a Jacobi-iteráció konvergál, a Gauss–Seidel-iteráció nem.

2.27. **GAUSS-ELIMINÁCIÓ DOMINÁNS FŐÁTLÓJÚ MÁTRIXON** Bizonyítsuk be, hogy ha az **A** mátrix főátlója soronként domináns, akkor végrehajtható rajta a főelemkiválasztásos Gauss-elimináció sorcsere nélkül!

2.28. **AZ ITERÁCIÓK SZEMLÉLTETÉSE** A **A** városból elindul egy **A** jelű vonat a **B** város felé, vele egyidőben a **B** városból egy **B** jelű **A** felé. A **B** vonat indulásával egyidőben a **B** vonat orráról elindul egy légy is **A** felé, de amint találkozik

az **A** vonattal megfordul, és addig repül, míg a **B** vonattal nem találkozik, amikor ismét megfordul, stb. Mindhármuk sebessége konstans, de a légy sebessége nagyobb mindkét vonaténál.

1. Egy táblázatban megadjuk mindkét vonat távolságát az indulási helyüktől km-ben mérve azokban a pillanatokban, amikor a légy épp a **B** vonattal találkozik.

	(x_0, y_0)	(x_1, y_1)	(x_2, y_2)	(x_3, y_3)
x : távolság A -tól	0	40	48	49.6
y : távolság B -től	0	80	96	99.2

Számítsuk ki a táblázat egy-két további oszlopát!

2. Milyen messze van **A** város **B**-től, ha a légy sebessége 200 km/h?
3. Most egy másik táblázatban megadjuk annak a vonatnak a távolságát az indulási helyétől, amelyik épp találkozik a légygel:

	y_0	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3
x : távolság A -tól		30		46		49.2	
y : távolság B -től	0		80		96		99.2

Számítsuk ki a táblázat egy-két további oszlopát!

4. Milyen messze van **A** város **B**-től, ha a légy sebessége 200 km/h?
5. Mi köze van e feladatnak a Jacobi- és a Gauss–Seidel-iterációhoz?

Megoldások

2.4. a) igen, b) igen, c) nem, d) igen, e) igen, f) nem.

2.5. Könnyen látható, hogy mindkét egyenletrendszer egyetlen megoldása: $x = 2$, $y = 1$, tehát a két egyenletrendszer ekvivalens.

2.6. Az első egyenletrendszer nem oldható meg a $0 = 3$ alakú egyenlet miatt, de a második sem, hisz nincs olyan x és y , melyre $x + y = 2$ és $x + y = 7$ lenne, hisz $2 \neq 7$.

2.7. Behelyettesítés után mindkét egyenlet $0 = 0$ alakú, amit tetszőleges x és y kielégít, így az összes (x, y) számpár megoldása az egyenletrendszernek.

2.8. $x = 1$, y tetszőleges, azaz az összes $(1, y)$ alakú számpár megoldás.

2.9. A második egyenlet behelyettesítés után $0 = 1$ alakú, így az egyenletrendszernek nincs megoldása.

2.10. $x = 1$, $y = 2$, azaz $(x, y) = (1, 2)$ az egyetlen megoldás.

2.12. a) A sormodellben két metsző egyenest kell megrajzolni ($y = 7/3x - 2/3x$, $y = -2 + 3/2x$), melyek a $(2, 1)$ pontban metszik egymást, míg az oszlopmodellben a $(2, 3)$, a $(3, -2)$ vektorokat és azok lineáris kombinációjaként előállított $(7, 4) = 2(2, 3) + (3, -2)$ vektort!

b) A sormodellben két párhuzamos egyenest kell megrajzolni, míg az oszlopmodellben a $(2, 3)$ és a $(4, 6)$ vektorokat, melyek egy egyenesbe esnek, és semmilyen lineáris kombinációjuk sem adja ki a $(3, 4)$ vektort!

2.13. A három sík közül semelyik kettő nem párhuzamos, másrészt a normálvektorai egy síkba esnek, ugyanis $2(1, 1, 2) + (1, 2, 4) = (3, 4, 8)$. Ez azt jelenti, hogy van olyan vektor, mely mindhárom síkkal párhuzamos. Az első esetben a három sík egy egyenesen megy át, mivel van a síkoknak közös pontjuk, pl. a $(3, 0, 0)$ pont, így végtelen sok megoldása is van, míg a második esetben a síkoknak nincs közös pontjuk.

Az egyenletrendszerek ekvivalensek a következő vektoregyenletekkel:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Itt a közös együtthatómátrix minden oszlopvektora benne van a

$$2x + y - z = 0$$

egyenletű síkban, (ez könnyen ellenőrizhető a vektorok koordinátáinak a sík egyenletébe való helyettesítésével), és ki

is feszítik a síkot, mert a három vektor nem kollineáris. Másrészt a $(3, 3, 9)$ vektor is benne van e síkban, a $(3, 3, 1)$ vektor viszont nem. Tehát az első egyenletrendszer megoldható, a második nem.

2.14. A sormodell szerinti ábra az a) esetben 3 síkbeli egyenest tartalmaz, melyek közt van két párhuzamos, így az egyenletrendszer nem oldható meg. A b) esetben a három egyenes egy ponton megy át, ez a megoldás: $x = 2$, $y = 1$. A c) esetben ugyan nincsenek párhuzamos egyenesek, de nincs közös pontjuk sem, így az egyenletrendszer nem oldható meg. Az oszlopmodell szerint az a)

$$x + y = 3$$

$$x + y = 4$$

$$x + 2y = 4$$

egyenletrendszer ekvivalens a következővel:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Az $(1, 1, 1)$ és az $(1, 1, 2)$ vektorok benne fekszenek az $x = y$ egyenletű síkban, mivel első két koordinátájuk megegyezik, ezért minden lineáris kombinációjuk is ebbe a síkba esik. A $(3, 4, 4)$ vektor viszont nem esik e síkba, így *független* az előbbi kettőtől, tehát nem áll elő azok lineáris kombinációjaként. Vagyis ez az egyenletrendszer nem oldható meg. A b) és c) egyenletrendszerekben a bal oldali két vektor, az $(1, 1, 1)$ és az $(1, 2, 3)$ az $x - 2y + z = 0$ egyenletű síkban van, melyben a $(3, 4, 5)$ vektor benne van, míg a $(3, 3, 5)$ vektor nincs benne, tehát b) megoldható, c) nem.

2.15. a) hamis, az állítás csak úgy igaz, ha a párhuzamos hipersíkok különbözőek is (két azonos hipersíkot párhuzamosnak tekintünk), b) hamis, például a 2.9. (a) ábrán látható esetben nincsenek párhuzamos síkok, és mégis megoldás, c) igaz, mert akkor a jobb oldalon álló bármely vektor kifejezhető e két kétdimenziós vektor lineáris kombinációjaként, tehát az egyenletrendszer megoldható.

2.16.

a) Egy két egyenletből álló háromismeretlenes egyenletrendszer sormodellje szerinti ábra a **három**dimenziós térben **két** darab **síkból** áll, melyek ha **párhuzamosak**, **de nem azonosak**, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása, egyébként megoldásainak száma **végtelen**. Oszlopmodellje a **kétdimenziós** térben **négy** darab **vektorból** áll (három lineáris kombinációja a negyedik).

b) Egy három egyenletből álló kétismeretlenes egyenletrendszer sormodellje szerinti ábra a **kétdimenziós** térben **három egyenesből** áll, míg az oszlopmodellje a **három**dimenziós térben **három** darab **vektorból**.

c) Egy négy egyenletről álló ötismeretlenes egyenletrendszer sormodellje szerinti ábra az ötdimenziós térben **négy** darab **hipersíkból** áll. Oszlopmodellje a **négydimenziós** térben **hat** darab **vektorból** áll.

2.17. a) Igaz, ez a szám megegyezik a főelemek számával. b) Igaz, ez a szám megegyezik a főelemek számával. c) Hamis, van lépcsős alakja minden mátrixnak, de csak a redukált lépcsős alak egyértelmű. d) Hamis. e) Igaz.

2.18. a) Igaz. b) Hamis, az egyenletrendszer megoldhatósága nem függ az egyenletek számától. Az ismeretlenek számánál akár kevesebb, akár több egyenletről álló rendszer akár konzisztens, akár inkonzisztens is lehet. c) Igaz. d) Igaz, a nullvektor mindig megoldás.

$$2.19. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2.20. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2.21. Igen, mindkettőnek $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ az egyetlen megoldása, azaz megoldáshalmazuk megegyeznek.

2.22. Igen, mindkettő bővített együtthatómátrixának redukált lépcsős alakja a zérussor nélkül

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.8 & 1.8 \\ 0 & 1 & 2.2 & -1.2 \end{bmatrix}$$

2.23. a) Igen. b) Nem.

2.24. Az $S_i \leftrightarrow S_j$ művelet eredményét önmaga visszaállítja, az cS_i műveletét $\frac{1}{c}S_i$, és az $S_i + cS_j$ műveletét $S_i - cS_j$.

2.25. Legyen $x_0 = (0, 0)$. Az iteráció képletei:

$$x = \frac{y+8}{4}, \quad y = \frac{2x+5}{5}.$$

Az iteráció lépéseinek táblázata 3 értékes jeggyel számolva:

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x	0	2	2.25	2.45	2.48	2.50	2.50
y	0	1	1.80	1.90	1.98	1.99	2.00

Az iteráció lépéseinek táblázata 4 értékes jeggyel számolva:

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x	0	2	2.25	2.45	2.475	2.495	2.498	2.500	2.5
y	0	1	1.80	1.90	1.980	1.990	1.998	1.999	2.0

2.27.

2.28. A Jacobi-iteráció szerinti módon, a vonatok valamelyikének és a légynek a k -edik találkozásából kiszámítva a $k+1$ -edik találkozássra jellemző távolságokat, az $x_{k+1} = ay_k + b$, $y_{k+1} = cy_k + d$ egyenletekre jutunk. Az első táblázat adatait behelyettesítve, és a , b , c és d értékre megoldva az

3

Megoldhatóság és a megoldások tere

E fejezetet az egyenletrendszer megoldásainak jellemzésére szánjuk. Ennek során megismerkedünk az altér fogalmával és a velük végezhető legegyszerűbb műveletekkel. Végül megmutatjuk, hogy minden konzisztens lineáris egyenletrendszer origóhoz legközelebbi megoldása az egyetlen, mely a sortérbe esik, és bármely két megoldásának különbsége merőleges rá.

Homogén és inhomogén egyenletrendszerek megoldásai

Az előzőekben a megoldások megtalálásának módszereit tanulmányoztuk. E szakaszban a megoldhatóság kérdését és a megoldások halmazának legfontosabb tulajdonságait vizsgáljuk. A vizsgálatokban a lineáris egyenletrendszerek mindkét geometriai interpretációja fontos szerepet kap.

Kötött változók száma, mátrix rangja A redukált lépcsős alak egyértelműségének egy nyilvánvaló, de fontos folyománya az alábbi eredmény:

3.1. KÖVETKEZMÉNY (FŐELEMENK OSZLOPAI). *Egy valós mátrix bármely lépcsős alakjában a főelemek ugyanazokban az oszlopokban vannak, tehát ezek száma is független a lépcsős alaktól.*

A bizonyítás azonnal adódik abból, hogy bármely lépcsős alak főelemeiből kapjuk a redukált lépcsős alak vezéregyeseit, így bármely lépcsős alak főelemei ugyanott vannak, ahol a vezéregyese, a redukált lépcsős alak pedig egyértelmű.

Ebből az is következik, hogy bármely valós mátrix esetén

bármely lépcsős alak főelemeinek száma	=	bármely lépcsős alak nemzérus sorainak száma	=	a redukált lépcsős alak vezéregye- seinek száma.
--	---	--	---	--

Ez a következő definícióhoz vezet.

3.2. DEFINÍCIÓ (MÁTRIX RANGJA). Egy mátrix valamely lépcsős alakjában a nemnulla sorok számát a mátrix rangjának nevezzük. Az $\mathbf{A}$ mátrix rangját $r(\mathbf{A})$ jelöli.

3.3. PÉLDA (MÁTRIX RANGJÁNAK KISZÁMÍTÁSA). Számítsuk ki az alábbi mátrixok rangját!

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

MEGOLDÁS. Az első és második mátrix lépcsős alakú, rangjuk azonnal leolvasható: 1 és 2. A harmadik és negyedik mátrix elemi sorműveletekkel

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \text{ illetve } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

alakra hozható, tehát a rang 4, illetve 2. □

3.4. ÁLLÍTÁS (KÖTÖTT ÉS SZABAD VÁLTOZÓK SZÁMA). Ha egy n -ismeretlenes egyenletrendszer megoldható, és együtthatómátrixának rangja r , akkor a Gauss- vagy a Gauss–Jordan-módszerrel kapott megoldásában a kötött változók száma r , a szabad változók száma $n - r$.

► Megjegyezzük, hogy egyelőre csak annyit látunk, hogy ha az együtthatómátrix és a bővített mátrix rangja r , akkor az egyenletrendszernek van olyan megoldása, amelyben a kötött változók száma r , a szabad változóké $n - r$, és egy ilyen megoldás megkapható a Gauss- vagy a Gauss–Jordan-módszerrel. Arról még nem tudunk semmit, hogy a változók sorrendjének felcserélésével, vagy más megoldási módszerrel nem kaphatunk-e más megoldást. A következő fejezetben be fogjuk látni, hogy a kötött és szabad változók száma független a változók sorrendjétől, sőt a megoldás módszerétől is.

► Például a

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

kibővített mátrixhoz tartozó egyenletrendszerben 3 a kötött és 4 a szabad változók száma.

Egyenletrendszer megoldhatóságának feltétele Tudjuk, hogy egy lineáris egyenletrendszer pontosan akkor *nem* oldható meg, ha a bővített mátrix lépcsős alakjának van olyan sora, melyben csak a legutolsó elem nem nulla. Ez ugyanis egyenletté visszaírva $0 = c$ alakú, ahol $c \neq 0$, és ennek az egyenletnek nincs megoldása. Ez viszont azt jelenti, hogy ilyenkor a bővített mátrix rangja nagyobb az együtthatómátrix rangjánál. E megállapítás azonnali következménye a következő tétel.

3.5. TÉTEL (A MEGOLDHATÓSÁG MÁTRIXRANGOS FELTÉTELE). *Legyen egy n -ismeretlenes lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixa $\mathbf{A}$, a konstans tagokból álló vektora $\mathbf{b}$.*

1. *Ez az egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha együtthatómátrixának és bővített mátrixának rangja megegyezik, azaz*

$$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|\mathbf{b}).$$

2. *Ez az egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg egyértelműen, ha együtthatómátrixának és bővített mátrixának rangja megegyezik az ismeretlenek számával, azaz*

$$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = n.$$

BIZONYÍTÁS. Az egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha bővített mátrixának lépcsős alakjában nincs olyan sor, melynek csak az utolsó eleme nem 0. Ez épp azt jelenti, hogy $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|\mathbf{b})$.

A második állítás abból következik, hogy az egyenletrendszer akkor oldható meg egyértelműen, ha megoldható, és nincs szabad változója, vagyis az együtthatómátrix rangja megegyezik az ismeretlenek számával. $\square$

Az előzőekből az is adódik, hogy egy lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor van egynél több megoldása, ha

$$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) < n.$$

(Miért nem lehet $r(\mathbf{A}) > n$?)

Egy valós együtthatós egyenletrendszernek csak úgy lehet egynél több megoldása, ha van szabad változója. Viszont, annak minden értékéhez egy-egy másik megoldás tartozik, vagyis ekkor az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van. Így, ha $\mathbf{A}$ valós mátrix, akkor a megoldások száma, a két rang és az ismeretlenek száma közt a következő a kapcsolat:

Feltétel	Megoldások száma
$r(\mathbf{A}) < r(\mathbf{A} \mathbf{b})$	0
$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A} \mathbf{b}) = n$	1
$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A} \mathbf{b}) < n$	∞

Ha az egyenletrendszer homogén lineáris, azaz mindegyik konstans tag 0, akkor az elemi sorműveletek közben a bővített mátrix utolsó oszlopában minden elem 0 marad, így ebben az oszlopban biztosan nem lesz főelem. Eszerint a homogén lineáris egyenletrendszerek mindig megoldhatók, hisz ekkor a $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ összefüggés mindig fennáll. A megoldhatóság persze e feltétel ellenőrzése nélkül is látszik, hisz az $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ mindig megoldás! Mivel $r(\mathbf{A})$ megegyezik a redukált lépcsős alak főelemeinek számával, ezért $r(\mathbf{A}) \leq m$ és $r(\mathbf{A}) \leq n$ is fennáll, ahol m az egyenletek, n az ismeretlenek száma. Így viszont $m < n$ esetén $r(\mathbf{A}) = n$ nem állhat fenn, tehát a homogén lineáris egyenletrendszernek van az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ vektoron kívül is megoldása. Ezzel bizonyítottuk az alábbi tételt:

3.6. TÉTEL (HOMOGÉN LINEÁRIS EGYENLETRENDSZER MEGOLDHATÓSÁGA). Az $\mathbf{A}$ együtthatómátrixú homogén lineáris egyenletrendszer mindig megoldható, mert a nullvektor – az ún. triviális megoldás – mindig megoldás. Pontosán akkor van nemtriviális, vagyis a $\mathbf{0}$ -vektortól különböző megoldása is, ha

$$r(\mathbf{A}) < n,$$

ahol n az ismeretlenek – azaz $\mathbf{A}$ oszlopainak – számát jelöli. Speciálisan, az m egyenletből álló homogén lineáris egyenletrendszernek $m < n$ esetén mindig van nemtriviális megoldása.

Valós együtthatós homogén lineáris egyenletrendszerekre az előző táblázat a következő alakot ölti:

Feltétel	Megoldások száma
$r(\mathbf{A}) = n$	1
$r(\mathbf{A}) < n$	∞

3.7. PÉLDA (EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSAINAK SZÁMA). Az a paraméter mely értékei mellett van az alábbi egyenletrendszernek 0, 1, illetve ∞ sok megoldása?

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + ax_3 &= 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 &= a \\ ax_1 + x_2 + x_3 &= a^2 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. Hozzuk a bővített mátrixot lépcsős alakra:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 1 & a^2 \end{array} \right] &\xrightarrow[S_3 - aS_1]{S_2 - S_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-1 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & a^2-a \end{array} \right] \xrightarrow{S_3 + S_2} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & -(a-1)(a+2) & (a+1)(a-1) \end{array} \right] \end{aligned}$$

Látható, hogy $a = 1$ esetén az utolsó két sorban minden elem 0, tehát az együtthatómátrix és a bővített mátrix rangja is 1, így az egyenletrendszer az $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ egyenlettel ekvivalens. Ennek megoldása: $(x_1, x_2, x_3) = (1 - s - t, s, t)$, azaz oszlopvektor alakba írva:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ha $a = -2$, akkor az együtthatómátrix rangja 2, a bővített mátrix rangja 3, tehát az egyenletrendszer nem oldható meg (az utolsó sor egyenletté visszaírva $0 = 3$ alakú). Minden egyéb esetben, azaz ha $a \neq 1$ és $a \neq -2$, akkor a két rang 3, ami megegyezik az ismeretlenek számával, tehát egyetlen megoldás van. Ez ki is fejezhető:

$$x_1 = \frac{(a+1)^2}{a+2}, \quad x_2 = \frac{1}{a+2}, \quad x_3 = -\frac{a+1}{a+2}. \quad \square$$

Homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai Tekintsünk egy tetszőleges homogén lineáris egyenletrendszert. Mint a 3.6. tételben láttuk, ez biztosan megoldható, és a megoldások halmazában a nullvektor benne van. Mit mondhatunk a megoldások halmazáról, ha több megoldása is van a homogén egyenletrendszernek?

3.8. ÁLLÍTÁS (MEGOLDÁSOK LINEÁRIS KOMBINÁCIÓJA). Egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak bármely lineáris kombinációja is megoldás.

BIZONYÍTÁS. Elég az állítást két megoldásra bizonyítani. Jelölje $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ az egyenletrendszer együtthatómátrixának oszlopvektorait. Legyen $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ és $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ két tetszőleges megoldás, azaz

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \dots + \mathbf{a}_n x_n = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{a}_1 y_1 + \mathbf{a}_2 y_2 + \dots + \mathbf{a}_n y_n = \mathbf{0},$$

és c, d legyen két tetszőleges skalár. Megmutatjuk, hogy ekkor $c\mathbf{x} + d\mathbf{y}$ is megoldás, ugyanis

$$\begin{aligned} & \mathbf{a}_1(cx_1 + dy_1) + \mathbf{a}_2(cx_2 + dy_2) + \dots + \mathbf{a}_n(cx_n + dy_n) \\ &= (c\mathbf{a}_1 x_1 + d\mathbf{a}_1 y_1) + (c\mathbf{a}_2 x_2 + d\mathbf{a}_2 y_2) + \dots + (c\mathbf{a}_n x_n + d\mathbf{a}_n y_n) \\ &= c(\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \dots + \mathbf{a}_n x_n) + d(\mathbf{a}_1 y_1 + \mathbf{a}_2 y_2 + \dots + \mathbf{a}_n y_n) \\ &= \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

azaz $c\mathbf{x} + d\mathbf{y}$ is megoldás. Ez bizonyítja állításunkat.

E bizonyítás az oszlopmodellre épült, de hasonlóan egyszerű bizonyítás adható a sormmodellben is (ld. 3.9. feladat). $\square$

Altér Az, hogy vektorok egy $\mathcal{A}$ halmaza olyan, hogy az $\mathcal{A}$ -beli vektorokból képzett lineáris kombinációk is mind $\mathcal{A}$ -ban vannak, azzal ekvivalens, hogy bármely $\mathcal{A}$ -beli vektor skalárszorosa és bármely két $\mathcal{A}$ -beli vektor összege is $\mathcal{A}$ -beli (ld. a 7.4. feladatot). Másként fogalmazva: a vektorok skalárral való szorzása és a vektorok összeadása nem vezet ki $\mathcal{A}$ -ból.

Az $\mathbb{R}^n$ tér ilyen típusú részhalmazai igen fontosak. Például a síkban egy origón átmenő egyenes vektorai (az egyenes pontjaiba mutató helyvektorok) ilyenek. Hasonlóképp, a térben bármely origón átmenő sík vagy egyenes vektorai ilyenek (ld. a 3.1. ábra). Ez a következő definícióhoz vezet.

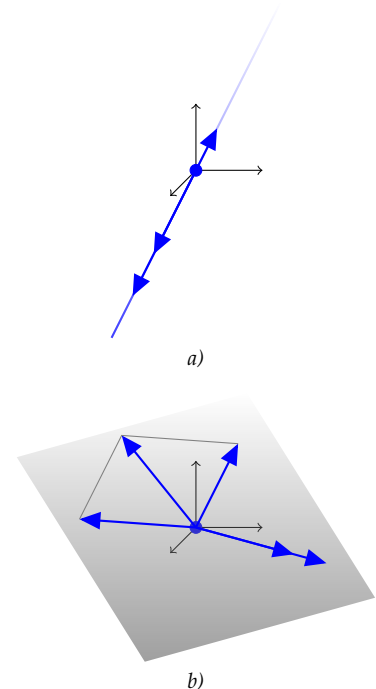
3.9. DEFINÍCIÓ (ALTÉR). Az $\mathbb{R}^n$ tér vektorainak olyan nem üres részhalmazát, mely zárt a vektorok skalárral való szorzásának és a vektorok összeadásának műveletére, az $\mathbb{R}^n$ alterének nevezzük. Képlettel kifejezve: az $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ vektorhalmaz $\mathbb{R}^n$ altere, ha

1. $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{A}$ esetén $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{A}$,
2. $\mathbf{u} \in \mathcal{A}$, és $c \in \mathbb{R}$ esetén $c\mathbf{u} \in \mathcal{A}$.

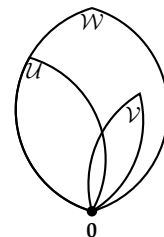
Az $\mathbb{R}^2$ vagy az $\mathbb{R}^3$ altereit könnyen tudjuk szemléltetni, ahogy azt a 3.1. ábrán is tettük. De hogyan szemléltethetők $\mathbb{R}^n$ alterei? Természetesen itt csak egy leegyszerűsítő, az elemibb összefüggések szemléltetésére használható ábrázolás jöhet szóba. A Venn-diagramok példáját követjük: az ábrázolás alakjának nem „használtania” kell az ábrázolt dologra, csak tudnunk kell, hogy annak melyik tulajdonságát hogyan szemlélteti. Vektorterek szemléltetésére a *levéldiagramot* fogjuk használni. Ez egy egyszerű levélformával szemlélteti a teret, melynek a levél száránál lévő töve jelzi a nullvektort. Az altereket olyan kisebb levelek szemléltetik, melyek töve – azaz a nullvektor – közös (ld. 3.2. ábra). A levelek felső csúcsába a tér nevét vagy dimenzióját írhatjuk.

Felsoroljuk az alterek néhány egyszerűen belátható tulajdonságát:

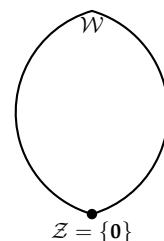
- Minden alternek eleme a nullvektor, hisz bármely alterbeli vektorral együtt annak 0-szorosa is, vagyis a $\mathbf{0}$ -vektor is eleme az alternek.
- Minden alterbeli $\mathbf{x}$ vektorral együtt annak ellentettje (-1 -szerese), a $-\mathbf{x}$ vektor is eleme az alternek.
- Minden vektortér maga is altér, hisz bármely két vektorának összes lineáris kombinációját is tartalmazza.
- A nullvektor önmagában alteret alkot, ez a *zérustér*, amit $\mathcal{Z}$ jelöl. A nulltér kifejezést másra használjuk, ne keverjük össze. A zérusteret és a teljes teret szokás triviális altereknek nevezni (ld. 3.3. ábra).
- Altérnek is lehet olyan részhalmaza, melyből nem vezet ki a két művelet, ez az *altér altere*, ami maga is altér az eredeti térben (ld. 3.4. ábra).
- Két altér metszete is altér. Ha $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ egy vektortér két altere, és $\mathcal{W}$ a közös részük, akkor $\mathcal{W}$ nem üres, hisz a nullvektor benne van. Másrészt bármely két $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{W}$ vektor összes lineáris kombinációja benne



3.1. ábra: a) Egy origón átmenő egyenes bármely vektorának konstansszorosa és bármely két vektorának összege az egyenesbe esik, b) egy origón átmenő sík bármely vektorának konstansszorosa és bármely két vektorának összege a síkba esik.



3.2. ábra: Egy $\mathcal{W}$ vektortér és annak $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ alterei, valamint a mindannyiukban közös nullvektor



3.3. ábra: Egy $\mathcal{W}$ vektortér két triviális alterével: az egyik maga $\mathcal{W}$, a másik a nullvektort tartalmazó $\mathcal{Z}$ tér

van $\mathcal{U}$ -ban és $\mathcal{V}$ -ben is, így metszetükben is. Alterek metszetére is a $\cap$ jelet használjuk, tehát az előbbi alterekre $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \mathcal{W}$ (ld. 3.5. ábra).

► Az előző gondolat tetszőleges számú alterre is megismételhető, tehát egy vektortér tetszőleges számú alterének közös része is alter. Az alterek száma végtelen is lehet.

► Két alter egyesítése csak akkor alter, ha egyik altere a másiknak. Például a térben egy origón átmenő egyenes vektorait és egy origón átmenő sík vektorait egyesítve csak akkor kapunk alteret, ha az egyenes a síkba esik.

Ha $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ ugyanannak a vektortérnek az alterei, akkor az egyesítésük által generált alteret $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ -vel jelöljük, és a két alter összegének nevezzük.

3.10. ÁLLÍTÁS (ALTEREK ÖSSZEGE). Ha $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$ alter két altere, akkor az egyesítésük által generált $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ alter pontosan azokból a vektorokból áll, melyek egy $\mathcal{U}$ - és egy $\mathcal{V}$ -beli vektor összegeként előállnak.

BIZONYÍTÁS. Ha $\mathbf{x}$ egy $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ -beli vektor, akkor előáll néhány $\mathcal{U}$ - és $\mathcal{V}$ -beli vektor lineáris kombinációjaként. De a lineáris kombináció $\mathcal{U}$ -beli vektorokat tartalmazó része egy $\mathcal{U}$ -beli $\mathbf{u}$ vektort ad, míg a többi egy $\mathcal{V}$ -beli $\mathbf{v}$ vektort, így $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$. Fordítva, minden $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ alakú vektor $\mathcal{U}$ - és $\mathcal{V}$ -beli vektorok lineáris kombinációja, így benne van $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ -ben. $\square$

Szemléltetésül: ha például $\mathcal{W} = \mathbb{R}^3$, és $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ egy-egy egymástól különböző 1-dimenziós altere, akkor az egyesítésük által generált 2-dimenziós alterbe pontosan azok a vektorok tartoznak, melyek egy $\mathcal{U}$ -beli $\mathbf{u}$ és egy $\mathcal{V}$ -beli $\mathbf{v}$ vektor összegei (ld. 3.7 ábra).

3.11. PÉLDA (ALTÉR). Alteret alkotnak-e az alábbi vektorhalmazok $\mathbb{R}^3$ -ben?

1. $\{(x, y, z) \mid x = y, z = xy\}$,
2. $\{(s + 2t, s - 1, 2s + t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$.

MEGOLDÁS. Az első halmaz nem alter, mert nem elégíti ki a definícióbeli feltételeket. Például az $(1, 1, 1)$ vektor benne van e halmazban, azonban kétszerese nem, mert nem elégíti ki a $z = xy$ egyenlőséget!

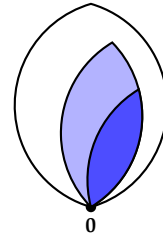
A második feladatban szereplő halmazban nincs benne a nullvektor, ugyanis az $s + 2t = 0, s - 1 = 0, 2s + t = 0$ egyenletrendszernek nincs megoldása, így ez a halmaz sem alkot alteret! $\square$

Könnyen belátható, hogy $\mathbb{R}^2$ alterei az alábbiak:

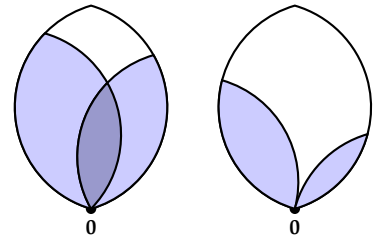
1. a zérusvektorból álló egyelemű halmaz,
2. egy origón átmenő egyenes összes vektora,
3. a sík összes vektora.

Hasonlóképp $\mathbb{R}^3$ alterei:

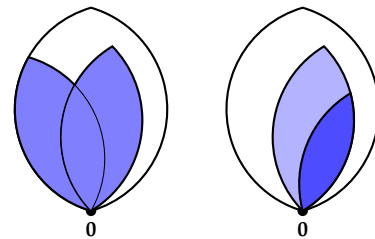
1. a zérusvektorból álló egyelemű halmaz,
2. egy origón átmenő egyenes összes vektora,



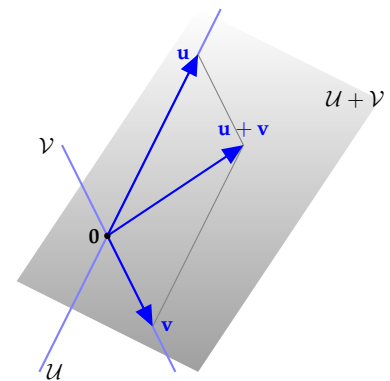
3.4. ábra: Alter altere is alter



3.5. ábra: Alterek metszete is alter, de az megeshet, hogy ez a metszet csak az egyetlen nullvektorból álló zérustér.



3.6. ábra: Két alter egyesítése csak akkor alter, ha egyik a másik altere



3.7. ábra: $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ bármely vektora előáll $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ alakban

3. egy origón átmenő sík összes vektora,
4. a tér összes vektora.

Mivel egy egyetlen n -ismeretlenes egyenletből álló egyenletrendszer megoldáshalmaza egy $\mathbb{R}^n$ -beli hipersík, ezért az origón átmenő hipersíkok is alterek. Lássunk további példákat! A 3.8. állítás az altér fogalmát használva a következő alakot ölti:

3.12. ÁLLÍTÁS (MEGOLDÁSOK ALTERE). Egy n -ismeretlenes homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza alteret alkot $\mathbb{R}^n$ -ben.

3.13. DEFINÍCIÓ (NULLTÉR). Az $\mathbf{A}$ együtthatómátrixú homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak alterét az $\mathbf{A}$ mátrix nullterének nevezzük és $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ -val jelöljük.

Kérdés: általában hogyan adhatjuk meg $\mathbb{R}^n$ egy tetszőleges alterét?

Kifeszített altér A homogén lineáris egyenletrendszer összes megoldását néhány vektor lineáris kombinációjaként állítottuk elő. A megoldások alterét tehát „generálja” vagy geometrikusabb szóhasználatnál „kifeszíti” néhány megoldásvektor. Erre utal a következő definíció. Azt, hogy az altér szót a definícióban használhatjuk, a rákövetkező állítás bizonyítja.

3.14. DEFINÍCIÓ (KIFESZÍTETT ALTÉR). A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_k \mathbf{v}_k$$

alakú lineáris kombinációinak halmazát a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorok által kifeszített alternek nevezzük, és $\text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ -val jelöljük.

Valóban, az elnevezés jogos:

3.15. ÁLLÍTÁS (A KIFESZÍTETT ALTÉR ALTÉR). A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok által kifeszített $\text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ vektorhalmaz $\mathbb{R}^n$ egy altere.

BIZONYÍTÁS. Be kell látni, hogy $\text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ bármely vektorának skalárszorosa és bármely két vektorának összege is ide tartozik. Legyen

$$\mathbf{u} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_k \mathbf{v}_k, \text{ és } \mathbf{v} = d_1 \mathbf{v}_1 + d_2 \mathbf{v}_2 + \dots + d_k \mathbf{v}_k$$

a $\text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ két tetszőleges vektora, és legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós. Ekkor

$$x\mathbf{u} = (xc_1)\mathbf{v}_1 + (xc_2)\mathbf{v}_2 + \dots + (xc_k)\mathbf{v}_k \in \text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k),$$

és

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (c_1 + d_1)\mathbf{v}_1 + \dots + (c_k + d_k)\mathbf{v}_k \in \text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k). \quad \square$$

3.16. PÉLDA (NULLTÉR). Határozzuk meg az

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrix nullterét. Keressünk véges sok olyan vektort, melyek kifeszítik e teret!

MEGOLDÁS. Az adott mátrix a 2.37. példabeli homogén lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixa. A homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza épp a nulltér vektoraiból álló halmaz. A nulltér vektorai tehát

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

alakba írhatók, amiből leolvasható, hogy e teret a megoldásban megadott három vektor feszíti ki. $\square$

Az inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldásai Az inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldásai nem alkotnak alteret. Legegyszerűbben ez onnan látszik, hogy a zérusvektor minden altérnek eleme, viszont egyetlen inhomogén egyenletrendszernek sem megoldása! Ugyanakkor az inhomogén lineáris egyenletrendszer és a hozzá tartozó homogén egyenletrendszer megoldásai közt egy igen fontos kapcsolat van.

3.17. TÉTEL (HOMOGÉN ÉS INHOMOGÉN EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSAI). Az inhomogén lineáris $[A|b]$ mátrixú egyenletrendszer általános megoldása megkapható úgy, hogy egy partikuláris megoldásához hozzáadjuk a hozzá tartozó homogén $[A|0]$ mátrixú egyenletrendszer általános megoldását.

inhomogén általános megoldása	=	inhomogén egy partikuláris megoldása	+	homogén általános megoldása
-------------------------------------	---	--	---	-----------------------------------

BIZONYÍTÁS. Jelölje az egyenletrendszer együtthatómátrixát A , annak sorvektorait $a_{1*}, a_{2*}, \dots, a_{m*}$, és jelölje $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$, a konstans tagok vektorát. Legyen x az inhomogén egyenletrendszer egy partikuláris megoldása, és jelölje $\mathcal{H}$ a homogén, $\mathcal{I}$ az inhomogén egyenletrendszer megoldáshalmazát. Megmutatjuk, hogy $x + \mathcal{H} = \mathcal{I}$, ahol a bal oldali összeadást elemenként értjük.

$\mathbf{x} + \mathcal{H} \subseteq \mathcal{I}$: Meg kell mutatnunk, hogy ha $\mathbf{x}$ -hez adjuk a $\mathcal{H}$ egy tetszőleges $\mathbf{y}$ elemét, az inhomogén egyenletrendszer egy megoldását kapjuk. Valóban, $\mathbf{x}$, illetve $\mathbf{y}$ eleget tesz az

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} &= b_i, \\ \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{y} &= 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned}$$

egyenleteknek. Ebből

$$\mathbf{a}_{i*} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{y} = b_i + 0 = b_i.$$

tehát $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ megoldása az inhomogén egyenletrendszernek, azaz $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathcal{I}$.

$\mathbf{x} + \mathcal{H} \supseteq \mathcal{I}$: Meg kell mutatnunk, hogy ha $\mathbf{z}$ az inhomogén egy tetszőleges megoldása, azaz $\mathbf{z} \in \mathcal{I}$, akkor található olyan $\mathbf{y} \in \mathcal{H}$, hogy $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$. Valóban, az $\mathbf{y} = \mathbf{z} - \mathbf{x}$ megteszi, mert

$$\mathbf{a}_{i*} \cdot (\mathbf{z} - \mathbf{x}) = \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{z} - \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} = b_i - b_i = 0.$$

fennáll minden $i = 1, 2, \dots, m$ indexre, azaz $\mathbf{z} - \mathbf{x} \in \mathcal{H}$. $\square$

E tétel azt jelenti, hogy ugyan az inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak halmaza *nem* *altér*, de egy *altér eltoltja*. Az ilyen halmazokat geometriai nyelven *affin altereknek* is szokás nevezni. Eltolt altereket mutat a 3.8. ábra.

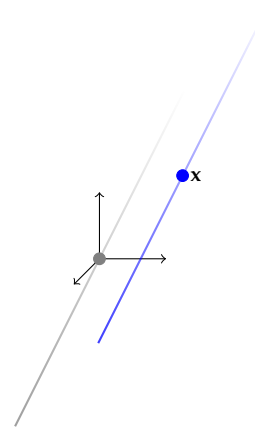
E tételt szemléltetik a 2.35. és a 2.37. példák is.

Ha általában szeretnénk ábrázolni az inhomogén egyenletrendszer megoldását a levéldiagramon, azt könnyen megtehetjük egy eltolt altér szemléltetésével, ahogy azt a 3.9. ábra mutatja.

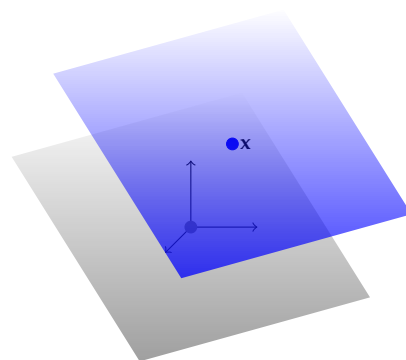
Az *előző* tétel szerint az inhomogén egyenletrendszer összes megoldása a homogén összes megoldásának – azaz $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ -nak – az inhomogén valamelyik megoldásával való eltoltja. Fontos látnunk, hogy mindegy melyik megoldást választjuk az inhomogén megoldásai közül, bár az eltolás mértéke változik, az eredmény ugyanaz lesz. Ezt jól szemlélteti a 3.8. ábra: ha az origón átmenő egyenes (sík) origónál lévő pontját nem $\mathbf{x}$ -be, hanem az eltolt egyenes (sík) egy másik pontjába toljuk, akkor a két eltolt altér fedi egymást.

Az inhomogén $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ egyenletrendszer megoldásai nem alkotnak alteret, de azok a $\mathbf{b}$ vektorok, melyre az egyenletrendszer megoldható, igen. Ezek ugyanis az oszlopmodell szerint épp azok a vektorok, melyek az együtthatómátrix oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként előállnak. Az ilyen vektorok pedig alteret alkotnak, mégpedig az $\mathbf{A}$ oszlopvektorai által kifeszített alteret. Ezt nevezzük oszloptérnek.

3.18. DEFINÍCIÓ (SORTÉR, OSZLOPTÉR). Egy mátrix oszlopvektorai által kifeszített alteret oszloptérnek, a sorvektorai által kifeszített alteret sortérnek nevezzük.

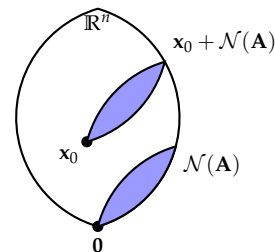


a)



b)

3.8. ábra: a) Egy háromismeretlenes inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza, ha az általános megoldás egyparaméteres; b) Egy háromismeretlenes inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza, ha az általános megoldás kétparaméteres.



3.9. ábra: Az $\mathbf{A}$ együtthatómátrixú homogén egyenletrendszer megoldása a nulltér, azaz $\mathcal{N}(\mathbf{A})$, az inhomogéné e tér egy $\mathbf{x}_0 + \mathcal{N}(\mathbf{A})$ eltoltja, ahol $\mathbf{x}_0$ az inhomogén egyenletrendszer egy megoldása.

Az $m \times n$ -es valós $\mathbf{A}$ mátrix sortere $\mathbb{R}^n$ altere, oszloptere $\mathbb{R}^m$ altere. Az $\mathbf{A}$ sorterét $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ -val, oszlopterét $\mathcal{O}(\mathbf{A})$ -val jelöljük (ld. 3.11 ábra).

Az oszlopmodellt használva az is látható, hogy egy lineáris kombináció együttthatóinak meghatározása egy egyenletrendszer megoldását jelenti.

3.19. KÖVETKEZMÉNY (INHOMOGÉN EGYENLETRENDSZER MEGOLDHATÓSÁGA). Az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ mátrixú egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $\mathbf{b}$ előáll az $\mathbf{A}$ oszlopainak lineáris kombinációjaként, azaz $\mathbf{b}$ benne van az $\mathbf{A}$ oszlopterében. A lineáris kombináció együttthatói megegyeznek a megoldásvektor koordinátaival.

3.20. PÉLDA (KIFESZÍTETT ALTÉR VEKTORAI). Határozzuk meg, hogy a $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 2, -2, 1)$ és $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 1, 1)$ vektorok által kifeszített altérnek eleme-e az $\mathbf{u} = (-1, 2, -3, 6)$ vektor! Ha igen, adjunk meg egy ezt bizonyító lineáris kombinációt is! Mutassuk meg, hogy a $\mathbf{w} = (-1, 2, -3, 4)$ vektor nem eleme az altérnek!

MEGOLDÁS. Olyan x_1, x_2, x_3 valósokat keresünk, melyekkel $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}$ fennáll. Ez egy négy egyenletből álló egyenletrendszerrel ekvivalens, melynek bővített mátrixa a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ és $\mathbf{u}$ oszlopvektorokból áll. Az $\mathbf{u}$ helyett $\mathbf{w}$ vektorral egy másik hasonló egyenletrendszert is meg kell oldani. A két egyenletrendszert egyetlen bővített mátrixszal oldjuk meg, melynek oszlopvektorai $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{u}$ és $\mathbf{w}$. Ennek lépcsős alakja:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 6 & 4 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

amiből $(x_1, x_2, x_3) = (3, 2, -2)$, és $\mathbf{w}$ valóban nem áll elő lineáris kombinációként, mert a $\mathbf{w}$ -t tartalmazó egyenletrendszer ellentmondásos. $\square$

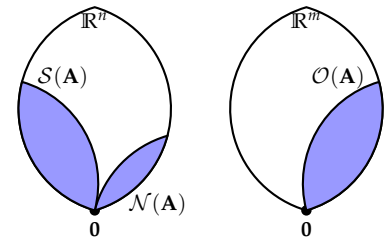
Lineáris függetlenség és összefüggőség A lineáris egyenletrendszerek megoldása és vektorok lineáris függetlenségével vagy összefüggőségével kapcsolatos kérdések szoros kapcsolatban vannak egymással.

Az előző 3.20. példa tanulsága úgy is összefoglalható, hogy egy $\mathbf{w}$ vektor pontosan akkor független az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopvektoraitól, vagyis az $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ vektorrendszertől, ha az $[\mathbf{A}|\mathbf{w}]$ egyenletrendszer nem oldható meg.

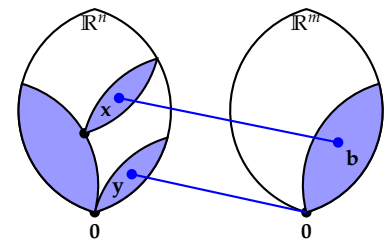
Egy $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ vektorrendszer lineáris függetlenségének eldöntéséhez meg kell oldani az

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

homogén lineáris egyenletrendszert. Ha van nemtriviális megoldása, akkor a vektorrendszer lineárisan összefüggő, egyébként lineárisan



3.10. ábra: Az $\mathbf{A}$ mátrix sortere ($\mathcal{S}(\mathbf{A})$), oszloptere ($\mathcal{O}(\mathbf{A})$) és nulltere ($\mathcal{N}(\mathbf{A})$).



3.11. ábra: A nulltér, a sortér, és az oszloptér, valamint a homogén $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{0}$ és az inhomogén $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer egy-egy megoldása a levéldiagramban.

független. Ez igazolja az alábbi ekvivalenciákat:

3.21. KÖVETKEZMÉNY (LINEÁRIS FÜGGETLENSÉG ELDÖNTÉSE). Tekintsük az $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \dots \quad \mathbf{a}_k]$ mátrixot! Az alábbi állítások ekvivalensek:

- a) az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ vektorok lineárisan függetlenek;
- b) az $\mathbf{A}$ együtthatómátrixú homogén lineáris egyenletrendszernek a triviálison kívül nincs más megoldása;
- c) az $\mathbf{A}$ lépcsős alakjának minden oszlopában van főelem, azaz $r(\mathbf{A}) = k$.

3.22. PÉLDA (VEKTOROK LINEÁRIS FÜGGETLENSÉGÉNEK ELDÖNTÉSE). Mutassuk meg, hogy a 4-dimenziós $(1, 2, 3, 4)$, $(0, 1, 0, 1)$ és $(1, 1, 1, 0)$ vektorok lineárisan függetlenek.

MEGOLDÁS. A vektorokból képzett mátrix és lépcsős alakja

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ami azt mutatja, hogy a homogén lineáris egyenletrendszernek csak egyetlen megoldása van, azaz az oszlopvektorok lineárisan függetlenek. $\square$

Feladatok

3.1. IGAZ – HAMIS Melyek igazak, melyek hamisak az alábbi állítások közül?

- Ha egy 10-ismeretlenes egyenletrendszer csak 6 egyenletből áll, azaz alulhatározott, akkor végtelen sok megoldása van.
- Ha egy 10-ismeretlenes egyenletrendszer csak 6 egyenletből áll, azaz alulhatározott, akkor lehet, hogy végtelen sok megoldása van, de az is lehet, hogy csak egy.
- Ha egy 10-ismeretlenes egyenletrendszer 20 egyenletből áll, azaz túlhatározott, akkor biztosan nem oldható meg!
- Ha egy 10-ismeretlenes egyenletrendszer 20 egyenletből áll, akkor nem lehet végtelen sok megoldása.

3.2. ALTEREK TULAJDONSÁGAI: IGAZ – HAMIS

- $\mathbb{R}^n$ bármely három alterének metszete altér.
- Ha az $\mathcal{U}$ altér altere a $\mathcal{V}$ és a $\mathcal{W}$ altérnek is, akkor altere metszetüknek is.
- Alterek egyesítése altér.
- Alterek összege altér.
- Minden altérnek eleme a zérusvektor.
- Minden altérnek van legalább egy nemzérus vektora.

3.3. ALTEREK ÉS EGYENLETRENDSZEREK: IGAZ – HAMIS

- Egy lineáris egyenletrendszer megoldásai alteret alkotnak.
- Egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai alteret alkotnak.
- Rögzített $\mathbf{A}$ mátrix mellett alteret alkotnak azok a $\mathbf{b}$ vektorok, melyekre az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ egyenletrendszer konzisztens.
- Egy egyenletrendszer megoldásvektorainak különbségeként kapott vektorok halmaza alteret alkot.

3.4. MEGOLDHATÓSÁG: IGAZ – HAMIS

- Az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ mátrixú egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $\mathbf{b}$ előáll $\mathbf{A}$ oszlopainak lineáris kombinációjaként.
- Az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ mátrixú egyenletrendszer bármely két megoldásának különbsége megoldása a homogén $[\mathbf{A}|\mathbf{0}]$ egyenletrendszernek.
- Az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ mátrixú egyenletrendszer bármely megoldása előáll a homogén $[\mathbf{A}|\mathbf{0}]$ mátrixú egyenletrendszer két megoldásának különbségeként.
- Az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ mátrixú egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) \leq r(\mathbf{A})$.
- Az n -ismeretlenes $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ mátrixú egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg egyértelműen, ha $r(\mathbf{A}) = n$.

3.5. Alteret alkotnak-e az alábbi vektorhalmazok $\mathbb{R}^3$ -ben?

- $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| = 1\}$
- $\{(x, y, z) : x + 2y - 3z = 0\}$
- $\{(x, y, z) : x + 2y - 3z = 1\}$
- $\{(x, y, z) : x = 2t, y = t, z = 0, t \in \mathbb{R}\}$
- $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$

f) $\{(x, y, z) : x^3 + y^3 + z^3 = 0\}$

3.6. Mennyi lehet az $r(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ rang, ha az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ kibővített mátrixú egyenletrendszerről tudjuk, hogy

- 2-ismeretlenes és megoldásainak száma végtelen;
- inkonzisztens, és $r(\mathbf{A}) = 4$;
- egyetlen megoldása van és $\mathbf{A}$ 5×3 -as;
- inkonzisztens, n -ismeretlenes és 2 egyenletből áll.

3.7. Egy lineáris egyenletrendszerről tudjuk, hogy $(1, 2, 3)$ és $(0, 1, 3)$ is megoldásvektora. Adjuk meg további két megoldásvektorát! Mekkora lehet az együtthatómátrix rangja? És mekkora lehet e rang, ha az egyenletrendszer homogén?

3.8. INHOMOGÉN LINEÁRIS EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSAI Egy négyismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldását számítógéppel próbálom ellenőrizni, de más jön ki. A saját eredményem ez:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix},$$

a számítógépé ez:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

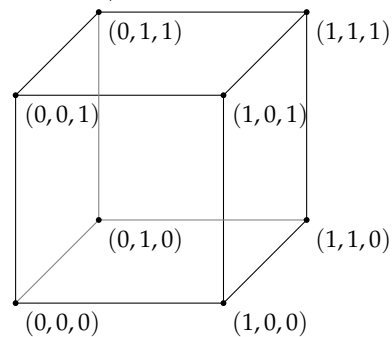
Lehet-e mindkét eredmény jó?

3.9. MEGOLDÁSOK LINEÁRIS KOMBINÁCIÓJA Adjunk új bizonyítást a 3.8. tételre a sormodellt használva.

3.10. HOMOGÉN ÉS INHOMOGÉN EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSAI Adjunk az oszlopmodellben megfogalmazott új bizonyítást a 3.17. tételre.

Véges testek feletti terek

3.11. $\mathbb{F}_2^3$ ALTEREI Soroljuk fel $\mathbb{F}_2^3$ összes alterét (ehhez segítségül hívhatjuk az alábbi ábrát, mely az $\mathbb{F}_2^3$ vektortér vektorait szemlélteti).



Alterek tulajdonságai és az egyenletrendszerek

E szakaszban az alterek tulajdonságait, és az egyenletrendszerek kapcsán felmerülő alterek viszonyát vizsgáljuk. Különösen fontos az együtthatómátrixhoz tartozó négy kitiüntetett altér kapcsolata.

Sor- és oszloptér Az előző feladatokban a homogén lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixát lépcsős alakra hoztuk. Ebből az alakból azonban több minden leolvasható.

3.23. TÉTEL (ELEMİ SORMŰVELETEK HATÁSA A SOR- ÉS OSZLOPVEKTOROKRA). *Elemi sorműveletek közben a sortér nem változik, az oszlopvektorok pedig olyan vektorokba transzformálódnak, melyek megőrzik az eredeti lineáris kapcsolatokat.*

BIZONYÍTÁS. Megmutatjuk, hogy egy mátrix sortere nem változik az elemi sorműveletek közben. A sorcserére ez nyilvánvaló. Legyenek $\mathbf{A}$ sorvektorai $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ és legyen $\mathbf{u}$ a sortér egy tetszőleges vektora, ami azt jelenti, hogy vannak olyan $c_1, c_2, \dots, c_m$ skalárok, hogy

$$\mathbf{u} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_m \mathbf{v}_m.$$

Ha egy sort (mondjuk az elsőt) beszorozzuk egy $d \neq 0$ skalárral, akkor $\mathbf{u}$ az új mátrix sorterében is benne van, melyet a $d\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ vektorok feszítenek ki, hisz

$$\mathbf{u} = \frac{c_1}{d} (d\mathbf{v}_1) + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_m \mathbf{v}_m.$$

Ez azt jelenti, hogy a sortér nem csökken, azaz minden vektor, ami eddig benne volt a sortérben, benne lesz az új mátrix sorterében is. A hozzáadás műveleténél ugyanezt tapasztaljuk: az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az első sor d -szeresét adjuk a második sorhoz. Ekkor az új sorteret kifeszítő vektorok: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + d\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$. Az $\mathbf{u}$ vektor e térben is benne van, ugyanis egy egyszerű átalakítás után

$$\mathbf{u} = (c_1 - c_2 d) \mathbf{v}_1 + c_2 (\mathbf{v}_2 + d\mathbf{v}_1) + \dots + c_m \mathbf{v}_m.$$

Mivel minden sorművelet inverze is egy sorművelet, az inverz sorműveletben sem csökken a sortér, ami csak úgy lehet, ha a sortér az elemi sorműveletek során változatlan marad.

Megmutatjuk, hogy az elemi sorműveletek közben az oszlopvektorok közt nem változnak a lineáris kapcsolatok. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy például $c\mathbf{v}_1 + d\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$. Mivel a skalárral való szorzás és a vektorösszeadás is koordinátánként végezhető, könnyen látható, hogy sorcseré, egy koordináta nemnulla skalárral való szorzása, vagy az i -edik koordináta konstansszorozásának a j -edikhez adása

után is fenn fog állni a két új vektor közt a fenti összefüggés. Tetszőleges számú vektor lineáris kombinációjára az állítás hasonlóan adódik. $\square$

3.24. KÖVETKEZMÉNY (MÁTRIX LÉPCSŐS ALAKJÁNAK VEKTORAI). Legyen $\mathbf{B}$ az $\mathbf{A}$ mátrix egy lépcsős alakja. Ekkor

1. $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ sortere megegyezik,
2. az $\mathbf{A}$ oszlopvektorai között lévő lineáris kapcsolatok azonosak a $\mathbf{B}$ ugyanolyan sorszámú oszlopai közti lineáris kapcsolatokkal,
3. $\mathbf{B}$ nemzérus sorvektorai lineárisan függetlenek,
4. a főelemek oszlopvektorai $\mathbf{A}$ -ban és $\mathbf{B}$ -ben is lineárisan függetlenek.

BIZONYÍTÁS. Az első két állítás közvetlen következménye az előző tételnek.

A harmadik állítás bizonyításához megmutatjuk, hogy egy lépcsős alak egy nemzérus sorvektora nem fejezhető ki a többi sorvektor lineáris kombinációjaként. Tekintsük a lépcsős alak k -edik sorvektorát. Főeleme legyen a j -edik oszlopban. E főelem nem állítható elő a k -nál nagyobb indexű sorok lineáris kombinációjával, mert azokban a j -edik koordináta 0. A k -nál kisebb indexű sorvektorok pedig nem szerepelhetnek a lineáris kombinációban, mivel a legkisebb indexű vektor főelemét a többi vektor nem eliminálhatja, pedig a k -edik sorban azon a helyen 0 áll.

Annak bizonyítása, hogy a főelemek oszlopai $\mathbf{B}$ -ben lineárisan függetlenek, ugyanúgy megy, mint a sorvektorok esetén. Innen pedig az előző tétellel adódik, hogy az ilyen indexű oszlopok $\mathbf{A}$ -ban is lineárisan függetlenek. $\square$

► Fontos megjegyezni, hogy míg a lépcsős alak sortere megegyezik az eredeti mátrix sorterével, addig az oszloptér az elemi sorműveletek alatt megváltozik, tehát a mátrix és lépcsős alakjának oszloptere különbözik!

Bázis Az elemi sorműveleteket alkalmazva, egy mátrix sorterében és oszlopterében is találtunk olyan lineárisan független vektorokat, melyek kifeszítik az adott teret. Azt már az 1.9. tételben megmutattuk, hogy a háromdimenziós tér tetszőleges három lineárisan független vektorának lineáris kombinációjaként a tér minden vektora előáll. Más szavakkal ez azt jelenti, hogy a tér három lineárisan független vektora kifeszíti a teret. Az ilyen vektorhármassokat, melyeket egy koordináta-rendszer alapvektorainak vettünk, bázisnak neveztük. Ezek vezetnek a következő definícióhoz.

3.25. DEFINÍCIÓ (BÁZIS). Az $\mathbb{R}^n$ tér egy alterének bázisán olyan vektorrendszert értünk, mely

1. lineárisan független és

2. *kifeszíti az alteret (azaz generátorrendszer).*

Az $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)$, ..., $\mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$ vektorból álló halmazt $\mathbb{R}^n$ standard bázisának nevezzük.

- Világos, hogy a zérustérnek nincs bázisa, hisz abban nincs egyetlen lineárisan független vektor sem.
- Nyilvánvaló, hogy a standard bázis $\mathbb{R}^n$ egy n -elemű bázisa.
- Hamarosan meg fogjuk mutatni, hogy $\mathbb{R}^n$ minden bázisa n -elemű, és hogy bármely alterének bázisa legfeljebb n -elemű.

3.26. PÉLDA (ALTÉR BÁZISÁNAK MEGHATÁROZÁSA). *Határozzuk meg az $(1, 1, 0, -2)$, $(2, 3, 3, -2)$, $(1, 2, 3, 0)$ és $(1, 3, 6, 2)$ vektorok által kifeszített altér egy bázisát!*

MEGOLDÁS. *Első megoldás:* A megadott vektorokból, mint sorvektorokból képzett mátrix valamely sorlépcsős alakjának nemnulla sorai az altér egy bázisát adják:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A bázis vektorai $(1, 1, 0, -2)$, $(0, 1, 3, 2)$.

Második megoldás: Ha a bázist az adott vektorokból akarjuk kiválasztani, akkor képezzünk egy mátrixot e vektorokból, mint oszlopvektorokból. Lépcsős alakjában a főelemek oszlopai lineárisan független vektorok. A nekik megfelelő oszlopvektorok az eredeti mátrixban az oszloptér bázisát alkotják (ld. a 3.23. tételt és a 3.24. következmény 4. pontjának állítását).

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tehát az adott négy vektor közül az első kettő, azaz az $(1, 1, 0, -2)$ és $(2, 3, 3, -2)$ vektorok bázist alkotnak.

Ha a megadott vektorokat más sorrendben írjuk a mátrixba, másik bázist kaphatunk. □

3.27. PÉLDA (VEKTOR FELÍRÁSA A BÁZISVEKTOROK LINEÁRIS KOMBINÁCIÓJAKÉNT). *Az előző feladatban megadott négy vektor mindegyikét fejezzük ki az általuk kifeszített altér bázisvektorainak lineáris kombinációjaként!*

MEGOLDÁS. Az előző feladat második megoldásában találtunk egy bázist a megadott vektorok közül. Mivel az oszlopvektorokkal dolgoztunk, a vektorok közti lineáris kapcsolat leolvasható bármelyik lépcsős

alakból: legkényelmesebben a *redukált* lépcsős alakból. Folytatjuk tehát az előző példabeli eliminációs lépéseket:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

A redukált lépcsős alakból látjuk, hogy például a harmadik oszlop a második és az első különbsége. Ezek alapján az eredeti vektoroknak a bázisvektorok lineáris kombinációiként való felírása:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ha a megadott vektorokat más sorrendben írjuk a mátrixba, más bázisra juthatunk (ld. a 3.14. feladatot). $\square$

3.28. ÁLLÍTÁS (BÁZIS EKVIVALENS DEFINÍCIÓ). Legyen $\mathcal{U}$ az $\mathbb{R}^n$ egy tetszőleges altere, és legyen $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\} \subseteq \mathcal{U}$ vektorok egy halmaza. A következő állítások ekvivalensek:

1. $\mathcal{B}$ lineárisan független vektorokból áll és kifeszíti az $\mathcal{U}$ alteret, azaz $\mathcal{B}$ az $\mathcal{U}$ altér bázisa;
2. $\mathcal{B}$ minimális méretű halmaz, mely kifeszíti $\mathcal{U}$ -t;
3. $\mathcal{B}$ maximális méretű, független vektorokból álló halmaz $\mathcal{U}$ -ban.

BIZONYÍTÁS. Elég belátnunk, hogy egy minimális méretű generátorrendszer független vektorokból áll, és hogy egy maximális méretű független rendszer generátor.

Legyen $\mathcal{B}$ minimális méretű generátor. Ha nem volna független, akkor belőle kiválasztva független vektorokat, mely ugyanazt a teret generálja egy még kisebb méretű generátort kapnánk.

Legyen most $\mathcal{B}$ egy maximális független rendszer. Ha nem volna generátor, akkor hozzávehetnénk tőle független vektort, vagyis volna nála nagyobb méretű független halmaz. $\square$

Vektor egy bázisra vonatkozó koordinátás alakja A koordinátarendszer bevezetésénél ugyanazt tettük, mint itt az előző példában: minden vektor előállítható egy bázis elemeinek lineáris kombinációjaként, és e vektor koordinátás alakja erre a bázisra vonatkozóan a lineáris kombináció konstansaiából áll.

Egy altérben több bázist is vizsgálhatunk, és a vektorok koordinátás alakjai különbözhetnek a különböző bázisokban. Félreértések elkerülésére a bázis jelét a koordinátás alak indexében jelöljük. Például

ha egy $\mathbf{v}$ vektor standard bázisbeli és $\mathcal{B}$ bázisbeli koordinátás alakjai $(4, 3)$, illetve $(0, 5)$, akkor azt írjuk, hogy

$$\mathbf{v} = (4, 3) = (0, 5)_{\mathcal{B}}, \text{ vagy mátrixjelöléssel } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

Ha általában akarunk utalni – a konkrét koordináták nélkül – egy $\mathbf{v}$ vektor $\mathcal{B}$ bázisbeli koordinátás alakjára, akkor a $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ vagy a $(\mathbf{v})_{\mathcal{B}}$ alakot használjuk. Így írhatjuk azt is, hogy

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \text{ vagy egyszerűbben, hogy } [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

3.29. PÉLDA (VEKTOR KOORDINÁTÁS ALAKJA A $\mathcal{B}$ BÁZISBAN). Tekintsük a 3.26. és a 3.27. példákban is szereplő $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0, -2)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 3, 3, -2)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 2, 3, 0)$ és $\mathbf{v}_4 = (1, 3, 6, 2)$ vektorok által kifeszített alteret. Ennek $\mathcal{A} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ egy bázisa. Írjuk fel a négy vektornak e bázisra vonatkozó koordinátás alakját!

MEGOLDÁS. Az előző példában a (3.1) képletbeli redukált lépcsős alak nemzérus soraiból álló

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix azt mutatja, hogy az $\mathcal{A}$ bázisban e négy vektor koordinátái rendre

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{A}}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{A}}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{A}}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}_{\mathcal{A}}.$$

Ez a 3.24. állítás 2. pontjából következik, mely szerint a redukált lépcsős alak oszlopai közti lineáris kapcsolatok megegyeznek az eredeti mátrix oszlopai közti lineáris kapcsolatokkal. $\square$

Dimenzió és rang Az előzőekben bázist kerestünk egy altérhez. Azt tapasztaltuk, hogy a bázis mindig ugyanannyi vektorból állt. Ez nem véletlen. Egy különösen fontos tétel következik.

3.30. TÉTEL (BÁZIS-TÉTEL). Tekintsük az $\mathbb{R}^n$ vektortér egy tetszőleges altérét. Ennek bármely két bázisa azonos számú vektorból áll.

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy $\mathbb{R}^n$ -nek van olyan $\mathcal{A}$ altéré, és annak két olyan bázisa,

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}, \text{ és } \mathcal{W} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_r\},$$

melyek nem ugyanannyi vektorból állnak, azaz például $k < r$. Mivel $\mathcal{V}$ bázis $\mathcal{A}$ -ban, ezért a $\mathcal{W}$ bázis vektorai is kifejezhetők lineáris kombinációikként, azaz léteznek olyan a_{ij} skalárok, hogy

$$\mathbf{w}_i = a_{i1}\mathbf{v}_1 + a_{i2}\mathbf{v}_2 + \dots + a_{ik}\mathbf{v}_k, \quad (i = 1, \dots, r). \quad (3.2)$$

Mivel a $\mathcal{W}$ bázis vektorai lineárisan függetlenek, ezért a

$$c_1 \mathbf{w}_1 + c_2 \mathbf{w}_2 + \dots + c_r \mathbf{w}_r = \mathbf{0} \quad (3.3)$$

egyenlőség csak a $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$ konstansokra áll fenn. A (3.2) egyenlőségeit a (3.3) egyenletbe helyettesítve

$$c_1(a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{12}\mathbf{v}_2 + \dots + a_{1k}\mathbf{v}_k) + c_2(a_{21}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + \dots + a_{2k}\mathbf{v}_k) + \dots + c_r(a_{r1}\mathbf{v}_1 + a_{r2}\mathbf{v}_2 + \dots + a_{rk}\mathbf{v}_k) = \mathbf{0},$$

aminek $\mathcal{V}$ vektorai szerinti rendezése után kapjuk, hogy

$$(a_{11}c_1 + a_{21}c_2 + \dots + a_{r1}c_r)\mathbf{v}_1 + (a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + \dots + a_{r2}c_r)\mathbf{v}_2 + \dots + (a_{1k}c_1 + a_{2k}c_2 + \dots + a_{rk}c_r)\mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

Ez azt jelenti, hogy a homogén lineáris

$$\begin{aligned} a_{11}c_1 + a_{21}c_2 + \dots + a_{r1}c_r &= 0 \\ a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + \dots + a_{r2}c_r &= 0 \\ \vdots & \\ a_{1k}c_1 + a_{2k}c_2 + \dots + a_{rk}c_r &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszernek a $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$ az egyetlen megoldása. Ez viszont a 3.6. tétel szerint nem teljesülhet, mivel a fenti homogén egyenletrendszer egyenleteinek száma kisebb ismeretlenjei számánál ($k < r$). Ez az ellentmondás bizonyítja, hogy indirekt feltevésünk helytelen volt, tehát valóban, egy altér bármely két bázisa azonos számú vektorból áll. $\square$

Ha a háromdimenziós térben tekintünk egy origón átmenő síkot, látjuk, hogy bármely két független vektora kifeszíti. Azaz minden bázisa kételemű. Ha egy origón átmenő egyenest tekintünk, azt minden nemnulla vektora, mint egyelemű bázisa, kifeszíti. A hétköznapi életben is használt fogalom, a dimenzió, megegyezik a bázis elemszámával. Miután egy altér minden bázisa azonos elemszámú, értelmes a következő definíció:

3.31. DEFINÍCIÓ (DIMENZIÓ). Az $\mathbb{R}^n$ tér egy $\mathcal{A}$ alterének dimenzióján egy bázisának elemszámát értjük, és e számot $\dim \mathcal{A}$ -val jelöljük.

Az $\mathbb{R}^n$ altere saját magának, és standard bázisa épp n vektorból áll, így $\dim \mathbb{R}^n = n$. A nullvektorból álló altérben nincsenek független vektorok, így dimenziója 0.

Mielőtt a következő állítást megfogalmaznánk, definálunk egy egyszerű fogalmat. Mivel a mátrixalkalmazásokban nincs olyan természetes elv, amely alapján el lehetne dönten, hogy mely mennyiségeket rendeljünk a sorokhoz, melyeket az oszlopokhoz, ugyanakkor a számítások közben ez korántsem mindegy, ezért szükség lehet a következő

egyszerű műveletre: az $m \times n$ -es $\mathbf{A}$ mátrix *transzponáltján* azt az $\mathbf{A}^\top$ -vel jelölt $n \times m$ -es mátrixot értjük, amelyet az $\mathbf{A}$ sorainak és oszlopainak felcserélésével kapunk. Azaz

$$\mathbf{A}^\top = [a_{ij}]^\top := [a_{ji}].$$

3.32. PÉLDA (MÁTRIX TRANSZPONÁLTJA). Az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix}$$

mátrixok transzponáltja

$$\mathbf{A}^\top = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^\top = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^\top = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^\top = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Adott véges sok $\mathbb{R}^n$ -beli vektor által kifeszített altér dimenzióját úgy határozhatjuk meg, hogy meghatározzuk a vektorokból képzett mátrix rangját. Igaz ugyanis a következő állítás:

3.33. ÁLLÍTÁS (DIMENZIÓ = RANG). Egy mátrix rangja, sortérének dimenziója és oszlopterének dimenziója megegyezik. Ebből következőleg $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^\top)$.

BIZONYÍTÁS. A mátrix rangja megegyezik a lépcsős alakjában lévő nem-zérus sorainak számával. A 3.24. tétel szerint viszont e sorok lineárisan függetlenek és kifeszítik a sorteret, tehát bázist alkotnak, így számuk a sortér dimenzióját adja. Az oszloptérről láttuk, hogy a főelemeknek megfelelő oszlopok az eredeti mátrixban lineárisan függetlenek és kifeszítik az oszlopteret, tehát e tér dimenziója is a mátrix rangjával egyezik meg. Az utolsó állítás abból következik, hogy $\mathbf{A}$ sortere megegyezik $\mathbf{A}^\top$ oszlopterével. $\square$

3.34. DEFINÍCIÓ (VEKTORRENDSZER RANGJA). Egy $\mathbb{R}^n$ -beli vektorokból álló vektorrendszer rangján a vektorokból képzett mátrix rangját, vagy ami ezzel egyenlő, az általuk kifeszített altér dimenzióját értjük.

3.35. PÉLDA (DIMENZIÓ KISZÁMÍTÁSA). Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix sortérének és nullterének dimenzióját!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{A}$ redukált lépcsős alakja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Innen leolvasható, hogy a mátrix rangja 2, így sortérének dimenziója is 2. A nulltér dimenziója megegyezik az egyenletrendszer megoldásterének dimenziójával, ami megegyezik a szabad változók számával, esetünkben ez 3. Vegyük észre, hogy a sortér és a nulltér dimenziójának összege megegyezik a változók számával, azaz a mátrix oszlopainak számával, jelen példában 5-tel. $\square$

3.36. TÉTEL (DIMENZIÓTÉTEL). Bármely $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix esetén a sortér dimenziójának és a nulltér dimenziójának összege n . Képlettel:

$$\dim(\mathcal{S}(\mathbf{A})) + \dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) = n.$$

BIZONYÍTÁS. A mátrix sortérének dimenziója megegyezik a mátrix rangjával, azaz az $[\mathbf{A}|0]$ mátrixú egyenletrendszerben a kötött változók számával. Megmutatjuk, hogy a nulltér dimenziója megegyezik a szabad változók számával, így e két szám összege valóban n , ami bizonyítja az állítást (ld. még a ?? tételben).

Elég tehát megmutatnunk, hogy egy homogén lineáris egyenletrendszer redukált lépcsős alakkal előállított megoldásában a szabad változók száma megegyezik a nulltérből kiválasztható bázis elemszámával. Először lássunk egy ilyen megoldást konkrétan. Például a 2.37. példabeli homogén lineáris egyenletrendszer megoldása

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ahol $x_2 = s$, $x_4 = t$ és $x_5 = u$ a három szabad változó. A nullteret kifesztítő három vektor közül az elsőben $x_2 = 1$, de az összes többiben $x_2 = 0$, így az első vektor független a többitől. Hasonlóképp általában is igaz, hogy a redukált lépcsős alakból való származtatás következtében a nullteret kifesztítő minden megoldásvektorban az összes szabad változóhoz tartozó koordináta 0, azt az egy koordinátát kivéve, amelyikhez a vektor tartozik. Így viszont mindegyik vektor független a többitől, vagyis e vektorok függetlenek, és mivel kifesztítik a nullteret, számuk megadja a nulltér dimenzióját. $\square$

A sortér és a nulltér merőlegessége Az $\mathbf{A}$ mátrix sorvektorai érdekes tulajdonsággal rendelkeznek. Egy homogén lineáris egyenletrendszer minden egyenletének bal oldala az együtthatómátrix egy sorvektorának és a megoldásvektornak a skaláris szorzata. Mivel e szorzat értéke 0, ezért e két vektor merőleges egymásra.

3.37. PÉLDA (VEKTOROKRA MERŐLEGES ALTÉR). Határozzuk meg az összes olyan vektort $\mathbb{R}^4$ -ben, mely merőleges a $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 2)$ és $\mathbf{v}_2 = (-1, 2, -2, 1)$ vektorok mindegyikére!

MEGOLDÁS. Olyan $\mathbf{x}$ vektort keresünk, melyre $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{x} = 0$ és $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{x} = 0$. Ezt koordinátákkal felírva két egyenletet kapunk, melynek együtthatómátrixa és annak egy lépcsős alakja a következő:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

amiből $\mathbf{x} = (-s - 2t, (s - 3t)/2, s, t)$, azaz

$$\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A megoldás tehát két vektor által kifeszített altér összes vektora.

Másként fogalmazva, e feladatban meghatároztuk az összes olyan vektort, mely egy mátrix sorvektorainak mindegyikére merőleges. $\square$

Az $m \times n$ -es $\mathbf{A}$ együtthatómátrixú homogén lineáris egyenletrendszer i -edik egyenletének alakja

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = 0, \text{ azaz } \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} = 0.$$

Eszerint a homogén lineáris egyenletrendszer minden megoldása merőleges az $\mathbf{A}$ mátrix minden sorvektorára. A merőlegesség azonban a sortér összes vektorára is fennáll a következő állítás következtében.

3.38. ÁLLÍTÁS (A SORTÉR ÉS A NULLTÉR MERŐLEGESSÉGE). A valós $\mathbf{A}$ mátrix sortérének bármely $\mathbf{s}$ vektora és nullterének tetszőleges $\mathbf{x}$ vektora merőleges egymásra, azaz $\mathbf{s} \cdot \mathbf{x} = 0$.

BIZONYÍTÁS. A sortér minden vektora az $\mathbf{A}$ sorvektorainak valamely $c_1, \dots, c_m$ skalárokkal vett lineáris kombinációja. Ezt felhasználva

$$\begin{aligned} \mathbf{s} \cdot \mathbf{x} &= (c_1 \mathbf{a}_{1*} + c_2 \mathbf{a}_{2*} + \cdots + c_m \mathbf{a}_{m*}) \cdot \mathbf{x} \\ &= c_1 \mathbf{a}_{1*} \cdot \mathbf{x} + c_2 \mathbf{a}_{2*} \cdot \mathbf{x} + \cdots + c_m \mathbf{a}_{m*} \cdot \mathbf{x} \\ &= c_1 0 + c_2 0 + \cdots + c_m 0 = 0. \end{aligned}$$

$\square$

Ez az állítás a következő definíciókra vezet: egy vektortér két altere *merőleges*, ha bárhogy választva egy vektort az egyik altérből, és egy másikat a másik altérből, azok merőlegesek egymásra. Eszerint az előző állítás úgy fogalmazható meg, hogy bármely valós mátrix sortere és nulltere merőleges egymásra. Ennél azonban több is igaz, a nulltér nem csak merőleges a sortérre, de az összes olyan vektort tartalmazza, mely merőleges a sortérre. Az $\mathbb{R}^n$ egy $\mathcal{W}$ alterére merőleges vektorok alterét a $\mathcal{W}$ merőleges kiegészítő alterének nevezzük és $\mathcal{W}^\perp$ -vel jelöljük (amit olvashatunk „ $\mathcal{W}$ perp”-nek).

A két fogalom közti különbséget mutatja a 7.5. ábra, melynek a) része a 3-dimenziós tér két, egymásra merőleges 1-dimenziós $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ alterét szemlélteti, míg a b) rész az $\mathcal{U}$ alteret, és annak 2-dimenziós merőleges kiegészítő $\mathcal{U}^\perp$ alterét szemlélteti.

Vegyük az $\mathbf{A}$ mátrix transzponáltját! Az $\mathbf{A}^\top$ együtthatómátrixú homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai merőlegesek $\mathbf{A}^\top$ sorvektoraira, azaz az $\mathbf{A}$ oszlopvektoraira. E két-két altér merőlegességét szemlélteti a 7.6. ábra. E négy altér igen fontos lesz a továbbiakban is, ezért ezeket a mátrixhoz tartozó *négy kitiüntetett altérnek* vagy négy fundamentális altérnek nevezzük. Ezek tehát $\mathcal{S}(\mathbf{A})$, $\mathcal{N}(\mathbf{A})$, $\mathcal{O}(\mathbf{A}) = \mathcal{S}(\mathbf{A}^\top)$, $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\top)$.

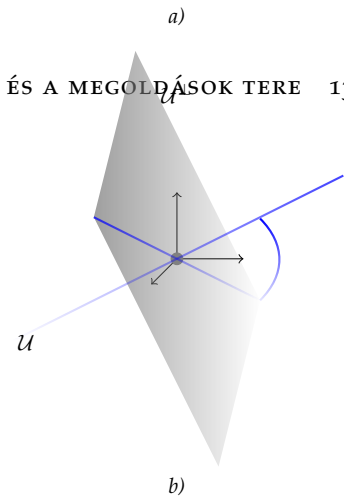
A lineáris algebra alaptétele A nulltér az összes olyan vektort tartalmazza, mely merőleges a sorvektorokra, azaz a sortérre. Vajon a nulltér minden vektorára merőleges vektorok egybeesnek a sortér vektoraival? A válasz igen, melyet a lineáris algebra alaptétele ad meg.

3.39. TÉTEL (A LINEÁRIS ALGEBRA ALAPTÉTELE). Minden valós mátrix sortere és nulltere merőleges kiegészítő alterei egymásnak.

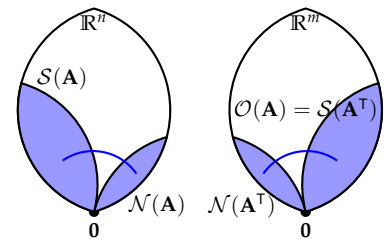
BIZONYÍTÁS. Láttuk, hogy a sortér merőleges kiegészítő altere a nulltér. Később látni fogjuk, hogy általánosan is igaz az, hogy bármely $\mathcal{V}$ altérre $(\mathcal{V}^\perp)^\perp = \mathcal{V}$ (ld. 7.17. tétel). Ezt használva kész is a bizonyítás. Most azonban ezt nem használva megmutatjuk, hogy a nulltér merőleges kiegészítő altere a sortér. Legyen a valós $\mathbf{A}$ mátrix sortere $\mathcal{S}$, nulltere $\mathcal{N}$, és ezek egy-egy bázisa $\{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_k\}$, illetve $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{n-k}\}$. $\mathcal{S}$ és $\mathcal{N}$ merőlegessége miatt $\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$ minden $i = 1, 2, \dots, r$ és $j = 1, 2, \dots, n - r$ esetén. E két bázis együtt $\mathbb{R}^n$ egy bázisát adja, hisz n elemű és független vektorokból áll. A függetlenség abból következik, hogy nullvektort előállító tetszőleges

$$\underbrace{c_1 \mathbf{s}_1 + \dots + c_r \mathbf{s}_r}_{\mathbf{c}} + \underbrace{d_1 \mathbf{e}_1 + \dots + d_{n-r} \mathbf{e}_{n-r}}_{\mathbf{d}} = \mathbf{0}$$

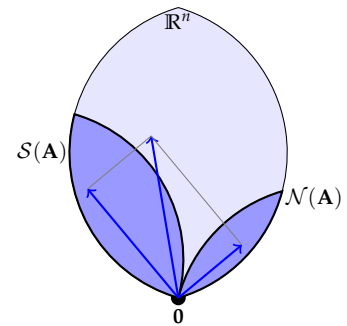
lineáris kombináció csak úgy állhat fenn, ha $\mathbf{c}$ és $\mathbf{d}$ a két altér metszetében van, így azok mindketten a nullvektorok, és így $c_1 = \dots = c_r = d_1 = \dots = d_{n-r} = 0$.



3.12. ábra: a) Két merőleges altér $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$; b) Egy altér és merőleges kiegészítő altere: $\mathcal{U}$ és $\mathcal{U}^\perp$.



3.13. ábra: Az $\mathbf{A}$ mátrix sortere merőleges nullterére, oszloptere az $\mathbf{A}^\top$ nullterére. A berajzolt két ív az alterek merőlegességét jelöli.



3.14. ábra: A lineáris algebra alaptétele: az $\mathbf{A}$ mátrix sortere és nulltere merőleges kiegészítő alterek. Eszerint bármely vektor, ami merőleges a nulltérre, a sortérben van. Később megmutatjuk, hogy ez azt is jelenti, $\mathbb{R}^n$ bármely vektora egyértelműen felbomlik egy sortérbe és egy nulltérbe eső vektor összegére.

Ha $\mathbf{x}$ egy olyan vektor, mely merőleges $\mathcal{N}$ minden vektorára, akkor $\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n - r$). Ha

$$\mathbf{x} = y_1 \mathbf{s}_1 + \dots + y_r \mathbf{s}_r + x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_{n-r} \mathbf{e}_{n-r},$$

akkor az $\mathbf{e}_i$ vektorokkal való beszorzás a következő homogén lineáris egyenletrendszerre vezet:

$$\begin{array}{ccccccc} (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1)x_1 + & (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2)x_2 + \dots + & (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_r)x_n = 0 \\ (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1)x_1 + & (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2)x_2 + \dots + & (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_r)x_n = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (\mathbf{e}_{n-r} \cdot \mathbf{e}_1)x_1 + (\mathbf{e}_{n-r} \cdot \mathbf{e}_2)x_2 + \dots + (\mathbf{e}_{n-r} \cdot \mathbf{e}_r)x_n = 0 \end{array}$$

Ez pedig egyértelműen megoldható, mert együtthatómátrixának rangja r . Ennek bizonyítását az Olvasóra hagyjuk. Egy bizonyítás látható a 3.15. feladatban, egy másik, egyszerűbb a ?? feladatban. $\square$

- A tétel állítása képletben kifejezve azt mondja, hogy $\mathcal{S}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{A})$, ami egyúttal azt is lejtenti, hogy $\mathcal{N}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{S}(\mathbf{A})$.
- Ha a lineáris algebra alaptételét az $\mathbf{A}$ mátrix transzponáltjára alkalmazzuk, és fölhasználjuk, hogy $\mathbf{A}$ oszloptere megegyezik $\mathbf{A}^\top$ sorterével, akkor azt kapjuk, hogy $\mathcal{O}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{A}^\top)$.
- Később azt is meg fogjuk mutatni, hogy ha $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ két merőleges kiegészítő altere egymásnak $\mathbb{R}^n$ -ben, akkor a tér minden $\mathbf{x}$ vektora egyértelműen előáll $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ alakban, ahol $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ és $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ (ld. 7.15., 7.17. tételek). Ez itt azt jelenti, hogy $\mathbb{R}^n$ minden vektora egyértelműen előáll egy sortérbe és egy nulltérbe eső vektor összegeként.

*Elemi bázistranszformáció** Az előző paragrafusokban azt láttuk, hogy az elemi sorműveletek eredményeként az eredeti mátrix oszlopainak egy másik bázisban felírt koordinátás alakját kapjuk meg. Ez adja az ötletet ahhoz, hogy az altérből választott bázisok segítségével szemléltessük, és értsük meg mi történik akkor, amikor a mátrix egy oszlopában főelemet (pivotalemet) választunk, és oszlopának többi elemét elimináljuk. Így egy másik megközelítéshez jutunk, melyet a továbbiakban nem használunk, ezért e paragrafus átugorható.

A folyamat lényege egy kétszlopos mátrixon is jól szemléltethető. Az egyszerűség kedvéért a két oszlop legyen az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektor, a bázis, melyben e vektorok meg vannak adva, legyen a standard bázis. Tegyük fel, hogy $a_i \neq 0$. Ekkor az a_i pozícióját választva, a kiküszöbö-

lés eredményeként a következőket kapjuk.

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_i & b_i \\ \vdots & \vdots \\ a_m & b_m \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & b_1 - \frac{b_i}{a_i}a_1 \\ 0 & b_2 - \frac{b_i}{a_i}a_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{b_i}{a_i} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & b_m - \frac{b_i}{a_i}a_m \end{bmatrix}$$

Tudjuk, az oszlopok az elemi sorműveletek után az eredeti vektorokat adják egy másik bázisban. Az $\mathbf{a}$ vektor nyilvánvalóan egy olyan bázisban lett felírva, amelyben szerepel az $\mathbf{a}$ vektor is, mégpedig ez az i -edik bázisvektor. Megmutatjuk, hogy mindkét oszlop az

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{i-1}, \mathbf{a}, \mathbf{e}_{i+1}, \dots, \mathbf{e}_m$$

bázisban lett felírva. Az $\mathbf{a}$ vektorra ez nyilván igaz. Nézzük a $\mathbf{b}$ vektort! Fejezzük ki az $\mathbf{e}_i$ vektort az $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + \dots + a_i\mathbf{e}_i + \dots + a_m\mathbf{e}_m$ felírásból:

$$\mathbf{e}_i = -\frac{1}{a_i}a_1\mathbf{e}_1 - \frac{1}{a_i}a_2\mathbf{e}_2 - \dots + \frac{1}{a_i}\mathbf{a} - \dots - \frac{1}{a_i}a_m\mathbf{e}_m.$$

Ezt behelyettesítjük a $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + \dots + b_i\mathbf{e}_i + \dots + b_m\mathbf{e}_m$ kifejezésbe:

$$\mathbf{b} = (b_1 - \frac{b_i}{a_i}a_1)\mathbf{e}_1 + (b_2 - \frac{b_i}{a_i}a_2)\mathbf{e}_2 + \dots + \frac{b_i}{a_i}\mathbf{a} + \dots + (b_m - \frac{b_i}{a_i}a_m)\mathbf{e}_m.$$

Tehát valóban, a $\mathbf{b}$ koordinátás alakja e módosított bázisban épp az, amit az eredeti mátrix eliminálása után kaptunk a második oszlopban. Az imént tárgyalt lépést elemi bázistranszformációnak nevezzük, mert egy másik bázisra való áttérés egy elemi lépésének tekintjük, amikor egyetlen bázisvektort cserélünk ki. A történetek szemléltetésére a mátrixot fejléccel együtt egy táblázatba írjuk, a sorok elé az $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ bázisvektorok, az oszlopok fölé az oszlopvektorok neve kerül.

$$\begin{array}{c|cc} & \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \mathbf{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{e}_i & a_i & b_i \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{e}_m & a_m & b_m \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|cc} & \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{e}_1 & 0 & b_1 - \frac{b_i}{a_i}a_1 \\ \mathbf{e}_2 & 0 & b_2 - \frac{b_i}{a_i}a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a} & 1 & \frac{b_i}{a_i} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{e}_m & 0 & b_m - \frac{b_i}{a_i}a_m \end{array}$$

Összefoglalva és egyúttal általánosabban megfogalmazva a fentieket:

3.40. TÉTEL (ELEMI BÁZISTRANSZFORMÁCIÓ). Tegyük fel, hogy az $\mathbf{a}$ vektor $E = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m\}$ bázisra vonatkozó i -edik koordinátája $a_i \neq 0$. Ekkor az E által generált $\mathcal{E}$ altérnek az

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{i-1}, \mathbf{a}, \mathbf{e}_{i+1}, \dots, \mathbf{e}_m$$

vektorok is bázisát alkotják. Az $\mathcal{E}$ egy tetszőleges b vektorának koordinátás alakja megkapható e bázisban elemi sorműveletekkel, ha a_i -t választjuk főelemnek.

Az elemi bázistranszformáció alkalmas arra, hogy a bázisok változásán keresztül egy más nézőpontból világítsa meg a redukált lépcsős alakra hozással megoldható feladatokat. Példaként vizsgáljuk meg, mi történik egy egyenletrendszer megoldásakor. Megjegyezzük, hogy itt nincs szükség sorcserére, mert egy oszlopból szabadon választhatunk olyan sort, amelynek fejlécében még az eredeti bázisvektor szerepel.

3.41. PÉLDA (EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSA ELEMI BÁZISTRANSZFORMÁCIÓVAL). Oldjuk meg a 2.34. és a 2.42. példában megoldott egyenletrendszert elemi bázistranszformációval.

MEGOLDÁS. A táblázatokat egybefűzzük, a sorok fejlécein mindig jelezzük az aktuális bázist, az oszlopok fejléceit a jobb érthetőség végett mindig kiírjuk, a kiválasztott főelemeket külön jelöljük:

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{b}$		$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{b}$		$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{b}$		$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{b}$
$\mathbf{e}_1$	1	1	2	0	$\mathbf{a}_1$	1	1	2	0	$\mathbf{a}_1$	1	0	3	-5	$\mathbf{a}_1$	1	0	0	1
$\mathbf{e}_2$	2	2	3	2	$\mathbf{e}_2$	0	0	-1	2	$\mathbf{e}_2$	0	0	-1	2	$\mathbf{e}_2$	0	0	0	0
$\mathbf{e}_3$	1	3	3	4	$\mathbf{e}_3$	0	2	1	4	$\mathbf{e}_3$	0	0	3	-6	$\mathbf{a}_3$	0	0	1	-2
$\mathbf{e}_4$	1	2	1	5	$\mathbf{e}_4$	0	1	-1	5	$\mathbf{a}_2$	0	1	-1	5	$\mathbf{a}_2$	0	1	0	3

A táblázaton kicsit lehet egyszerűsíteni, azt az oszlopot, amelyben már csak egy standard egységvektor van, felesleges kiírni, az oszlopok és a sorok fejléceibe pedig elég csak azt a változót írni, amelyik a bázisba vett oszlopvektorhoz tartozik. Így a következőt kapjuk:

x	y	z	$\mathbf{b}$		y	z	$\mathbf{b}$		z	$\mathbf{b}$		$\mathbf{b}$
1	1	2	0	x	1	2	0	x	3	-5	x	1
2	2	3	2		0	-1	2		-1	2		0
1	3	3	4		2	1	4		3	-6	z	-2
1	2	1	5		1	-1	5	y	-1	5	y	3

Az egyenletrendszer megoldása tehát $x = 1, y = 3, z = -2$. □

Feladatok

3.12. BÁZIS: IGAZ – HAMIS

- A $\mathcal{V}$ altérben a $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ vektorrendszer bázis, ha tetszőleges $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ vektor egyértelműen felírható e vektorok lineáris kombinációjaként.
- Van olyan altér, melynek bármely nemnulla vektora bázis.
- Van olyan altér, melynek van kételemű bázisa, és van ettől különböző három lineárisan független vektora.

3.13. Egy lineáris egyenletrendszerről tudjuk, hogy együtthatómátrixának rangja 2, és hogy $(1, 2, 3)$ és $(0, 1, 3)$ is megoldásvektora. Adjuk meg az összes megoldását!

3.14. Határozzuk meg a 3.27. példabeli vektorok által kifeszített altér egy másik bázisát úgy, hogy a vektorokat

más sorrendben írjuk a mátrixba. Legyen például a sorrend $\mathbf{w}_1 = (1, 1, 2, 1)$, $\mathbf{w}_2 = (3, 1, 3, 2)$, $\mathbf{w}_3 = (6, 0, 3, 3)$, $\mathbf{w}_4 = (2, -2, -2, 0)$. Fejezzük ki mind a négy vektort ezek lineáris kombinációjaként! Végül írjuk fel mind a négy vektor koordinátás alakját e bázisban!

3.15. VEKTOROK SKALÁRIS SZORZATAI Igazoljuk, hogy a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_k \\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_k \end{bmatrix}$$

mátrix rangja pontosan akkor k , ha az $\mathbb{R}^n$ -beli $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorok lineárisan függetlenek.

Megoldások

3.1. Mindegyik állítás hamis.

3.2. a) Igaz. b) Igaz. c) Hamis, csak akkor igaz, ha egyik a másik altere. d) Igaz. e) Igaz. f) Hamis, a zérustér az egyetlen zérusvektorból áll.

3.3. a) Hamis, csak a homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai alkotnak alteret, az inhomogéné eltolt alteret. b) Igaz. c) Igaz. Ez épp az oszloptér, ugyanis csak az oszloptérből való $\mathbf{b}$ vektorokra oldható meg az egyenletrendszer. d) Igaz. Ez épp a nulltér vektorait adja, ami alter.

3.4. a) Igaz. b) Igaz. c) Hamis. d) Igaz, ugyanis az állításbeli $r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) \leq r(\mathbf{A})$ feltétel pontosan akkor teljesül, ha $r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = r(\mathbf{A})$, és ez pontosan akkor teljesül, ha az egyenletrendszer megoldható. e) Hamis, ha $r(\mathbf{A}) = n$, és az egyenletrendszer több, mint n egyenletről áll, akkor előfordulhat, hogy $r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = n + 1$, és ekkor az egyenletrendszer nem oldható meg!

3.5. a) Nem, egységvektor konstansszorosai nem egységvektorok. b) Igen (origón átmenő sík). c) Nem (eltolt sík). d) Igen, ez egy origón átmenő egyenes vektoraiból áll. e) Igen, ez a zérustér. f) Nem, az $(1, -1, 0)$ és az $(1, 0, -1)$ vektor benne van, de az összegük nincs e halmazban.

3.6. a) $r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) \leq 1$. A 0 rang csak úgy fordulhat elő, ha az összes egyenlet $0 = 0$ alakú – nem egy érdekes eset. Ha a rang 1, akkor a kötött és a szabad változók száma is 1. b) $r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 5$. c) $r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 3$. d) $r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 2$.

3.7. Két megoldásvektor különbsége, azaz az $(1, 2, 3) - (0, 1, 3) = (1, 1, 0)$ vektor biztosan megoldása az egyenletrendszer homogén részének. Akkor viszont ennek minden skalárszorosa is megoldás, így azokat bármelyik fenti megoldáshoz adjuk, újabb megoldásokat kapunk. Például megoldás az $(1, 2, 3) + (1, 1, 0) = (2, 3, 3)$ és az $(1, 2, 3) + 2(1, 1, 0) = (3, 4, 3)$ vektor is.

Mivel az ismeretlenek száma 3, és azok legalább egyike szabad változó, ezért a rang legfeljebb 2. Ha viszont e megoldások egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai, akkor a megoldások közt van legalább két lineárisan független megoldás, így a szabad változók száma legalább kettő, vagyis a kötöttek legfeljebb 1, tehát az együtthatómátrix rangja is legfeljebb 1.

3.8. Első ránézésre csak annyi látszik, hogy mindkét megoldás egy kétdimenziós alter eltoltja. Először megvizsgáljuk, hogy a két alter – vagyis az egyenletrendszer homogén részére adott két megoldás – egybeesik-e. Elég megmutatni, hogy az egyik alterben benne van a másikat generáló két vektor. Ha igen, a két alter megegyezik. Ezesetben el

kell dönteni, hogy az inhomogén két partikuláris megoldása az alternek ugyanabban az eltoltjában van-e. Vagy egyszerűbben, hogy a két partikuláris megoldás különbsége benne van-e az alterben. E kérdéseket egyetlen mátrix lépcsős alakra hozásával is megoldhatjuk. Az első két oszlop az első, a második két oszlop a második alter generátorait tartalmazza, az ötödik oszlop a két partikuláris megoldás különbsége.

$$\left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Az eredményből látszik, hogy a két megoldás azonos.

3.9. Ha $\mathbf{a}_{i*}$ jelöli az együtthatómátrix i -edik sorát és $\mathbf{x}$, illetve $\mathbf{y}$ a homogén egyenletrendszer egy-egy megoldását, azaz $\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} = 0$, $\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{y} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$), akkor

$$\mathbf{a}_{i*} \cdot (c\mathbf{x} + d\mathbf{y}) = c\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} + d\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{y} = 0 + 0 = 0,$$

tehát a két megoldásvektor bármely lineáris kombinációja is megoldás. Másként fogalmazva a homogén lineáris egyenletrendszerek megoldásainak bármely lineáris kombinációja is megoldás, tehát a megoldások alteret alkotnak.

3.10. Legyen $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ az inhomogén egy partikuláris megoldása, és jelölje $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ az $\mathbf{A}$ oszlopvektorait, $\mathcal{H}$ a homogén, $\mathcal{I}$ az inhomogén egyenletrendszer általános megoldását. Megmutatjuk, hogy $\mathbf{x} + \mathcal{H} = \mathcal{I}$, ahol a bal oldali összeadást elemenként értjük.

$\mathbf{x} + \mathcal{H} \subseteq \mathcal{I}$: Meg kell mutatnunk, hogy ha $\mathbf{x}$ -hez adjuk a $\mathcal{H}$ egy tetszőleges $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathcal{H}$ elemét, az inhomogén egyenletrendszer egy megoldását kapjuk. Valóban, $\mathbf{x}$, illetve $\mathbf{y}$ eleget tesz az

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \dots + \mathbf{a}_n x_n = \mathbf{b}, \text{ illetve}$$

$$\mathbf{a}_1 y_1 + \mathbf{a}_2 y_2 + \dots + \mathbf{a}_n y_n = \mathbf{0}$$

egyenletnek. Ebből

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1(x_1 + y_1) + \mathbf{a}_2(x_2 + y_2) + \dots + \mathbf{a}_n(x_n + y_n) &= \\ (\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \dots + \mathbf{a}_n x_n) + (\mathbf{a}_1 y_1 + \mathbf{a}_2 y_2 + \dots + \mathbf{a}_n y_n) &= \\ \mathbf{b} + \mathbf{0} &= \mathbf{b}, \end{aligned}$$

tehát $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ megoldása az inhomogén egyenletrendszernek, azaz $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathcal{I}$.

$\mathbf{x} + \mathcal{H} \supseteq \mathcal{I}$: Meg kell mutatnunk, hogy ha $\mathbf{z}$ az inhomogén egy tetszőleges megoldása, azaz $\mathbf{z} \in \mathcal{I}$, akkor található olyan $\mathbf{y} \in \mathcal{H}$, hogy $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$. Valóban, az $\mathbf{y} = \mathbf{z} - \mathbf{x}$

megteszi, mert

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1(z_1 - x_1) + \mathbf{a}_2(z_2 - x_1) + \dots + \mathbf{a}_n(z_n - x_1) = \\ (\mathbf{a}_1 z_1 + \mathbf{a}_2 z_2 + \dots + \mathbf{a}_n z_n) - (\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \dots + \mathbf{a}_n x_n) = \\ \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

azaz $\mathbf{z} - \mathbf{x} \in \mathcal{H}$.

3.11. Összesen 16 altere van $\mathbb{F}_2^3$ -nek. Van egy 0-dimenziós, a $\mathcal{Z} = \{\mathbf{0}\}$ tér. Az egydimenziós alterek a nullvektorból és egyetlen tőle különböző további vektorból állnak (7 ilyen alter van). A kétdimenziós alterek mindegyike a nullvektorból, két további egymástól is különböző vektorból és azok összegéből áll. Ezeket felsoroljuk:

$$\begin{aligned} &\{(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (1,1,0)\}, \\ &\{(0,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (0,1,1)\}, \\ &\{(0,0,0), (0,0,1), (1,0,0), (1,0,1)\}, \\ &\{(0,0,0), (1,0,0), (0,1,1), (1,1,1)\}, \\ &\{(0,0,0), (0,1,0), (1,0,1), (1,1,1)\}, \\ &\{(0,0,0), (0,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}, \\ &\{(0,0,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0)\}. \end{aligned}$$

Végül alter maga $\mathbb{F}_2^3$ is.

3.12. 1. Igaz. 2. Igaz, bármely 1-dimenziós alter ilyen. 3. Hamis, ha van kételemű bázis, akkor a lineárisan független vektorrendszerek elemszáma legfeljebb 2.

3.13. Mivel az egyenletrendszer 3-ismeretlenes, és a rang 2, ezért a kötött változók száma 2, a szabad változóké 1, és így a nulltér dimenziója is 1. A két vektor független egymástól, tehát az egyenletrendszer nem lehet homogén, akkor ugyanis legalább kettő lenne a nulltér dimenziója. Az egyenletrendszer tehát inhomogén, és a megadott két megoldás különbsége a homogén rész egy megoldását adja, annak összes skalárszorosa pedig az összes megoldását. Így az inhomogén összes megoldása: $(1, 2, 3) + t(1, 1, 0)$.

3.14. A mátrix és annak redukált lépcsős alakja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 6 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Eszerint bázisvektoroknak választhatjuk a $\mathbf{w}_1 = (1, 3, 6, 2)$ és a $\mathbf{w}_2 = (1, 1, 0, -2)$ vektorokat. A többi vektor kifejezhető ezek lineáris kombinációjaként:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

A redukált lépcsős alak nemzérus soraiból álló

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 3/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

mátrixból kiolvasható, hogy a fenti alternek $\mathcal{B} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ bázisa, és ebben a bázisban a négy vektor koordinátás alakja rendre

$$\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

3.15. E mátrix rangja pontosan akkor k , ha oszlopvektorai lineárisan függetlenek, azaz ha az oszlopvektorok bármely lineáris kombinációja csak úgy lehet a nullvektor, ha minden együttható 0. Tekintsünk az oszlopvektorok egy $c_1, \dots, c_k$ skalárokkal vett, nullvektort adó lineáris kombinációját. Ennek i -edik koordinátája

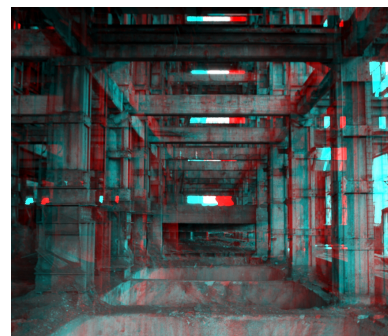
$$\begin{aligned} 0 &= c_1 \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_2 + \dots + c_k \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_k \\ &= \mathbf{v}_i \cdot (c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_k \mathbf{v}_k). \end{aligned}$$

Tehát azt kaptuk, hogy az $\mathbf{x} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_k \mathbf{v}_k$ vektor olyan, hogy a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorok mindegyikével vett skaláris szorzata 0, így ezek bármelyik lineáris kombinációjával vett skaláris szorzata is 0, tehát például az $\mathbf{x}$ vektorral vett szorzat is 0, azaz $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$. Ez viszont csak $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ esetén állhat fenn, és mivel a $\mathbf{v}_i$ vektorok lineárisan függetlenek, csak a $c_i = 0$ konstansokkal vett lineáris kombinációjuk lehet 0, ahol $i = 1, 2, \dots, k$.

II. rész

Mátrixok algebrája és geometriája

Eddig a mátrixokat csak egyszerű jelölésnek tekintettük, mely az egyenletrendszer együtthatóinak tárolására, és az egyenletrendszer megoldása közbeni számítások egyszerűsítésére való. E részt a számok közti műveletek számtáblázatokra való kiterjesztésével kezdjük, majd ezeket átültetjük mátrixokra, és megvizsgáljuk algebrai tulajdonságait. E műveletek segítségével újragvizsgáljuk az egyenletrendszerek megoldhatóságának és a megoldások kiszámításának kérdését. A mátrixok „számtani” fejezetei után a „mértaniak” következnek: a determináns, mint a négyzetes mátrixhoz rendelt előjeles mérték, majd a mátrixleképezések geometriája lesz e rész tárgya.



Enter The Matrix – 3D picture (CC) on flickr by Grégory Tonon

4

Mátrixműveletek definíciói

Az egyenletrendszerek megoldásához és vizsgálatához hatékony eszközökhöz jutunk a mátrixműveletek bevezetésével. E műveletek szám-talan egyéb alkalmazásban játszanak fontos szerepet, melyekkel a könyv további részében mindenütt találkozni fogunk.

Műveletek táblázatokkal – műveletek mátrixokkal

A valós számok közti műveletek természetes módon kiterjeszthetők mátrixokkal való műveletekké. Ezek definícióihoz az összeadás és a szorzás hétköznapi alkalmazásainak táblázatokra való kiterjesztésén keresztül fogunk eljutni.

TÁBLÁZATTAL nap, mint nap találkozunk. Számszerű adatok téglalap alakban elrendezett, áttekinthető összefoglalására való. Általában a sorok előtt és az oszlopok fölött van egy *fejléc*, melyben az adott sor, illetve oszlop adatait jellemző valamely információ áll (például az oszlop számadatainak közös mértékegysége). Táblázatok használata kikerülhetetlen a gazdasági adatok kezelésében, így minden irodai szoftvercsomag tartalmaz táblázatkezelőt, de a mérnöki vagy természettudományos közleményekben is nélkülözhetetlen eszköz.

A mátrixra úgy is tekinthetünk, mint amelyet egy olyan absztrakció során kapunk a táblázatból, melyben azt megfosztjuk fejléceitől, az adatokból pedig csak a számokat őrizzük meg, azok jelentésétől, mértékegységétől eltekin-tünk.

Táblázatok összeadása 3 alma meg 2 alma az 5 alma. Az összeadás művelete természetes módon kiterjeszthető gyümölcsök számadatait tartalmazó táblázatokra. Ha két gyümölcskosárban piros és zöld alma és szőlő van az alábbi táblázatok szerint, akkor összeöntésük után számukat így számolhatjuk:

	alma (db)	szőlő (fürt)					alma (db)	szőlő (fürt)				alma (db)	szőlő (fürt)
			+			=							
piros	3	2		piros	2	2		piros	5	4			
zöld	2	1		zöld	0	1		zöld	2	2			

Azonos méretű, azonos fejlécű táblázatok összeadásának egy lehetséges módja az, ha az azonos pozícióiban lévő elemek összeadásával képezzük az összeget.

Táblázat szorzása számmal Az asztalon 2 alma van. Ha számukat megháromszorozzuk, összeszorozunk egy mértékegység nélküli számot (3) egy mértékegységgel rendelkezővel (2 darab), és az eredmény mértékegysége is ez. Ezt megtehetjük egy kosár egész tartalmával is:

$$3 \cdot \begin{array}{c|cc} & \text{alma} & \text{szőlő} \\ & \text{(db)} & \text{(fürt)} \\ \hline \text{piros} & 3 & 2 \\ \text{zöld} & 2 & 1 \end{array} = \begin{array}{c|cc} & \text{alma} & \text{szőlő} \\ & \text{(db)} & \text{(fürt)} \\ \hline \text{piros} & 9 & 6 \\ \text{zöld} & 6 & 3 \end{array}$$

Táblázatok szorzása Egy adag (e példában a továbbiakban mindig 10 dkg) alma energiatartalma 30 kcal. Mennyi 5 adag energiatartalma? A választ ismét szorzással kapjuk meg – most mindkét mennyiség mértékegységgel is rendelkezik:

$$5 \text{ adag} \cdot 30 \frac{\text{kcal}}{\text{adag}} = 150 \text{ kcal}.$$

Több gyümölcsből (alma, banán, narancs) többféle (A, B, C) gyümölcssalátát készítünk, és a szénhidrát- és energiatartalmukat szeretnénk összehasonlítani. Két táblázatot készítünk, egyikbe a gyümölcssaláták összetételét, a másikba az összetevők szénhidrát- és energiatartalmát írjuk. Mindkét táblázatban a sorokba kerülnek azok a tételek, melyek összetételét/összetevőit részletezzük, az oszlopokba pedig az összetevők.

	Alma (adag)	Banán (adag)	Narancs (adag)		Szénhidrát (g/adag)	Energia (kcal/adag)
A	5	1	4	Alma	7	30
B	4	4	2	Banán	24	105
C	4	2	4	Narancs	8	40

A következőképp tudjuk az A saláta energiatartalmát kiszámítani:

$$5 \text{ adag} \cdot 30 \frac{\text{kcal}}{\text{adag}} + 1 \text{ adag} \cdot 105 \frac{\text{kcal}}{\text{adag}} + 4 \text{ adag} \cdot 40 \frac{\text{kcal}}{\text{adag}} = 415 \text{ kcal},$$

vagyis az első táblázat egy sorának és a második táblázat egy oszlopának kellett a skaláris szorzatát venni. Végezzük el e számításokat mindhárom gyümölcssaláta szénhidrát és energiatartalmára is, és az eredményt ismét egy olyan táblázatba tegyük, melynek soraiba a részletezendő tételek (A, B, C saláta), oszlopaiba a tartalmi összetevők (szénhidrát-, energiatartalom) kerüljenek.

	Szénhidrát (g)	Energia (kcal)
A	91	415
B	140	620
C	108	490

Az áttekinthetőség kedvéért a két összeszorozandó mátrixot és az eredményt úgy helyezzük el, hogy az elvégzett műveletek jobban követhetők legyenek. Az A saláta energiatartalmát kiemeljük:

	Szénhidrát (g/adag)	Energia (kcal/adag)
Alma	7	30
Banán	24	105
Narancs	8	40

	Alma (adag)	Banán (adag)	Narancs (adag)		Szénhidrát (g)	Energia (kcal)
A	5	1	4	A	91	415
B	4	4	2	B	140	620
C	4	2	4	C	108	490

Érdeemes megfigyelni, hogy ha csak az A és C gyümölcssalátákra vagyunk kíváncsiak, elég az első táblázat és a végeredmény második sorát elhagyni, hasonlóképp ha csak az energiatartalmat figyeljük, elég a második táblázat és a végeredmény második oszlopát megtartani. Az is látszik, hogy az első táblázat oszlopainak és a második táblázat sorainak száma megegyezik. Általában az igaz, hogy (a fejléceket nem számolva) egy $m \times n$ -es táblázat csak olyan $p \times k$ -as táblázattal szorozható össze, ahol $p = n$, és az eredmény $m \times k$ -as lesz.

Lineáris helyettesítés A lineáris algebra alapvető fogalmai megfogalmazhatóak a lineáris helyettesítés nyelvén.

4.1. DEFINÍCIÓ (LINEÁRIS HELYETTESÍTÉS). *Lineáris helyettesítésről akkor beszélünk, ha változók egy halmazát más változók konstansszorosainak összegeként állítjuk elő, azaz változókat más változók lineáris kifejezéseivel helyettesítünk.*

Tekintsük például a következő két lineáris helyettesítést:

$$\begin{aligned}
 a &= 5x + y + 4z & x &= 7s + 30k \\
 b &= 4x + 4y + 2z & \text{és} & & y &= 24s + 105k \\
 c &= 4x + 2y + 4z & z &= 8s + 40k
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

Egy kis időre e két lineáris helyettesítést is táblázatokkal írjuk le:

$$\begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline a & 5 & 1 & 4 \\ b & 4 & 4 & 2 \\ c & 4 & 2 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} & s & k \\ \hline x & 7 & 30 \\ y & 24 & 105 \\ z & 8 & 40 \end{array} \qquad (4.2)$$

4.2. PÉLDA (LINEÁRIS HELYETTESÍTÉSEK KOMPOZÍCIÓJA). Tekintsük a (4.1)-ben megadott két lineáris helyettesítést! Az első majd a második helyettesítés egymás után való elvégzése – más szóval kompozíciója – milyen helyettesítéssel egyenértékű, és az lineáris-e?

MEGOLDÁS. Az $a = 5x + y + 4z$ kifejezésben helyettesítsük x , y és z helyébe a második lineáris helyettesítés szerinti kifejezéseket, azaz

$$a = 5x + y + 4z = 5(7s + 30k) + (24s + 105k) + 4(8s + 40k) = 91s + 415k.$$

Emeljük ki pl. a k együtthatójának kiszámítását:

$$5 \cdot 30 + 1 \cdot 105 + 4 \cdot 40 = 415.$$

Mint látjuk ez az első helyettesítés táblázata első sorának és második táblázat második oszlopának skaláris szorzata. Hasonló módon b és c is kifejezhető s és k segítségével, így kapjuk, hogy a két lineáris helyettesítés egymásutánja ekvivalens az

$$a = 91s + 415k$$

$$b = 140s + 620k$$

$$c = 108s + 490k$$

helyettesítéssel. Ez lineáris, hisz a számolás közben lineáris kifejezéseket csak konstanssal szoroztunk, és ezeket adtuk össze. Ennek a helyettesítésnek a táblázata

	s	k
a	91	415
b	140	620
c	108	490

vagyis azt kaptuk, hogy a lineáris helyettesítések kompozíciójának táblázataik szorzata felel meg. $\square$

	s	k
x	7	30
y	24	105
z	8	40

	x	y	z		s	k
a	5	1	4	a	91	415
b	4	4	2	b	140	620
c	4	2	4	c	108	490

Mátrixok Az eddigiek alapján megfogalmazhatjuk: az m sorba és n oszlopba rendezett mn darab szám rendszerét $m \times n$ -típusú mátrixnak nevezzük. A mátrixban szereplő számokat a mátrix elemeinek nevezzük. Eleinte csak valamely algebrai struktúra (egész, valós, komplex) elemeit fogjuk a mátrixba írni, később pl. függvények mátrixait is vizsgálni fogjuk.

4.3. DEFINÍCIÓ (ADOTT TÍPUSÚ MÁTRIXOK TERE). Legyen S egy tetszőleges halmaz (pl. $S = \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \dots$). Az S elemeiből képzett összes $m \times n$ -es mátrixok halmazát jelölje

$$S^{m \times n}.$$

Azt mondjuk, hogy $S^{m \times n}$ az S fölötti $m \times n$ típusú mátrixok tere.

Például az $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix eleme az $\mathbb{N}^{2 \times 2}$, $\mathbb{Z}^{2 \times 2}$, $\mathbb{Q}^{2 \times 2}$, $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ terek mindegyikének.

Két mátrixot akkor tekintünk *egyenlőnek*, ha azonos típusúak, és az azonos indexű elemek egyenlők. Például az $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & x \end{bmatrix}$ egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $x = 4$. Fontos felidézni, hogy minden vektornak megfeleltethetünk egy sor- vagy oszlopvektor alakba írt mátrixot, azok azonban nem egyenlők egymással. Például

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

mert nem azonos típusúak, így el kell dönteni, hogy e két mátrix közül melyik reprezentálja a $(1, 2, 3)$ vektort. Mint említettük, a modern matematika legtöbb területén alapértelmezésben az oszlopvektorokat rendeljük a vektorokhoz. E könyvben mi is így teszünk (kivéve a kód-elméleti alkalmazásokat).

Egy mátrix *négyzetes*, ha sorainak és oszlopainak száma megegyezik. Az $\mathbf{A}$ mátrix főátlójának elemei $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots$. Ez nem csak négyzetes mátrixra értelmezhető. Az olyan négyzetes mátrixot, melynek főátlón kívüli elemei mind nullák, *diagonális mátrixnak* nevezzük. Az ilyen mátrixok egyszerű megadására a `diag` függvényt használjuk, melynek argumentumába a főátló elemei vannak felsorolva. Például

$$\text{diag}(1, 2, 3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Elemenkénti mátrixműveletek Több olyan mátrixműveletet ismerünk, melyben a számok közt már értelmezett műveletet úgy általánosítjuk mátrixokra, hogy azt a mátrix vagy mátrixok minden elemén végrehajtjuk. Ilyen pl. a mátrixok összeadása és skalárral való szorzása.

4.4. DEFINÍCIÓ (MÁTRIXOK ÖSSZEGE, KÜLÖNBSÉGE). Az $m \times n$ -es típusú $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ és $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ mátrixok összegén azt az ugyancsak $m \times n$ -es típusú, és $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ -vel jelölt mátrixot értjük, melynek i -edik sorában a j -edik elem $a_{ij} + b_{ij}$, ahol $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Képletben:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij}] + [b_{ij}] := [a_{ij} + b_{ij}].$$

Hasonlóan definiálható $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ különbsége is, azaz $\mathbf{A} - \mathbf{B} := [a_{ij} - b_{ij}]$.

```
OCTAVE a = [1 2 3
>           4 5 7]
a =
    1    2    3
    4    5    7
```

```
OCTAVE b = [1 2; 3 4]
b =
    1    2
    3    4
```

```
OCTAVE diag([1, 2, 3])
ans =
    1    0    0
    0    2    0
    0    0    3
```

```
OCTAVE a(2, 3)
ans = 7
OCTAVE a(2, :)
ans =
    4    5    7
```

```
OCTAVE a(:, 3)
ans =
    3
    7
```

```
OCTAVE v = [1 2 3]
v =
    1    2    3
```

```
OCTAVE w = [1; 2; 3]
w =
    1
    2
    3
```

```
OCTAVE size(v)
ans =
    1    3
```

```
OCTAVE size(w)
ans =
    3    1
```

4.1. ábra: Mátrix megadása, elemeinek, sorainak és oszlopainak és azok számának lekérdezése mátrix alapú nyelvekben.

A mátrixalapú nyelvekben mátrixok közötti elemenkénti művelet definiálható a műveleti jel elé tett ponttal. Így az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixok elemenkénti szorzata az

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

paranccsal kapható meg. Eszerint az $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ és $\mathbf{A} * \mathbf{B}$ kódok az eredményt tekintve ekvivalensek.

MEGOLDÁS. Először a skalárral való szorzásokat végezzük el:

$$2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad -3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 6 \\ 3 & 0 \end{bmatrix},$$

majd az összeadást:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 6 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 7 & 8 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

A műveletek természetesen elemenként is elvégezhetők, pl. a második sor első eleme így is megkapható: $2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) = 7$. $\square$

Látjuk, a mátrixok az összeadásra és a skalárral való szorzásra nézve a vektorokhoz hasonlóan viselkednek. Mondhatjuk, hogy az $\mathbb{R}^{m \times n}$ -beli $m \times n$ -es mátrixok e két műveletre nézve úgy viselkednek, mint $\mathbb{R}^m$ vektorai (csak másként vannak elrendezve). Beszélhetünk ezért arról, hogy $\mathbb{R}^{m \times n}$ egy mn -dimenziós vektortér. Lásd erről pl. a 4.7. és a 4.8. feladatokat.

Mátrixszorzás A táblázatok szorzásánál látott szabályt követjük a következő definícióban:

4.9. DEFINÍCIÓ (MÁTRIXOK SZORZÁSA). Egy $m \times t$ -es $\mathbf{A}$ és egy $t \times n$ -es $\mathbf{B}$ mátrix szorzatán azt az $\mathbf{AB}$ -vel jelölt $m \times n$ -es $\mathbf{C}$ mátrixot értjük, amelynek i -edik sorában és j -edik oszlopában álló eleme

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj} + \dots + a_{it}b_{tj}.$$

A definícióbeli összefüggés több módon is kifejezhető. Szummával fölírva:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^t a_{ik}b_{kj},$$

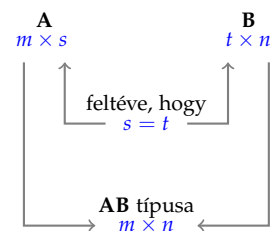
de mondhatjuk azt is, hogy c_{ij} az $\mathbf{A}$ mátrix i -edik sorának és a $\mathbf{B}$ mátrix j -edik oszlopának skaláris szorzata, azaz

$$c_{ij} = \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{b}_{*j}.$$

Fontos kiemelni, hogy egy $m \times s$ -es $\mathbf{A}$ és egy $t \times n$ -es $\mathbf{B}$ mátrix csak akkor szorozható össze, ha $s = t$, és ekkor a szorzat $m \times n$ típusú.

Nyilvánvaló, hogy a szorzás sorrendje fontos. Lehet, hogy az $\mathbf{AB}$ szorzás elvégezhető, de a $\mathbf{BA}$ nem, és lehet, hogy elvégezhető, de különböző eredményt kapunk (ld. a 4.10. feladatot). Mivel a mátrixszorzás nem felcserélhető, ha szükséges, az „ $\mathbf{A}$ -t balról szorozzuk $\mathbf{B}$ -vel”, vagy az „ $\mathbf{A}$ -t jobbról szorozzuk $\mathbf{B}$ -vel” kifejezésekkel teszünk különbséget a $\mathbf{BA}$ és az $\mathbf{AB}$ szorzatok közt.

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{it} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{tj} \end{bmatrix} = c_{ij}$$



4.10. PÉLDA (MÁTRIXOK SZORZÁSA). Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Számítsuk ki az $\mathbf{AB}$ szorzat második sorának elemeit, azaz az $(\mathbf{AB})_{2*}$ sor-mátrixot!

MEGOLDÁS. A szorzat második sorának elemei az $\mathbf{A}$ második sorának $\mathbf{B}$ oszlopaival való szorzatából kaphatók meg:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & * \\ 4 & 3 & 4 \\ * & * & * \end{bmatrix} \quad \square$$

Fontosak azok a mátrixszorzatok, amelyekben az egyik mátrixnak csak egy sora vagy oszlopa van, tehát sor- vagy oszlopvektor. Egy $1 \times m$ -es mátrixot, azaz egy sorvektort jobbról, egy $n \times 1$ -es mátrixot, azaz egy oszlopvektort balról lehet beszorozni egy $m \times n$ -es mátrixszal. Például

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Műveletek blokkmátrixokkal Hatalmas méretű mátrixokkal végzett műveletek párhuzamosíthatók, és a memóriakezelésük is hatékonyabbá válik, ha a mátrixokat blokkokra osztjuk, és a műveleteket is e kisebb részmátrixokkal végezzük.

Ha egy mátrixot a rajta végighaladó vízszintes és függőleges vonalakkal részmátrixokra bontunk, azt mondjuk, hogy e mátrix a részmátrixokból – más néven blokkokból – alkotott *blokkmátrix*. Egy egyenletrendszer $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ bővített mátrixa egy két blokkból álló blokkmátrixnak is tekinthető.

Az alábbi példa egy 5-ismeretlenes, 5 egyenletből álló egyenletrendszer bővített mátrixának redukált lépcsős alakját mutatja, melyben a kötött és szabad változók, valamint az együtthatómátrix zérussorai szerint blokkosítottunk:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} & \mathbf{B}_{13} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} & \mathbf{B}_{23} \end{bmatrix}.$$

Egy blokkmátrix sorait és oszlopait szokás a mátrix *blokksorainak* és *blokkoszlopainak* nevezni a közönséges soroktól és oszlopoktól való

megkülönböztetés végett. Pl. a fenti blokkmátrix első blokksorának elemei $\mathbf{B}_{11}$, $\mathbf{B}_{12}$, $\mathbf{B}_{13}$.¹

4.11. ÁLLÍTÁS (MŰVELETEK BLOKKMÁTRIXOKKAL). *Blokkmátrixok skálárral való szorzása és két azonos módon particionált blokkmátrix összeadása blokkonként is elvégezhető, azaz*

$$c[\mathbf{A}_{ij}] := [c\mathbf{A}_{ij}], \quad [\mathbf{A}_{ij}] + [\mathbf{B}_{ij}] := [\mathbf{A}_{ij} + \mathbf{B}_{ij}].$$

Ha $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{ik}]_{m \times t}$, $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_{kj}]_{t \times n}$ két blokkmátrix, és minden k -ra az $\mathbf{A}_{ik}$ blokk oszlopainak száma megegyezik $\mathbf{B}_{kj}$ sorainak számával, akkor a $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ szorzat kiszámítható a szorzási szabály blokkokra való alkalmazásával is, azaz $\mathbf{C}$ olyan blokkmátrix, melynek i -edik blokksorában és j -edik blokkoszlopában álló blokk

$$\mathbf{C}_{ij} = \sum_{k=1}^t \mathbf{A}_{ik} \mathbf{B}_{kj}.$$

4.12. PÉLDA (MŰVELETEK BLOKKMÁTRIXOKKAL). *Végezzük el az alábbi műveletet blokkmátrixokkal számolva!*

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right].$$

MEGOLDÁS. Először ellenőrizzük, hogy a műveletek valóban elvégezhetők lesznek blokkmátrixokként számolva is. Valóban, az első mátrix blokkoszlopai 2- és 1-oszloposak, míg a második mátrix blokksorai 2- és 1-sorosak. A szorzat pedig azonos típusú lesz a harmadik mátrixszal, tehát összeadhatók. A blokkokat mátrixokkal helyettesítve, majd a mátrixműveleteket elvégezve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 6 \\ 3 & 6 \\ 6 & 7 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Ellenőrizzük a számítást közönséges mátrixműveletekkel!

¹ A BLOKKMÁTRIXOKRA a szakirodalomban a *hipermátrix* elnevezés is el van terjedve. Ekkor a blokksorokat hipersoroknak, a blokkoszlopokat hiperoszlopoknak nevezzük. Mi kerüljük e szóhasználatot a hipermátrix másik – többdimenziós tömb értelmű – jelentése miatt.

□

Feladatok

Táblázatok

4.1. Anti, Bori, Cili almát, banánt és citromot vesz a piacon, a hipermarketben vagy a csarnokban. Ha csak az ár számít, melyikük hol vásároljon?

	alma (kg)	banán (kg)	citrom (kg)
Anti	2	2	1
Bori	3	2	0.5
Cili	2	1	1

	csarnok (Ft/kg)	hipermarket (Ft/kg)	piac (Ft/kg)
alma	180	100	130
banán	390	420	360
citrom	210	210	230

4.2. Egy $f(x, y)$ kifejezésben elvégezzük az

$$x = 2a + b$$

$$y = 3a + b$$

helyettesítést, majd az így kapott $f(2a + b, 3a + b)$ kifejezésben az

$$a = -3s + t$$

$$b = 4s - t$$

helyettesítést. Számítsuk ki a két helyettesítés kompozícióját a helyettesítések végrehajtásával, és a nekik megfelelő táblázatok szorzásával is, azaz írjuk fel azt a helyettesítést, mely e két helyettesítés kompozíciójával ekvivalens!

4.3. Tegyük fel, hogy egy kifejezésben elvégezzük a következő két helyettesítést:

$$\begin{aligned} x &= 2a + b + 6c & a &= -s & + & u \\ y &= 4a + b + 7c & b &= -3s - 6t + 10u \\ z &= 3a + b + 6c & c &= s + t - 2u \end{aligned}$$

Hogyan számíthatjuk ki a két helyettesítés kompozícióját? Írjuk fel azt a helyettesítést, mely e két helyettesítés kompozíciójával ekvivalens!

4.4.▲ Két versengő kereskedelmi TV-csatorna valóságshow-műsora kezdetben fele-fele arányban vonzza a nézőket. Az első hét végére a tv1 nézőinek fele, míg a tv2 nézőnek negyede átpártol a másik csatornára.

1. Készítsük el az átpártolás 2×2 -es táblázatát, és a
2. nézők megoszlásának 2×1 -es vagy 1×2 -es táblázatát!
3. Táblázatok szorzásának segítségével határozzuk meg, hogy mi a nézők megoszlása az első és a második hét végén, ha az átpártolók aránya az idővel nem változik.

4. Írjuk fel az átpártolók kéthetenkénti táblázatát, azaz azt, amelyből kiolvasható, hogy két hét elteltével az egyes csatornák nézőinek hányadrésze pártol át, és mennyi marad!

Elemenkénti mátrixműveletek

4.5.● Adva vannak az alábbi mátrixok!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Számítsuk ki a következő kifejezések közül azok értékét, amelyek értelmezve vannak! a) $4\mathbf{A} - 3\mathbf{B}$, b) $2\mathbf{B} - \mathbf{C}$, c) $2\mathbf{B} - \mathbf{C}^T$,

4.6.▲ ELEMENKÉNTI MÁTRIXMŰVELET A DIGITÁLIS KÉPFELDOLGOZÁSBAN Egy leegyszerűsített képfórmátummal dolgozunk: az egészelemű $\mathbf{A}_{m \times n}$ mátrix reprezentáljon egy $m \times n$ képpontból álló szürkeárnyaltos képet. Minden mátrixelem egy képpont árnyalatát adja meg a $\{0, 1, \dots, k\}$ tartományból, ahol 0 a fekete, $k - 1$ a fehér színnek felel meg és k az átlátszó pixeleket jelöli. Legyen egy képen a háttér átlátszó, és legyen $\mathbf{B}_{m \times n}$ egy tetszőleges másik kép azonos módon reprezentált mátrixa. Konstruáljuk meg azt a $\odot$ jellel jelölt műveletet, amellyel az elemenkénti

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{B} := [a_{ij} \odot b_{ij}]$$

mátrixművelet az $\mathbf{A}$ kép háttérébe másolja a $\mathbf{B}$ képet. Képletben:

$$a_{ij} \odot b_{ij} = \begin{cases} b_{ij}, & \text{ha } a_{ij} = k, \\ a_{ij}, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A megoldásban használhatjuk a $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ függvényt, mely egy x számhoz annak alsó egész részét rendeli.

4.7. $\mathbb{R}^{m \times n}$ BÁZISA Adjuk meg az $\mathbb{R}^{m \times n}$ tér egy bázisát.

4.8. MÁTRIXOK ÁLTAL KIFESZÍTETT ALTÉR Jellemezzük az $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ térnek azt az alterét, melyet az alább megadott $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ mátrixok feszítenek ki! Másként fogalmazva: milyen összefüggések állnak fenn azon 2×2 -es valós mátrixok elemei között, melyek az alábbi mátrixok lineáris kombinációiként állnak elő?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mátrixszorzás

4.9.● Adva vannak az alábbi mátrixok!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Számítsuk ki a következő kifejezések közül azok értékét, amelyek értelmezve vannak! a) $\mathbf{AB}$, b) $\mathbf{AB}^T - \mathbf{D}$, c) $\mathbf{BC}$, d) $\mathbf{CB}$, e) $(\mathbf{DA})\mathbf{C}$.

4.10.● A SZORZÁS NEM FELCSERÉLHETŐ Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{E} = \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Döntsük el, hogy fennállnak-e az $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, $\mathbf{BC} = \mathbf{CB}$, $\mathbf{CD} = \mathbf{DC}$ és $\mathbf{DE} = \mathbf{ED}$ egyenlőségek.

Blokkmátrixok

4.11. 2×2 -ES BLOKKMÁTRIXOK SZORZÁSA Legyen $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ két 2×2 -es blokkmátrix, azaz legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix}.$$

Írjuk fel szorzatukat a blokkok szorzatai segítségével.

4.12.● Végezzük el az $\mathbf{A} + 3\mathbf{C}$ és az $\mathbf{AB}$ műveleteket közös mátrixműveletekkel és blokkmátrixként számolva is,

ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Mátrixműveletek $\mathbb{Z}_m$ -ben**

A mátrixműveletek minden további nélkül értelmezhetők $\mathbb{Z}_m$ fölötti mátrixokra is (általában bármely gyűrű fölötti mátrixokra, ld. a ?? fejezetet a függelékben).

4.13.▲ Egy lineáris kód $\mathbf{G}$ generátormátrixa és $\mathbf{H}$ ellenőrző mátrixa eleget tesz a $\mathbf{GH}^T = \mathbf{O}$ összefüggésnek. Ellenőrizzük ezt a $[4, 2, 3]_3$ Hamming kód esetén a következő mátrixokkal az $\mathbb{F}_3$ testben számolva:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A mátrixszorzás használata

Mátrixszorzással az eddig tanultak áttekinthetőbbé és könnyebben kezelhetővé válnak (pl. vektorok lineáris kombinációja, az egyenletrendszerek és megoldásuk felírása).

Skaláris szorzat és diadikus szorzat mátrixszorzatos alakja Két oszlopvektor nem szorozható össze, ha 1-nél nagyobb dimenziósak. Viszont az egyikük transzponálása után a szorzás elvégezhető.

Legyen $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ két $\mathbb{R}^n$ -beli vektor. Az $\mathbf{a}^T \mathbf{b}$ szorzat a két vektor skaláris szorzatát adja, azaz

$$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b},$$

ugyanis

$$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

Ha a második vektort transzponáljuk, a két vektor lehet különböző dimenziós is.

4.13. DEFINÍCIÓ (DIADIKUS SZORZAT). Legyen $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Az $\mathbf{u}\mathbf{v}^T$ szorzatot a két vektor diadikus szorzatának, röviden diádnak nevezzük. E szorzat egy $m \times n$ -es mátrix:

$$\mathbf{u}\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & \dots & u_1 v_n \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & \dots & u_2 v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_m v_1 & u_m v_2 & \dots & u_m v_n \end{bmatrix}.$$

Két vektor diadikus szorzatát $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ jelöli.

4.14. PÉLDA (SKALÁRIS ÉS DIADIKUS SZORZAT). Legyen $\mathbf{u} = (1, 0, 2)$, $\mathbf{v} = (3, 2, 1)$. Írjuk fel mátrixszorzatos alakba skaláris és diadikus szorzatukat, és számítsuk ki!

MEGOLDÁS.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 5,$$

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = \mathbf{u}\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

□

Lineáris egyenletrendszer mátrixszorzatos alakja A mátrixszorzást felhasználva a lineáris egyenletrendszerek egyszerű alakba írhatók.

4.1 (LINEÁRIS EGYENLETRENDSZER MÁTRIXSZORZATOS ALAKJA). Ha $\mathbf{A}$ jelöli egy egyenletrendszer együtthatómátrixát, illetve $\mathbf{b}$ a konstans tagok és $\mathbf{x}$ az ismeretlenek oszlopvektorát, azaz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \text{és} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

akkor az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

egyenletrendszer

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

alakba írható.

Könnyen ellenőrizhető a mátrixszorzás elvégzésével, hogy a

$$\begin{array}{rclcl} ax & = & u & & x + 2y = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, & by & = & v & \text{és} & y = 1 \\ & cz & = & w & & 0 = 1 \end{array}$$

egyenletrendszerek mátrixszorzatos alakjai rendre:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 5, \quad \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A szimultán egyenletrendszerek (ld. 93. oldal) ugyanígy fölírhatóak mátrixszorzatos alakba.

4.15. PÉLDA (SZIMULTÁN EGYENLETRENDSZER MÁTRIXSZORZATOS ALAKJA). Írjuk az alábbi két egyenletrendszert egyetlen mátrixszorzatos alakba!

$$\begin{array}{rcl} 2x_{11} + 3x_{21} & = & 7 \\ 3x_{11} - 4x_{21} & = & 2 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 2x_{12} + 3x_{22} & = & 9 \\ 3x_{12} - 4x_{22} & = & 5 \end{array}$$

MEGOLDÁS. A két egyenletrendszer mátrixszorzatos alakjai külön-külön

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Ezek egyetlen mátrixszorzattá olvashatók:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Általánosan a szimultán egyenletrendszerek $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ alakba írhatóak, ahol $\mathbf{X}$ az ismeretlenekből, $\mathbf{B}$ a jobb oldalakból alkotott mátrix. $\square$

Lineáris helyettesítés mátrixszorzatos alakja Az egyenletrendszer mátrixszorzatos alakjához hasonlóan adódik a lineáris helyettesítés mátrixszorzatos alakja. Egyszerűen csak úgy kell tekintenünk az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenlőségre, hogy ott $\mathbf{b}$ koordinátái a helyettesítendő változók, melyek helyébe az $\mathbf{x}$ koordinátáinak egy lineáris kifejezését helyettesítjük. Ilyenkor inkább a $\mathbf{b} = \mathbf{Ax}$ alakot használjuk, és az $\mathbf{A}$ mátrixot a *lineáris helyettesítés mátrixának* nevezzük. Részletesebben lásd még a 4.33. feladatot.

Példaként íme egy lineáris helyettesítés és mátrixszorzatos alakja:

$$\begin{aligned} x &= 3a + 2b + 4c \\ y &= a - 3b + 2c \\ z &= 2a - b + 2c \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Szorzás vektorral Egy $m \times n$ -es mátrix vektorral kétféleképp szorozható: jobbról egy $n \times 1$ -es oszlopvektorral, balról egy $1 \times m$ -es sorvektorral.

Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer oszlopmodelljéből láttuk, hogy az egyenletrendszer bal oldala az $\mathbf{A}$ oszlopvektorainak az $\mathbf{x}$ koordinátaival vett lineáris kombinációja. Hasonló állítás igaz a sorvektorral balról való szorzásra is.

4.16. ÁLLÍTÁS (MÁTRIXSZORZÁS ÉS LINEÁRIS KOMBINÁCIÓ). Legyen $\mathbf{A}$ $m \times n$ -es mátrix, $\mathbf{x}$ n -dimenziós, $\mathbf{y}$ m -dimenziós vektor. Ekkor az $\mathbf{Ax}$ szorzat az $\mathbf{A}$ oszlopvektorainak

$$\mathbf{a}_{*1}x_1 + \mathbf{a}_{*2}x_2 + \cdots + \mathbf{a}_{*n}x_n$$

lineáris kombinációját, míg az $\mathbf{y}^T \mathbf{A}$ szorzat az $\mathbf{A}$ sorvektorainak

$$\mathbf{a}_{1*}y_1 + \mathbf{a}_{2*}y_2 + \cdots + \mathbf{a}_{m*}y_m$$

lineáris kombinációját adja.

Szorzás standard egységvektorral Könnyen igazolhatók azok az összefüggések, melyeket a standard egységvektorokkal való szorzással kapunk. Jelölje $\mathbf{e}_i = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$ azt a vektort, melynek i -edik koordinátája 1, a többi 0.

4.17. ÁLLÍTÁS (MÁTRIX ELEMEINEK, SOR- ÉS OSZLOPVEKTORAINAK ELŐÁLLÍTÁSA). Legyen $\mathbf{A}$ egy $m \times n$ -es mátrix, $\mathbf{e}_i$ m -dimenziós, $\mathbf{e}_j$ n -dimenziós standard egységvektor. Ekkor a standard $\mathbf{e}_i$ sorvektorral balról való szorzás a mátrix i -edik sorvektorát, az $\mathbf{e}_j$ -vel jobbról való szorzás a mátrix j -edik oszlopvektorát adja, azaz

$$\mathbf{e}_i^\top \mathbf{A} = \mathbf{a}_{i*} \text{ és } \mathbf{A} \mathbf{e}_j = \mathbf{a}_{*j},$$

továbbá

$$\mathbf{e}_i^\top (\mathbf{A} \mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}_i^\top \mathbf{A}) \mathbf{e}_j = a_{ij}.$$

Az $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^\top$ diád egy olyan mátrix, melynek (i, j) -indexű eleme 1, az összes többi 0:

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^\top = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

A báziscsere mátrixszorzatos alakja A 129. oldalon a vektor bázisra vonatkozó koordinátás alakjáról szóló paragrafusban láttuk, hogy a koordinátás alak hogy határozható meg. De mi egy vektornak egy altér két különböző bázisára vonatkozó koordinátás alakja közti kapcsolat?

4.18. PÉLDA (ÁTTÉRÉS STANDARD BÁZISRA). Az $\mathbb{R}^3$ térnek $\mathcal{B} = \{ (1, 2, 3), (0, 2, 3), (3, 5, 8) \}$ egy bázisa. Az e bázisban megadott $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ vektornak írjuk fel a koordinátás alakját a standard bázisban egyetlen mátrixszorzással. Mi a $\mathbf{v}$ vektor standard koordinátás alakja, ha $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = (3, 2, -1)$?

MEGOLDÁS. $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = (3, 2, -1)$ azt jelenti, hogy

$$\mathbf{v} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix},$$

ami mátrixszorzatos alakban

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Legyen $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = (x, y, z)$. Ekkor

$$\mathbf{v} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad \square$$

4.19. PÉLDA (BÁZISCSERE). Legyen $\mathcal{B} = \{ (1, 2, 3), (0, 2, 3), (3, 5, 8) \}$ és $\mathcal{C} = \{ (1, 1, 1), (2, 3, 4), (6, 6, 7) \}$ az $\mathbb{R}^3$ két bázisa. Számítsuk ki egy vektor $\mathcal{B}$ bázisban megadott $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ alakjából a $\mathcal{C}$ -beli $[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}$ alakját!

MEGOLDÁS. Egyik lehetőség, hogy meghatározzuk $\mathbf{v}$ standard bázisbeli koordinátás alakját az előző feladat mintájára, majd az így kapott koordinátás alakból a $\mathcal{C}$ bázisra vonatkozó alakot a 129. oldalon leírtak szerint.

A másik lehetőség egyszerűbb, és hatékonyabb, ha több vektor koordinátás alakját kell meghatározni. A $\mathcal{B}$ bázis vektorainak a $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ koordinátaival vett lineáris kombinációja megadja a $\mathbf{v}$ vektort, így ha meghatározzuk a $\mathcal{B}$ bázis vektorainak $\mathcal{C}$ bázisbeli alakját, ezek lineáris kombinációja a $\mathbf{v}$ vektor $\mathcal{C}$ -beli alakját, azaz a $[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}$ alakot adja.

A $\mathcal{B}$ bázis egy vektorának $\mathcal{C}$ -beli koordinátás alakjához egy egyenletrendszert kell megoldani, a $\mathcal{B}$ összes vektorának felírásához tehát egy szimultán egyenletrendszert:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}}_{\mathcal{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 8 \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}} \implies \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tehát a $\mathcal{B}$ bázis a $\mathcal{C}$ koordinátarendszerben:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{C}}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}_{\mathcal{C}}, \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{C}} \right\}.$$

Az ezekből képzett lineáris kombinációk mátrixszorzással is előállíthatók. Így egy $\mathbf{v}$ vektor $\mathcal{B}$ -beli koordinátás alakjának $\mathcal{C}$ bázisba való átírását a

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$$

képlet adja. Ha e mátrixot $\mathbf{A}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ jelöli, akkor az előző képlet a

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = \mathbf{A}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$$

alakot ölti. □

E példa a következő definícióhoz és állításhoz vezet:

4.20. DEFINÍCIÓ (ÁTTÉRÉS MÁTRIXA). Legyen $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ és $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n\}$ az $\mathbf{R}^n$ két bázisa. Írjuk fel $\mathcal{B}$ vektorait a $\mathcal{C}$ bázisban, és e vektorokból képezzünk mátrixot. Ezt nevezzük a $\mathcal{B}$ bázisról a $\mathcal{C}$ -re való áttérés mátrixának. Ha szükséges, a mátrix indexébe írjuk a két bázist $\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}$ alakban. Tehát az áttérés mátrixa

$$\mathbf{A}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = [[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} \mid [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}} \mid \cdots \mid [\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}}]$$

4.21. ÁLLÍTÁS (KOORDINÁTÁK VÁLTOZÁSA A BÁZIS CSERÉJÉNÉL). Ha $\mathcal{B}$ és $\mathcal{C}$ az $\mathbf{R}^n$ két bázisa és $\mathbf{A}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ az áttérés mátrixa, akkor bármely $\mathbf{v}$ vektor $\mathcal{B}$ -, illetve $\mathcal{C}$ -beli koordinátás alakja közt fennáll a

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = \mathbf{A}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$$

összefüggés.

Bázisfelbontás* A 3.24. tétel második pontjának az előző feladatban is szemléltetett egyenes következménye, a következő állítás.

4.22. ÁLLÍTÁS (BÁZISFELBONTÁS). Jelölje egy $m \times n$ -es $\mathbf{A}$ mátrix redukált lépcsős alakjának nemzérus soraiból álló $r \times n$ -es részmátrixát $\mathbf{R}$, az $\mathbf{R}$ főoszlopainak megfelelő $\mathbf{A}$ -beli oszlopok alkotta $m \times r$ -es részmátrixot $\mathbf{B}$, ahol $r = r(\mathbf{A})$. Ekkor az $\mathbf{R}$ mátrix j -edik oszlopa megegyezik az $\mathbf{A}$ mátrix j -edik oszlopának a $\mathbf{B}$ oszlopai alkotta bázisban felírt koordinátás alakjával. Képletben ez azt jelenti, hogy

$$\mathbf{A}_{*j} = \mathbf{B}\mathbf{R}_{*j}, \quad \text{azaz} \quad \mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{R}.$$

Egy mátrix fenti $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{R}$ alakú felbontását bázisfelbontásnak nevezzük.

4.23. PÉLDA (BÁZISFELBONTÁS). Határozzuk meg az alábbi mátrix bázisfelbontását, és magyarázzuk meg a két mátrix oszlopainak jelentését!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 7 & 0 & -11 \end{bmatrix}.$$

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{A}$ mátrix redukált lépcsős alakja:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 7 & 0 & -11 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

E mátrix első két sora alkotja az $\mathbf{R}$ mátrixot, az $\mathbf{A}$ mátrix első és har-

madik oszlopa a $\mathbf{B}$ mátrixot, így a felbontás

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 7 & 0 & -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} = \mathbf{BR}.$$

Ellenőrizzük, hogy az $\mathbf{R}$ oszlopai az $\mathbf{A}$ oszlopvektorainak koordinátás alakjai a $\mathbf{B}$ oszlopai alkotta bázisban, azaz

$$[\mathbf{v}]_E = \mathbf{B}[\mathbf{v}]_B,$$

ahol az E indexszel a standard, B -vel a $\mathbf{B}$ mátrix oszlopai alkotta bázisbeli koordinátás alakját jelöltük ugyanannak a vektornak. Például

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \text{azaz} \quad [\mathbf{a}_4]_E = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{a}_4]_B = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

ahol $\mathbf{a}_4$ az $\mathbf{A}$ negyedik oszlopvektora. □

Egységmátrix, elemi mátrixok Egy adott $\mathbf{B}$ mátrixhoz találhatunk olyan $\mathbf{A}$ -t, hogy az 1-gyel való szorzáshoz hasonlóan $\mathbf{AB} = \mathbf{B}$ legyen. Például

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

esetén

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Az azonban már nem igaz, hogy $\mathbf{A}$ -t bármely 2×2 -es $\mathbf{B}$ mátrixszal szorozva $\mathbf{B}$ lesz az eredmény. Ilyen mátrix is létezik, némi próbálkozás után bárki rátalálhat.

4.24. DEFINÍCIÓ (EGYSÉGMÁTRIX). Az $n \times n$ -es

$$\mathbf{I}_n := \text{diag}(1, 1, \dots, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixot egységmátrixnak nevezzük.

► Az egységmátrix elnevezés onnan származik, hogy bármely $m \times n$ -es $\mathbf{A}$ mátrixra igaz, hogy

$$\mathbf{I}_m \mathbf{A}_{m \times n} = \mathbf{A}_{m \times n} \mathbf{I}_n = \mathbf{A}_{m \times n},$$

azaz e mátrix hasonló tulajdonsággal rendelkezik, mint a számok közt az egy.

Az egységmátrix jelölésére használt $\mathbf{I}$ betű az angol *identity matrix* elnevezés első betűjéből származik. Az *azonosság* vagy *identitás* jelentésű *identity* szó az $\mathbf{IA} = \mathbf{A}$ összefüggésre utal (az $x \mapsto x$ függvényt ugyanezen okból hívjuk identikus függvénynek). Ráadásul az I betű hasonlít legjobban az 1-es számra.

► Az egységmátrixszal már találkoztunk: a Gauss–Jordan-módszernél egy n -ismeretlenes, n egyenletből álló egyértelműen megoldható egyenletrendszer együtthatómátrixa az elemi sorműveletek során egység-mátrixszá transzformálódik!

Az egységmátrixon végrehajtott elemi sorműveletek olyan mátrixokat eredményeznek, melyek kapcsolatot létesítenek az elemi sorműveletek és a mátrixokkal való szorzás között.

4.25. DEFINÍCIÓ (ELEMI MÁTRIXOK). Az I_n egységmátrixon végrehajtott egyetlen elemi sorművelettel kapott mátrixot elemi mátrixnak nevezzük.

Az alábbi mátrixok elemi mátrixok:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ezt igazolja, hogy mindegyikük I_4 -ből származik rendre a következő elemi sorműveletekkel: $S_1 \leftrightarrow S_4$, $5S_2$, $S_1 + 2S_3$, $1S_1$. Az utolsó mátrix az egységmátrix, amely maga is elemi mátrix, mert például egy sorának 1-gyel való szorzásával megkapható.

4.26. PÉLDA (MÁTRIX BALRÓL SZORZÁSA ELEMI MÁTRIXSZAL). Vizsgáljuk meg mi történik, ha az előbbi mátrixokkal balról megszorozunk egy tetszőleges 4-soros mátrixot?

MEGOLDÁS. Legyen A egy 4- sorból, és az egyszerűség kedvéért csak 2 oszlopból álló mátrix.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{41} & a_{42} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix},$$

A szorzás eredményeként fölcserélődött A első és negyedik sora.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 5a_{21} & 5a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix},$$

Itt az A második sora be lett szorozva 5-tel.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + 2a_{31} & a_{12} + 2a_{32} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix},$$

A szorzás eredményeként az A első sorához hozzá lett adva harmadik sorának kétszerese. □

E példa eredménye kimondható tételként, melynek bizonyítása általánosan is úgy történik, mint az előző példában, ezért elhagyjuk:

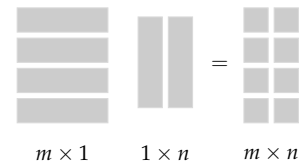
4.27. TÉTEL (ELEMI SORMŰVELETEK MÁTRIXSZORZÁSSAL). Legyen $\mathbf{E}$ az elemi mátrix, melyet $\mathbf{I}_m$ -ből egy elemi sorművelettel kapunk. Ha ugyanazt a sorműveletet egy tetszőleges $m \times n$ -es $\mathbf{A}$ mátrixra alkalmazzuk, akkor eredményül az $\mathbf{EA}$ mátrixot kapjuk.

► Az elemi sorműveletek mátrixszorzással való elvégzésének nincs számítási praktikuma, annak célja az elemi sorműveletek algebraizálása, s így mélyebb megértése.

Vektorokra particionált mátrixok Fontosak azok a blokkmátrixok, amelyekben vagy oszlopvektor vagy sorvektor minden blokk. Két mátrix szorzatának felírásakor legalább az egyiküket vektorokra particionálásra 4 eset lehetséges. Legyen a következőkben $\mathbf{A}$ egy $m \times t$, $\mathbf{B}$ egy $t \times n$ méretű mátrix.

1. [sorvektorok] · [oszlopvektorok]: Bontsuk fel az $\mathbf{A}_{m \times t}$ mátrixot sorvektoraira, és a $\mathbf{B}_{t \times n}$ mátrixot oszlopvektoraira. Ekkor egy $m \times 1$ -es blokkmátrixot szorzunk egy $1 \times n$ -essel, ami épp az $\mathbf{AB}$ mátrixszorzat definícióját adja:

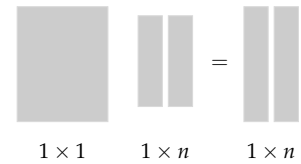
$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1*} \\ \mathbf{a}_{2*} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{*1} & \dots & \mathbf{b}_{*n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1*}\mathbf{b}_{*1} & \mathbf{a}_{1*}\mathbf{b}_{*2} & \dots & \mathbf{a}_{1*}\mathbf{b}_{*n} \\ \mathbf{a}_{2*}\mathbf{b}_{*1} & \mathbf{a}_{2*}\mathbf{b}_{*2} & \dots & \mathbf{a}_{2*}\mathbf{b}_{*n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{m*}\mathbf{b}_{*1} & \mathbf{a}_{m*}\mathbf{b}_{*2} & \dots & \mathbf{a}_{m*}\mathbf{b}_{*n} \end{bmatrix}.$$



2. [mátrix] · [oszlopvektorok]: Ekkor egy 1×1 -es blokkmátrixot szorzunk egy $1 \times n$ -essel:

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{*1} & \mathbf{b}_{*2} & \dots & \mathbf{b}_{*n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Ab}_{*1} & \mathbf{Ab}_{*2} & \dots & \mathbf{Ab}_{*n} \end{bmatrix}$$

Itt tehát a $\mathbf{C}$ mátrix j -edik oszlopvektora az $\mathbf{A}$ mátrix és a $\mathbf{B}$ j -edik oszlopának szorzata, vagyis $\mathbf{c}_{*j} = \mathbf{Ab}_{*j}$. Sematikusan ábrázolva:



$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{b}_{*j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{c}_{*j} \end{bmatrix}$$

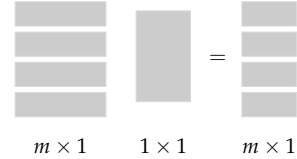
Ezzel az esettel már találkoztunk a szimultán egyenletrendszerek mátrixszorzatos alakjának fölrásánál (4.15. példa). Ha a fenti sematikus ábra egy szimultán egyenletrendszer mátrixszorzatos alakját reprezentálja, akkor a színesen kiemelt rész a szimultán egyenletrendszer egyetlen egyenletrendszerének felel meg.

3. [sorvektorok] · [mátrix]: Ekkor egy $m \times 1$ -es blokkmátrixot szorzunk egy 1×1 -essel:

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1*} \\ \mathbf{a}_{2*} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m*} \end{bmatrix} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1*}\mathbf{B} \\ \mathbf{a}_{2*}\mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m*}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

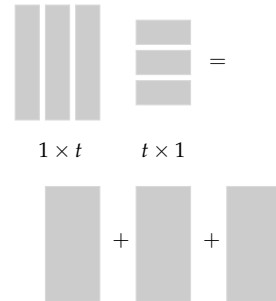
Azaz itt a $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ mátrix i -edik sora az $\mathbf{A}$ mátrix i -edik sorának $\mathbf{B}$ -szerese. Másként írva $\mathbf{c}_{i*} = \mathbf{a}_{i*}\mathbf{B}$, sematikusan ábrázolva:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{a}_{i*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{c}_{i*} \end{bmatrix}$$



4. [oszlopvektorok] · [sorvektorok]: Ekkor egyetlen blokk sorból álló mátrixot szorzunk egy blokk oszlopból állóval, azaz egy $1 \times t$ -es blokkmátrixot egy $t \times 1$ -essel. Így egy skaláris szorzatra emlékeztető összeget kapunk:

$$\mathbf{AB} = \left[\mathbf{a}_{*1} \mid \dots \mid \mathbf{a}_{*t} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{1*} \\ \mathbf{b}_{2*} \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{t*} \end{bmatrix} = \mathbf{a}_{*1}\mathbf{b}_{1*} + \mathbf{a}_{*2}\mathbf{b}_{2*} + \dots + \mathbf{a}_{*t}\mathbf{b}_{t*}.$$



E felbontásban az $\mathbf{AB}$ mátrixot *diádok összegére* bontottuk! Például az alábbi szorzat diádokra való bontása a következő:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Tehát a szorzatot három diád összegére bontottuk. Megjegyezzük, az eredmény maga is egy diád, hisz $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$.

E felbontásnak fontos speciális esete az, amikor $\mathbf{A}$ egyetlen sorból, vagy $\mathbf{B}$ egyetlen oszlopból áll. Tekintsük az előző példában szereplő $\mathbf{A}$ mátrix első sorát, szorozzuk meg $\mathbf{B}$ -vel, majd az $\mathbf{A}$ -t a $\mathbf{B}$ második oszlopával!

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Az első szorzat eredménye **B** sorvektorainak, a második szorzat **A** oszlopvektorainak lineáris kombinációja! Ez általánosan is kimondható:

4.28. ÁLLÍTÁS (A SZORZAT OSZLOPAI ÉS SORAI). Az **AB** mátrix minden oszlopa az **A** oszlopainak lineáris kombinációja, és minden sora a **B** sorainak lineáris kombinációja.

BIZONYÍTÁS. Az **AB** mátrix j -edik oszlopa

$$(\mathbf{AB})_{*j} = \mathbf{A}\mathbf{b}_{*j} = \mathbf{a}_{*1}b_{1j} + \mathbf{a}_{*2}b_{2j} + \dots + \mathbf{a}_{*t}b_{tj}$$

az i -edik sora pedig

$$(\mathbf{AB})_{i*} = \mathbf{a}_{i*}\mathbf{B} = a_{i1}\mathbf{b}_{1*} + a_{i2}\mathbf{b}_{2*} + \dots + a_{it}\mathbf{b}_{t*},$$

ami bizonyítja az állítást. $\square$

Altér felírása mátrixszorzattal Egy altér vektorai is fölírhatók egyetlen mátrixszorzással!

4.29. PÉLDA (NULLTÉR). Írjuk fel az

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrix nullterének vektorait egy mátrix és egy vektor szorzataként!

MEGOLDÁS. A nulltér, azaz a mátrixhoz tartozó homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak tere könnyen leolvasható a redukált lépcsős alakból.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A szabad változókhoz rendelt paraméterek legyenek $x_3 = t_1$, $x_4 = t_2$, $x_5 = t_3$, amiből $x_1 = -t_1 - 2t_2 - 7t_3$ és $x_2 = -t_1 - t_2 + t_3$. Innen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_3 \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -7 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}. \quad \square$$

► Vegyük észre, hogy a redukált lépcsős alak és a megoldás blokk-szerkezete egyszerű kapcsolatot mutat:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{S} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\mathbf{S} \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \mathbf{t},$$

ahol $\mathbf{t}$ a paraméterek vektora. Ez általánosítható tetszőleges homogén, és inhomogén lineáris egyenletrendszerekre (ld. a 4.43. feladatot).

Feladatok

Mátrixműveletek

4.14. **IGAZ – HAMIS** Döntsük el, igazak-e az alábbi állítások? Válaszunkat indokoljuk!

- a) Ha az $\mathbf{AB}$ és a $\mathbf{BA}$ szorzat is értelmezve van, akkor mindkét mátrix négyzetes.
 b) Ha az $\mathbf{AB}$ és a $\mathbf{BA}$ szorzat is értelmezve van, akkor mindkét szorzat négyzetes.
 c) Ha az $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ szorzat értelmezve van, akkor biztosan értelmezve van az $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ szorzat is.

A következőkben legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Végezzük el az alábbi műveleteket!

4.15. $2\mathbf{A} - 3\mathbf{B}^T$

4.16. $\mathbf{AB} - \mathbf{BA} + \mathbf{AC} - \mathbf{CA}$

4.17. $(\mathbf{CD} - \mathbf{DC})(\mathbf{ABC})$

4.18. $\mathbf{A}^2 - \mathbf{C}^2$

4.19. $(\mathbf{C})_{2*}(\mathbf{D})_{*2}$

4.20. $(\mathbf{A})_{*1}(\mathbf{B})_{2*}$

4.21. A fenti jelölések mellett igazak-e a következő egyenlőségek?

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2, \quad (\mathbf{A} + \mathbf{C})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AC} + \mathbf{C}^2.$$

4.22. A fenti jelölések mellett igazak-e a következő egyenlőségek?

$$(\mathbf{C} + \mathbf{D})(\mathbf{C} - \mathbf{D}) = \mathbf{C}^2 - \mathbf{D}^2, \quad (\mathbf{A} + \mathbf{D})(\mathbf{A} - \mathbf{D}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{D}^2.$$

Számítsuk ki az alábbi vektorok skaláris és diadikus szorzatát!

Írjuk fel mindkét műveletet mátrixszorzatos alakban!

4.23. $\mathbf{a} = (1, 2)$, $\mathbf{b} = (0, 1)$

4.24. $\mathbf{u} = (1, 2, 0, 1)$, $\mathbf{v} = (0, 1, 2, 3)$

4.25. $\mathbf{a} = (1, 2, 0)$, $\mathbf{b} = (0, 1, 2, 3)$

Mátrixszorzatos alakok

Írjuk fel az alábbi egyenletrendszerek mátrixszorzatos alakját!

4.26. $x + y = 1$

$$x - z = 2$$

$$z = 3$$

4.27. $3x - 2y + 4z = 5$

4.28. $2x + z = 1$

$$x - y - w = 2$$

$$y + z + w = 2$$

$$0 = 3$$

Írjuk fel az alábbi lineáris helyettesítések mátrixszorzatos alakját!

4.29. $u = 2x - 4y$

$$v = x + 2y$$

4.30. $x = 3a - 2b + c$

$$y = 2a - c$$

$$z = b + 2c$$

4.31. $x = 3a + b$

$$y = 2a - b$$

$$z = b$$

4.32. $x = 3a - 2b + c$

$$y = 2a - c$$

4.33. LINEÁRIS HELYETTESÍTÉS MÁTRIXSZORZATOS ALAKJA

Írjuk fel az $x_1, x_2, \dots, x_n$ változók lineáris kifejezéseinek az $y_1, y_2, \dots, y_m$ változók helyébe való helyettesítését általánosan leíró

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n$$

$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n$$

helyettesítés mátrixszorzatos alakját!

Elemi mátrixok

Keressük meg azt az $\mathbf{E}$ mátrixot, mely megoldása az alábbi mátrixegyenletnek!

4.34. $\mathbf{E} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ e & f \\ c & d \end{bmatrix}$

4.35. $\mathbf{E} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 3c & 3d \\ e & f \end{bmatrix}$

4.36. $\mathbf{E} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c + 2e & d + 2f \\ e & f \end{bmatrix}$

4.37. $\mathbf{E} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - c & b - d \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$

Elemi sorműveletekkel, mátrixszorzás nélkül határozzuk meg az alábbi mátrixszorzatok értékét!

$$4.38. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$4.39. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

Blokkmátrixok

Számítsuk ki az alábbi feladatokban megadott mátrixszorzatokat a kijelölt blokkmátrixokat használva!

$$4.40. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$4.41. \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$4.42. \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 3 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

- * 4.43. **LINEÁRIS EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSÁNAK BLOKK-MÁTRIX ALAKJA** Tegyük fel, hogy az r rangú A mátrix első r oszlopa lineárisan független – ez oszlopcserékkel mindig elérhető. Jelölje B_r az A első r oszlopából álló mátrixot, és legyen A , illetve az $[A|b]$ bővített mátrix redukált lépcsős

alakja

$$\begin{bmatrix} I_r & S \\ O & O \end{bmatrix} \text{ illetve } \begin{bmatrix} I_r & S & d_r \\ O & O & 0 \end{bmatrix},$$

ahol d_r egy r -dimenziós vektor. Ekkor

1. az $Ax = b$ egyenletrendszer megoldható, és megoldása

$$x = \begin{bmatrix} d_r \\ 0_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -S \\ I_s \end{bmatrix} t_s,$$

ahol s a szabad változók száma, azaz $s = n - r$, és t_s a szabad paraméterek vektora, ráadásul $A = B_r[I_r|S]$ és $b = B_r d_r$, továbbá

2. az $Ax = 0$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldása

$$x = \begin{bmatrix} -S \\ I_s \end{bmatrix} t_s,$$

ahol a $\begin{bmatrix} -S \\ I_s \end{bmatrix}$ mátrix oszlopvektorai a nulltér bázisát alkotják.

Vegyes feladatok

4.44. A *sudoku* egy olyan logikai játék, melyben egy olyan 9×9 -es mátrixot kell megadni, melynek ismerjük néhány, de nem minden elemét. A feladat a nem ismert elemek meghatározása. A mátrix 9 darab 3×3 -as blokkra van partícionálva és eleget tesz annak a feltételnek, hogy minden sorában, minden oszlopában és minden blokkjában az 1-től 9-ig terjedő egészek mindegyike egyszer szerepel. Ez azt jelenti, hogy az egy sorban, egy oszlopban és egy blokkban lévő számok összege mindig 45. Fejezzük ki ezt mátrixműveletekkel, azaz írjunk fel a sudoku tábla A mátrixát is tartalmazó olyan mátrixegyenleteket, melyeket minden helyesen kitöltött sudoku tábla mátrixa kielégít!

4.45. Hány eleme van a $\mathbb{Z}_2^{2 \times 2}$ -nek, azaz a kételemű test fölötti 2×2 -es mátrixok terének?

Megoldások

4.1. A két táblázat szorzata:

	csarnok	hipermarket	piac
Anti	1350	1250	1210
Bori	1425	1245	1225
Cili	960	830	850

Tehát Antinak és Borinak a piacon, Cilinek a hipermarketben érdemes vásárolnia.

4.2. A két helyettesítést elvégezve:

$$\begin{aligned}x &= 2a + b = 2(-3s + t) + (4s - t) = -2s + t, \\y &= 3a + b = 3(-3s + t) + (4s - t) = -5s + 2t.\end{aligned}$$

A két helyettesítés kompozíciója a két helyettesítés táblázatának szorzatával megkapható:

$$\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline x & 2 & 1 \\ y & 3 & 1 \end{array} \times \begin{array}{c|cc} & s & t \\ \hline a & -3 & 1 \\ b & 4 & -1 \end{array} = \begin{array}{c|cc} & s & t \\ \hline x & -2 & 1 \\ y & -5 & 2 \end{array}$$

4.3. A két helyettesítés kompozíciója a két helyettesítés táblázatának szorzatával megkapható. E szorzatból az olvasható le, hogy a kompozícióval kapott helyettesítés: $x = s$, $y = t$, $z = u$. Ez azt jelenti, hogy a két helyettesítés valamilyen értelemben egymás inverze.

4.4.

1. Kétféleképp adhatjuk meg a táblázatot, ha az első sor és oszlop a tv_1 -é:

$$\begin{array}{c|cc} -re & tv_1 & tv_2 \\ \hline tv_1 & 1/2 & 1/4 \\ tv_2 & 1/2 & 3/4 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} -ról & tv_1 & tv_2 \\ \hline tv_1 & 1/2 & 1/2 \\ tv_2 & 1/4 & 3/4 \end{array}$$

2. A nézők kezdeti eloszlásának táblázatára a két lehetőség:

$$\begin{array}{c|c} & arány \\ \hline tv_1 & 1/2 \\ tv_2 & 1/2 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} & tv_1 & tv_2 \\ \hline arány & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

3. Először válaszoljuk meg a kérdést a tv_1 -re: a saját nézőinek fele marad ($\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$), ehhez jön a tv_2 nézőinek negyede ($\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$), ez összesen $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$. A tv_2 -re a számítás: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$. Ez táblázatok szorzásával az előző 2-2

felírást használva:

$$\begin{array}{c|cc} -re & tv_1 & tv_2 \\ \hline tv_1 & 1/2 & 1/4 \\ tv_2 & 1/2 & 3/4 \end{array} \times \begin{array}{c|cc} arány & & \\ \hline tv_1 & 1/2 & \\ tv_2 & 1/2 & \end{array} = \begin{array}{c|cc} arány & & \\ \hline tv_1 & 3/8 & \\ tv_2 & 5/8 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc} & tv_1 & tv_2 \\ \hline arány & 1/2 & 1/2 \end{array} \times \begin{array}{c|cc} -ról & tv_1 & tv_2 \\ \hline tv_1 & 1/2 & 1/2 \\ tv_2 & 1/4 & 3/4 \end{array} = \begin{array}{c|cc} & tv_1 & tv_2 \\ \hline arány & 3/8 & 5/8 \end{array}$$

4. Csak az átpártolás táblázatát nézve, a második hét végére a tv_1 nézői első héten megmaradt felének csak a fele marad meg, míg a tv_2 -től átpártolt negyednyi közönségnek is a fele, tehát a $tv_1 \rightarrow tv_1$ „mozgás” a nézők $3/8$ -adát érinti, mert $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$. Hasonló számításokkal a többi érték is megkapható, melyet az alábbi, két, táblázatok közti szorzással is meg lehet adni:

$$\begin{array}{c|cc} -re & tv_1 & tv_2 \\ \hline tv_1 & 1/2 & 1/4 \\ tv_2 & 1/2 & 3/4 \end{array} \times \begin{array}{c|cc} -re & tv_1 & tv_2 \\ \hline tv_1 & 1/2 & 1/4 \\ tv_2 & 1/2 & 3/4 \end{array} = \begin{array}{c|cc} -re & tv_1 & tv_2 \\ \hline tv_1 & 3/8 & 5/16 \\ tv_2 & 5/8 & 11/16 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc} -ról & tv_1 & tv_2 \\ \hline tv_1 & 1/2 & 1/2 \\ tv_2 & 1/4 & 3/4 \end{array} \times \begin{array}{c|cc} -ról & tv_1 & tv_2 \\ \hline tv_1 & 1/2 & 1/2 \\ tv_2 & 1/4 & 3/4 \end{array} = \begin{array}{c|cc} -ról & tv_1 & tv_2 \\ \hline tv_1 & 3/8 & 5/8 \\ tv_2 & 5/16 & 11/16 \end{array}$$

4.5. a) $4\mathbf{A} - 3\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 12 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$, b) $2\mathbf{B} - \mathbf{C}$ nincs értelmezve. c) $2\mathbf{B} - \mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

4.6. Ha a a $[0, k]$ intervallumba eső szám, akkor $0 \leq a/k \leq 1$, így a/k egész része 0 vagy 1. Részletezve $[a/k]$ pontosan akkor 1, ha $a = k$, azaz ha a pixel átlátszó, egyébként 0. Másrészt $1 - [a/k]$ pontosan akkor 0, ha $a = k$, egyébként 1. Ezt kihasználva könnyen definiálható a kívánt művelet:

$$a \odot b = \left\lfloor \frac{a}{k} \right\rfloor b + \left(1 - \left\lfloor \frac{a}{k} \right\rfloor\right) a.$$

Így e művelettel elemenként definiált $\mathbf{A} \odot \mathbf{B}$ művelet a kívánt eredményt adja. A 4.2. ábrán három képet 32×24 -es mátrixszal szemléltetünk, a férfiarc mátrixát is megadtuk, a másik a háttér. A művelet eredménye a harmadik kép.

4.7. A standard bázisba azon mátrixok tartoznak, amelyekben egyetlen elem 1, a többi 0.

4.8. E mátrixok összes lineáris kombinációja

$$a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C} = \begin{bmatrix} a+b+c & a+c \\ a & b+c \end{bmatrix}$$

alakú. Ha egy tetszőleges $\begin{bmatrix} u & v \\ w & z \end{bmatrix}$ mátrixról el akarjuk dönteni, hogy a fenti alakú-e, azaz fönnáll-e valamely a, b, c

$$4.24. \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 5,$$

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = \mathbf{u} \mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

4.25. A skaláris szorzat nem végezhető el, a diadikus szorzat

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a} \mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$4.26. \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$4.32. \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

4.33. A lineáris helyettesítés mátrixszorzatos alakja

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x},$$

ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \quad \text{és} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

$$4.34. \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$4.35. \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$4.36. \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$4.37. \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$4.38. \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$4.39. \begin{bmatrix} a \\ 2d - 2b \\ a + c \\ d \end{bmatrix}$$

$$4.40. \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array} \right]$$

$$4.41. \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 10 \\ 4 & 5 & 14 \\ 0 & 0 & 5 \end{array} \right]$$

$$4.42. \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 7 \\ 12 & 12 \end{bmatrix}$$

4.43. Mivel $[\mathbf{I}_r | \mathbf{S}]$ az $\mathbf{A}$ redukált lépcsős alakja, ezért ennek bármely oszlopa az $\mathbf{A}$ mátrix azonos sorszámú oszlopának koordinátás alakja az $\mathbf{B}_r$ oszlopvektoraiban, mint bázisban felírva. Ez épp azt jelenti, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{B}_r [\mathbf{I}_r | \mathbf{S}]$. Ez az oszlop-tér bármely oszlopára, így $\mathbf{b}$ -re is igaz, hisz $[\mathbf{A} | \mathbf{b}]$ redukált lépcsős alakja szerint az egyenletrendszer megoldható, így $\mathbf{b}$ eleme az oszloptérnek. Eszerint tehát $\mathbf{b} = \mathbf{B}_r \mathbf{d}_r$.

Az, hogy minden megoldás fölírható ilyen alakba, a Gauss–Jordan-módszerből következik. Meg kell még mutatni, hogy a tételben felírt $\mathbf{x}$ vektor valóban megoldás.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{x} &= \mathbf{B}_r \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{S} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{d}_r \\ \mathbf{0}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{S} \\ \mathbf{I}_s \end{bmatrix} \mathbf{t}_s \right) \\ &= \mathbf{B}_r (\mathbf{d}_r - \mathbf{S} \mathbf{t}_s + \mathbf{S} \mathbf{t}_s) = \mathbf{B}_r \mathbf{d}_r \\ &= \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Ez bizonyítja az állítás első felét. A második felének bizonyításához csak azt kell látni, hogy $[\begin{smallmatrix} \mathbf{I}_r \\ \mathbf{S} \end{smallmatrix}]$ oszlopvektorai a nulltér bázisát alkotják. Ez abból következik, hogy egyrészt kifeszítik a nullteret, másrészt lineárisan függetlenek, hisz az alsó blokkban lévő $\mathbf{I}_s$ mátrix oszlopai lineárisan függetlenek.

4.44. Jelölje $\mathbf{j}$ a csupa 1-esből álló 9-dimenziós vektort, $\mathbf{j}_{456}$ azt, amelynek 4, 5, 6 indexű eleme 1-es, a többi 0. Ekkor a „minden sorösszeg 45” és a „minden oszlopösszeg 45” feltételek ekvivalensek az $\mathbf{A} \mathbf{j} = 45 \mathbf{j}$, $\mathbf{j}^T \mathbf{A} = 45 \mathbf{j}^T$ egyenletekkel, míg pl. az „első blokkoszlop, második blokkosor metszetében álló blokk elemeinek összege 45” feltételnek a $\mathbf{j}_{456}^T \mathbf{A} \mathbf{j}_{123} = 45$ egyenlet felel meg.

4.45. $\mathbb{Z}_2^{2 \times 2}$ -be $2^4 = 16$ mátrix tartozik:

$$\mathbb{Z}_2^{2 \times 2} = \{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \}.$$

5

Mátrixműveletek algebrája

Áttekintjük a mátrixműveletek legfontosabb algebrai tulajdonságait. Ezek nem csak a mátrixokkal való számolás közben követendő szabályokról szólnak, de hozzásegítenek az lineáris egyenletrendszerek mélyebb megértéséhez, és olyan eszközöket adnak a kezünkbe, például a mátrixfelbontásokkal, melyek a lineáris algebra alkalmazásaiban is fontosak.

Az alapműveletek tulajdonságai

Az összeadás és a skalárral szorzás őrzi a valósok műveleti tulajdonságait, de a mátrixszorzás nem.

Az összeadás és a skalárral való szorzás tulajdonságai Mivel a mátrixok összeadása és skalárral való szorzása elemenként végrehajtható műveletek, ezért műveleti tulajdonságaik természetes módon öröklik meg a számok műveleti tulajdonságait. Például azonos típusú mátrixok összeadása felcserélhető (kommutatív) és csoportosítható (asszociatív) művelet, míg összeg skalárral való szorzása disztributív. Tehát

$$\begin{aligned}\mathbf{A} + \mathbf{B} &= \mathbf{B} + \mathbf{A}, & \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}, \\ c(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= c\mathbf{A} + c\mathbf{B}, & (c + d)\mathbf{A} &= c\mathbf{A} + d\mathbf{A}.\end{aligned}$$

E tulajdonságok igazolását az Olvasóra hagyjuk (ld. 5.4. feladat).

A szorzás tulajdonságai A számok szorzásának algebrai tulajdonságai nem öröklődnek automatikusan a mátrixműveletekre, mint az összeadásnál. Nem is teljesülnek mind, pl. a mátrixszorzás *nem kommutatív*.

A mátrixokkal való számolás közben nem csak arra kell ügyelnünk, hogy bizonyos azonosságok nem teljesülnek, de arra is, hogy bizonyos elemi eljárások nem végezhetők el olyan tág körben, mint azt a valós számoknál megszoktuk.

5.1. PÉLDA (MIRE VIGYÁZZUNK A MÁTRIXSZORZÁSNAÁL?).

- a) A mátrixszorzás nem kommutatív, azaz $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ nem áll fenn bármely két összeszorozható mátrixra.
- b) Ha $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$, akkor az $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$ feltétel kevés ahhoz, hogy a $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ következtetésre jussunk.
- c) Az $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$ egyenlőségből nem következik, hogy $\mathbf{A}$ vagy $\mathbf{B}$ a nullmátrix.

► A mátrixszorzás kommutativitásának cáfolására az egyik legegyszerűbb példa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ de } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A 4.10. feladatban további példákat mutatunk.

► A valós számok közt igaz, hogy ha $a \neq 0$ és $ab = ac$, akkor a -val egyszerűsíthetünk, azaz akkor $b = c$. Mátrixokra egy ellenpélda:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ de } \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Nullosztóval találkozhatunk a $\mathbb{Z}_m$ -ben való számolásnál is, ha m összetett. Például $\mathbb{Z}_6$ -ban $2 \cdot 3 = 0$. Hasonlóképp nem lehet mindig egyszerűsíteni, például $\mathbb{Z}_{12}$ -ben $9 \cdot 2 = 3 \cdot 2 = 6$, de $9 \neq 3$.

► Nullosztónak nevezzük egy algebrai struktúra olyan nemzérus elemeit, melyek szorzata zérus. Valósok közt ilyenek nincsenek, de a mátrixok közt igen, például

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

5.2. TÉTEL (MÁTRIXSZORZÁS ALGEBRAI TULAJDONSÁGAI). Legyen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ olyan, hogy a kijelölt műveletek elvégezhetők legyenek, legyen továbbá c tetszőleges skalár. Ekkor

- | | |
|--|-------------------------------------|
| a) $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$ | csoportosíthatóság, asszociativitás |
| b) $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ | disztributivitás |
| c) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$ | disztributivitás |
| d) $(c\mathbf{A})\mathbf{B} = c(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}(c\mathbf{B})$ | |
| e) $\mathbf{A}_{m \times n} \mathbf{O}_{n \times t} = \mathbf{O}_{m \times t}$ | szorzás nullmátrixszal |
| f) $\mathbf{I}_m \mathbf{A}_{m \times n} = \mathbf{A}_{m \times n} \mathbf{I}_n = \mathbf{A}_{m \times n}$ | szorzás egységmátrixszal |

BIZONYÍTÁS. A fenti tulajdonságok közül csak az elsőt bizonyítjuk, a többi hasonlóan, vagy még egyszerűbben bizonyítható.

a) Valójában többet bizonyítunk. Megmutatjuk, hogy ha az egyenlőség egyik oldalán kijelölt szorzások elvégezhetők, akkor a másik oldalon kijelöltek is. Legyen $\mathbf{A}_{m \times s}$, $\mathbf{B}_{s \times v}$ és $\mathbf{C}_{v \times n}$ három tetszőleges mátrix. Az $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ szorzatban $\mathbf{AB}$ csak $s = v$ esetén végezhető el, a szorzat típusa $m \times v$, ami $\mathbf{C}$ -vel csak $v = t$ esetén szorozható meg, és a szorzat $m \times n$ -es. Tehát e szorzat csak akkor van értelmezve, ha $\mathbf{B}$ típusa $s \times t$. Hasonló érveléssel ugyanezt kapjuk az $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ szorzatról is.

Az indexek kezelésének könnyítésére elég lesz a bizonyítást sorvektor alakú $\mathbf{A}$ és oszlopvektor alakú $\mathbf{C}$ mátrixokra elvégezni, ugyanis az $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ szorzat i -edik sorában és j -edik oszlopában álló elem az $\mathbf{AB}$ i -edik sorának, azaz az $\mathbf{a}_{i*}\mathbf{B}$ sorvektornak és $\mathbf{C}$ j -edik oszlopának szorzata, azaz $(\mathbf{a}_{i*}\mathbf{B})\mathbf{c}_{*j}$. Hasonlóképp az $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ szorzat i -edik sorában és j -edik oszlopában álló elem $\mathbf{a}_{i*}(\mathbf{BC}_{*j})$. Legyen tehát

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Ekkor a szorzat 1×1 -es. Először számoljuk ki az $\mathbf{AB}$ mátrixot, ami $1 \times m$ -es: $\left[\sum_{k=1}^m a_k b_{k1} \quad \sum_{k=1}^m a_k b_{k2} \quad \dots \quad \sum_{k=1}^m a_k b_{kn} \right]$. Innen számolva $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ -t:

$$\left[\sum_{k=1}^m a_k b_{k1} \quad \sum_{k=1}^m a_k b_{k2} \quad \dots \quad \sum_{k=1}^m a_k b_{kn} \right] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^m a_k b_{kl} c_l.$$

Hasonlóan, először $\mathbf{BC}$ -t fölírva, az $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ mátrixra kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{l=1}^n b_{1l} c_l \\ \sum_{l=1}^n b_{2l} c_l \\ \vdots \\ \sum_{l=1}^n b_{ml} c_l \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^m a_k \left(\sum_{l=1}^n b_{kl} c_l \right) = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_k b_{kl} c_l.$$

Az utolsó lépésben a belső szumma minden tagját beszoroztuk a_k -val, a számok közti összeadás és szorzás közti disztributivitást használva. Vagyis mindkét oldalon olyan összeg áll, amely az összes $a_k b_{kl} c_l$ alakú szorzat összege, csak a tagok csoportosítása más. $\square$

► Az asszociativitás következménye, hogy a többtényezős mátrixszorzatokat nem kell zárójelezni, hisz bármelyik zárójelezés ugyanazt az eredményt adja. Így $\mathbf{ABC} = (\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$. Az állítás igaz többtényezős szorzatokra is, vagyis az $\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_k$ szorzat független a végrehajtás sorrendjétől, de a tényezők sorrendje nem változtatható!

► Megjegyezzük, hogy az asszociativitás imént leírt bizonyítása hasonlóan mondható el, ha az $\mathbf{A} = [a_{ik}]$ mátrix nem csak 1 sorból, és a $\mathbf{C} = [c_{lj}]$ mátrix nem csak egy oszlopból áll: ekkor a $\mathbf{D} = \mathbf{ABC}$ szorzat i -edik sorának j -edik elemére azt kapjuk, hogy az az összes $a_{ik} b_{kl} c_{lj}$ alakú szorzatok összege, azaz

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{ik} b_{kl} c_{lj}. \quad (5.1)$$

Az 5.1 egyenlőség, és az ehhez hasonló számtalan hasonló kifejezés vezetett Einsteint arra a felismerésre, hogy az indexelt változók szorzatainak összegében a szumma jelek feleslegesek, hisz azokra az indexekre kell összegezni, amelyek legalább kétszer szerepelnek, míg az egyszer szereplőkre nem. Tehát az előző kettős szumma helyett írhatnánk azt is, hogy

$$d_{ij} = a_{ik} b_{kl} c_{lj},$$

hisz a jobb oldalon i és j csak egyszer szerepel, így k -ra és l -re kell összegezni, azt pedig tudjuk, hogy $k = 1, \dots, m$ és $l = 1, \dots, n$. Ezt a jelölésbeli egyszerűsítést *Einstein-konvenciónak* nevezik. Einstein ezt a relativitás általános elméletéről írt híres dolgozatában használta először 1916-ban. A konvenció használata főként a lineáris algebra fizikai alkalmazásaiban terjedt el, mi e könyvben nem fogjuk használni.

Mátrix hatványozása Csak a négyzetes mátrixok szorozhatók meg önmagukkal, hisz ha egy $m \times n$ -es mátrix megszorozható egy $m \times n$ -essel, akkor $m = n$. Ezt figyelembe véve természetes módon definiálható négyzetes mátrixok pozitív egész kitevős hatványa:

$$\mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A}\dots\mathbf{A}}_{k \text{ tényező}}$$

Kicsit elegánsabban – rekurzióval – is definiálhatjuk e fogalmat: $\mathbf{A}^1 := \mathbf{A}$ és $\mathbf{A}^{k+1} := \mathbf{A}^k \mathbf{A}$.

Mivel a mátrixszorzás asszociatív, mindegy, hogy milyen sorrendben végezzük el a hatványozást. Ezzel igazolható a következő két összefüggés is:

5.3. ÁLLÍTÁS (HATVÁNYOZÁS AZONOSSÁGAI). Legyen $\mathbf{A}$ egy négyzetes mátrix! Ekkor

- a) $\mathbf{A}^k \mathbf{A}^m = \mathbf{A}^{k+m}$,
- b) $(\mathbf{A}^k)^m = \mathbf{A}^{km}$.

Ha ki akarjuk terjeszteni a hatványozást 0 kitevőre is, kövessük a precedencia-elvet¹, azaz olyan értelmet adjunk $\mathbf{A}^0$ -nak, hogy a fenti összefüggések érvényben maradjanak. Például tekintsük az a) azonosságot $m = 0$ esetén:

$$\mathbf{A}^k \mathbf{A}^0 = \mathbf{A}^{k+0} = \mathbf{A}^k.$$

Ez minden $\mathbf{A}$ mátrix esetén csak az egységmátrixra igaz, tehát

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}_n,$$

ahol n a négyzetes $\mathbf{A}$ mérete.

► A valós számoknál tanult, különböző alapú hatványokra érvényes azonosság itt a kommutativitás hiánya miatt nem érvényes, azaz általában $(\mathbf{A}\mathbf{B})^k \neq \mathbf{A}^k \mathbf{B}^k$.

5.4. PÉLDA (MÁTRIX HATVÁNYOZÁSA). Számítsuk ki az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{és a} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixok k -adik hatványait!

MEGOLDÁS. Számoljuk ki $\mathbf{A}$ hatványait!

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

azaz $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}_2$, ebből pedig látjuk, hogy $\mathbf{A}^3 = \mathbf{I}_2 \mathbf{A} = \mathbf{A}$, $\mathbf{A}^4 = \mathbf{A}^3 \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A} = \mathbf{I}_2, \dots$ Tehát általában $\mathbf{A}^{2k} = \mathbf{I}_2$ és $\mathbf{A}^{2k+1} = \mathbf{A}$.

¹ A latin eredetű *precedencia* szó előzményt jelent (lásd még *precedens*). A *precedencia elv* a matematikában fogalmak jelentésének olyan kiterjesztését jelenti, melynek során a korábban megismert tulajdonságok, összefüggések érvényben maradnak.

A másik feladatot a hatványozás rekurzív definícióját használva indukcióval kényelmesen meg tudjuk oldani. Először számoljuk ki $\mathbf{A}$ néhány hatványát:

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ebből azt sejtjük, hogy $\mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ha be tudjuk látni ennek az összefüggésnek az öröklődését k -ról $k+1$ -re, akkor kész vagyunk. Más szóval meg kell mutatnunk, hogy ha $\mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, akkor $\mathbf{A}^{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ezt a következő szorzás elvégzése igazolja:

$$\mathbf{A}^{k+1} = \mathbf{A}^k \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \square$$

Miután mátrixok lineáris kombinációja és négyzetes mátrixok egész kitevős hatványa értelmezve van, ezért négyzetes mátrixokra is definiálhatjuk skalár együtthatós polinom helyettesítési értékét. Legyen

$$p(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

egy skalár együtthatós polinom. A p polinom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ helyen vett helyettesítési értékén a

$$p(\mathbf{X}) = a_k \mathbf{X}^k + \dots + a_2 \mathbf{X}^2 + a_1 \mathbf{X} + a_0 \mathbf{I}_n$$

mátrixot értjük.

5.5. PÉLDA (POLINOM HELYETTESÍTÉSI ÉRTÉKE). *Legyen*

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & -6 \end{bmatrix}.$$

Mutassuk meg, hogy $p(\mathbf{C}) = \mathbf{O}$, ha $p(x) = x^3 + 2x^2 - 1$.

MEGOLDÁS. A $p(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^3 + 2\mathbf{C}^2 - \mathbf{I}$ műveleteit elvégezve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} p(\mathbf{C}) &= \mathbf{C}^3 + 2\mathbf{C}^2 - \mathbf{I} \\ &= \begin{bmatrix} 9 & 8 & -14 \\ 8 & 7 & -12 \\ 14 & 12 & -21 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -4 & -4 & 7 \\ -4 & -3 & 6 \\ -7 & -6 & 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \square \end{aligned}$$

A transzponálás tulajdonságai A következő tétel a transzponálás és a többi művelet kapcsolatáról szól:

5.6. TÉTEL (TRANSPONÁLÁS TULAJDONSÁGAI). Legyenek $\mathbf{A}$ és $\mathbf{C}$ azonos típusú mátrixok, $\mathbf{B}$ sorainak száma egyezzen meg $\mathbf{A}$ oszlopainak számával, c pedig legyen tetszőleges skalár. Ekkor

- a) $(\mathbf{A}^\top)^\top = \mathbf{A}$,
- b) $(\mathbf{A} + \mathbf{C})^\top = \mathbf{A}^\top + \mathbf{C}^\top$,
- c) $(c\mathbf{A})^\top = c\mathbf{A}^\top$,
- d) $(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top$.

BIZONYÍTÁS. Az első három összefüggés magától értetődő, csak az utolsót bizonyítjuk.

Először megmutatjuk, hogy ha $(\mathbf{AB})^\top$ elvégezhető, akkor $\mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top$ is. Az $m \times t$ típusú $\mathbf{A}$ és a $t \times n$ típusú $\mathbf{B}$ szorzata $m \times n$ -es, transzponáltja $n \times m$ -es, így az $n \times t$ típusú $\mathbf{B}^\top$ és a $t \times m$ -es $\mathbf{A}^\top$ összeszorozhatók, szorzatuk $n \times m$ -es, így a tételbeli egyenlőség két oldalának típusa azonos.

A tétel azon alapul, hogy két tetszőleges $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ vektorra $\mathbf{u}^\top \mathbf{v} = \mathbf{v}^\top \mathbf{u}$. Ezt az összefüggést a $*$ -gal jelölt egyenlőségnél fogjuk használni. Az $(\mathbf{AB})^\top$ i -edik sorának j -edik eleme

$$((\mathbf{AB})^\top)_{ij} = (\mathbf{AB})_{ji} = (\mathbf{A})_{j*} (\mathbf{B})_{*i}.$$

A $\mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top$ i -edik sorának j -edik eleme

$$(\mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top)_{ij} = (\mathbf{B}^\top)_{i*} (\mathbf{A}^\top)_{*j} = (\mathbf{A})_{j*} (\mathbf{B})_{*i}.$$

Tehát $(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top$. □

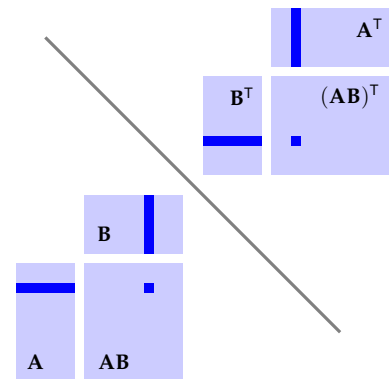
► A tétel b) pontjának indukcióval könnyen bizonyítható következménye, hogy többtagú összeg transzponáltja megegyezik a transzponáltak összegével. A c) pontot is figyelembe véve kapjuk, hogy mátrixok lineáris kombinációjának transzponáltja megegyezik a mátrixok transzponáltjainak azonos lineáris kombinációjával, azaz

$$(c_1 \mathbf{A}_1 + c_2 \mathbf{A}_2 + \dots + c_k \mathbf{A}_k)^\top = c_1 \mathbf{A}_1^\top + c_2 \mathbf{A}_2^\top + \dots + c_k \mathbf{A}_k^\top.$$

► A tétel d) pontjára „szemléletes igazolás” is adható, ami leolvasható az 5.1. ábráról.

► Indukcióval bizonyítható, hogy a d)-beli összefüggés többtényezős szorzatokra is fennáll, azaz

$$(\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_k)^\top = \mathbf{A}_k^\top \dots \mathbf{A}_2^\top \mathbf{A}_1^\top.$$



5.1. ábra: $(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top$ szemléletes bizonyítása

Mátrixszorzás inverze – mátrixok osztása* Lehet-e mátrixszal osztani, és ha igen, meg tudjuk-e vele oldani az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer vagy az $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ mátrixegyenletet úgy, ahogy az $ax = b$ egyenletet megoldjuk az a -val való osztással?

Korábbi tanulmányainkban megtanultuk, hogy az összeadás és a szorzás invertálható műveletek, inverzeik a kivonás, ill. az osztás.

Azon, hogy az összeadás művelete invertálható, azt értjük, hogy bármely a és b valós esetén találunk olyan x valóst, hogy $a + x = b$, a megoldás $x = b - a$. A szorzás is invertálható, de csak a nemzérus valósok halmazán. Ez azt jelenti, hogy bármely a nemzérus valósához és b valósához található olyan x valós szám, hogy $ax = b$, a megoldás $x = b/a$.

Azonos típusú mátrixok közt az $\mathbf{A} + \mathbf{X} = \mathbf{B}$ egyenlet megoldása ugyanolyan egyszerű, mint a számok közt: $\mathbf{X} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$. A mátrixszorzás esete bonyolultabb.

► A mátrixszorzás nem kommutatív ezért az $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ és az $\mathbf{YA} = \mathbf{B}$ egyenletek megoldása különböző is lehet. Valójában a mátrixosztás művelete emiatt nem vezethető be, viszont be lehet vezetni egy balról és egy jobbról való osztást, az egyik jele $\backslash$, a másiké $/$. E jelöléssel a fenti két mátrixegyenlet és megoldása:

$$\begin{aligned}\mathbf{AX} = \mathbf{B} &\implies \mathbf{X} = \mathbf{A} \backslash \mathbf{B} && \mathbf{B} \text{ balról osztva } \mathbf{A}\text{-val,} \\ \mathbf{YA} = \mathbf{B} &\implies \mathbf{Y} = \mathbf{B} / \mathbf{A} && \mathbf{B} \text{ jobbról osztva } \mathbf{A}\text{-val.}\end{aligned}$$

Például

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \backslash \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ mert } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ és} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ mert } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

► A másik bonyodalmat az okozza, hogy míg az $ax = b$ egyenlet a nullától különböző valósok közt mindig egyértelműen megoldható, addig pl. az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletről tudjuk, hogy végtelen sok megoldása, de 0 megoldása is lehet. E nehézségekre a következő paragrafus egyszerű megoldást ad, melyet később a pszeudoinverz fogalma segítségével általánosítani fogunk (ld. a 7 fejezetet).

Mátrix inverze Tudjuk, hogy az $ax = b$ egyenlet megoldásához elég ismerni a *reciprokát*, más néven a *multiplikatív inverzét*, és azzal szorozni b -t. Ez a gondolat átvihető a mátrixszorzásra is.

Egy nemnulla a szám reciproka az az a^{-1} -gyel jelölt szám, melyre $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$. Az 1 szerepét mátrixszorzásnál az $\mathbf{I}$ egységmátrix játssza. Világos, hogy adott $\mathbf{A}$ mátrixhoz csak úgy létezhet olyan $\mathbf{X}$, melyre $\mathbf{AX} = \mathbf{XA} = \mathbf{I}$, ha $\mathbf{A}$ négyzetes. Ez a következő definíciót adja:

Egy H halmazon értelmezett kétváltozós (más szóval bináris) *művelet* olyan függvényt értünk, mely H -beli elempárokhoz H -beli elemet rendel. Például a valós számok összeadása esetén a függvény valós számpárhoz valós számot rendel, mondjuk az $(1.2, 0.4)$ számpárhoz a 1.6-ot. E függvényt a $+$ jellel jelöljük, de a függvényeknél szokásos prefix „ $+(a, b)$ ” jelölés helyett műveleteknél az ún. infix jelölést használjuk, azaz $a + b$ -t írunk (lásd erről még a következő széljegyzetet).

A számítástechnikában gyakran találkozunk a műveletek *infix* jelölése mellett a *prefix* vagy *lengyel* és a *postfix* vagy *fordított lengyel* jelölésével is. A prefixnél a műveleti jel az argumentumai előtt, a postfixnél után van. Például a $(3 + 4) \cdot 2$ kifejezést a prefix jelölést használó Lisp nyelvcsalád nyelveiben a

`(* (+ 3 4) 2)`

kód, míg például a postfix jelölést használó PostScript nyelvben a

`3 4 add 2 mul`

kód számítja ki. (A PostScript nyelvvel találkozhatunk a PDF formátumú fájlokban is.) Ugyanez a formula a komputer algebra nyelvek közül a Mapleben prefix módon

`‘*(‘(+‘(3,4),2)`

a Mathematicában

`Times[Plus[3,4],2]`

alakot ölt. A Sage két lehetőséget kínál:

`prod([sum([3,4]),2])`

`mul([add([3,4]),2])`

Általában egy algebrai struktúra egy elemének egy műveletre vonatkozó inverzéhez a művelet *semleges eleme* szükséges. Az összeadás semleges eleme a 0, mert bármely a elemhez adva a -t kapunk, hasonlóképp a szorzás semleges eleme az 1, mert bármely a elemet vele szorozva a -t kapunk. Összeadás esetén egy elem ellentettjét az $a + x = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk, szorzás esetén a reciprokot az $ax = 1$ megoldásával. Az ellentettet, illetve a reciprokot additív, illetve multiplikatív *inverz*nek is nevezzük. Mátrixszorzás semleges eleme az egységmátrix.

5.7. DEFINÍCIÓ (MÁTRIX INVERZE). Legyen $\mathbf{A}$ egy $n \times n$ -es mátrix. Azt mondjuk, hogy $\mathbf{A}$ invertálható, ha létezik olyan $\mathbf{B}$ mátrix, melyre

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n.$$

A $\mathbf{B}$ mátrixot $\mathbf{A}$ inverzének nevezzük, és $\mathbf{A}^{-1}$ -nel jelöljük. A nem invertálható mátrixot szingulárisnak nevezzük.

- Világos, hogy ha $\mathbf{A}$ inverze $\mathbf{B}$, akkor $\mathbf{B}$ inverze $\mathbf{A}$.
- Például az alábbi szorzatokban szereplő két mátrix egymás inverze:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- A definícióból nem derül ki, hogy egy mátrixnak lehet-e több inverze, de könnyen megmutatható, hogy nem. Ha ugyanis az $\mathbf{A}$ mátrixnak $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ is inverze, azaz $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$ és $\mathbf{AC} = \mathbf{CA} = \mathbf{I}$, akkor

$$\mathbf{C} = \mathbf{CI} = \mathbf{C}(\mathbf{AB}) = (\mathbf{CA})\mathbf{B} = \mathbf{IB} = \mathbf{B}.$$

- Az $\mathbf{A}$ mátrix inverzére használhatjuk az $\mathbf{A}^{-1}$ jelölést, mert megfelel a precedencia-elvnek. Például ha az 5.3. tétel érvényességét megtartva akarunk az $\mathbf{A}^{-1}$ hatványnak értelmet adni, akkor fenn kell álljon rá az $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}^{-1+1} = \mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$ és a $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{1-1} = \mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$ összefüggés.

- Minthogy a mátrixok közti műveleteket a számok közti műveletek táblázatokra való kiterjesztésén keresztül vezettük be, elvárjuk, hogy az 1×1 -es mátrixok inverze essen egybe a számok multiplikatív inverzével (reciprokával), azaz ha $\mathbf{A} = [a]$, akkor $\mathbf{A}^{-1} = [a^{-1}] = [1/a]$ legyen igaz. A fenti definíció ennek az elvárásunknak is megfelel.

Egy négyzetes $\mathbf{A}$ mátrixot *nilpotensnek* nevezünk, ha van olyan k pozitív egész, hogy

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{O}.$$

Például az $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix nilpotens, mert $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Több alkalmazásban is fontos szerepet kap az alábbi példában szereplő inverz.

5.8. PÉLDA ($\mathbf{I} - \mathbf{A}$ INVERZE NILPOTENS $\mathbf{A}$ ESETÉN). Mutassuk meg, ha $\mathbf{A}$ nilpotens, azaz valamely pozitív k -ra $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$, akkor $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ invertálható, és inverze $\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots + \mathbf{A}^{k-1}$.

MEGOLDÁS. Megmutatjuk, hogy $(\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots + \mathbf{A}^{k-1}) = \mathbf{I}$.

$$\begin{aligned} & (\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots + \mathbf{A}^{k-1}) \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots + \mathbf{A}^{k-1} - \mathbf{A} - \mathbf{A}^2 - \dots - \mathbf{A}^{k-1} - \mathbf{A}^k \\ &= \mathbf{I} - \mathbf{A}^k \\ &= \mathbf{I} \end{aligned}$$

Az $(\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots + \mathbf{A}^{k-1})(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \mathbf{I}$ összefüggés ugyanígy bizonyítható. □

Elemi mátrixok inverze Minden R elemi sorművelethez van egy olyan R' sorművelet, hogy az R sorművelettel átalakított mátrixot az R' visszaalakítja (ld. 2.24. feladat). Nevezzük ezt az R' sorműveletet az R sorművelet inverzének. Könnyen ellenőrizhető, hogy az $S_i \leftrightarrow S_j$ sorművelet inverze önmaga, a cS_i inverze $\frac{1}{c}S_i$, és $S_i + cS_j$ inverze $S_i - cS_j$.

5.9. ÁLLÍTÁS (SORMŰVELET INVERZÉNEK MÁTRIXA). Minden elemi mátrix invertálható, nevezetesen egy sorművelet elemi mátrixának inverze meggyezik a sorművelet inverzének elemi mátrixával.

A bizonyításhoz elég belátni, hogy egy sorművelet és az inverz sorművelet mátrixainak szorzata az egységmátrix. Az általános bizonyítás végiggondolását az Olvasóra hagyjuk, itt csak egy-egy konkrét esetet mutatunk meg, nevezetesen 3×3 -as mátrixokon az $S_2 \leftrightarrow S_3$, a $3S_2$ és az $S_1 + 4S_3$ sorműveletek és inverzeik mátrixának szorzatát:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Az inverz kiszámítása A négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix inverzének kiszámításához meg kell oldani az $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ mátrixegyenletet, ami egyúttal egy szimultán egyenletrendszer is, és az elemi sorműveletekkel megoldható.

Előbb azonban két kérdésre válaszolnunk kell: (1) nem fordulhat-e elő, hogy $\mathbf{A}$ -nak több inverze is van, és (2) nem fordulhat-e elő, hogy az $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ mátrixegyenlet megoldható, de a megoldás nem tesz eleget az $\mathbf{XA} = \mathbf{I}$ mátrixegyenletnek? Négyzetes mátrixok esetén mindkét kérdésre *nem* a válasz, ami azt jelenti, hogy mátrix invertálásához elég az $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ mátrixegyenlet megoldása!

5.10. TÉTEL (AZ INVERZ LÉTEZÉSÉHEZ ELÉG EGY FELTÉTEL). A négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor invertálható, ha létezik olyan $\mathbf{B}$ mátrix, hogy az $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ és a $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$ feltételek egyike teljesül. Másként szólva, a fenti két feltétel bármelyikének teljesülése maga után vonja a másik teljesülését is!

BIZONYÍTÁS. Megmutatjuk, hogy ha a négyzetes $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixok kielégítik az $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ egyenletet, akkor $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$ is fennáll, azaz $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ inverzei egymásnak.

Tekintsük az $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ mátrixegyenletet. Ezt úgy oldjuk meg, hogy az $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$ mátrixot redukált lépcsős alakra hozzuk. Ha ez $[\mathbf{I}|\mathbf{B}]$ alakú, akkor $\mathbf{B}$ az $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ egyenlet megoldása, ezért $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ fennáll. A redukált lépcsős alakban zérus sor nem keletkezhet, mert a mátrix jobb oldalát az $\mathbf{I}$ mátrixból kaptuk, ami redukált lépcsős alak, s így egyértelmű. Ha elemi sorműveletekkel zérus sort kapnánk a jobb oldali félmátrixban, akkor volna olyan redukált lépcsős alakja is, mely zérus sort tartalmazna, ami ellentmondás. Ha csak a mátrix bal felén kapnánk zérus sort, akkor az $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ egyenletnek nem lenne megoldása, vagyis nem állhatna fenn az $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ egyenlőség sem.

Ezután megmutatjuk, hogy $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$. Ehhez tekintsük a $\mathbf{BY} = \mathbf{I}$ mátrixegyenletet. Ennek megoldásához a $[\mathbf{B}|\mathbf{I}]$ mátrixot kell redukált lépcsős alakra hozni. A előzőekből tudjuk, hogy elemi sorműveletekkel az

$$[\mathbf{A}|\mathbf{I}] \Rightarrow [\mathbf{I}|\mathbf{B}]$$

átalakítás megvalósítható. Az átalakítás lépéseinek inverzeit fordított sorrendben elvégezve az

$$[\mathbf{I}|\mathbf{B}] \Rightarrow [\mathbf{A}|\mathbf{I}]$$

transzformációt kapjuk. Itt minden lépésben fölcserélve a két részmátrixot a kívánt

$$[\mathbf{B}|\mathbf{I}] \Rightarrow [\mathbf{I}|\mathbf{A}]$$

átalakítást kapjuk. Ez azt jelenti, hogy a $\mathbf{BY} = \mathbf{I}$ mátrixegyenletnek, az $\mathbf{Y} = \mathbf{A}$ megoldása, azaz $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$. $\square$

Összefoglalva:

5.1 (INVERZ KISZÁMÍTÁSA ELEMI SORMŰVELETEKKEL). *A négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix inverze kiszámítható, ha az $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$ mátrixot elemi sorműveletekkel $[\mathbf{I}|\mathbf{B}]$ alakra hozzuk, ekkor $\mathbf{A}$ inverze $\mathbf{B}$ lesz. Ha $\mathbf{A}$ redukált lépcsős alakja nem az $\mathbf{I}$ mátrix, akkor $\mathbf{A}$ nem invertálható.*

5.11. PÉLDA (AZ INVERZ KISZÁMÍTÁSA). *Számítsuk ki az*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{és a} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixok inverzét!

MEGOLDÁS. A kiküszöböléssel oszloponként haladva:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] &\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right] &\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Tehát

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

A $\mathbf{B}$ inverzének kiszámítása hasonló lépésekkel:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] &\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \\ \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right] &\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Tehát

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

5.12. TÉTEL (2×2 -ES MÁTRIX INVERZE). Az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mátrix pontosan akkor invertálható, ha $ad - bc \neq 0$, és ekkor

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

BIZONYÍTÁS. Azt, hogy az $\mathbf{A}$ mátrixnak valóban a fenti mátrix az inverze, egyszerű mátrixszorzással ellenőrizhetjük. Azt, hogy az $ad - bc \neq 0$ feltétel az invertálhatóságnak elégséges feltétele, a képlet bizonyítja. A feltétel szükségességének belátásához vegyük észre, hogy $ad - bc = 0$, azaz $ad = bc$ pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{A}$ egyik sora a másik skalárszorosa. Ekkor viszont az egyik sor kinullázható, vagyis az $\mathbf{A}$ mátrix nem alakítható elemi sorműveletekkel egységmátrixszá. □

Az inverz tulajdonságai Megvizsgáljuk a mátrixinvertálás más műveletekkel való kapcsolatát.

5.13. TÉTEL (AZ INVERZ ALAPTULAJDONSÁGAI). Tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ egyaránt $n \times n$ -es invertálható mátrixok, $c \neq 0$ skalár és k pozitív egész. Ekkor igazak a következők:

- a) $\mathbf{A}^{-1}$ invertálható, és inverze $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$,
- b) $c\mathbf{A}$ invertálható, és inverze $\frac{1}{c}\mathbf{A}^{-1}$,
- c) $\mathbf{AB}$ invertálható, és inverze $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$,
- d) $\mathbf{A}^k$ invertálható, és inverze $(\mathbf{A}^k)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^k$, definíció szerint ezt értjük $\mathbf{A}^{-k}$ -n,
- e) $\mathbf{A}^T$ invertálható, és $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$.

BIZONYÍTÁS. Az állítások közül a fontosabbakat bizonyítjuk, a többit feladatként az Olvasóra hagyjuk:

c) Az

$$(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}(\mathbf{BB}^{-1})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$$

szorzat bizonyítja, hogy $\mathbf{AB}$ invertálható, és inverze $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

d) Az $(\mathbf{A}^k)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^k$ egyenlőség igaz volta a

$$\underbrace{\mathbf{AA} \dots \mathbf{A}}_{k \text{ tényező}} \underbrace{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \dots \mathbf{A}^{-1}}_{k \text{ tényező}} = \underbrace{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \dots \mathbf{A}^{-1}}_{k \text{ tényező}} \underbrace{\mathbf{AA} \dots \mathbf{A}}_{k \text{ tényező}} = \mathbf{I}$$

felírásból leolvasható, mert a szorzatok közepén lévő két mátrix szorzata mindig $\mathbf{I}$, ami elhagyható, és e lépést k -szor ismételve végül a kívánt eredményt kapjuk:

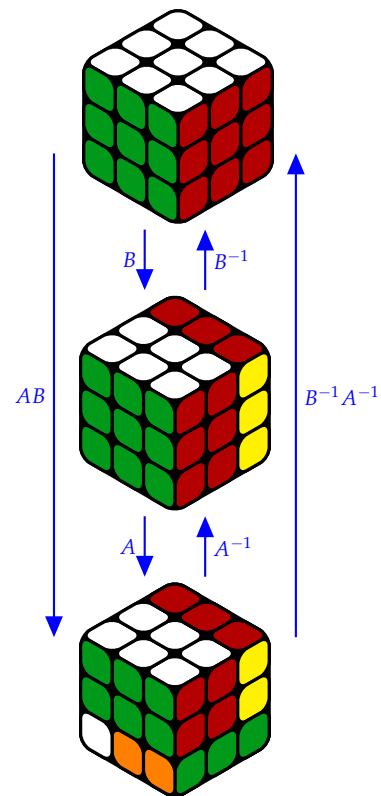
$$\underbrace{\mathbf{AA} \dots \mathbf{A}}_{k \text{ tényező}} \underbrace{(\mathbf{A}^{-1}) \dots (\mathbf{A}^{-1})}_{k \text{ tényező}} = \underbrace{\mathbf{AA} \dots \mathbf{A}}_{k-1 \text{ tényező}} \underbrace{\mathbf{A}^{-1} \dots \mathbf{A}^{-1}}_{k-1 \text{ tényező}} = \dots = \mathbf{I}.$$

► A (c) állítás indukcióval általánosítható véges sok mátrix szorzatára: ha az azonos méretű négyzetes $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_m$ mátrixok mindegyike invertálható, akkor szorzatuk is, és

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_m)^{-1} = \mathbf{A}_m^{-1} \dots \mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1^{-1}.$$

► A c) állításbeli összefüggéshez hasonlóval találkozhatunk a Rubik-kocka forgatása közben is. Egy forgatást jelöljön A , egy másikat B . A függvények kompozíciójához hasonlóan definiáljuk e két transzformáció szorzatát: a B majd az A forgatás egymás után való elvégzésével kapott transzformációt jelölje AB (ld. 5.2 ábra). E transzformáció inverze visszaállítja az eredeti állapotot, ehhez előbb az A transzformáció inverzét kell végrehajtani, majd a B inverzét, tehát $(AB)^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

► Az $\mathbf{A}^{-k}$ (d) pontbeli definíciója is megfelel a precedencia elvnek. Pl. az $\mathbf{A}^m\mathbf{A}^n = \mathbf{A}^{m+n}$ összefüggés kiterjesztése negatív kitevőre az $\mathbf{A}^k\mathbf{A}^{-k} = \mathbf{A}^0$ formulához vezet, amiből azt kapjuk, hogy $\mathbf{A}^{-k} = (\mathbf{A}^k)^{-1}$.



5.2. ábra: Jelölje A a bűvös kocka alsó, B a jobb hátsó oldalának elforgatását, és jelölje AB a B , majd az A egymás után való elvégzésével kapott transzformációt. (Ahogy a függvények összetételénél, előbb a jobb oldali, majd a bal oldali függvényt értékeljük ki, hajtjuk végre.) Ennek inverze $(AB)^{-1}$ úgy kapható meg, ha előbb végrehajtjuk az A^{-1} majd a B^{-1} transzformációt. Ezek szorzata $B^{-1}A^{-1}$, tehát $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Az invertálhatóság és az egyenletrendszerek megoldhatósága A következő tétel a mátrixok invertálhatóságát, az egyenletrendszerek megoldásánál használt elemi sorműveleteket és az egyenletrendszerek megoldhatóságát kapcsolja össze.

5.14. TÉTEL (AZ INVERTÁLHATÓSÁG ÉS AZ EGYENLETRENDSZEREK). *Adva van egy $n \times n$ -es $\mathbf{A}$ mátrix. Az alábbi állítások ekvivalensek:*

- a) $\mathbf{A}$ invertálható;*
- b) az $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ mátrixegyenlet bármely $n \times t$ -es $\mathbf{B}$ mátrixra egyértelműen megoldható;*
- c) az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer bármely n dimenziós $\mathbf{b}$ vektorra egyértelműen megoldható;*
- d) a homogén lineáris $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek a triviális $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ az egyetlen megoldása;*
- e) $\mathbf{A}$ redukált lépcsős alakja $\mathbf{I}$;*
- f) $\mathbf{A}$ előáll elemi mátrixok szorzataként.*

BIZONYÍTÁS. Az állítások ekvivalenciáját az $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (e) \Rightarrow (f) \Rightarrow (a)$, implikációk igazolásával bizonyítjuk.

$(a) \Rightarrow (b)$: Legyen tehát $\mathbf{A}$ invertálható és legyen $\mathbf{B}$ egy tetszőleges $n \times t$ méretű mátrix. Ekkor az $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ egyenlet mindkét oldalát $\mathbf{A}^{-1}$ -gyel balról szorozva kapjuk, hogy $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, azaz $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$. Ez azt mutatja, hogy egyrészt a mátrixegyenletnek van megoldása, másrészt hogy más megoldása nincs, mivel így minden megoldás megkapható, és $\mathbf{A}$ inverze egyértelmű.

$(b) \Rightarrow (c)$: Nyilvánvaló a $\mathbf{B} = \mathbf{b}$ választással.

$(c) \Rightarrow (d)$: Nyilvánvaló a $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ választással.

$(d) \Rightarrow (e)$: Egy n -ismeretlenes, n egyenletből álló homogén lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg egyértelműen, ha együtthatómátrixának redukált lépcsős alakja $\mathbf{I}_n$.

$(e) \Rightarrow (f)$: Ha $\mathbf{A}$ redukált lépcsős alakja $\mathbf{I}_n$, akkor létezik elemi sorműveletek olyan sorozata, mely az $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{I}_n$ transzformációt elvégzi. Jelölje az elemi sorműveletekhez tartozó elemi mátrixokat $\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_k$. Ekkor tehát $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_k\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$. Innen $\mathbf{A}$ kifejezhető az $\mathbf{E}_1^{-1}$ -nel, $\dots$ $\mathbf{E}_k^{-1}$ -nel balról való beszorzás után:

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}_k^{-1} \dots \mathbf{E}_2^{-1}\mathbf{E}_1^{-1}.$$

Elemi mátrixok inverze elemi mátrix, tehát $\mathbf{A}$ előáll elemi mátrixok szorzataként.

$(f) \Rightarrow (a)$: Az $\mathbf{A} = \mathbf{E}_k^{-1} \dots \mathbf{E}_2^{-1}\mathbf{E}_1^{-1}$ mátrix minden tényezője invertálható, mivel mindegyik elemi mátrix, így szorzatuk is, és az inverz

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_k.$$

□

► A tétel sok pontjának ekvivalenciája azt jelenti, hogy közülük bármely kettőre igaz, hogy „az egyik pontosan akkor igaz, ha a másik”.

Például „ $\mathbf{A}$ pontosan akkor invertálható, ha az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer minden $\mathbf{b}$ vektorra egyértelműen megoldható”.

► Később megmutatjuk azt is, hogy $\mathbf{A}$ pontosan akkor invertálható, ha az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer minden $\mathbf{b}$ vektorra megoldható. Azaz az egyértelműség a feltételből kihagyható. Másként fogalmazva, ha $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ minden $\mathbf{b}$ vektorra megoldható, akkor a megoldás minden $\mathbf{b}$ -re egyértelmű.

5.15. PÉLDA (EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSA MÁTRIXINVERTÁLÁSSAL). Oldjuk meg az

$$2x + y = 2$$

$$5x + 3y = 3$$

egyenletrendszert mátrixinvertálással.

MEGOLDÁS. Az együtthatómátrix és inverze az 5.12. tétel szerint

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix},$$

így az ismeretlenek (x, y) vektorára

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}. \quad \square$$

5.16. PÉLDA (MÁTRIXEGYENLET MEGOLDÁSA MÁTRIXINVERTÁLÁSSAL). Oldjuk meg az $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ mátrixegyenletet, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{és} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{A}$ mátrix megegyezik az előző feladatbeli mátrixszal, így tudjuk, hogy invertálható, és ismerjük az inverzét. Az $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ mátrixegyenlet megoldása:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 5 \\ 3 & -9 & -8 \end{bmatrix}. \quad \square$$

► Megjegyezzük, hogy lineáris egyenletrendszert mátrixinvertálással ritkán oldunk meg, mert műveleigénye valamivel nagyobb, mint az egyszerű kiküszöbölésnek.

5.17. PÉLDA (MÁTRIX ELEMI MÁTRIXOK SZORZATÁRA BONTÁSA). Bontsuk fel az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ mátrixot elemi mátrixok szorzatára!

MEGOLDÁS. Az 5.14. tétel bizonyításának (e) $\Rightarrow$ (f) lépése szerint ha egy $\mathbf{A}$ mátrixot elemi sorműveletekkel az egységmátrixba lehet transzformálni, akkor az elemi sorműveletek inverzei fordított sorrendben elvégezve az $\mathbf{I}$ -t $\mathbf{A}$ -ba transzformálják. Ez viszont azt jelenti, hogy a hozzájuk tartozó elemi mátrixok szorzata épp $\mathbf{A}$.

Elemi sorműveletek	Elemi mátrixok	Elemi mátrixok inverzei
$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ $\Downarrow$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\Downarrow$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Downarrow$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$S_2 - 3S_1$ $-S_2$ $S_1 - 2S_2$	$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
		$\mathbf{E}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{E}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{E}_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

A fenti átalakítás nyomán tehát $\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A} = \mathbf{I}$, amiből $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1^{-1}\mathbf{E}_2^{-1}\mathbf{E}_3^{-1}$, azaz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

így $\mathbf{A}$ -t három elemi mátrix szorzatára bontottuk. $\square$

Invertálhatóság, bázis, báziscsere Az 5.14. tétel szerint a négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix invertálhatósága azzal ekvivalens, hogy a homogén lineáris $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek a triviális az egyetlen megoldása. Mivel $\mathbf{Ax}$ az $\mathbf{A}$ oszlopvektorainak egy lineáris kombinációja, ezért ez azt jelenti, hogy a nullvektor csak egyféleképp áll elő $\mathbf{A}$ oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként, a triviális módon. Tehát $\mathbf{A}$ oszlopvektorai lineárisan függetlenek! Ez egyúttal azt is jelenti, hogy $\mathbf{A}$ oszlopvektorai bázist alkotnak, és hogy $r(\mathbf{A}) = n$. Felhasználva a ?? tételt, mely szerint a sortér és az oszloptér dimenziója megegyezik a ranggal, a következő tételt kapjuk:

5.18. KÖVETKEZMÉNY (INVERTÁLHATÓSÁG ÉS BÁZIS). *Adva van egy valós $n \times n$ -es $\mathbf{A}$ mátrix. Az alábbi állítások ekvivalensek:*

- $\mathbf{A}$ invertálható;
- $\mathbf{A}$ oszlopvektorai lineárisan függetlenek;
- $\mathbf{A}$ oszlopvektorai bázist alkotnak $\mathbb{R}^n$ -ben;
- $\mathbf{A}$ sorvektorai lineárisan függetlenek;
- $\mathbf{A}$ sorvektorai bázist alkotnak $\mathbb{R}^n$ -ben;
- $r(\mathbf{A}) = n$.

Legyen $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ és $C = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n\}$ az $\mathbf{R}^n$ két bázisa, és jelölje $\mathbf{X}_{C \leftarrow B}$ a B -ről C -re, $\mathbf{Y}_{B \leftarrow C}$ a C -ről B -re való áttérés mátrixát. Legyen továbbá $\mathbf{v}$ a tér egy tetszőleges vektora, a B bázisbeli alakja $[\mathbf{v}]_B$. A 4.21. tétel szerint

$$[\mathbf{v}]_C = \mathbf{X}_{C \leftarrow B}[\mathbf{v}]_B, \quad \text{és} \quad [\mathbf{v}]_B = \mathbf{Y}_{B \leftarrow C}[\mathbf{v}]_C.$$

A második egyenletbe helyettesítve az első kapjuk, hogy

$$[\mathbf{v}]_B = \mathbf{Y}_{B \leftarrow C} \mathbf{X}_{C \leftarrow B} [\mathbf{v}]_B,$$

azaz $\mathbf{Y}_{B \leftarrow C} \mathbf{X}_{C \leftarrow B}$ minden vektort önmagába visz, tehát egyenlő az egységmátrixszal, vagyis $\mathbf{Y}_{B \leftarrow C}$ és $\mathbf{X}_{C \leftarrow B}$ inverzei egymásnak.

5.19. TÉTEL (AZ ÁTTÉRÉS MÁTRIXÁNAK INVERZE). Ha $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ és $C = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n\}$ az $\mathbf{R}^n$ két bázisa, akkor a B -ről C -re való áttérés $\mathbf{X}_{C \leftarrow B}$ mátrixa, valamint a C -ről B -re való áttérés $\mathbf{Y}_{B \leftarrow C}$ mátrixa is invertálható, és egymás inverzei, azaz $\mathbf{X}_{C \leftarrow B}^{-1} = \mathbf{Y}_{B \leftarrow C}$ vagy más alakban $\mathbf{X}_{C \leftarrow B} \mathbf{Y}_{B \leftarrow C} = \mathbf{I}_n$.

5.20. PÉLDA (AZ ÁTTÉRÉS MÁTRIXÁNAK INVERZE). Az $\mathbf{R}^3$ egy $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ bázisában felírtuk a standard egységvektorokat:

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_B, \quad \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}_B, \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}_B.$$

Írjuk fel $\mathcal{B}$ bázisvektorainak standard bázisbeli koordinátás alakját!

MEGOLDÁS. Jelölje $\mathcal{E}$ a standard bázist. Ennek vektorait kifejeztük a $\mathcal{B}$ bázis elemeivel, az ezekből képzett mátrixszal tehát az $\mathcal{E}$ -beli vektorok $\mathcal{B}$ -beli koordinátás alakja fölírható, tehát ez a $\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}$ áttérés mátrixa, azaz

$$\mathbf{X}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ennek inverze a keresett mátrix:

$$\mathbf{Y}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} = \mathbf{X}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ennek oszlopvektorai adják a $\mathcal{B}$ vektorainak $\mathcal{E}$ -beli alakját. □

Feladatok

Igaz – hamis

5.1. A négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor invertálható, ha elemi sorműveletekkel megkapható az $\mathbf{I}$ mátrixból.

5.2. Ha elemi sorműveletek $\mathbf{A}$ -t $\mathbf{B}$ -be viszik, akkor az inverz sorműveletek $\mathbf{B}$ -t $\mathbf{A}$ -ba viszik.

5.3. Ha elemi sorműveletek $\mathbf{A}$ -t $\mathbf{B}$ -be viszik, akkor az inverz sorműveletek fordított sorrendben végrehajtva $\mathbf{B}$ -t $\mathbf{A}$ -ba viszik.

Műveleti azonosságok

5.4. ÖSSZEADÁS ÉS SKALÁRRAL SZORZÁS TULAJDONSÁGAI Legyen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ azonos típusú ($m \times n$ -es) mátrix, c és d legyenek skalárok. Ekkor

- a) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ (felcserélhetőség, kommutativitás)
- b) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ (csoportosíthatóság, asszociativitás)
- c) $\mathbf{A} + \mathbf{O}_{m \times n} = \mathbf{A}$ (zérusmátrix)
- d) $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{O}_{m \times n}$ (ellentett létezése)
- e) $c(d\mathbf{A}) = (cd)\mathbf{A}$ (csoportosíthatóság)
- f) $(c + d)\mathbf{A} = c\mathbf{A} + d\mathbf{A}$ (disztributivitás)
- g) $c(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = c\mathbf{A} + c\mathbf{B}$ (disztributivitás)
- h) $0\mathbf{A} = \mathbf{O}_{m \times n}$, $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$, $-1\mathbf{A} = -\mathbf{A}$

5.5. Egy algebrai kifejezésben végrehajtjuk az alábbi helyettesítést:

$$u = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

$$v = x_1 - 3x_2 + x_3$$

$$w = 2x_1 - x_2 - 3x_3$$

Írjuk fel e lineáris helyettesítést mátrixszorzatos alakban. Legyen $(u^2 + v^2 + w^2)(2u - v - w)$ az a kifejezés, melyben a helyettesítést elvégezzük. Írjuk fel e kifejezést a helyettesítés előtt és után mátrixműveletek segítségével!

Számítási feladatok

Bontsuk fel a következő mátrixokat elemi mátrixok szorzatára!

5.6. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

5.7. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

5.8. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

5.9. $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$

5.10. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$

5.11. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

5.12. Határozzuk meg az összes olyan 2×2 -es $\mathbf{A}$ mátrixot, melyre $\mathbf{A}^2 = \mathbf{O}$. Másként fogalmazva határozzuk meg a nullmátrix összes négyzetgyökét!

5.13. Számítsuk ki az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix k -adik hatványait!

5.14. Írjuk fel a mátrixszorzás definícióját az Einstein-konvenciót használva.

Blokkmátrixok

5.15. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{D}$ invertálható mátrixok, akkor a következő ún. blokkdiagonális mátrix invertálható, és inverze

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix}.$$

továbbá tetszőleges, de megfelelő típusú $\mathbf{B}$ mátrix esetén

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix}.$$

5.16. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{D}$ négyzetes mátrixok, akkor

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & -\mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{X} & \mathbf{D}^{-1} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix},$$

ahol $\mathbf{X} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1}$, és feltételezzük, hogy minden felírt mátrixinverz létezik.

Az előbbi két feladat valamelyikének felhasználásával számítsuk ki az alábbi mátrixok inverzét!

5.17. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

5.18. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

$$5.19. \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bizonyítások

5.20. Bizonyítsuk be, hogy ha $c\mathbf{A} = \mathbf{O}$, akkor vagy $c = 0$, vagy $\mathbf{A} = \mathbf{O}$.

5.21. Az $S_i \leftrightarrow S_j$ sorművelethez tartozó elemi mátrixot jelölje $\mathbf{E}_{ij}$, a cS_i -hez tartozót $\mathbf{E}_i(c)$ és a $S_i + cS_j$ sorművelethez tartozót $\mathbf{E}_{ij}(c)$. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{E}_{ij}^{-1} = \mathbf{E}_{ij}$, $\mathbf{E}_i(c)^{-1} = \mathbf{E}_i(\frac{1}{c})$ és $\mathbf{E}_{ij}(c)^{-1} = \mathbf{E}_{ij}(-c)$.

5.22. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ fölcserélhető $\mathbf{B}$ -vel és $\mathbf{B}$ invertálható, akkor $\mathbf{A}$ fölcserélhető $\mathbf{B}^{-1}$ -gyel is.

Absztrakció

5.23. **INVERTÁLHATÓ MŰVELET** Legyen $\odot$ egy H -n értelmezett kétváltozós művelet, azaz egy $H^2 \rightarrow H$ függvény. Fogalmazzuk meg, mit értünk azon, hogy $\odot$ invertálható egy $R \subseteq H$ részhalmazán. Hogyan változik a definíció, ha a művelet kommutatív?

5.24. **ELEM INVERZE** Legyen $\odot$ egy H -n értelmezett kétváltozós művelet.

1. Mit értünk azon, hogy $e \in H$ e művelet semleges eleme?
2. Mit értünk azon, hogy $b \in H$ az $a \in H$ elem inverze?

Műveletek speciális mátrixokkal

A gyakorlatban gyakran találkozunk olyan speciális mátrixokkal, melyekkel a műveletek egyszerűbben végezhetők el, és olyanokkal, melyek mátrixműveletek segítségével definiálhatók.

Diagonális mátrixok A mátrixműveletek definíciói alapján magától értetődő, hogy diagonális mátrixokkal hogyan végezhetők el a mátrixműveletek. Elsősorban egyszerű példákat mutatunk.

5.21. PÉLDA (MŰVELETEK DIAGONÁLIS MÁTRIXOKKAL). Legyen $\mathbf{A} = \text{diag}(1, 2, 3)$, $\mathbf{B} = \text{diag}(5, 4, 3)$. Ellenőrizzük az alábbi számításokat, és fogalmazzunk meg általános összefüggéseket diagonális mátrixokkal végzett műveletekről.

$$\begin{aligned}\mathbf{AB} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}^k &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{bmatrix}, \text{ ahol } k \text{ egész szám.}\end{aligned}$$

5.22. TÉTEL (MŰVELETEK DIAGONÁLIS MÁTRIXOKKAL). Legyen $\mathbf{A} = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\mathbf{B} = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n)$, és legyen k egész szám. Ekkor

- a) $\mathbf{AB} = \text{diag}(a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n)$,
- b) $\mathbf{A}^k = \text{diag}(a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k)$, speciálisan
- c) $\mathbf{A}^{-1} = \text{diag}(a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_n^{-1})$.

Permutációs mátrixok és kigyók Könnyen kezelhetők a diagonális mátrixok sorainak permutációjával kapott mátrixok.

5.23. PÉLDA (SOROK PERMUTÁCIÓJA MÁTRIXSZORZÁSSAL). Alkalmazzunk több sorcserét az egységmátrixon. Az így kapott mátrixszal balról való szorzás milyen hatással van a beszorzott mátrixra? Szemléltessük ezt $\mathbf{I}_4$ -en az $S_1 \leftrightarrow S_2$, $S_2 \leftrightarrow S_4$ sorcserékkel.

MEGOLDÁS. Legyen $\mathbf{P}$ az $\mathbf{I}_4$ -ből a fent megadott két sorcserével kapott mátrix, és legyen $\mathbf{A}$ egy tetszőleges $4 \times n$ -es mátrix. Ekkor

$$\mathbf{I}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_2 \leftrightarrow S_4} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{P}$$

$$\mathbf{PA} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{41} & a_{42} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}$$

Azt tapasztaljuk, hogy a $\mathbf{PA}$ az $\mathbf{A}$ -ból a soroknak épp azzal a permutációjával kapható, amely permutációval $\mathbf{I}$ -ből a $\mathbf{P}$ -t kaptuk. $\square$

5.24. DEFINÍCIÓ (PERMUTÁCIÓS MÁTRIX, KÍGYÓ). A *diagonális mátrixok sorainak permutációjával kapott mátrixot kígyónak nevezzük, speciálisan az egységmátrixból ugyanígy kapott mátrixot permutációs mátrixnak hívjuk.*

► Könnyen látható, hogy a permutációs mátrix olyan négyzetes mátrix, melynek minden sorában és minden oszlopában *pontosan* egy 1-es van, az összes többi elem 0. A kígyó olyan négyzetes mátrix, melynek minden sorában és minden oszlopában *legfeljebb* egy nemnulla elem van.

► Minden kígyó megkapható egy diagonális mátrixból oszlopcserékkel is. Egy diagonális mátrixból akkor is kígyót kapunk, ha a sorok permutációja mellett az oszlopokat is permutáljuk.

5.25. PÉLDA (KÍGYÓK). Az alábbi mátrixok mindegyike kígyó, az utolsó kettő egyúttal permutációs mátrix is:

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5.26. TÉTEL (MŰVELETEK PERMUTÁCIÓS MÁTRIXOKKAL). Bármely két azonos méretű permutációs mátrix szorzata és egy permutációs mátrix bármely egész kitevős hatványa permutációs mátrix. Permutációs mátrix inverze megegyezik a transzponáltjával, azaz ha $\mathbf{P}$ permutációs mátrix, akkor

$$\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T.$$

BIZONYÍTÁS. Legyen $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ két permutációs mátrix. Szorzatuk sorvektorai $\mathbf{a}_{i*}\mathbf{B}$ alakúak, ahol $\mathbf{a}_{i*}$ megegyezik valamelyik standard egységvektorral, pl. $\mathbf{a}_{i*} = \mathbf{e}_k$. Ekkor a szorzatvektornak csak az az eleme 1, amelyik oszlop $\mathbf{e}_k$ -vel megegyezik, és ilyen oszlop pontosan egy van. Tehát a szorzatmátrix minden sorában pontosan egy elem 1, a többi 0. Oszlopokra az állítás hasonlóan bizonyítható. A szorzatra vonatkozó állítás természetes következménye a pozitív egész kitevős hatványokra vonatkozó állítás. A negatív egész kitevőkre is igaz az állítás. Ennek igazolásához elég az inverzre belátni.

Tekintsük a $\mathbf{PP}^\top$ szorzatot. A $(\mathbf{PP}^\top)_{ij}$ elem a $\mathbf{P}_{i*}$ vektornak és a $(\mathbf{P}^\top)_{*j} = \mathbf{P}_{j*}$ vektornak a szorzata, vagyis 1, míg

$$(\mathbf{PP}^\top)_{ij} = (\mathbf{P})_{i*}(\mathbf{P}^\top)_{*j} = (\mathbf{P})_{i*} \cdot (\mathbf{P})_{j*},$$

azaz a szorzat i -edik sorának j -edik eleme a $\mathbf{P}$ i -edik és j -edik sorvektorának skalárszorzata, ami 0, mivel két különböző sorban az 1-es különböző helyen van. $\square$

► Az alábbi példa szemlélteti a tételben kimondott egyszerű állítást:

$$\mathbf{PP}^\top = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Háromszögmátrixok A Gauss-kiküszöbölés végrehajtásakor az együtthatómátrixot lépcsős alakra transzformáltuk, melyben a főátló alatt mindig csak nullák szerepelnek. Az ilyen mátrixok nem csak a Gauss-kiküszöbölésnél fontosak.

5.27. DEFINÍCIÓ (HÁROMSZÖGMÁTRIX). Azokat a mátrixokat, melyek főátlója alatt csak 0-elemek szerepelnek felső háromszögmátrixnak, azokat, melyek főátlója fölött csak 0-elemek vannak alsó háromszögmátrixnak nevezzük. Ha egy háromszögmátrix főátlójában csupa 1-es áll, egység háromszögmátrixról beszélünk.

A Gauss-kiküszöbölésnél kapott felső háromszögmátrixhoz hasonlóan azok az egyenletrendszerek is megoldhatók csak behelyettesítésekkel, amelyek együtthatómátrixa alsó háromszögmátrix. A különbség kizárólag annyi, hogy ekkor az első egyenlettel kezdjük, és az első változó értékét határozzuk meg először. Például az

$$\begin{aligned} x &= 3 \\ 2x + 3y &= 3 \\ 2x + y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

egyenletrendszer első egyenletéből $x = 3$, a másodikba való behelyettesítés után $y = -1$, végül a harmadikba való behelyettesítés után $z = -1$.²

² Az angol nyelvű lineáris algebra tankönyvek különbséget tesznek a felső és az alsó háromszögmátrixú egyenletrendszerek megoldása között. *Forward substitution*, illetve *backward substitution* a neve a behelyettesítésnek ha alsó, illetve ha felső háromszögmátrix az együttható mátrix. Ez arra utal, hogy a változókat előre vagy hátra haladva számoljuk ki. Mi nem fogjuk használni e finom különbségtételt.

5.28. TÉTEL (MŰVELETEK HÁROMSZÖGMÁTRIXOKKAL). *Felső háromszögmátrixok összege, szorzata, és invertálható felső háromszögmátrix inverze felső háromszögmátrix. Analóg tétel igaz az alsó háromszögmátrixokra is. Egy háromszögmátrix pontosan akkor invertálható, ha főátlóbeli elemeinek egyike sem zérus.*

A bizonyítást feladatként az Olvasóra hagyjuk.

Szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrixok Gyakran használunk olyan mátrixokat, melyekben az elemek egyenlők vagy ellentettjei a főátlóra nézve szimmetrikusan elhelyezkedő párjuknak. E tulajdonság a transzponálttal könnyen kifejezhető.

5.29. DEFINÍCIÓ (SZIMMETRIKUS ÉS FERDÉN SZIMMETRIKUS MÁTRIXOK). *A négyzetes $\mathbf{A}$ mátrixot szimmetrikusnak nevezzük, ha $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, és ferdén szimmetrikusnak nevezzük, ha $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$.*

5.30. PÉLDA (SZIMMETRIKUS ÉS FERDÉN SZIMMETRIKUS MÁTRIXOK). *Az alábbi mátrixok közül az $\mathbf{A}$ szimmetrikus, a $\mathbf{B}$ ferdén szimmetrikus, a $\mathbf{C}$ egyik osztályba sem tartozik.*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 9 \\ -9 & 2 & 9 \\ -9 & -9 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ha $\mathbf{A}$ ferdén szimmetrikus, akkor minden elemére $a_{ij} = -a_{ji}$, azaz $i = j$ esetén $a_{ii} = -a_{ii}$. Ez csak $a_{ii} = 0$ esetén áll fenn, azaz a ferdén szimmetrikus mátrixok főátlójában csupa 0 áll.

5.31. ÁLLÍTÁS (MŰVELETEK (FERDÉN) SZIMMETRIKUS MÁTRIXOKKAL). *Szimmetrikus mátrixok összege, skalárszorosa, szorzata, inverze szimmetrikus. Hasonlóan ferdén szimmetrikus mátrixok összege, skalárszorosa, szorzata, inverze ferdén szimmetrikus.*

Az állítás bizonyítását feladatként az olvasóra hagyjuk.

5.32. TÉTEL (FELBONTÁS SZIMMETRIKUS ÉS FERDÉN SZIMMETRIKUS MÁTRIX ÖSSZEGÉRE). *Minden négyzetes mátrix előáll egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus mátrix összegeként, nevezetesen minden $\mathbf{A}$ négyzetes mátrixra*

$$\mathbf{A} = \underbrace{\frac{1}{2} (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)}_{\text{szimmetrikus}} + \underbrace{\frac{1}{2} (\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)}_{\text{ferdén szimm.}}$$

BIZONYÍTÁS. Ha egy mátrix szimmetrikus, konstansszorosa is, így elég

megmutatni, hogy az $\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top$ mátrix szimmetrikus:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top)^\top = \mathbf{A}^\top + (\mathbf{A}^\top)^\top = \mathbf{A}^\top + \mathbf{A} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^\top$$

Hasonlóképp $\mathbf{A} - \mathbf{A}^\top$ ferdén szimmetrikus, hiszen

$$(\mathbf{A} - \mathbf{A}^\top)^\top = \mathbf{A}^\top - (\mathbf{A}^\top)^\top = \mathbf{A}^\top - \mathbf{A} = -(\mathbf{A} - \mathbf{A}^\top)$$

Végül a két mátrix összege valóban $\mathbf{A}$:

$$\frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top) + \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^\top) = \frac{1}{2}\mathbf{A} + \frac{1}{2}\mathbf{A}^\top + \frac{1}{2}\mathbf{A} - \frac{1}{2}\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}. \quad \square$$

Fontos következményei lesznek az alábbi egyszerű állításnak.

5.33. TÉTEL ($\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ és $\mathbf{A} \mathbf{A}^\top$ SZIMMETRIKUS). Az $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ és az $\mathbf{A} \mathbf{A}^\top$ mátrixok tetszőleges $\mathbf{A}$ mátrix esetén szimmetrikusak.

BIZONYÍTÁS. $(\mathbf{A} \mathbf{A}^\top)^\top = (\mathbf{A}^\top)^\top \mathbf{A}^\top = \mathbf{A} \mathbf{A}^\top$. Az állítás másik fele ugyanígy bizonyítható. $\square$

*Mátrix és diád összegének inverze** Összegmátrix inverzére – a valósok összegének inverzéhez hasonlóan – nincs egyszerű képlet, de speciális mátrixokra nagyon hasznos eredmények vannak. Ilyen a Sherman–Morrison-formula is, melynek segítségével leírhatjuk, hogy hogyan változik egy mátrix inverze, ha egyetlen csak egyetlen elemén változtatunk.

5.34. TÉTEL (SHERMAN–MORRISON-FORMULA). Tegyük fel, hogy az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix invertálható, és $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ két olyan vektor, hogy $1 + \mathbf{v}^\top \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} \neq 0$. Ekkor $\mathbf{A} + \mathbf{u} \mathbf{v}^\top$ invertálható, és

$$(\mathbf{A} + \mathbf{u} \mathbf{v}^\top)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} \mathbf{v}^\top \mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^\top \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}}.$$

BIZONYÍTÁS. Elég megmutatni, hogy

$$\left(\mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} \mathbf{v}^\top \mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^\top \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}} \right) (\mathbf{A} + \mathbf{u} \mathbf{v}^\top) = \mathbf{I},$$

mert ez a formula igazolása mellett azt is bizonyítja, hogy $\mathbf{A} + \mathbf{u} \mathbf{v}^\top$

invertálható.

$$\begin{aligned}
 & \left(\mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} \mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}} \right) (\mathbf{A} + \mathbf{u} \mathbf{v}^T) \\
 &= \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} \mathbf{v}^T - \frac{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} \mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}}{1 + \mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}} - \frac{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} \mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} \mathbf{v}^T}{1 + \mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}} \\
 &= \mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} \mathbf{v}^T - \frac{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} \mathbf{v}^T}{1 + \mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}} - \frac{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} (\mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}) \mathbf{v}^T}{1 + \mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}} \\
 &= \mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} \mathbf{v}^T - \frac{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} (1 + \mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}) \mathbf{v}^T}{1 + \mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}} \\
 &\stackrel{*}{=} \mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} \mathbf{v}^T - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} \mathbf{v}^T \\
 &= \mathbf{I}.
 \end{aligned}$$

A $*$ -gal jelzett egyenlőségnél azt használtuk ki, hogy 1×1 -es mátrixszal való szorzás egybeesik a skalárral való szorzással, a skalár tényező pedig egy mátrixszorzatban áttehető más helyre, így az adott törtkifejezésben egyszerűsíthettünk vele. $\square$

A Sherman–Morrison-formula sokhelyütt használható, mi itt egyet emelünk ki: megvizsgáljuk, hogy hogyan változik egy mátrix inverze, ha a mátrixnak csak egyetlen elemén változtatunk.

5.35. PÉLDA (INVERZ VÁLTOZÁSA). Legyen $\mathbf{A}$ invertálható mátrix, és változtassunk meg az a_{ij} elemet $a_{ij} + \varepsilon$ -ra. Fejezzük ki az így kapott mátrix inverzét $\mathbf{A}^{-1}$ segítségével.

MEGOLDÁS. Első lépésként kifejezzük az új mátrixot $\mathbf{A}$ -ból mátrixműveletekkel. Legyen $\mathbf{e}_i$ és $\mathbf{e}_j$ az i -edik és j -edik standard egységvektor. Ekkor a módosított mátrix

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} + \varepsilon \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T.$$

Erre alkalmazható a Sherman–Morrison-formula az $\mathbf{u} = \mathbf{e}_i$ és $\mathbf{v} = \varepsilon \mathbf{e}_j$ választással.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}^{-1} &= \left(\mathbf{A} + \varepsilon \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T \right)^{-1} \\
 &= \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{e}_i (\varepsilon \mathbf{e}_j^T) \mathbf{A}^{-1}}{1 + \varepsilon \mathbf{e}_j^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{e}_i} \\
 &= \mathbf{A}^{-1} - \varepsilon \frac{(\mathbf{A}^{-1})_{*i} (\mathbf{A}^{-1})_{j*}}{1 + \varepsilon (\mathbf{A}^{-1})_{ji}}
 \end{aligned}$$

5.36. PÉLDA (INVERZ VÁLTOZÁSA SZÁMPÉLDÁN). Adva van egy $\mathbf{A}$ mátrix és annak inverze:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2/5 & 3/5 & 0 \\ -2/5 & 7/5 & -8/5 & 3/5 \\ 3/5 & -8/5 & 7/5 & -2/5 \\ 0 & 3/5 & -2/5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Változtassuk meg a_{11} értékét 1-ről 11/10-re. Az így kapott mátrixot jelölje **B**. Határozzuk meg inverzét!

MEGOLDÁS. Az előző példa alkalmazásával

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}^{-1} &= \mathbf{A}^{-1} - \frac{1}{10} \frac{(\mathbf{A}^{-1})_{*1}(\mathbf{A}^{-1})_{1*}}{1 + \frac{1}{10}(\mathbf{A}^{-1})_{11}} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -2/5 & 3/5 & 0 \\ -2/5 & 7/5 & -8/5 & 3/5 \\ 3/5 & -8/5 & 7/5 & -2/5 \\ 0 & 3/5 & -2/5 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{10} \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ -2/5 \\ 3/5 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2/5 & 3/5 & 0 \end{bmatrix}}{1 + \frac{1}{10} \cdot 0} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -2/5 & 3/5 & 0 \\ -2/5 & 7/5 & -8/5 & 3/5 \\ 3/5 & -8/5 & 7/5 & -2/5 \\ 0 & 3/5 & -2/5 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4/25 & -6/25 & 0 \\ 0 & -6/25 & 9/25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -2/5 & 3/5 & 0 \\ -2/5 & 173/125 & -197/125 & 3/5 \\ 3/5 & -197/125 & 341/250 & -2/5 \\ 0 & 3/5 & -2/5 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Tizedestörtekkel számolva:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}^{-1} &= \begin{bmatrix} 0.0 & -0.4 & 0.6 & 0.0 \\ -0.4 & 1.4 & -1.6 & 0.6 \\ 0.6 & -1.6 & 1.4 & -0.4 \\ 0.0 & 0.6 & -0.4 & 0.0 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{B}^{-1} &= \begin{bmatrix} 0.000 & -0.400 & 0.600 & 0.000 \\ -0.400 & 1.384 & -1.576 & 0.600 \\ 0.600 & -1.576 & 1.364 & -0.400 \\ 0.000 & 0.600 & -0.400 & 0.000 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

□

Gyorsszorzás* Két 2×2 -es mátrix szokásos módon való összeszorzásához 8 szorzásra és 4 összeadásra van szükség. Strassen 1969-ben egy olyan módszert talált, mellyel e mátrixszorzást 7 szorzással is el lehet végezni, igaz azon az áron, hogy az összeadások száma 16-ra nő.

5.2 (STRASSEN-FORMULÁK). Legyen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ is 2×2 -es. A $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ szorzás elvégezhető a következő formulákkal:

$$\begin{aligned} d_1 &= (a_{11} + a_{22})(b_{11} + b_{22}) & c_{11} &= d_1 + d_4 - d_5 + d_7 \\ d_2 &= (a_{21} + a_{22})b_{11} & c_{21} &= d_2 + d_4 \\ d_3 &= a_{11}(b_{12} - b_{22}) & c_{12} &= d_3 + d_5 \\ d_4 &= a_{22}(-b_{11} + b_{21}) & c_{22} &= d_1 + d_3 - d_2 + d_6 \\ d_5 &= (a_{11} + a_{12})b_{22} \\ d_6 &= (-a_{11} + a_{21})(b_{11} + b_{12}) \\ d_7 &= (a_{12} - a_{22})(b_{21} + b_{22}) \end{aligned}$$

Ha olyan számítógépet használunk, melyen a számok szorzása sokkal több időt igényel, mint az összeadása, akkor már ez is gyorsíthatja a műveletet. A módszer azonban kiterjeszthető tetszőleges méretű négyzetes mátrixokra is, és elegendően nagy n -ekre a műveletek összáma is csökken. A standard mátrixszorzás műveletigénye $2n^3 - n^2$ (ebből n^3 szorzás és $n^3 - n^2$ összeadás – gondoljunk utána!), a Strassen-formulákkal való szorzásé pedig $n = 2^k$ esetén legföljebb $7 \cdot 7^k - 6 \cdot 4^k$. Ez $n = 2^{10}$ esetén már kevesebb műveletet ad. Az általánosítás lényege, hogy a Strassen-formulák 2×2 -es blokkmátrixokra is használhatók, mert a szorzás kommutativitását nem használják, így ha $M(n)$ jelöli két $n \times n$ -es mátrix összeszorzásához szükséges szorzások, és $S(n)$ a szükséges összeadások számát, akkor $M(2n) \leq 7M(n)$ és $S(2n) \leq 18n^2 + 7S(n)$. Az $M(1) = 1$, $S(1) = 0$ kezdeti feltételeket is használva megmutatható, hogy $M(2^k) \leq 7^k$, $S(2^k) \leq 6(7^k - 4^k)$. E képletekből a felső egészrész jelét használva és a $k = \lceil \log_2 n \rceil$ jelöléssel az műveletek összámára a $cn^{\log_2 7} \leq cn^{2.81}$ felső becslést kapjuk, ami a $2n^3 - n^2$ értéknél jobb, függetlenül a c konstans konkrét értékétől. Mivel a két összeszorzandó mátrix mindegyikének mind az n^2 elemét használni kell, ezért a szükséges műveletek számának alsó becslése cn^2 . A $cn^{2.81}$ felső becslés mára $cn^{2.376}$ -ra lett javítva (Coppersmith és Winograd, 1990), de az a sejtés, hogy a kitevő 2-re, de legalább $2 + \varepsilon$ -ra lenyomható, ahol ε tetszőlegesen kis pozitív szám.

A módszer gyengéje numerikus instabilitása, így a gyakorlatban csak bizonyos mátrixokra érdemes használni, például nagyméretű egészelemű mátrixokra tetszőleges pontosságú aritmetika használata esetén.

Feladatok

5.25.* **IGAZ – HAMIS** Döntsük el, igazak-e az alábbi állítások? Válaszunkat indokoljuk!

- Szimmetrikus mátrixok összege és skalárszorosa is szimmetrikus, így szimmetrikus mátrixok tetszőleges lineáris kombinációja is szimmetrikus.
- Ferdén szimmetrikus mátrixok összege és skalárszorosa is ferdén szimmetrikus, így ferdén szimmetrikus mátrixok tetszőleges lineáris kombinációja is ferdén szimmetrikus.
- Minden lépcsős alakú mátrix felső háromszögmátrix.
- Minden felső háromszögmátrix lépcsős alakú.

5.26. Számítsuk ki az alábbi mátrixok inverzeit, négyzetét és köbét!

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5.27. Hogyan oldanánk meg a következő egyenletrendszert a lehető legkevesebb lépésben?

$$\begin{aligned} x + 4y + 3z + 5w &= 3 \\ 6x + 3y &= 3 \\ 2x + 3y + 2z &= 3 \\ 2x + 4y + 3z + 5w &= 4 \end{aligned}$$

Bizonyítások

5.28. Mutassuk meg, hogy minden permutációs mátrix oszlopcserékkel is megkapható az egységmátrixból, és hogy permutációs mátrixszal jobbról való szorzás a beszorított mátrix oszlopain ugyanazt a permutációt hajtja végre, mint amellyel a permutációs mátrix az egységmátrixból megkapható.

5.29. Bizonyítsuk be, hogy bármely két azonos méretű kigyó szorzata és egy kigyó bármely pozitív egész kitevős hatványa kigyó.

5.30.* Mutassuk meg, hogy egy K kigyó pontosan akkor invertálható, ha minden sorában pontosan egy elem nem 0, és ekkor inverze megkapható úgy, hogy minden nemnulla elem helyébe annak reciprokát írjuk, majd az így kapott mátrixot transzponáljuk.

5.31.* **GYORSINVERTÁLÁS** Legyen $B = A^{-1}$, mindketten 2×2 -es mátrixok. Mutassuk meg, hogy az alábbi eljárással definiált mátrixinvertálás segítségével $n \times n$ -es mátrixokra olyan algoritmus készíthető, melynek műveletigénye legfeljebb $cn^{2.81}$.

$$\begin{aligned} c_1 &= a_{11}^{-1} & b_{12} &= c_3 c_6 \\ c_2 &= a_{21} c_1 & b_{21} &= c_6 c_2 \\ c_3 &= c_1 a_{12} & c_7 &= c_3 b_{21} \\ c_4 &= a_{21} c_3 & b_{11} &= c_1 - c_7 \\ c_5 &= c_4 - a_{22} & b_{22} &= -c_6 \\ c_6 &= c_5^{-1} \end{aligned}$$

Mátrixfelbontások

Mátrixfelbontáson egy mátrixnak adott tulajdonságú mátrixok szorzataként való fölírását értjük. Egy ilyen felbontással már találkoztunk, amikor invertálható mátrixot elemi mátrixok szorzatára bontottunk. E szakaszban a kiküszöbölési eljárásra épülő további felbontásokkal találkozunk. Ezek egyike, az LU-felbontás bizonyos lineáris algebrai feladatok számítógépes megoldásának gyakran használt eszköze.

Az LU-felbontás Tegyük fel, hogy egy $\mathbf{A}$ mátrixból el lehet jutni egy $\mathbf{U}$ felső háromszögalakhoz csak olyan sorműveletekkel, melyekben egy sor konstansszorosát valamely alatta lévő sorhoz adjuk. Minden ilyen elemi sorművelethez olyan elemi mátrix tartozik, mely alsó háromszög alakú. Ekkor tehát léteznek olyan $\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_k$ elemi alsó háromszögmátrixok, melyekre

$$\mathbf{E}_k \dots \mathbf{E}_1 \mathbf{A} = \mathbf{U}. \quad (5.2)$$

Innen

$$\mathbf{A} = (\mathbf{E}_k \dots \mathbf{E}_1)^{-1} \mathbf{U}, \quad (5.3)$$

ahol $(\mathbf{E}_k \dots \mathbf{E}_1)^{-1}$ alsó háromszögmátrixok szorzatának inverze, tehát maga is alsó háromszögmátrix. Ráadásul mindegyik mátrixban, így szorzatukban, és annak inverzében is a főátló csupa 1-esből áll. Ez a következő definícióhoz vezet:

5.37. DEFINÍCIÓ (LU-FELBONTÁS). Azt mondjuk, hogy az $m \times n$ -es $\mathbf{A}$ mátrix egy $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ alakú tényezőkre bontása LU-felbontás (LU-faktorizáció vagy LU-dekompozíció), ha $\mathbf{L}$ alsó egység háromszögmátrix (tehát a főátlóban 1-ek, fölötté 0-k vannak), $\mathbf{U}$ pedig felső háromszögmátrix.

Az LU-felbontásban az L és U betűk az alsó és felső jelentésű angol lower és upper szavak kezdőbetűi.

► Nincs minden mátrixnak LU-felbontása (ld. ?? feladat), például az

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & c \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

egyenlőség a paraméterek semmilyen értékére sem áll fönn.

► Az LU-felbontás nem egyértelmű, például

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

felbontás minden a paraméterértékre fönnáll. Megmutatható viszont, hogy ha $\mathbf{A}$ invertálható, és létezik LU-felbontása, akkor az egyértelmű (ld. ?? tétel).

5.38. PÉLDA (AZ LU-FELBONTÁS KISZÁMÍTÁSA). *Elemi sorműveletekkel hozzuk felső háromszögalakra az*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ és a } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrixot, majd e lépéseket fölhasználva írjuk föl mindkét mátrix egy-egy LU-felbontását!

MEGOLDÁS. Először nézzük az $\mathbf{A}$ mátrixot! Oszloponként haladva végezzük el a Gauss-kiküszöbölést. Minden elemi sorművelet mellett (zárójelben) megadjuk a hozzá tartozó elemi mátrixot:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_2 - 1/2 S_1} \left(\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ \mathbf{E}_1 \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_3 - 1/4 S_1} \left(\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1 \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_3 - 1/2 S_2} \left(\mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ \mathbf{E}_3 \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1 \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{U}. \end{aligned}$$

Tehát $\mathbf{E}_3 \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1 \mathbf{A} = \mathbf{U}$, amiből az $(\mathbf{E}_3 \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1)^{-1} = \mathbf{E}_1^{-1} \mathbf{E}_2^{-1} \mathbf{E}_3^{-1}$ mátrixszal való beszorzás után $\mathbf{A} = (\mathbf{E}_1^{-1} \mathbf{E}_2^{-1} \mathbf{E}_3^{-1}) \mathbf{U}$. Kiszámoljuk az elemi mátrixok inverzeinek szorzatát, azaz az $\mathbf{L} = \mathbf{E}_1^{-1} \mathbf{E}_2^{-1} \mathbf{E}_3^{-1}$ mátrixot. Fölhasználjuk a 183. oldalon mondottakat, miszerint az $S_i + c S_j$ sorművelet mátrixának inverze egyenlő az $S_i - c S_j$ mátrixával:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Meglepő (de általánosítható) módon ezeknek az elemi mátrixoknak a szorzata a főátló alatti számok átmásolásával megkapható. Az eredmény egy alsó egység háromszögmátrix. Így az $\mathbf{A}$ mátrix LU-felbontása:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Mivel az $\mathbf{A}$ átalakítása közben az oszlopok közt nem végeztünk műveletet, és a $\mathbf{B}$ mátrix az $\mathbf{A}$ -ból a harmadik oszlopa elhagyásával kapható

OCTAVE: A

A =

```
4      8      4      8
2      6      4      4
1      3      2      4
```

OCTAVE: [L U]=lu(A)

L =

```
1.00    0.00    0.00
0.50    1.00    0.00
0.25    0.50    1.00
```

U =

```
4      8      4      8
0      2      2      0
0      0      0      2
```

OCTAVE: B

B =

```
4      8      8
2      6      4
1      3      4
```

OCTAVE: [L U]=lu(B)

L =

```
1.00    0.00    0.00
0.50    1.00    0.00
0.25    0.50    1.00
```

U =

```
4      8      8
0      2      0
0      0      2
```

5.3. kód: Egy mátrix LU-felbontásának kiszámítása mátrixalapú nyelvben

meg, ezért az előző felbontásból azonnal adódik a **B** felbontása is:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.5) \quad \square$$

Az 5.38. példában követett eljárás egyszerűen általánosítható tetszőleges mátrixra.

5.39. ALGORITMUS (EGY LU-FELBONTÁS ELŐÁLLÍTÁSA). Legyen **A** egy tetszőleges $m \times n$ -es valós mátrix. Az alábbi algoritmus a Gauss-elimináció lépésős alak helyett felső háromszögalakú mátrixot adó megváltoztatásával vagy talál egy $m \times m$ -es **L** és egy $m \times n$ -es **U** mátrixot, melyekre $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, vagy hibaüzenetet ad.

Első lépésként tekintsük az **A** mátrix első sorának első elemét. Ha ez 0, de az első oszlopban alatta nemnulla elem is van, akkor „a mátrixnak nincs LU-felbontása” üzenettel az algoritmus leáll. Ha alatta minden elem 0, az algoritmust a második sor második elemével folytatjuk (Gauss-kiküszöbölés esetén az első sor második elemével folytatnánk). Végül, ha az első sor első eleme nem 0, akkor az első oszlop további elemei eliminálhatók az $S_2 - l_{21}S_1$, $S_3 - l_{31}S_1, \dots, S_n - l_{n1}S_1$ sorműveletekkel, ahol $l_{k1} = a_{k1}/a_{11}$.

Az algoritmust hasonlóan folytatjuk sorban haladva a főátló elemein. Ha valamelyikük 0, de alatta van a mátrixnak nemnulla eleme, leállunk, ha alatta már minden elem 0, folytatjuk a következő főátlóbeli elemmel, ha pedig nemnulla, akkor elimináljuk az alatta lévő elemeket. Az i -edik lépésben tehát az $S_{i+1} - l_{i+1,i}S_i$, $S_{i+2} - l_{i+2,i}S_i, \dots, S_n - l_{ni,i}S_i$ sorműveleteket hajtjuk végre.

Az elimináció végén megmaradt felső háromszögmátrix lesz **U**. A kiküszöbölés konstans l_{ij} elemeit írjuk az I_m egységmátrix i -edik sorának j -edik oszlopába. Ez lesz az **L** mátrix, azaz

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{m1} & l_{m2} & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

5.40. TÉTEL (AZ LU-FELBONTÁS LÉTEZÉSE ÉS EGYÉRTELMŰSÉGE). A fenti algoritmusra igaz, hogy

- a) pontosan akkor áll le hibaüzenettel, ha **A**-nak nincs LU-felbontása,
- b) a megkonstruált **L** és **U** mátrixok LU-felbontást adnak,
- c) ha **A** invertálható, akkor e felbontás egyértelmű.

BIZONYÍTÁS. Csak a b) állítást igazoljuk, a többi az Olvasóra hagyjuk (ld. 5.45. feladat). Jelölje az $S_j - l_{ji}S_i$ sorművelet elemi mátrixát $\mathbf{L}_{ji}$ ($1 \leq i < j \leq m$). Jelölje e mátrixoknak a végrehajtás sorrendjében jobbról balra vett szorzatát **E**, azaz legyen

$$\mathbf{E} = (\mathbf{L}_{m-1,m})(\mathbf{L}_{m-2,m}\mathbf{L}_{m-2,m-1}) \dots (\mathbf{L}_{m2} \dots \mathbf{L}_{42}\mathbf{L}_{32})(\mathbf{L}_{m1} \dots \mathbf{L}_{31}\mathbf{L}_{21}).$$

Az algoritmus szerint ekkor $\mathbf{EA} = \mathbf{U}$. Vizsgáljuk meg az $\mathbf{EL}$ szorzatot az algoritmusbeli $\mathbf{L}$ mátrixszal. Mivel e mátrix főátlójában csupa 1, ji -edik helyén l_{ji} áll, ezért az elemi $\mathbf{L}_{ji}$ mátrix épp ezt az elemet fogja eliminálni, és így $\mathbf{E}$ minden főátló alatti elemet eliminál, azaz $\mathbf{EL} = \mathbf{I}$. Eszerint $\mathbf{E}^{-1} = \mathbf{L}$, tehát $\mathbf{A} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{U} = \mathbf{LU}$. $\square$

Egyenletrendszer megoldása LU-felbontással Ha már ismerjük egy $\mathbf{A}$ mátrix LU-felbontását, akkor az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer könnyen megoldható. Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldása az $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$, $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ egyenletrendszerek megoldásával ekvivalens. Ha ugyanis $\mathbf{x}$ megoldása az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek, akkor $\mathbf{LUx} = \mathbf{b}$, és az $\mathbf{y} = \mathbf{Ux}$ jelöléssel $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$. Másrészt, ha $\mathbf{y}$ megoldása az $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek, és $\mathbf{x}$ az $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ egyenletrendszernek, akkor $\mathbf{y}$ -t behelyettesítve $\mathbf{L(Ux)} = \mathbf{b}$, azaz $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Tömören:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \text{ megoldható} \iff \mathbf{Ly} = \mathbf{b}, \mathbf{Ux} = \mathbf{y} \text{ megoldható.}$$

Az $\mathbf{L}$ és $\mathbf{U}$ alakjából következik, hogy az $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$, és az $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ egyenletrendszerek egyszerű visszahelyettesítésekkel megoldhatók.

5.41. PÉLDA (EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSA LU-FELBONTÁSSAL).
Oldjuk meg a következő egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} 4x_1 + 8x_2 + 8x_3 &= 8 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 &= 4 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 4 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. Mivel ismerjük az együtthatómátrix LU-felbontását – az épp az (5.5)-beli felbontás –, ezért ezt használjuk, és először megoldjuk az $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ egyenletrendszert:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Ebből $y_1 = 8$, ezt a második egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy $y_2 = 0$, majd ezeket a harmadikba helyettesítve kapjuk, hogy $y_3 = 2$. Ezután megoldjuk az $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ egyenletrendszert, aminek alakja

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ismét egyszerű visszahelyettesítésekkel kapjuk, hogy $x_3 = 1$, $x_2 = 0$ és $x_1 = 1$. A megoldás $\mathbf{x} = (0, 0, 1)$. $\square$

Mátrix invertálása LU-felbontással Mátrix invertálásához elég megoldanunk az $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ egyenletrendszert. Ha $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ egy LU-felbontása $\mathbf{A}$ -nak, akkor az $\mathbf{LUX} = \mathbf{I}$ megoldása a vele ekvivalens két mátrixegyenlet megoldásával megkapható:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{I} \iff \mathbf{LY} = \mathbf{I}, \mathbf{UX} = \mathbf{Y}.$$

E két utóbbi egyenletrendszer viszont megoldható kizárólag visszahelyettesítésekkel is!

5.42. PÉLDA (MÁTRIX INVERTÁLÁSA LU-FELBONTÁSSAL). *Invertáljuk az 5.38. példában megadott*

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrixot az LU-felbontása segítségével!

MEGOLDÁS. A $\mathbf{B}$ mátrix LU-felbontását használva először megoldjuk az $\mathbf{LY} = \mathbf{I}$ mátrixegyenletet:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Az $\mathbf{L}$ első sorával való szorzásból: $[y_{11} \ y_{12} \ y_{13}] = [1 \ 0 \ 0]$. A második sorral való szorzásból $\frac{1}{2}[y_{11} \ y_{12} \ y_{13}] + [y_{21} \ y_{22} \ y_{23}] = [0 \ 1 \ 0]$. Behelyettesítés után $[y_{21} \ y_{22} \ y_{23}] = [-\frac{1}{2} \ 1 \ 0]$. Végül a harmadik sorral való szorzásból:

$$\frac{1}{4}[y_{11} \ y_{12} \ y_{13}] + \frac{1}{2}[y_{21} \ y_{22} \ y_{23}] + [y_{31} \ y_{32} \ y_{33}] = [0 \ 0 \ 1],$$

amiből behelyettesítés után kifejezve $\mathbf{Y}$ harmadik sorát kapjuk, így $[y_{31} \ y_{32} \ y_{33}] = [0 \ -\frac{1}{2} \ 1]$. Azaz

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ezután ugyanígy, egyszerű helyettesítésekkel megoldható az $\mathbf{UX} = \mathbf{Y}$, azaz a

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixegyenlet is, melynek megoldása

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 3/4 & -1/2 & -1 \\ -1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

□

PLU-felbontás* Nincs minden $\mathbf{A}$ mátrixnak LU-felbontása, de sorcserékkel – azaz egy permutációmátrixszal való balról szorzással – olyan alakra hozható, melynek van LU-felbontása. Létezik tehát olyan $\mathbf{P}$ permutációmátrix, hogy

$$\mathbf{PA} = \mathbf{LU}, \text{ azaz } \mathbf{A} = \mathbf{P}^T \mathbf{LU}.$$

(Itt kihasználtuk, hogy permutációmátrix inverze megegyezik transzponáltjával.)

5.43. **DEFINÍCIÓ (PLU-FELBONTÁS).** Egy tetszőleges $m \times n$ -es $\mathbf{A}$ mátrixnak egy permutációs, egy egység főátlójú négyzetes alsó háromszög- és egy $m \times n$ -es felső háromszögmátrixra való bontását PLU-felbontásnak nevezzük.

Az LU-felbontás a gyakorlatban Ismét végigszámoljuk az 5.38. példabeli mátrix felbontását. Először írjunk le egy egységmátrixot, de a főátló alatti helyeket üresen hagyva, ebből lesz $\mathbf{L}$. Írjuk mellé az $\mathbf{A}$ mátrixot, és amikor elvégzünk egy $S_i - l_{ji}S_j$ sorműveletet rajta, akkor az l_{ji} értéket bejegyezzük az $\mathbf{L}$ mátrix j -edik sorának i -edik oszlopába. Az alábbi számítások bal hasábjában látjuk a fentiek szerinti lépéseket.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4.00 & 1.00 & 2.00 \\ 2.00 & 4.00 & 1.00 \\ 1.00 & 2.00 & 4.00 \end{bmatrix} \\
 \Downarrow & & \Downarrow \\
 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{1/2} & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 7/2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4.00 & 1.00 & 2.00 \\ \mathbf{0.50} & 3.50 & 0.00 \\ 1.00 & 2.00 & 4.00 \end{bmatrix} \\
 \Downarrow & & \Downarrow \\
 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{1/2} & 1 & 0 \\ \mathbf{1/4} & & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 7/2 & 0 \\ 0 & 7/4 & 7/2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4.00 & 1.00 & 2.00 \\ \mathbf{0.50} & 3.50 & 0.00 \\ \mathbf{0.25} & 1.75 & 3.50 \end{bmatrix} \\
 \Downarrow & & \Downarrow \\
 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{1/2} & 1 & 0 \\ \mathbf{1/4} & \mathbf{1/2} & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 7/2 & 0 \\ 0 & 0 & 7/2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4.00 & 1.00 & 2.00 \\ \mathbf{0.50} & 3.50 & 0.00 \\ \mathbf{0.25} & \mathbf{0.50} & 3.50 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Vegyük észre, hogy az $\mathbf{A}$ mátrixon folytatott elemi átalakítások eredménye és az $\mathbf{L}$ már kiszámolt elemei egyetlen mátrixban is „elférnek”, ugyanis $\mathbf{L}$ -ben épp akkor és oda kerül egy elem, amikor és ahova $\mathbf{A}$ -ban 0. Ezt a számítógépprogramok kihasználják, ha igen nagy méretű $\mathbf{A}$ mátrixot kell felbontani, és az $\mathbf{L}$ és $\mathbf{U}$ mátrixot is az $\mathbf{A}$ helyében konstruálják meg. A fenti számítások jobb hasábjában ezt a számítógépes technikát alkalmazzuk. Színes háttérrel jelöljük az $\mathbf{L}$ -beli elemeket.

Az LU-felbontás műveletigénye megegyezik a Gauss-kiküszöbölésével, azaz egy n -edrendű mátrixra nagyságrendileg $2n^3/3$. Egyenletrendszer megoldásánál is azonos a lépésszám, hisz a Gauss-módszernél a kiküszöbölést a jobb oldallal is meg kell csinálni, az LU-felbontásnál viszont az alsó háromszögmátrixhoz tartozó egyenletrendszert is meg kell oldani: mindkettő $n(n-1)/2$ összeadás/kivonás és ugyanennyi szorzás/osztás. Az LU-felbontásnak viszont több olyan előnyös tulajdonsága van, ami miatt használata meghatározó az egyenletrendszerek megoldásában és emellett több más feladatban is. Néhány a legfontosabbak közül:

1. Mivel az egyenletrendszer együtthatómátrixának LU-felbontásához nincs szükség az egyenletrendszer jobb oldalára, ezért használható olyan esetekben, amikor a jobb oldal még nem ismeretes, vagy több különböző jobb oldallal is dolgozni kell.
2. Az LU-felbontás ismeretében több mátrixokkal kapcsolatos számítás gyorsabban elvégezhető mint egyébként, pl. ilyen a mátrix inverzének, vagy a később tanulandó determinánsának meghatározása.
3. Korábban említettük, hogy az LU-felbontás igen memóriatakarékos, ráadásul vannak olyan speciális mátrixosztályok (pl. a szalagmátrixok, vagy a ritka mátrixok), melyekre létezik a kiküszöbölésnél gyorsabb algoritmus az LU-felbontásra.
4. A komputer algebra programok úgy működnek, hogy ha egy mátrixon valamilyen számítást kell elvégezni, ami megoldható az LU-felbontással, akkor azzal oldják meg. Így ha később egy másik számítást is el kell vele végezni, az LU-felbontás ismeretében az már sokkal gyorsabb lehet.

Feladatok

Adjuk meg az alábbi mátrixok egy LU-felbontását!

$$5.32. \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$5.33. \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 2 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$5.34. \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ 4 & -5 & -5 \\ -3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$5.35. \begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$5.36. \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$5.37. \begin{bmatrix} 2.0 & 2.0 & -2.0 \\ -0.5 & 0.0 & -1.0 \\ 1.0 & 1.5 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Az előző feladatokban megkonstruált LU-felbontásokat használva oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket, azaz oldjuk meg előbb az $\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{b}$, majd az $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ egyenletrendszereket!

$$5.38. \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$5.39. \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 2 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$5.40. \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ 4 & -5 & -5 \\ -3 & 1 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$5.41. \begin{bmatrix} 2.0 & 2.0 & -2.0 \\ -0.5 & 0.0 & -1.0 \\ 1.0 & 1.5 & 1.0 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5.6 \\ -1.0 \\ 4.6 \end{bmatrix}$$

5.42. [Végtelen sok megoldás]

$$4x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 8$$

$$2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 4$$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 4$$

Határozzuk meg az alábbi mátrixok inverzét az LU-felbontásuk ismeretében, azaz oldjuk meg az $\mathbf{L}\mathbf{Y} = \mathbf{I}$ és az $\mathbf{U}\mathbf{X} = \mathbf{Y}$ mátrixegyenleteket!

$$5.43. \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$5.44. \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 2 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

5.45. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ az $\mathbf{A}$ egy LU-felbontása, és $\mathbf{A}$ invertálható, akkor e felbontás egyértelmű!

Adjuk meg az alábbi mátrixok egy PLU-felbontását! Alkalmazzunk részleges főelemkiválasztást!

$$5.46. \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$5.47. \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$5.48. \begin{bmatrix} 0.0 & -1.0 & 1.5 \\ 0.5 & -2.0 & 2.0 \\ 0.0 & 2.0 & 2.0 \end{bmatrix}$$

5.49. Igazoljuk, hogy az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixnak nincs LU-felbontása, és annak a mátrixnak sincs, melyet az $\mathbf{A}$ első két sorának felcserélésével kapunk.

Mátrixleképezés, lineáris leképezés

Minden $\mathbf{A}$ mátrixhoz tartozik egy $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ leképezés. E leképezések épp egybeesnek a lineáris kombinációt megtartó leképezésekkel, melyeket lineáris leképezéseknek nevezünk. A lineáris leképezés nem csak a lineáris algebrának, de az egész matematikának egyik legfontosabb fogalma.

A mátrixleképezés fogalma Mátrixhoz tartozó leképezésen, vagy egyszerűen mátrixleképezésen az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ leképezést értjük, ahol $\mathbf{A}$ egy mátrix. Egy $m \times n$ -es $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrixhoz így egy $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ leképezés tartozik, ugyanis ha $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ és $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$, akkor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$.

A mátrixok jelölésére félkövér betűket használunk, a leképezésekére dőlt betűket. A továbbiakban azt a konvenciót követjük, hogy egy mátrixhoz tartozó mátrixleképezést ugyanannak a betűnek a dőlt változatával jelöljük, például az $\mathbf{A}$ mátrixhoz tartozó mátrixleképezést A jelöli, azaz

$$A : \mathbf{x} \mapsto A(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}.$$

Az $A(\mathbf{x})$ mellett az $\mathbf{Ax}$ jelölés is használatos.

Az A leképezés értékkészletét $\text{Im}(A)$ jelöli, mely az $\mathbb{R}^m$ altere (gondoljuk meg, miért?). Ezt szokás *képtérnek* is nevezni, minthogy ez az $\mathbb{R}^n$ tér képe. Ez megegyezik az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopterével, azaz $\mathcal{O}(\mathbf{A})$ -val. Azoknak a vektoroknak az alterét, melyet A a nullvektorba visz, az A leképezés *magterének* nevezzük. Magtérre a *kernel* szó is használatos. $\text{Ker}(A)$ -val jelöljük. Ez megegyezik a hozzá tartozó $\mathbf{A}$ mátrix nullterével. Tehát

$$\text{Im}(A) = \mathcal{O}(\mathbf{A}), \quad \text{Ker}(A) = \mathcal{N}(\mathbf{A}).$$

Az Im rövidítés a kép jelentésű *image*, a Ker a mag jelentésű *kernel* szóból származik.

5.44. PÉLDA (VEKTORI SZORZÁSSAL DEFINIÁLT MÁTRIXLEKÉPEZÉS). Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ egy adott $\mathbb{R}^3$ -beli vektor. Legyen A az a transzformáció, mely a tér tetszőleges $\mathbf{x}$ vektorához az $\mathbf{a} \times \mathbf{x}$ vektort rendeli. Tehát

$$A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} \times \mathbf{x}.$$

Mutassuk meg, hogy az A függvény egy mátrixleképezés, azaz létezik egy olyan $\mathbf{A}$ mátrix, hogy $A(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$.

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{a} \times \mathbf{x}$ vektori szorzat koordinátás alakban:

$$\mathbf{y} = \mathbf{a} \times \mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2x_3 - a_3x_2 \\ a_3x_1 - a_1x_3 \\ a_1x_2 - a_2x_1 \end{bmatrix}.$$

Az eredményből azonnal látszik, hogy e transzformáció mátrixleképezés, hisz $\mathbf{y}$ minden koordinátája $\mathbf{x}$ koordinátáinak lineáris kifejezése. A

szorzatot $\mathbf{x}$ koordinátái szerint rendezzük, ahonnan azonnal leolvasható a transzformáció mátrixa, amit a továbbiakban $[\mathbf{a}]_{\times}$ jelöl. Segítségével fölírható a transzformáció mátrixszorzatos alakja:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -a_3x_2 + a_2x_3 \\ a_3x_1 - a_1x_3 \\ -a_2x_1 + a_1x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Tehát

$$[\mathbf{a}]_{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

E feladat eredménye különösen fontos a 3-dimenziós tér transzformációinak vizsgálatánál, így pl. az anyagtranszformációk fizikai/mérnöki vizsgálatában. $\square$

Műveletek mátrixleképezések között A következőkben megvizsgáljuk, hogy mi a kapcsolat a mátrixműveletek, és a mátrixokhoz tartozó mátrixleképezések közti műveletek között.

5.45. TÉTEL (MÁTRIXLEKÉPEZÉSEK ALAPMŰVELETEI). Legyen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ három $m \times n$ -es mátrix, legyen A , B és C a hozzájuk tartozó három mátrixleképezés és legyen c egy skálár. Ekkor

- a) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$ pontosan akkor igaz, ha $A + B = C$, és
- b) $c\mathbf{A} = \mathbf{C}$ pontosan akkor igaz, ha $cA = C$.

Ha $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ és $\mathbf{Z}$ típusa rendre $m \times k$, $k \times n$, illetve $m \times n$, és X , Y és Z a hozzájuk tartozó három mátrixleképezés, akkor

- c) $\mathbf{XY} = \mathbf{Z}$ pontosan akkor igaz, ha $X \circ Y = Z$, azaz mátrixok szorzásának a függvények kompozíciója felel meg.

Az $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvénynek a $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény inverze, ha minden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ helyen $(f(g(\mathbf{x}))) = \mathbf{x}$ és $(g(f(\mathbf{x}))) = \mathbf{x}$, azaz ha kompozícióik az $f \circ g$ és a $g \circ f$ függvények megegyeznek az identikus leképezéssel.

5.46. TÉTEL (INVERZ MÁTRIXLEKÉPEZÉSEK). Legyenek A és B az $n \times n$ -es $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixokhoz tartozó mátrixleképezések. Ekkor az $\mathbf{A}$ mátrix inverze pontosan akkor a $\mathbf{B}$ mátrix, ha az A leképezés inverze a B leképezés.

A fenti két tétel bizonyítását az Olvasóra hagyjuk!

A mátrix, és a hozzá tartozó leképezés

Mátrixleképezések tulajdonságai A mátrixleképezések megőrzik a lineáris kombinációt, a nullvektort nullvektorba, alteret altérbe visznek.

5.47. TÉTEL (MÁTRIXLEKÉPEZÉSEK ALAPTULAJDONSÁGAI). Legyen $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ egy tetszőleges mátrixleképezés, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $c, d \in \mathbb{R}$.

- a) $A(c\mathbf{x} + d\mathbf{y}) = cA(\mathbf{x}) + dA(\mathbf{y})$, azaz A megőrzi a lineáris kombinációt.
b) Az A homogén és additív leképezés, azaz

$$\begin{aligned} A(c\mathbf{x}) &= cA(\mathbf{x}), & (a \text{ leképezés homogén}), \text{ és} \\ A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y}), & (a \text{ leképezés additív}). \end{aligned}$$

- c) $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
d) Tetszőleges altér képe altér.
e) Tetszőleges eltolt altér képe eltolt altér.

BIZONYÍTÁS. a) Bármely $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ vektorra és $c, d \in \mathbb{R}$ valósra

$$A(c\mathbf{x} + d\mathbf{y}) = \mathbf{A}(c\mathbf{x} + d\mathbf{y}) = c\mathbf{A}\mathbf{x} + d\mathbf{A}\mathbf{y} = cA(\mathbf{x}) + dA(\mathbf{y}).$$

b) Az előző egyenlőség $d = 0$ esetén a homogenitást, $c = d = 1$ esetén az additivitást bizonyítja. c) igaz, mert bármely $\mathbf{x}$ vektorra $A\mathbf{0} = A(0\mathbf{x}) = 0A(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. d) abból következik, hogy ha $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$ egy $\mathcal{U}$ altér bázisa, akkor ezek összes lineáris kombinációjának, vagyis az altér vektorainak képe

$$A(c_1\mathbf{b}_1 + \dots + c_k\mathbf{b}_k) = c_1A(\mathbf{b}_1) + \dots + c_kA(\mathbf{b}_k).$$

Világos, hogy e vektorok kiadják az $A\mathbf{b}_1, \dots, A\mathbf{b}_k$ vektorok által kifesztett altér minden vektorát, tehát $A(\mathcal{U})$ altér. Hasonlóan e)-ben, ha $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ egy tetszőleges vektor és $\mathcal{U}$ a fenti altér, akkor

$$\begin{aligned} A(\mathbf{u} + \mathcal{U}) &= A(\mathbf{u} + c_1\mathbf{b}_1 + \dots + c_k\mathbf{b}_k) \\ &= A(\mathbf{u}) + c_1A(\mathbf{b}_1) + \dots + c_kA(\mathbf{b}_k) \\ &= A(\mathbf{u}) + A(\mathcal{U}) \end{aligned}$$

ami egy altér eltoltja. □

Lineáris leképezés A mátrixleképezések alaptulajdonságai a lineáris leképezés fogalmához vezetnek.

5.48. DEFINÍCIÓ (LINEÁRIS LEKÉPEZÉS). Legyen H_1 és H_2 mindegyike olyan halmaz, melynek elemein értelmezve van egy összeadás és egy „ $\mathbb{R}$ -beli skalárral való szorzás” művelet. Azt mondjuk, hogy egy $A : H_1 \rightarrow H_2$ leképezés lineáris, ha bármely $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H_1$ elemekre és c és d valósokra

$$A(c\mathbf{x} + d\mathbf{y}) = cA(\mathbf{x}) + dA(\mathbf{y}).$$

$H_1 = H_2$ esetén a lineáris leképezéseket lineáris transzformációknak is nevezzük.

A definícióból következik, hogy ha A lineáris, akkor bármely $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in H_1$ elemre és $c_1, c_2, \dots, c_n$ skalárra igaz, hogy

$$A(c_1\mathbf{x}_1 + \dots + c_n\mathbf{x}_n) = c_1A\mathbf{x}_1 + \dots + c_nA\mathbf{x}_n.$$

5.49. TÉTEL (AZ $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ LINEÁRIS LEKÉPEZÉSEK). Legyen $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ egy tetszőleges függvény. A következő három állítás ekvivalens.

- Az A leképezés lineáris.
- Létezik egy olyan $m \times n$ -es $\mathbf{A}$ mátrix, hogy az A függvény megegyezik az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ leképezéssel, azaz A az $\mathbf{A}$ mátrixhoz tartozó mátrixleképezés.
- Az A függvény homogén és additív, azaz tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vektorra és $c \in \mathbb{R}$ skalárra
 - $A(c\mathbf{x}) = cA(\mathbf{x})$ (A homogén),
 - $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y})$ (A additív).

BIZONYÍTÁS. $a) \Rightarrow b)$: Tekintsük $\mathbb{R}^n$ standard bázisát és az $A\mathbf{e}_i$ vektorokból képzett

$$\mathbf{A} = [A\mathbf{e}_1 | A\mathbf{e}_2 | \dots | A\mathbf{e}_n] \quad (5.8)$$

mátrixot, valamint legyen az $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ egy tetszőleges vektor. Ha A olyan leképezés, mely megőrzi a lineáris kombinációkat, akkor

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= A(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n) \\ &= x_1A\mathbf{e}_1 + x_2A\mathbf{e}_2 + \dots + x_nA\mathbf{e}_n \\ &= \begin{bmatrix} A\mathbf{e}_1 & A\mathbf{e}_2 & \dots & A\mathbf{e}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{Ax} \end{aligned}$$

Tehát valóban létezik olyan $\mathbf{A}$ mátrix, hogy $A\mathbf{x} = \mathbf{Ax}$. Ráadásul ilyen mátrix csak ez az egy van, mert bármely $\mathbf{e}_i$ bázisvektorra és bármely $\mathbf{A}$ mátrixra $A\mathbf{e}_i = \mathbf{A}_{*i}$, tehát az $\mathbf{A}_{*i}$ oszlopvektor csak $A\mathbf{e}_i$ lehet.

$b) \Rightarrow c)$: Ha van olyan $\mathbf{A}$ mátrix, hogy minden $\mathbf{x}$ vektorra $A\mathbf{x} = \mathbf{Ax}$, akkor

$$A(c\mathbf{x}) = \mathbf{A}(c\mathbf{x}) = c\mathbf{Ax} = cA\mathbf{x}, \text{ és}$$

$$A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{Ay} = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}.$$

$c) \Rightarrow a)$: Ha A homogén és additív, akkor lineáris, ugyanis

$$A(c\mathbf{x} + d\mathbf{y}) = A(c\mathbf{x}) + A(d\mathbf{y}) = cA\mathbf{x} + dA\mathbf{y},$$

ahol az első egyenlőségénél az A additivitását, a másodikonál a homogenitását használtuk. $\square$

► A tétel bizonyításában az (5.8) képlettel azt is megkaptuk, hogy hogyan írható föl egy lineáris leképezés mátrixa!

5.50. PÉLDA. Mutassuk meg, hogy az

$$A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3; (x, y) \mapsto (x - y, 2x + y, -x + 1) \text{ és}$$

$$L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3; (x, y) \mapsto (x - y, 2x + y, -x)$$

leképezések közül az A nem lineáris leképezés, de az L igen. Utóbbinak írjuk föl a mátrixát!

MEGOLDÁS. Az A leképezés nem lineáris, mert az 5.47. tétel következtében $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$ kellene, de $A : (0, 0) \mapsto (0, 0, 1)$.

Alakítsuk át a függvényértékül kapott vektort:

$$L \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y \\ 2x + y \\ -x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

ami igazolja, hogy L mátrixleképezés, és mátrixa

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A mátrixleképezések pedig lineáris leképezések, tehát L is. □

Példák lineáris leképezésekre A lineáris leképezések igen fontosak a matematika más területein is.

5.51. PÉLDA (A DERIVÁLÁS ÉS AZ INTEGRÁLÁS LINEÁRIS LEKÉPEZÉS).

Legyen H_1 az egyváltozós valós, és minden valós helyen differenciálható függvények halmaza, H_2 pedig az egyváltozós valós függvények halmaza. Világos, hogy H_1 és H_2 is olyan halmaz, melynek elemei közt értelmezve van az összeadás és a skalárral való szorzás művelete. A deriválás, azaz a $D : H_1 \rightarrow H_2 : f \mapsto D(f) = f'$ leképezés lineáris. Fogalmazzunk meg hasonló állítást az integrálra is.

MEGOLDÁS. Tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ skalárra és $f, g \in H_1$ függvényre

$$D(cf) = (cf)' = cf' = cD(f), \text{ és}$$

$$D(f + g) = (f + g)' = f' + g' = D(f) + D(g).$$

Hasonló összefüggések állnak fenn az integrálokra is, például legyen H_1 a $[0, 1]$ intervallumon Riemann-integrálható függvények halmaza, és legyen $H_2 = \mathbb{R}$. Ekkor az $f \mapsto \int_0^1 f$ leképezés lineáris, ugyanis tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ skalárra és tetszőleges $f, g \in H_1$ függvényre

$$\int_0^1 cf = c \int_0^1 f, \text{ és } \int_0^1 (f + g) = \int_0^1 f + \int_0^1 g. \quad \square$$

5.52. ÁLLÍTÁS (SÍKBELI FORGATÁS, TÜKRÖZÉS, VETÍTÉS). A síkbeli vektorok egy rögzített O pont körüli forgatása, egy egyenesre való tükrözése és merőleges vetítése lineáris leképezés.

BIZONYÍTÁS. A precíz bizonyításokat mellőzzük, csak a tényt szemléltetjük. A síkbeli vektorok pont körüli forgatása lineáris leképezés, ugyanis könnyen látható, hogy egy vektor c -szeresének ($c \in \mathbb{R}$) elforgatottja megegyezik a vektor elforgatottjának c -szeresével, valamint hogy két vektor összegének elforgatottja megegyezik a vektorok elforgatottjainak összegével (ld. 5.4. ábra).

Hasonlóan egyszerűen látszik, hogy egy egyenesre való tükrözés egy vektor c -szeresét a vektor tükörképének c -szeresébe viszi, és két vektor összegét a két vektor tükörképének összegébe (ld. 5.5 ábra).

Végül ugyanígy megmutatható, hogy egy egyenesre való merőleges vetítés egy vektor c -szeresét vetületének c -szeresébe viszi, és két vektor összegét a két vektor vetületének összegébe (ld. 5.6 ábra). $\square$

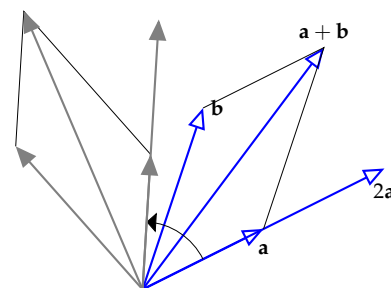
► A lineáris leképezés és a mátrixleképezés közti különbség tisztázása fontos. Mint azt az 5.51. példa mutatja, lineáris leképezésekről olyan esetben is beszélhetünk, amikor a leképezésnek nincs mátrixa, azaz a lineáris leképezés általánosabb fogalom.

► Különböség van a lineáris leképezés és a mátrixleképezés közt $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ függvények esetén is. Minden mátrixleképezés lineáris leképezés, és minden lineáris leképezéshez tartozik egyetlen mátrixleképezés a standard bázisban. A különbség lényege az, hogy a lineáris leképezés független a bázistól, az csak maga a függvény, míg a mátrixleképezés mindig valamely bázisra vonatkozik. Egy lineáris leképezéshez minden bázisban tartozik egy mátrixleképezés, de ezt a leképezést megadó mátrix függ a bázistól.

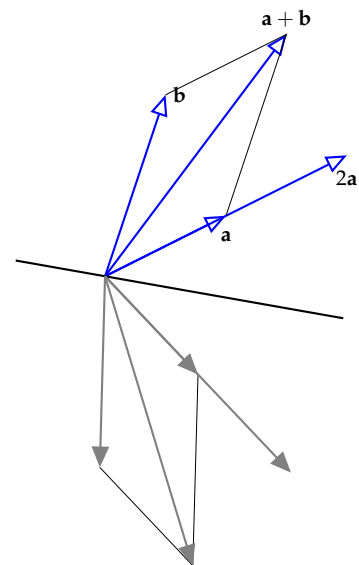
► Érdekes jellemezni a lineáris $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ transzformációkat. Ehhez először lássuk tisztán, hogy $\mathbb{R}$ elemei az 1-dimenziós vektorok, azaz a számok. E térben az $e = 1$ vektor (szám) a bázis. Az előző tétel szerint egy lineáris $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ transzformáció mátrixa $[Le] = [L(1)]$, ami megingt csak egyetlen szám, jelölje ezt $c := L(1)$. Így $L(x) = L(1x) = cx$, azaz a lineáris $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ transzformációk azonosak az $x \mapsto cx$ függvényekkel, ahol c egy tetszőleges konstans. E leképezések grafikonja egy origón átmenő egyenes.

► Az $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lineáris leképezések tehát nem azonosak a lineáris $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényekkel, melyek általános alakja $f(x) = cx + b$, ahol $c, b \in \mathbb{R}$. Egy ilyen függvény pontosan akkor lesz lineáris leképezés, ha $b = 0$.

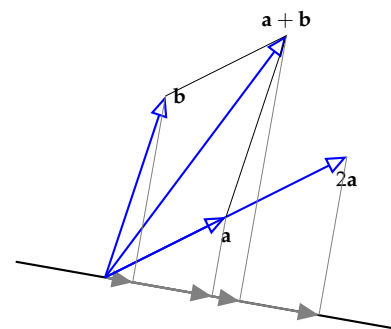
A mátrixleképezés hatásának szemléltetései Egy mátrixszal való szorzás hatásának megértését még egy adott konkrét (pl. gazdasági, fizikai, ...) alkalmazásban is segítheti, ha absztraktabb, vagy vizuálisan is megjelölhető képünk is van e hatásról.



5.4. ábra: A pont körüli elforgatás lineáris leképezés



5.5. ábra: Az egyenesre való tükrözés lineáris leképezés



5.6. ábra: Az egyenesre való merőleges vetítés lineáris leképezés

Egy 2×2 -es mátrixszal való szorzás hatása lehet például az, hogy a sík minden vektorát elforgatja β szöggel. Ez szemléltethető szabad vektorokkal, helyvektorokkal, és pontokkal is. Ha szabad vektorokként ábrázoljuk a vektorokat, akkor – mivel az azokat ábrázoló irányított szakaszok szabadon eltolhatók – a forgatás középpontja is szabadon megválasztható az ábrázolásban. Ha helyvektorokkal ábrázoljuk a vektorokat, akkor a forgatás origó körüli – csak e pont körüli forgatás visz helyvektort helyvektorba. Ugyanez a helyzet, ha a vektorokat pontokkal, a helyvektorok végpontjaival ábrázoljuk. Az 5.7 ábra e három ábrázolást mutatja. Ezzel a módszerrel általában csak egy-egy vektor képe ábrázolható, az egész leképezés ritkán.

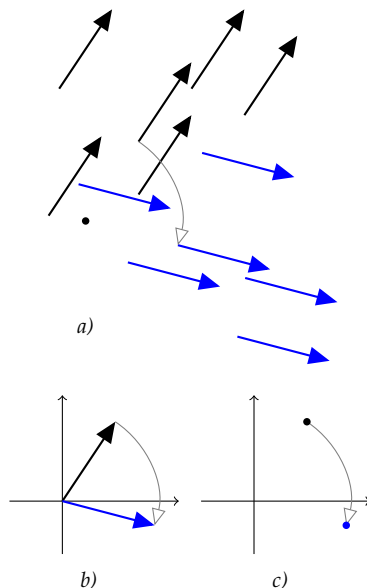
$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ leképezések esetén a legegyszerűbb szemléltetéshez elég csak az egységnégyzet képét megrajzolni, amint azt az 5.8 ábra mutatja. A kép mindig egy paralelogramma (esetleg elfajuló), melynek körüljárását is jelölni kell valahogy. Ezt az ábrán az oldalak különböző színezése megteszi. (A paralelogramma területének és körüljárásának kiszámítása a következő fejezet témája lesz.) Segíti az ábrázolást, ha nem csak az egységnégyzet mellett az egységnégyzetrács egy részének képe is meg van rajzolva. Ez egy paralelogrammarács. Ennek segítségével egy tetszőleges vektor képének megszerkesztése egyszerű, hisz a lineáris leképezés megtartja a lineáris kombinációt (ld. 5.8 ábra).

5.53. PÉLDA (MÁTRIXLEKÉPEZÉS ÁBRÁZOLÁSA AZ EGYSÉGNÉGYZETRÁCS KÉPÉVEL). Ábrázoljuk az egységnégyzet és az egységnégyzetrács képét az alábbi mátrixok esetében:

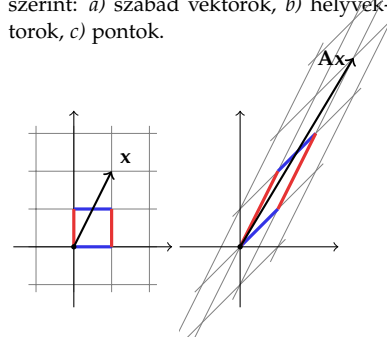
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5/4 & 3/4 \\ 3/4 & 5/4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3/4 & 5/4 \\ 5/4 & 3/4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -5/4 & 3/4 \\ -3/4 & 5/4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -3/4 & 5/4 \\ -5/4 & 3/4 \end{bmatrix}.$$

A rács képét használva ábrázoljuk az $(1, 2)$ vektor képét mind a négy esetben.

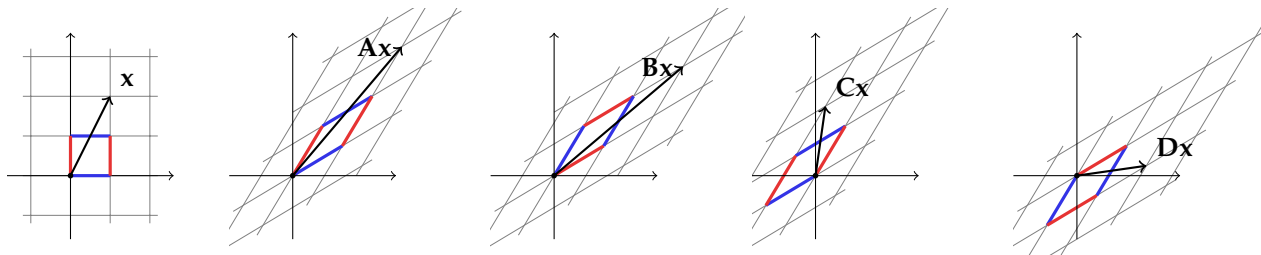
MEGOLDÁS. Világos, hogy itt négy különböző mátrixról, így négy különböző mátrixleképezésről van szó, a rácsok mégis azonosak, hisz mindegyiket az $(\frac{5}{4}, \frac{3}{4})$ és a $(\frac{3}{4}, \frac{5}{4})$ vektor (vagy -1 -szerese) feszíti ki. A különbség abban van, hogy az egységnégyzet képe és annak körüljárása nem azonos. Az alábbi ábráról leolvashatók a különbségek.



5.7. ábra: Vektorok elforgatásának szemléltetései a vektor különböző ábrázolásai szerint: a) szabad vektorok, b) helyvektorok, c) pontok.

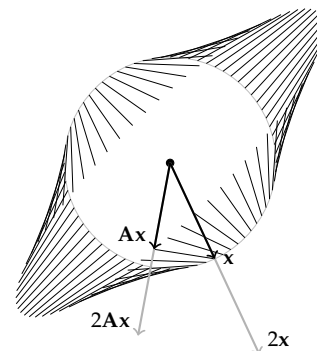


5.8. ábra: Az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix hatása az egységnégyzetrácson, és az $\mathbf{x} = (1, 2)$ vektoron. Az $\mathbf{Ax}$ vektor végpontja a paralelogrammarácson 1 lépés az x -tengely képének irányába, és 2 lépés az y -tengely képének irányába.



5.9. ábra: Az egységnégyzet és az egységnégyzetrács képe a megadott négy mátrix által, és az $(1, 2)$ vektor képe.

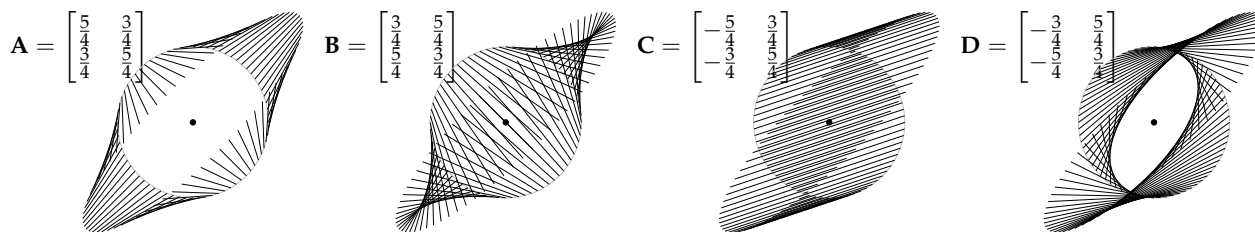
Egy másik ábrázolási lehetőség még fontosabb lehet ennél. Mivel a mátrixleképezés homogén, azaz egy vektor c -szereséhez a vektor képének c -szeresét rendeli, ezért elég minden irányból egyetlen vektor, például az egységvektor képének megszerkesztése. Hogy a kép áttekinthető legyen, helyvektorok helyett csak az őket reprezentáló pontokat tekintjük, és az egységkör összes pontja helyett csak néhányat (pl. 50–100-at). Mivel a kör lineáris leképezés általi képe mindig egy ellipszis (esetleg elfajuló), ezért a leképezés szemléltetéséhez elég összekötni az egységkört kiválasztott pontot a képével ahhoz, hogy nagyjából a sík bármelyik vektorának „lássuk”, hogy mi a képe. Az így kialakuló ábra sokat elmond a leképezésről. Ezt mutatja az 5.10 ábra, ahol a -65° -os irányhoz tartozó x egységvektort és Ax képét külön berajzoltuk, és azt is megmutattuk, hogy pl. hogyan kapható meg $2x$ képe.



5.10. ábra: Az $A = \begin{bmatrix} 5/4 & 3/4 \\ 3/4 & 5/4 \end{bmatrix}$ mátrix hatását szemlélteti oly módon, hogy az egységkör néhány pontját összeköti a képükkel. Az ábrán egy egységnyi x vektort és Ax képét, valamint a $2x$ vektort és képét a $A(2x) = 2Ax$ vektort kiemeltük.

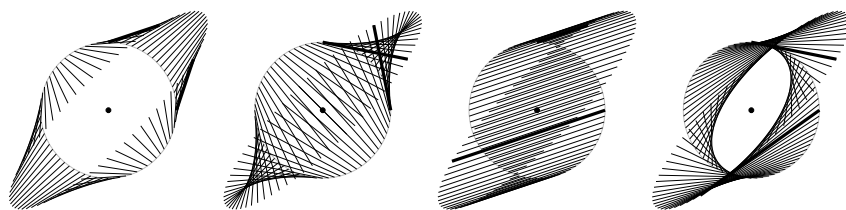
5.54. PÉLDA (MÁTRIXLEKÉPEZÉS ÁBRÁZOLÁSA AZ EGYSÉGGÖR KÉPÉVEL).

Az alábbi 5.11 ábra az előző példabeli mátrixleképezések egységkör-ábráját mutatja. Olvassuk le az ábráról az $(1,0)$ és a $(0,1)$ vektorok képét!



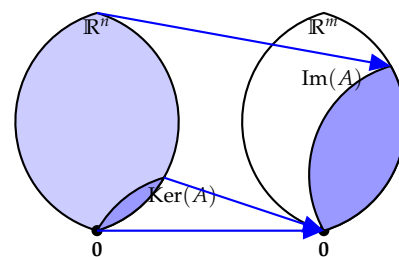
5.11. ábra: Négy leképezés egységkör-ábrája.

MEGOLDÁS. A megoldás leolvasható az 5.12 ábráról. Az ábra első sorában látható képeken az $(1,0)$ és $(0,1)$ vektorok végpontjából induló és a leképezés általi képükbe vezető vonalak kiemelésével jeleztük a kérdésre adandó választ. □



Nehezebb a helyzet, ha egy általános $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ leképezést szeretnénk szemléltetni. Ehhez a levéldiagramot hívjuk segítségül. Itt elsőként a képteret és a magteret tudjuk szemléltetni, amint azt az 5.13. ábra mutatja.

5.12. ábra: Négy leképezés egységkör-ábrája a bázisvektorokat és képüket összekötő vonalak kiemelésével.



5.13. ábra: Egy $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x \mapsto Ax$ mátrixleképezés levéldiagramja. Az ábrán három alter színezéssel ki van emelve – az értelmezési tartomány ($\mathbb{R}^n$), az értékkészlet ($\text{Im}(A) = \mathcal{O}(A)$) és a

Lineáris leképezés mátrixa különböző bázisokban Tegyük fel, hogy az L lineáris leképezés mátrixa az $\mathcal{A}$ bázisban $L_{\mathcal{A}}$, a $\mathcal{B}$ bázisban $L_{\mathcal{B}}$, és az $\mathcal{A}$ bázisról a $\mathcal{B}$ -re való áttérés mátrixa $C_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}}$. Kérdés, hogy mi a kapcsolat e három mátrix között.

A válasz egyszerűen megadható, ha megvizsgáljuk egy tetszőleges x vektornak és Lx képének koordinátás alakját. Ezeket jelölje $[x]_{\mathcal{A}}$, $[x]_{\mathcal{B}}$, $[Lx]_{\mathcal{A}}$, $[Lx]_{\mathcal{B}}$. Az áttérés mátrixa köztük a következő kapcsolatokat létesíti:

$$[x]_{\mathcal{B}} = C_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}}[x]_{\mathcal{A}}, \quad [Lx]_{\mathcal{B}} = C_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}}[Lx]_{\mathcal{A}},$$

az $L_{\mathcal{A}}$ és $L_{\mathcal{B}}$ mátrixok pedig a következőket:

$$L_{\mathcal{A}}[x]_{\mathcal{A}} = [Lx]_{\mathcal{A}}, \quad L_{\mathcal{B}}[x]_{\mathcal{B}} = [Lx]_{\mathcal{B}}.$$

Ezeket összevetve kapjuk, hogy

$$L_{\mathcal{B}}[x]_{\mathcal{B}} = [Lx]_{\mathcal{B}} = C_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}}[Lx]_{\mathcal{A}} = C_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}}L_{\mathcal{A}}[x]_{\mathcal{A}},$$

azaz

$$L_{\mathcal{B}}C_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}}[x]_{\mathcal{A}} = C_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}}L_{\mathcal{A}}[x]_{\mathcal{A}}$$

vagyis csak mátrixokra fölírva:

$$L_{\mathcal{B}}C_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}} = C_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}}L_{\mathcal{A}} \text{ vagy átrendezve } L_{\mathcal{A}} = C_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}}^{-1}L_{\mathcal{B}}C_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}}.$$

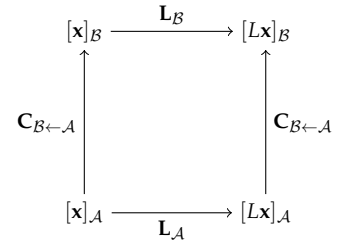
A bizonyítás – és általában e mátrixok közti összefüggés – egy diagrammon is szemléltethető. A diagramm csúcaiban az x és az Lx vektorok szerepelnek. A függőleges nyilak az $\mathcal{A}$ bázisról a $\mathcal{B}$ -re való áttérés irányát mutatják. Ebbe az irányba lépve az eredmény a $C_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}}$ mátrixszal való szorzással kapható meg. A vízszintes nyilak az L leképezés hatását mutatják. Ezirányba lépve az $L_{\mathcal{A}}$, illetve $L_{\mathcal{B}}$ mátrixszal való szorzás adja meg az eredményt. A bal alsó sarokban lévő $[x]_{\mathcal{A}}$ vektorból a jobb felsőben lévő $[Lx]_{\mathcal{B}}$ vektorba kétféleképp juthatunk: vagy először hat az L leképezés, aztán áttérünk a $\mathcal{B}$ bázisra, vagy előbb áttérünk a $\mathcal{B}$ bázisra, és azután hat L . Tehát

$$\begin{aligned} [x]_{\mathcal{A}} &\longrightarrow L_{\mathcal{A}}[x]_{\mathcal{A}} \longrightarrow C_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}}L_{\mathcal{A}}[x]_{\mathcal{A}}, \\ [x]_{\mathcal{A}} &\longrightarrow C_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}}[x]_{\mathcal{A}} \longrightarrow L_{\mathcal{B}}C_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}}[x]_{\mathcal{A}}. \end{aligned}$$

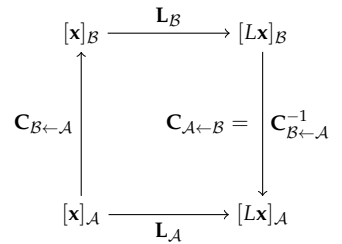
A két végeredménynek meg kell egyeznie. Így ugyanazt kaptuk, amit behelyettesítésekkel. Összefoglalva tehát bizonyítottuk az alábbi tételt:

5.55. TÉTEL (LINEÁRIS LEKÉPEZÉS MÁTRIXAI KÖZTI KAPCSOLAT). Legyen az L lineáris leképezés mátrixa az $\mathcal{A}$ bázisban $L_{\mathcal{A}}$, a $\mathcal{B}$ bázisban $L_{\mathcal{B}}$, és az $\mathcal{A}$ bázisról a $\mathcal{B}$ -re való áttérés mátrixa $C_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}}$. Ekkor

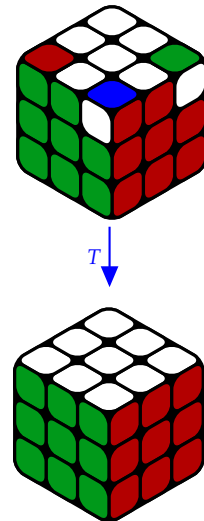
$$L_{\mathcal{A}} = C_{\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{B}}L_{\mathcal{B}}C_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}}. \text{ azaz } L_{\mathcal{A}} = C_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}}^{-1}L_{\mathcal{B}}C_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}}.$$



5.14. ábra: A vízszintes nyilak az L leképezés hatását mutatják. E hatás elérhető az $L_{\mathcal{A}}$, illetve az $L_{\mathcal{B}}$ mátrixszal való szorzással. A függőleges nyilak a báziscsere irányát mutatják. A $C_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}}$ mátrixszal való szorzással megvalósítható. Az ábráról leolvasható a $L_{\mathcal{B}}C_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}} = C_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}}L_{\mathcal{A}}$ összefüggés.



5.15. ábra: Ezt az ábrát az előzőből egyetlen nyíl és felírata megváltoztatásával kaptuk. Erről közvetlenül leolvasható az $L_{\mathcal{A}} = C_{\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{B}}L_{\mathcal{B}}C_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}}$, illetve az $L_{\mathcal{A}} = C_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}}^{-1}L_{\mathcal{B}}C_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}}$ összefüggés. Ehhez az $[x]_{\mathcal{A}}$ -ból az $[Lx]_{\mathcal{A}}$ -ba vezető két utat kell bejárunk, és közben a megfelelő mátrixokat összeszorozunk.



5.16. ábra: A T transzformáció a bűvös kocka egy lapon lévő 3 csúcsát ciklikusan fölcseréli egymással (a jobb felsőt sarokban lévő a bal sarokba, azt a középsőbe viszi), az összes többi helyben hagyja. Mit tegyünk ha 3 nem egy lapon lévő csúcsot kell ciklikusan fölcserélni?

5.56. PÉLDA (LINEÁRIS LEKÉPEZÉS MÁTRIXA MÁSIK BÁZISBAN). Az L lineáris leképezés mátrixa $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$. Írjuk fel mátrixát az $\mathcal{B} = \{(-2, -1), (3, 2)\}$ bázisban!

MEGOLDÁS. A megadott $\mathcal{B}$ bázisról a standard $\mathcal{E}$ bázisra való áttérés mátrixa a bázisvektorokból, mint oszlopvektorokból áll, azaz

$$\mathbf{C}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ekkor az $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\mathcal{E}}$ jelölést használva

$$\mathbf{L}_{\mathcal{B}} = \mathbf{C}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}^{-1} \mathbf{L}_{\mathcal{E}} \mathbf{C}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}. \quad \square$$

Hasonlóság Tudjuk, hogy ha egy L lineáris transzformációnak egy $\mathcal{A}$ bázisban $\mathbf{A}$ a mátrixa, egy $\mathcal{B}$ bázisban $\mathbf{B}$, akkor a két mátrix kapcsolata

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}} \mathbf{A} \mathbf{C}_{\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{B}},$$

ahol $\mathbf{C}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}} = \mathbf{C}_{\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{B}}^{-1}$ az áttérés mátrixa. E tény motiválja a következő definíciót:

5.57. DEFINÍCIÓ (HASONLÓSÁG). Azt mondjuk, hogy az $n \times n$ -es $\mathbf{A}$ mátrix hasonló a $\mathbf{B}$ mátrixhoz, ha létezik olyan invertálható $\mathbf{C}$ mátrix, hogy

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{C}. \quad (5.9)$$

Jelölés: $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

► Ha $\mathbf{A}$ hasonló $\mathbf{B}$ -hez, akkor $\mathbf{B}$ is hasonló $\mathbf{A}$ -hoz. Legyen ugyanis $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}^{-1}$. Akkor

$$\mathbf{A} = \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{C}^{-1} = (\mathbf{C}^{-1})^{-1} \mathbf{B} \mathbf{C}^{-1} = \hat{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{B} \hat{\mathbf{C}}.$$

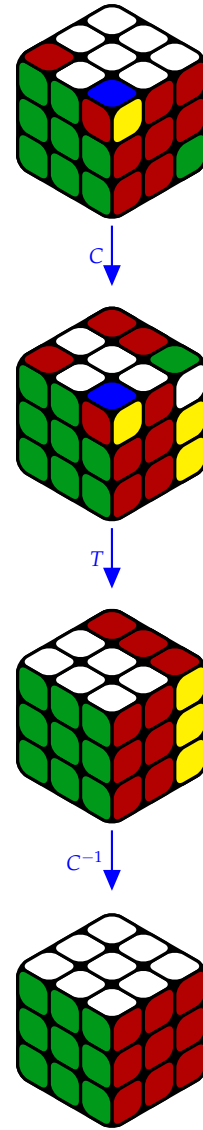
Így tehát mondható az, hogy $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ hasonlóak, mivel a hasonlóság szimmetrikus reláció.

► Például $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}$, ugyanis

$$\begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad \left(\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \right).$$

► A $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{C}$ összefüggés ekvivalens az $\mathbf{C} \mathbf{B} = \mathbf{A} \mathbf{C}$ összefüggéssel, amit még egyszerűbb lehet ellenőrizni. Példánk esetében

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \quad \left(= \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right).$$



5.17. ábra: A felső kockán látható három csúcskockát kell kicserélni. Először a három csúcsot egy síkba mozgatjuk ($\mathbf{C}$ transzformáció), majd az előző ábrán látható $\mathbf{T}$ transzformációval kicseréljük őket, végül $\mathbf{C}$ inverzének alkalmazása után minden kocka a helyére kerül. Így a transzformációk egymás utáni elvégzését szorzásnak tekintve a megoldást a $\mathbf{C} \mathbf{T} \mathbf{C}^{-1}$ transzformáció adja.

► A $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ alakú kifejezést az $\mathbf{A}$ mátrix $\mathbf{C}$ -vel való *konjugáltjának* nevezik. A konjugált más algebrai struktúrákban is fontos szerepet kap. Példaként véges halmazok permutációinak struktúráját említjük. Ekkor a permutációk közti művelet a permutációk egymás után való elvégzése, aminek eredményeként megintcsak a halmaz egy permutációját kapjuk. Konkrétan a Rubik kockán mutatjuk meg a konjugált szerepét az 5.16 és az 5.17 ábrák segítségével.

5.58. TÉTEL (HASONLÓ MÁTRIXOK HATÁSA). *Két mátrix pontosan akkor hasonló, ha van két olyan bázis, melyekben e két mátrix ugyanannak a lineáris leképezésnek a mátrixa.*

BIZONYÍTÁS. Ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ hasonlóak, azaz $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$, akkor $\mathbf{C}$ -t, mint a $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n\}$ bázisról az $\mathcal{E}$ standard bázisra való áttérés mátrixát tekintve azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{C}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{C}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{C}}.$$

Eszerint ha L az $\mathbf{A}$ mátrixhoz tartozó mátrixleképezés, azaz $\mathbf{A}$ az L mátrixa a standard bázisban, akkor $\mathbf{B}$ az L mátrixa a $\mathcal{C}$ bázisban. A fordított állítást a bevezetőben igazoltuk. $\square$

5.59. TÉTEL (HASONLÓSÁGRA INVARIÁNS TULAJDONSÁGOK). *Ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ hasonló mátrixok, azaz $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, akkor*

- $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B})$,
- $\dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) = \dim(\mathcal{N}(\mathbf{B}))$,

BIZONYÍTÁS. A bizonyítás során föltesszük, hogy valamely invertálható $\mathbf{C}$ mátrixszal $\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}$.

- Mivel mátrix rangja megegyezik az oszloptér dimenziójával, az oszloptér pedig megegyezik a mátrixleképezés képterével, ami a két mátrixra azonos, ezért a rangok is megegyeznek.
- Hasonlóan bizonyítható az is, hogy a két mátrix nullterének dimenziója megegyezik, hisz a nulltér megegyezik a lineáris leképezés magterével, ami pedig közös. $\square$

► Egy fontos következménye e tételnek, hogy a rang fogalma természetes módon átvihető lineáris leképezésekre, legalábbis $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ leképezések esetén. A lineáris $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ leképezés *rangján* képterének dimenzióját értjük, azaz $r(L) = \dim(\text{Im}(L))$.

► A következő fejezetekben további invariáns mennyiségekkel fogunk találkozni. Ilyen lesz a mátrix determinánsa, nyoma és karakterisztikus polinomja.

A latin eredetű *invariáns* szó jelentése: *átalakulás közben változatlanul maradó*. Matematikában valamilyen művelet, átalakítás, leképezés során változatlanul maradó kifejezés, mennyiség, érték. Esetünkben a bázis megváltoztatása után is változatlanul maradó mennyiségeket jelent.

Feladatok

Mátrixleképezések

Döntsük el, hogy az alábbi leképezések mátrixleképezések-e! Amelyik igen, annak írjuk fel a mátrixát! Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ egy tetszőleges vektor.

5.50. $A : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} \cdot \mathbf{x},$

5.51. $A : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} + \mathbf{x},$

5.52. $A : \mathbf{x} \mapsto \frac{1}{2}(\mathbf{a} \times \mathbf{x}),$

5.53. $A : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}).$

5.54. [Mátrixleképezések közti műveletek] Bizonyítsuk be az 5.45. tétel állításait!

5.55. [Inverz mátrixleképezések] Bizonyítsuk be az 5.46. tételt!

Lineáris leképezések

Döntsük el, hogy az alábbi leképezések lineáris leképezések-e!

5.56. $A : (x, y) \mapsto (x + 2y, x - y).$

5.57. Legyen $\mathcal{P}_3$ a legfőbb 3-adfokú polinomok halmaza, és legyen $D : \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_3 : p(x) \mapsto p'(x).$

5.58. Legyen $\mathcal{D}_{[0,1]}$ a $[0, 1]$ intervallumon differenciálható függvények halmaza, és $\mathcal{F}_{[0,1]}$ a $[0, 1]$ intervallumon értelmezett függvények halmaza. Legyen továbbá $A : \mathcal{D}_{[0,1]} \rightarrow \mathcal{F}_{[0,1]}; f(x) \mapsto xf'(x).$

Lineáris leképezés mátrixa

Hasonló mátrixok

5.59. Mutassuk meg, hogy a nyom invariáns a mátrixok hasonlóságára nézve!

Alkalmazások*

A lineáris leképezés (másodrendű tenzor) fogalma az alkalmazott matematika sok területén bukkan föl, aminek az az egyik oka, hogy tetszőleges vektor-vektor függvény differenciálhatósága azt jelenti, hogy létezik a függvény megváltozását „jól közelítő” lineáris leképezés.

Többváltozós függvények differenciálása Az $\mathbb{R}^n$ -ből $\mathbb{R}^m$ -be képző lineáris leképezések egy igen fontos alkalmazása a vektor-vektor függvények differenciálhatóságának fogalma.

A differenciálhatóság szokásos definíciója a következő: azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény differenciálható az x helyen, ha létezik a

$$D = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (5.10)$$

határérték. A D számnak fontos jelentése van: az f függvény x körüli megváltozása jól közelíthető a $dx \mapsto Ddx$ függvény 0 körüli megváltozásával. Szemléltetve ez azt jelenti, hogy ha az f grafikonján az $(x, f(x))$ pontra helyezünk egy dx és dy változójú koordinátarendszert, akkor a $dx \mapsto dy = Ddx$ grafikonja az f függvény grafikonjának érintője (ld. az 5.18 ábrát). Eszerint, kicsit leegyszerűsítve a megfogalmazást, a differenciálhatóság azt jelenti, hogy a függvény „jól közelíthető” egy $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lineáris leképezéssel, hisz a $dx \mapsto Ddx$ leképezés ilyen (ld. a ?? tétel utáni megjegyzést az $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lineáris transzformációról).

A „jól közelítés” szemléletesen azt jelenti, hogy az f grafikonjára „zoomolva”, azaz azt folyamatosan nagyítva a grafikon kiegyenesedni látszik. Ez az az egyenes, melyet a grafikon érintőjének nevezünk, és amelynek $dy = Ddx$ az egyenlete az új koordinátarendszerben.

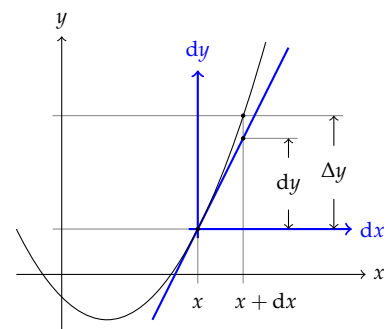
Ez a definíció ekvivalens módon átfogalmazható: azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény differenciálható az x helyen, ha van olyan D szám, hogy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - Dh}{h} = 0. \quad (5.11)$$

Ez utóbbi alak azzal az előnnyel is jár, hogy könnyen általánosítható. Az általánosítás legfőbb nehézsége az, hogy a vektorral való osztás nem definiálható megfelelően, ezért e formulán még egy apró, de még mindig ekvivalens változtatást teszünk: nem h -val, hanem annak abszolút értékével osztunk.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - Dh}{|h|} = 0.$$

Mindezek a következő definícióra vezetnek:



5.18. ábra: A dx és dy koordinátatengelyeket és a $dy = Ddx$ függvény grafikonját színezéssel kiemeltük. Az ábra egyúttal a $\Delta y \approx dy$ kapcsolatot is szemlélteti.

5.60. DEFINÍCIÓ (DIFFERENCIÁLHATÓSÁG). Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ függvény differenciálható az $\mathbf{x}$ helyen, ha létezik olyan $D_{\mathbf{f},\mathbf{x}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineáris leképezés, melyre

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - D_{\mathbf{f},\mathbf{x}}\mathbf{h}}{|\mathbf{h}|} = \mathbf{0}.$$

A $D_{\mathbf{f},\mathbf{x}}$ leképezést az $\mathbf{f}$ függvény $\mathbf{x}$ ponthoz tartozó deriváltleképezésének nevezzük.

- A $D_{\mathbf{f},\mathbf{x}}$ jelölés arra utal, hogy a deriváltleképezés az $\mathbf{f}$ függvénytől és az $\mathbf{x}$ helytől is függ, maga viszont mint leképezés egy $\mathbf{h}$ vektorhoz a $D_{\mathbf{f},\mathbf{x}}\mathbf{h}$ vektort rendeli.
- Elterjedtebb a $D_{\mathbf{x}}(\mathbf{f})$ jelölés, itt didaktikai okból választottunk olyat, mely jobban világossá teszi, hogy ez egy lineáris leképezés, mely majd hat valamely $\mathbf{h}$ vektoron, és annak képe $D_{\mathbf{x}}(\mathbf{f})\mathbf{h}$ vagy $D_{\mathbf{x}}(\mathbf{f})(\mathbf{h})$ – az általunk használt jelölésben $D_{\mathbf{f},\mathbf{x}}\mathbf{h}$.

5.61. TÉTEL (JACOBI-MÁTRIX). Ha az $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m; (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (f_1, f_2, \dots, f_m)$ függvény differenciálható az $\mathbf{x}$ helyen, akkor a lineáris $D_{\mathbf{f},\mathbf{x}}$ deriváltleképezés mátrixa a következő ún. Jacobi-mátrix:

$$D_{\mathbf{f},\mathbf{x}} = \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

BIZONYÍTÁS. Ha $\mathbf{f}$ differenciálható, akkor a definícióbeli határérték akkor is fönnáll, ha $\mathbf{h}$ speciális módon tart a nullvektorhoz, például ha $\mathbf{h} = t\mathbf{e}_j$, és $t \rightarrow 0$. Ekkor

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_j) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - D_{\mathbf{f},\mathbf{x}}(t\mathbf{e}_j)}{|t|} = \mathbf{0}.$$

Az $\mathbf{f}$ függvény i -edik koordinátafüggvénye f_i , a $D_{\mathbf{f},\mathbf{x}}(t\mathbf{e}_j)$ vektor i -edik koordinátája $\mathbf{e}_i^\top D_{\mathbf{f},\mathbf{x}}(t\mathbf{e}_j)$. Ennek alapján

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_i(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_j) - f_i(\mathbf{x}) - \mathbf{e}_i^\top D_{\mathbf{f},\mathbf{x}}(t\mathbf{e}_j)}{|t|} = 0.$$

Ez a határérték viszont már egy egyváltozós függvény deriváltja, ami nem más, mint az f_i függvény j -edik parciális deriváltja, ugyanis átrendezve az egyenlőséget és t előjelével is osztva kapjuk, hogy

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_i(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_j) - f_i(\mathbf{x})}{t} = \mathbf{e}_i^\top D_{\mathbf{f},\mathbf{x}}\mathbf{e}_j, \text{ azaz } \mathbf{e}_i^\top D_{\mathbf{f},\mathbf{x}}\mathbf{e}_j = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}).$$

Ez bizonyítja állításunkat. □

► A gyakorlatban az $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvények, vagyis az n -változós skálárértékű függvények esetén az egyetlen sorból álló Jacobi-mátrix helyett annak vektoralakját használják, melyet *gradiensvektornak* neveznek, és ∇f -fel jelölnek.

► Hasonlóképp, mivel az $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvények Jacobi-mátrixa egyetlen oszlopból áll, gyakran használják annak vektoralakját. Ha például egy $\mathbf{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3; t \mapsto \mathbf{r}(t)$ függvény a térben mozgó tárgy mozgását az idő függvényében írja le, e vektor épp a mozgás sebességvektora.

5.62. PÉLDA (JACOBI-MÁTRIX KISZÁMÍTÁSA). Határozzuk meg az alábbi függvények egy általános ponthoz és a megadott ponthoz tartozó Jacobi-mátrixát!

a) $f(x, y) = x^2y - xy^3 + 1, (x, y) = (0, 1).$

b) $\mathbf{f}(x, y) = (-x^3/2 + y^3/8, x + y), (x, y) = (1, 1).$

c) $\mathbf{r}(t) = (t^3, t^2, t), t = 2.$

d) $\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 3x_2, x_1 - x_2 - x_3), (x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 0).$

MEGOLDÁS. a) $f(x, y) = x^2y - xy^3$, parciális deriváltjai $\frac{\partial}{\partial x}f(x, y) = 2xy - y^3, \frac{\partial}{\partial y}f(x, y) = x^2 - 3xy^2$. A deriváltleképezés mátrixa, azaz a Jacobi-mátrix itt

$$\begin{bmatrix} 2xy - y^3 & x^2 - 3xy^2 \end{bmatrix}$$

E mátrix vektor alakja, azaz a gradiensvektor

$$\nabla f(x, y) = (2xy - y^3, x^2 - 3xy^2).$$

Ennek értéke a $(0, 1)$ helyen $\nabla f(0, 1) = (-1, 0)$, illetve a Jacobi-mátrix e helyen $[-1 \ 0]$.

b) Az $\mathbf{f}(x, y) = (-x^3/2 + y^3/8, x + y)$ függvény Jacobi-mátrixa és annak értéke a megadott $(x, y) = (1, 1)$ pontban

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{2}x^2 & \frac{3}{8}y^2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ illetve } \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{8} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

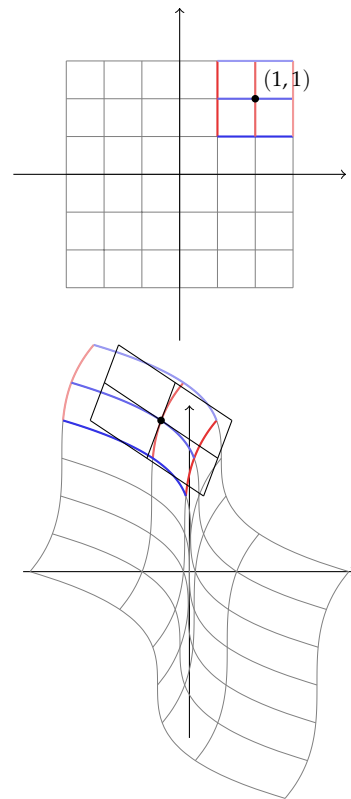
Például az első sor első eleme $\frac{\partial}{\partial x}(-x^3/2 + y^3/8) = -\frac{3}{2}x^2$. Az $\mathbf{f}$ függvény deriváltleképezésének, vagyis Jacobi-mátrixának hatását szemlélteti az 5.19 és az 5.20 ábra.

c) Az $\mathbf{r}(t) = (t^3, t^2, t)$ függvény Jacobi-mátrixa

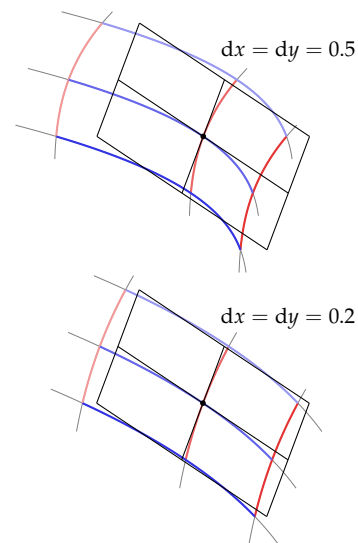
$$\begin{bmatrix} 3t^2 \\ 2t \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ ami a } t = 2 \text{ helyen } \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A térben mozgó pont (test) mozgásának leírására is $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ függvényt használunk. Ha e függvény egy ilyen mozgást ír le, akkor sebességvektora egy tetszőleges pontban

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = (3t^2, 2t, 1),$$



5.19. ábra: A felső ábra az $\mathbf{f}(x, y) = (-x^3/2 + y^3/8, x + y)$ függvény értelmezési tartományán megadott rácsot, és annak egy kis 2×2 -es részét mutatja, melynek középpontja az $(1, 1)$ pont. Az alsó ábra egyrészt halványan jelöli e rács és színesen a kiemelt rács képét, valamint az $(1, 1)$ ponthoz tartozó deriváltleképezés hatását e kiemelt rácsra.



5.20. ábra: Ha egy $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ függvény differenciálható egy pontban, akkor egyre sűrűbb rácsot mellett a pontra „zoomolva” a rács függvény általi képe (az ábrán színes), egyre jobban közelít a deriváltleképezés általi képhez.

a $t = 2$ paraméterhez tartozó pontban $\mathbf{r}(2) = (12, 4, 1)$.

d) Az utolsó példa fontos állítást szemléltet, nevezetesen azt, hogy egy lineáris leképezés deriváltja minden $\mathbf{x}$ helyen megegyezik magával a leképezéssel, azaz a deriváltja önmaga. Világos, hogy a megadott leképezés egy lineáris leképezés, mátrixszorzatos alakja, nevezetesen

$$\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Ennek Jacobi-mátrixa valóban bármely (x_1, x_2, x_3) helyen

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

ugyanis az i -edik koordinátafüggvény j -edik parciális deriváltja épp az együtthatómátrix i -edik sor-, j -edik oszlopbeli eleme, azaz egy konstans. Így minden helyen e mátrix lesz a Jacobi-mátrix, speciálisan az $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 0)$ helyen is. $\square$

5.63. PÉLDA (FÜGGVÉNYÉRTÉK BECSLÉSE JACOBI-MÁTRIXSZAL). Ismerjük egy differenciálható függvény értelmezési tartományának egy pontjához tartozó Jacobi-mátrixát és a függvényértéket ugyan ebben a pontban! Becsüljük meg a függvény értékét egy e ponthoz közeli helyen az alábbi adatok ismeretében!

a) $f(0, 1) = 1$, $\mathbf{D}_{f,(0,1)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}$, $(x, y) = (-0.05, 1.1)$,

b) $\mathbf{f}(1, 1) = (-\frac{3}{8}, 2)$, $\mathbf{D}_{\mathbf{f},(1,1)} = \begin{bmatrix} -3/2 & 3/8 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $(x, y) = (0.8, 1.1)$.

Mennyire lennének jók e becslések, ha a függvények az előző feladatbeli a) és b) függvényei lennének?

MEGOLDÁS. A függvény megváltozásának becsléséhez az $\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})$ értéket kell megbecsülni. A [differenciálhatóság definíciója](#) szerint erre a $\mathbf{D}_{\mathbf{f},\mathbf{x}}\mathbf{h}$ mennyiség alkalmas, ha a függvény differenciálható az $\mathbf{x}$ pontban. Eszerint tehát

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{D}_{\mathbf{f},\mathbf{x}}\mathbf{h}. \quad (5.12)$$

E képletet felhasználva az alábbi megoldásokra jutunk:

a) E feladatban $\mathbf{h} = (-0.05, 0.1)$, így a függvény megváltozása a

$$\mathbf{D}_{f,(0,1)}\mathbf{h} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.05 \\ 0.1 \end{bmatrix} = 0.05$$

értékkel becsülhető, tehát a függvény értéke

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(-0.05, 1.1) \approx f(0, 1) + \mathbf{D}_{f,(0,1)} \begin{bmatrix} -0.05 \\ 0.1 \end{bmatrix} = 1.05,$$

azaz $f(-0.05, 1.1) \approx 1.05$. Ha f az előző *a*) feladatbeli függvény, azaz $f(x, y) = x^2y - xy^3 + 1$, akkor a pontos érték $f(-0.05, 0.1) = 1.0693$.

b) Itt $\mathbf{h} = (-0.2, 0.1)$, így a függvény megváltozása a

$$\mathbf{D}_{f, (1,1)} \mathbf{h} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{8} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{10} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{10} \\ -\frac{2}{10} + \frac{1}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3375 \\ -0.1 \end{bmatrix}$$

értékkel becsülhető, tehát a függvény értéke $\mathbf{f}(0.8, 1.1) \approx \mathbf{f}(1, 1) + (0.3375, -0.1) = (-0.0375, 1.9)$. Ha $\mathbf{f}$ az előző *b*) feladatbeli függvény, azaz $\mathbf{f}(x, y) = (-x^3/2 + y^3/8, x + y)$, akkor a pontos érték $\mathbf{f}(0.8, 1.1) = (-0.089625, 1.9)$. $\square$

E paragrafusnak nem célja a függvényanalízis területére tartozó témák feldolgozása, de a többváltozós függvények kompozíciójának deriváltleképezése az egyváltozós függvények láncszabályához hasonló módon számolható, és erre érdemes egy pillantást vetnünk, mert a megoldást a deriváltleképezések kompozíciója, azaz a Jacobi-mátrixok szorzata adja. Bizonyítás nélkül közöljük a következő tételt.

5.64. TÉTEL (LÁNCSZABÁLY). Legyen $\mathbf{f} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ két függvény. Ha $\mathbf{g}$ differenciálható az $\mathbf{x}$ helyen, és $\mathbf{f}$ az $\mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ helyen, akkor $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ differenciálható az $\mathbf{x}$ helyen, és deriváltleképezése, illetve annak mátrixa kifejezhető az alábbi alakban:

$$D_{\mathbf{f} \circ \mathbf{g}, \mathbf{x}} = D_{\mathbf{f}, \mathbf{g}(\mathbf{x})} \circ D_{\mathbf{g}, \mathbf{x}}, \quad \text{mátrixjelöléssel} \quad \mathbf{D}_{\mathbf{f} \circ \mathbf{g}, \mathbf{x}} = \mathbf{D}_{\mathbf{f}, \mathbf{g}(\mathbf{x})} \mathbf{D}_{\mathbf{g}, \mathbf{x}}, \quad \text{illetve}$$

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}(\mathbf{x}) = \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_m)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_k)}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) \frac{\partial(g_1, g_2, \dots, g_k)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}(\mathbf{x})$$

5.65. PÉLDA (LÁNCSZABÁLY). Írjuk fel a láncszabály általános képleteit a megadott függvénytípusokra, az összetett függvény deriváltját pedig a láncszabállyal és behelyettesítéssel is számítsuk ki!

- a*) $f : (x, y) \mapsto x^2 - y$, $\mathbf{g} : u \mapsto (u^2 + u, u - 1)$, $u = 1$.
b) $\mathbf{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2; x \mapsto (x^2, x - 1)$, $\mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (u, v) \mapsto x = u^2v$, $(u, v) = (1, 2)$.
c) $\mathbf{f}(x, y) = (xy^2 - 1, x - y)$, $\mathbf{g}(u, v) = (u + 1, u - v)$, $(u, v) = (0, 1)$.

MEGOLDÁS. Az *a*) esetben az f -hez, illetve $\mathbf{g}$ -hez tartozó láncszabály általános alakja

$$\frac{df}{du} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dg_1}{du} \\ \frac{dg_2}{du} \end{bmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dg_1}{du} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dg_2}{du},$$

a függvények parciális deriváltjait kiszámolva és a helyet megadva

$$\frac{df}{du}(1) = \begin{bmatrix} 2x & -1 \end{bmatrix}_{\mathbf{g}(1)=(2,0)} \begin{bmatrix} 2u+1 \\ 1 \end{bmatrix}_{u=1},$$

végül a helyettesítést is elvégezve

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 11.$$

Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha a deriválás előtt elvégezzük a helyettesítést: $(f \circ g)(u) = (u^2 + u)^2 - (u - 1) = u^4 + 2u^3 + u^2 - u + 1$, ennek u szerinti deriváltja $4u^3 + 6u^2 + 2u - 1$, és ennek értéke az $u = 1$ helyen 11.

A $b)$ esetben $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, így $f \circ g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, és

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx} \\ \frac{df_2}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{df_1}{dx} \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{df_2}{dx} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{df_2}{dx} \frac{\partial g}{\partial v} \end{bmatrix}$$

A megadott függvényekre és a helyettesítendő értékeket is megadva

$$\begin{bmatrix} 2x \\ 1 \end{bmatrix}_{x=g(1,2)=2} \begin{bmatrix} 2uv & u^2 \end{bmatrix}_{u=1, v=2} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Behelyettesítés után a függvény $(u, v) \mapsto (u^4 v^2, u^2 v - 1)$, aminek deriváltja az $(u, v) = (1, 2)$ helyen

$$\begin{bmatrix} 4u^3 v^2 & 2u^4 v \\ 2uv & u^2 \end{bmatrix}_{(1,2)} = \begin{bmatrix} 16 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix},$$

ami természetesen megegyezik az előző eredménnyel.

Végül a $c)$ esetben az általános alak

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_1}{\partial v} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u} & \frac{\partial g_2}{\partial v} \end{bmatrix}.$$

A parciális deriváltakat kiszámolva és a helyettesítési értékeket is megadva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{bmatrix}_{(0,1)} &= \begin{bmatrix} y^2 & 2xy \\ 1 & -1 \end{bmatrix}_{(1,-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}_{(0,1)} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Itt fölhasználtuk, hogy $g(0,1) = (-1,1)$. Ha a deriválás előtt elvégezzük a függvények kompozícióját, akkor ugyanerre az eredményre jutunk, ugyanis

$$(f(g(u, v))) = ((u+1)(u-v)^2 - 1, v+1),$$

aminek a deriváltmátrixa

$$\begin{bmatrix} (u-v)^2 + 2(u+1)(u-v) & -2(u+1)(u-v) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{(0,1)} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \square$$

Megoldások

5.4. A bizonyítások közvetlenül következnek a valós számok közti műveletek tulajdonságaiból. Mintaként bebizonyítjuk az (a) állítást.

$$\begin{aligned}\mathbf{A} + \mathbf{B} &= [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] \\ &\stackrel{*}{=} [b_{ij} + a_{ij}] = [b_{ij}] + [a_{ij}] = \mathbf{B} + \mathbf{A}.\end{aligned}$$

A *-gal jelzett egyenlőségnél használjuk a számok összeadásának kommutativitását. A többi állítás hasonlóan bizonyítható.

5.5. Helyettesítés előtt:

$$\mathbf{u}^T \mathbf{u} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{u}.$$

Az $\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ helyettesítés elvégzése után

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{A} \mathbf{x},$$

ahol

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

$$5.6. \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$5.7. \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$5.8. \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$5.9. \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$5.10. \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$5.11. \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5.12. Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Négyzete a zérusmátrix, azaz

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Innen vagy $a = d = 0$ és c vagy d legalább egyike 0, vagy $a \neq 0, c \neq 0$ és $b = -a^2/c, d = -a$.

5.13. A feladat érdekes, abban a Fibonacci sorozat elemei bukkannak föl. Ez az $f_0 = 0, f_1 = 1, f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$ egyenlőségekkel definiált sorozat, melynek első néhány tagja: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... Tekintsük $\mathbf{B}$ néhány hatványát:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ f_2 & f_3 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}^3 &= \mathbf{A}^2 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2 & f_3 \\ f_3 & f_4 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Ennek alapján azt sejtjük, hogy

$$\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{bmatrix}.$$

Az állítás $n = 1, 2, 3$ esetén igaz, és n -ről öröklődik $n + 1$ -re, ugyanis

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{n+1} &= \mathbf{A}^n \mathbf{A} = \begin{bmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f_n & f_{n+1} \\ f_{n-1} + f_n & f_n + f_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_n & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_{n+2} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

5.14. $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ Einstein-konvencióval: $c_{ij} = a_{ik}b_{kj}$.

$$5.17. \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -16 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 28 & -16 & -17 \end{bmatrix}$$

$$5.18. \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 & -4 & -4 \\ -1 & 2 & -7 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -16 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 28 & -16 & -17 \end{bmatrix}$$

$$5.19. \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5.22. A fölcserélhetőségre vonatkozó $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ egyenletet szorozzuk meg mindkét oldalról $\mathbf{B}^{-1}$ -gyel:

$$\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{AB})\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{BA})\mathbf{B}^{-1}.$$

Az asszociativitást használva

$$(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A})(\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1}) = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B})(\mathbf{AB}^{-1}),$$

amiből a $\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{I}$ azonosság fölhasználásával kapjuk, hogy

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}.$$

5.23. Azt mondjuk, hogy a $\odot$ művelet invertálható a H egy R részhalmazán, ha bármely $a, b, c \in R$ elem esetén az

$$a \odot x = b, \quad y \odot a = c$$

egyenletek mindegyike megoldható, azaz vannak olyan $x, y \in H$ elemek, melyek kielégítik a fenti egyenleteket. Ha a definícióbeli $\odot$ kommutatív művelet, akkor elég a fenti két egyenlet egyikét tekinteni.

5.24. a) Az $e \in H$ semleges elem, ha minden $a \in H$ elemre $a \odot e = e \odot a = a$. b) Azt mondjuk, hogy a $\odot$ műveletre nézve a inverze b , ha $a \odot b = b \odot a = e$.

5.27. Az első egyenletet kivonjuk az utolsóból, innen $x = 1$, ezután visszahelyettesítés a második, harmadik, majd az első egyenletbe.

$$5.32. \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$5.33. \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$5.34. \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4/5 & 1 & 0 \\ -3/5 & 7/9 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ 0 & -9/5 & -17/5 \\ 0 & 0 & -23/9 \end{bmatrix}.$$

$$5.35. \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3/10 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 10/3 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2/10 \end{bmatrix}$$

$$5.36. \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$5.37. \quad \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.25 & 1.00 & 0.00 \\ 0.50 & 1.00 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.00 & 2.00 & -2.00 \\ 0.00 & 0.50 & -1.50 \\ 0.00 & 0.00 & 3.50 \end{bmatrix}.$$

$$5.38. \quad \mathbf{y} = (0, 3, 4), \quad \mathbf{x} = (-1, -1, 2).$$

$$5.39. \quad \mathbf{y} = (0, 3, 1), \quad \mathbf{x} = (1, -1, 1).$$

$$5.40. \quad \mathbf{y} = (3, -17/5, -23/9), \quad \mathbf{x} = (1, 0, 1).$$

$$5.41. \quad \mathbf{y} = (5.6, 0.4, 1.4), \quad \mathbf{x} = (1.2, 2.0, 0.4).$$

5.42. Mivel ismerjük az együtthatómátrix LU-felbontását – az épp az (5.4)-beli felbontás –, ezért ezt használjuk, és elő-

ször megoldjuk az $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ egyenletrendszert:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Ebből $y_1 = 8$, ezt a második egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy $y_2 = 0$, majd ezeket a harmadikba helyettesítve kapjuk, hogy $y_3 = 2$. Ezután megoldjuk az $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ egyenletrendszert, aminek alakja

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ismét egyszerű visszahelyettesítésekkel kapjuk, hogy $x_4 = 1$, $x_3 = s$ a szabad változó, $x_2 = -s$ és $x_1 = s$. A megoldás $\mathbf{x} = (s, -s, s, 1) = (0, 0, 0, 1) + s(1, -1, 1, 0)$.

5.43. Az $\mathbf{LY} = \mathbf{I}$ egyenletből

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/12 & -1/3 & 1 \end{bmatrix},$$

míg az $\mathbf{UX} = \mathbf{Y}$ egyenlet megoldása, egyúttal $\mathbf{A}$ inverze

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 5/12 & -1/3 & 0 \\ -1/8 & 1/2 & -1/2 \\ -1/24 & -1/6 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

$$5.44. \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/12 & -1/3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1/3 & -5/3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1/12 & -1/3 & 1 \end{bmatrix}.$$

5.45. Tegyük fel, hogy létezik az n -edrendű $\mathbf{A}$ mátrixnak két LU-felbontása is, azaz $\mathbf{A} = \mathbf{L}_1\mathbf{U}_1 = \mathbf{L}_2\mathbf{U}_2$. Mivel $\mathbf{A}$ invertálható, ezért $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{L}_2$ és $\mathbf{U}_2$ is. Ugyanis ha pl. $\mathbf{L}_1$ nem volna invertálható, akkor az oszlopterének dimenziója kisebb lenne n -nél, és mivel $\mathbf{L}_1\mathbf{U}_1$ oszlopvektorai az $\mathbf{L}_1$ oszlopvektorainak lineáris kombinációi, ezért e szorzat oszlopterének dimenziója is kisebb lenne n -nél, azaz $\mathbf{A}$ nem lenne invertálható. A többi mátrix invertálhatósága hasonlóan igazolható. Balról $\mathbf{L}_1$, jobbról $\mathbf{U}_2$ inverzével szorozva kapjuk, hogy

$$\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2^{-1} = \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2.$$

A bal oldalon két felső háromszögmátrix szorzataként egy felső háromszögmátrix van, míg a jobb oldalon két alsó háromszögmátrix szorzata, ami alsó háromszögmátrix (?? feladat). Ráadásul a jobb oldal egység főátlójú (?? feladat). Ez csak akkor állhat fenn, ha $\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2^{-1} = \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2 = \mathbf{I}$, azaz ha $\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2$ és $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2$.

$$5.46. \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$5.47. \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 & 7 & 9 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 & \frac{5}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$5.48. \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & -0.5 & 1.0 \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0.5 & -2.0 & 2.0 \\ 0.0 & 2.0 & 2.0 \\ 0.0 & 0.0 & 2.5 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5.49. Egyrészt $\det \mathbf{A} = 1 \neq 0$, és így $\det \mathbf{U} \neq 0$, tehát $u_{11} \neq 0$, másrészt $\mathbf{A}$ és egy LU-felbontás bal felső elemére $0 = a_{11} = (\mathbf{LU})_{11} = l_{11}u_{11} \neq 0$, ami ellentmondás. Az első két sor felcserélése után kapott mátrixnál hasonló ellentmondásra jutunk az a_{22} elemmel.

5.50. Igen, $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, mátrixa $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$.

5.51. Nem, az $A: \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} + \mathbf{x}$ leképezés a $\mathbf{0}$ vektort nem a $\mathbf{0}$ -ba képi, így nem lehet mátrixleképezés!

5.53. Igen, a mátrix

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{a}^T \mathbf{x}) = (\mathbf{a}\mathbf{a}^T)\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_2a_1 & a_2^2 & a_2a_3 \\ a_3a_1 & a_3a_2 & a_3^2 \end{bmatrix}$$

5.54. A bizonyítások a mátrixműveletek tulajdonságaiból

következnek. Ott, ahol valamelyik mátrixazonosságot használjuk, az ekvivalenciát kimondó nyíl fölé M-betűt írunk, ahol pedig a függvények közti műveleti tulajdonságokat használjuk, ott egy F-betűt:

$$\begin{aligned} a) (A+B)(\mathbf{x}) = C(\mathbf{x}) &\stackrel{F}{\iff} A(\mathbf{x}) + B(\mathbf{x}) = C(\mathbf{x}) \iff \\ &\stackrel{M}{\iff} \mathbf{Ax} + \mathbf{Bx} = \mathbf{Cx} \iff (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{x} = \mathbf{Cx}. \\ b) (cA)(\mathbf{x}) = C(\mathbf{x}) &\stackrel{F}{\iff} cA(\mathbf{x}) = C(\mathbf{x}) \iff c\mathbf{Ax} = \mathbf{Cx} \\ &\stackrel{M}{\iff} (c\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{Cx} \\ c) (X \circ Y)(\mathbf{x}) = Z(\mathbf{x}) &\stackrel{F}{\iff} X(Y(\mathbf{x})) = Z(\mathbf{x}) \iff \\ &\stackrel{M}{\iff} \mathbf{X}(\mathbf{Yx}) = \mathbf{Zx} \iff (\mathbf{XY})\mathbf{x} = \mathbf{Zx}. \end{aligned}$$

5.55. Az 5.45. tételből, illetve az 5.54. feladatból tudjuk, hogy $(A \circ B)(\mathbf{x}) = \mathbf{ABx}$ és $(B \circ A)(\mathbf{x}) = \mathbf{BAx}$. Így ha $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$, azaz $\mathbf{A}$ inverze $\mathbf{B}$, akkor $(A \circ B)(\mathbf{x}) = \mathbf{ABx} = \mathbf{Ix} = \mathbf{x}$, és hasonlóan $(B \circ A)(\mathbf{x}) = \mathbf{BAx} = \mathbf{Ix} = \mathbf{x}$, azaz $A \circ B$ és $B \circ A$ az identikus leképezés. Hasonlóképp, ha $A \circ B$ és $B \circ A$ az identikus leképezés, akkor $(\mathbf{AB})\mathbf{x} = (A \circ B)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ és $(\mathbf{BA})\mathbf{x} = (B \circ A)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, így $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$ (ld. ?? feladat), vagyis $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ egymás inverzei.

5.59. Ha $\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{BC}$, akkor C_{ij} -vel jelölve a $\mathbf{C}$ mátrix c_{ij} -hez tartozó előjeles aldeterminánsát kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \text{trace}(\mathbf{A}) &= \sum_i a_{ii} = \sum_i \frac{1}{\det \mathbf{C}} \sum_{j,k} C_{ij} b_{jk} c_{ki} \\ &= \frac{1}{\det \mathbf{C}} \left(\sum_{j \neq k} b_{jk} \sum_i C_{ij} c_{ki} + \sum_j b_{jj} \sum_i C_{ij} c_{ji} \right) = \dots \end{aligned}$$

6

Determináns

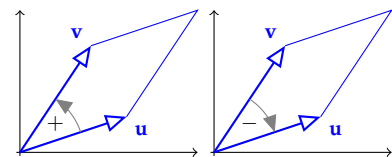
Egy valós négyzetes mátrix sorvektorai által kifeszített paralelepipedon térfogata jó jellemezője lehet a mátrixnak. Ehhez közel áll a determináns fogalma, melyet egy négyzetes mátrixokon értelmezett skalárértékű függvényként definiálunk. E skalár könnyen kiszámolható az elemi sorműveletekkel. A determináns fontos tulajdonságainak egyike, hogy pontosan akkor nulla, ha a sorvektorok lineárisan összefüggők.

A determináns a mátrix egy igen fontos, és sokhelyütt használt jellemzője. Fogalmát egy egyszerű és szemléletes fogalommal, a paralelepipedon előjeles térfogatának segítségével fogjuk bevezetni.

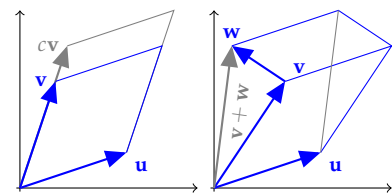
Parallelogramma előjeles területe A **parallelogramma területéről** szóló 1.43. példában láttuk, hogy az (a, b) és a (c, d) vektorok által kifeszített parallelogramma területe $|ad - bc|$, és hogy $ad - bc$ pontosan akkor pozitív, ha az (a, b) és a (c, d) vektorok jobbrendszert alkotnak, és pontosan akkor negatív, ha az (a, b) és a (c, d) vektorok balrendszert alkotnak. Ez vezet a következő definícióhoz: Két síkbeli vektor által kifeszített parallelogramma **előjeles területén** a területét értjük, ha a két vektor jobbrendszert alkot, és a terület -1 -szeresét, ha a két vektor balrendszert alkot.

Az előzőek szerint az $\mathbf{u} = (a, b)$ és a $\mathbf{v} = (c, d)$ vektorok által kifeszített parallelogramma előjeles területe $ad - bc$. Az előjeles terület tehát egy vektorpárokon értelmezett valós értékű függvény – jelölje most f –, mely eleget tesz a következő tulajdonságoknak.

1. $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -f(\mathbf{v}, \mathbf{u})$. Ez nyilvánvaló, hisz a két vektor sorrendjét megcserélve megváltozik a parallelogramma irányítása (6.1. ábra).
2. $f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$, ugyanis az elfajuló parallelogramma területe 0.
3. $f(c\mathbf{u}, \mathbf{v}) = cf(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, és $f(\mathbf{u}, c\mathbf{v}) = cf(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, azaz f homogén mindkét változójában. Ez igaz, mert egy parallelogramma egyik oldalának c -szeresére növelése c -szeresíti a területét is (6.2. első ábra).



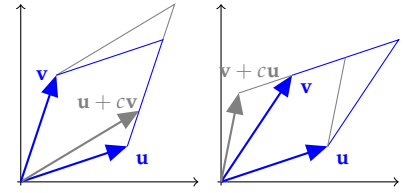
6.1. ábra: Két vektor sorrendjének cseréje megváltoztatja a parallelogramma körülírását.



6.2. ábra: Az $f(\mathbf{u}, c\mathbf{v}) = cf(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ és az $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + f(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w})$ összefüggések szemléltetése.

4. $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + f(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w})$ és $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + f(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{v})$, azaz f additív mindkét változójában. Az állítás igaz volta leolvasható a 6.2. ábra második rajzáról.
5. $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{u} + c\mathbf{v}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{v} + c\mathbf{u})$, azaz az $\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mátrix sorvektorai által kifeszített paralelogramma területe megegyezik a hozzáadás sorművelete után kapott mátrix sorvektoraihoz tartozó paralelogramma területével (6.3. ábra).
6. $f(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = 1$, azaz a standard bázis által kifeszített egységnégyzet területe 1.

Az állítások a fenti ábrákkal szemléltetett egyszerű geometriai érvelések mellett az $f((a, b), (c, d)) = ad - bc$ formulával is bizonyíthatóak. E tulajdonságok segítségével általánosítani tudjuk az előjeles terület fogalmát, és bevezethetjük az előjeles térfogat fogalmát az n -dimenziós valós tér paralelepipedonjaira.



6.3. ábra: Az $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{u} + c\mathbf{v}, \mathbf{v})$ és az $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{v} + c\mathbf{u})$ összefüggések szemléltetése.

Paralelepipedon előjeles térfogata A vegyes szorzat tárgyalásakor láttuk (1.33. definíció), hogy a valós háromdimenziós térben három vektor vegyes szorzatának abszolút értéke a vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata lesz, előjele pedig aszerint pozitív vagy negatív, hogy a három vektor jobb- vagy balrendszert alkot. A háromdimenziós tér paralelepipedonjaira a paralelogrammához hasonló tulajdonságok igazolhatók.

1. Bármely két argumentum felcserélése megváltoztatja a függvényérték előjelét, pl. $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -f(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{u})$.
2. Ha f bármely két argumentuma megegyezik, a függvényérték 0, pl. $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0$.
3. f homogén mindhárom argumentumában, pl. $f(c\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = cf(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$.
4. f additív mindhárom argumentumában, pl. $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + f(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} + \mathbf{z})$.
5. f bármely argumentumához hozzáadva egy másik konstansszorzót, a függvényérték nem változik, pl. $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = f(\mathbf{u} + c\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$.
6. $f(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) = 1$, azaz az egységkocka térfogata 1.

A háromdimenziós paralelepipedon térfogatát úgy számoltuk ki, hogy két vektor által kifeszített paralelogramma területét szoroztuk a harmadik vektor csúcsának a paralelogramma síkjától való távolságával. Ha pedig a paralelogramma irányítását is figyelembe vettük, e távolság előjeles távolsággá vált, hisz az ott használt skaláris szorzat a sík egyik oldalán pozitív, másik oldalán negatív eredményt ad. Ugyanez az eljárás megismételhető magasabb dimenzióban is. Például, ha a

négydimenziós tér egy paralelepipedonjának előjeles térfogatát akarjuk kiszámolni, akkor egy háromdimenziós paralelepipedon térfogatát szorozzuk a negyedik vektor végpontjának a másik három terétől való előjeles távolságával. Ezután bebizonyíthatnánk, hogy az így definiált előjeles térfogat is rendelkezik a korábban felsorolt tulajdonságok négydimenziós megfelelőivel. E helyett egy más, egyszerűbb és szebb utat választunk.

A determináns, mint sorvektorainak függvénye

A determináns definíciója A paralelepipedon fogalma helyett – mely nem értelmezhető bármely számtest esetén – egyszerűen csak az azt kifeszítő vektorokat, illetve az azokból képzett mátrixot fogjuk használni. Az előjeles térfogat helyett olyan fogalmat fogunk definiálni, mely speciális esetként ezt is tartalmazza. Ez lesz a determináns. A definícióban csak az előjeles térfogat vizsgálatában megismert függvénytulajdonságokat használjuk, azok közül is csak annyit, amennyi már egyértelműen definiálja azt.

6.1. DEFINÍCIÓ (DETERMINÁNS). A determináns a négyzetes mátrixokon értelmezett és $\det$ -tel jelölt olyan skalár értékű függvény, mely eleget tesz az alábbi tulajdonságoknak:

- D1. lineáris a mátrix minden sorára nézve,
- D2. két azonos sort tartalmazó mátrixhoz 0-t,
- D3. az egységmátrixhoz 1-et rendel.

Az $\mathbf{A} = [a_{ij}]_n$ mátrix determinánsát $\det(\mathbf{A})$, $|\mathbf{A}|$ vagy $|a_{ij}|_n$ jelöli.

► Az $n \times n$ -es mátrixok determinánsát szokás n -edrendű determinánsnak is nevezni.

► Részletezve az általános jelölést az $\mathbf{A}$ mátrixra és determinánsára:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

E jelölésnek megfelelően a $\det(\mathbf{A})$ determináns sorain, oszlopain, elemein az $\mathbf{A}$ mátrix sorait, oszlopait, elemeit értjük.

► Az 1×1 -es $[a]$ mátrix determinánsa $\det([a]) = a$, ugyanis a determináns definíciója szerint $\det([1]) = 1$, és $\det([a]) = \det([a \cdot 1]) = a \det([1]) = a$. Ez a függvény pedig additív is, így a definíció minden feltételét kielégíti. A jelölésbeli zavarok elkerülésére az 1×1 -es $[a]$ mátrix determinánsára csak a $\det([a])$ vagy $\det(a)$ jelölést használjuk, mert $|a|$ az a abszolút értékét jelöli!

A determinánsokat először Takakazu Shinsuke Seki (1642–1708) vizsgálta, eredményei 1683-ban jelentek meg. Seki 2-től 5-ödrendűek értékét tudta kiszámolni, egyenletek megoldására használta, de lineáris egyenletrendszerek megoldására nem. Európában is 1683-ban jelenik meg e fogalom először Leibniz egy l'Hôpitalnak írt levelében, melyet később rezultánsnak hív. A determináns név Gausstól származik. A mátrixok és determinánsok történetének szép összefoglalója olvasható a [MacTutor History of Mathematics](#) weboldalon.

► Részletezzük a definíció három feltételét. A determináns lineáris a mátrix minden sorában, tehát ha két determináns sorvektorai megegyeznek, kivéve esetleg az i -ediket ($1 \leq i \leq n$), akkor tetszőleges c és d skalárokkal

$$c \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{1*} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{i*} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{n*} \end{vmatrix} + d \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{1*} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{i*} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{n*} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{1*} \\ \vdots \\ c\mathbf{x}_{i*} + d\mathbf{y}_{i*} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{n*} \end{vmatrix}.$$

Azonos sorokat tartalmazó determináns értéke 0, azaz ha valamely $i \neq j$ esetén $\mathbf{a}_{i*} = \mathbf{a}_{j*} = \mathbf{b}$, akkor

$$\begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{b} \\ \vdots \\ \mathbf{b} \\ \vdots \end{vmatrix} = 0.$$

Végül az egységmátrix determinánsa 1, azaz

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

► Hamarosan igazolni fogjuk, hogy a fejezet elején említett

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

képlet illeszkedik e definícióhoz.

► Láttunk determinánst, például a 2×2 -es mátrixokét. Azt azonban még nem tudjuk, hogy létezik-e minden n -re és egyértelmű-e. A definíció alapján ez bizonyítható. A bizonyítást későbbre hagyjuk, addig feltételezzük, hogy létezik és egyértelmű.

► A determináns tekinthető olyan n -változós függvénynek, melynek n argumentumába a mátrix n sorvektora kerül. Nem okoz félreértést, ha ezt a függvényt is $\det$ jelöli. Ha tehát $\mathbf{A}$ sorvektorai $\mathbf{a}_{1*}, \mathbf{a}_{2*}, \dots, \mathbf{a}_{n*}$, akkor $\det(\mathbf{A})$ megegyezik a $\det(\mathbf{a}_{1*}, \mathbf{a}_{2*}, \dots, \mathbf{a}_{n*})$ függvényértékkel. Például a 3×3 -as egységmátrix determinánsa az alábbi alakokba írható:

$$\det(I_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \det([1 \ 0 \ 0], [0 \ 1 \ 0], [0 \ 0 \ 1]) = \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$$

ahol $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ a standard egység-sorvektorokat jelöli. A determináns fenti definíciója könnyen fölírható e jelöléssel is (ld. 6.10. feladat).

A determináns értékének kiszámítása A determináns kiszámításához az elemi sorműveleteket fogjuk használni. A háttérben lényegében ezt teszik a számítógépek is (ld. 6.4. kód és a **program**).

Két kérdésre kell válaszolnunk: (1) hogyan változik a determináns értéke elemi sorműveletek közben, (2) mennyi a determinánsa a háromszög alakra hozott mátrixoknak?

```
sage: M = matrix(3, range(9))
sage: M[2,2]=9
sage: M
[0 1 2]
[3 4 5]
[6 7 9]
sage: M.det()
-3
sage: det(M)
-3
```

6.4. kód: Determináns kiszámítása

6.2. ÁLLÍTÁS (NULLVEKTORT TARTALMAZÓ DETERMINÁNS). *Egy determináns értéke 0, ha valamely sorában minden elem 0.*

BIZONYÍTÁS. Ha egy determináns egy 0-sorát bármely c számmal beszorozzuk, az 0-sor marad, így a determináns értéke nem változik, másrészt a c -vel való szorzás miatt c -szeresére módosul. Mivel csak a 0 egyezik meg tetszőleges c -re saját c -szeresével, így a determináns értéke csak 0 lehet. $\square$

6.3. TÉTEL (ELEMI SORMŰVELETEK DETERMINÁNSON). *Az elemi sorműveletek eredményeként a determináns értéke az alábbiak szerint változik:*

- a) sorcsere közben előjelet vált;
- b) a c skalárral való beszorzás után értéke c -szeresére változik;
- c) egy sor konstansszorosának egy másikhoz való hozzáadása után értéke nem változik.

BIZONYÍTÁS. A tétel második pontja definíció szerint igaz. A harmadik bizonyítása:

$$\begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_{i*} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{j*} + c\mathbf{a}_{i*} \\ \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_{i*} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{j*} \\ \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_{i*} \\ \vdots \\ c\mathbf{a}_{i*} \\ \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_{i*} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{j*} \\ \vdots \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_{i*} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{i*} \\ \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_{i*} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{j*} \\ \vdots \end{vmatrix}.$$

Az első állítás igazolásához a harmadikat használjuk:

$$\begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_{i*} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{j*} \\ \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_{i*} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{j*} - \mathbf{a}_{i*} \\ \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_{j*} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{j*} - \mathbf{a}_{i*} \\ \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_{j*} \\ \vdots \\ -\mathbf{a}_{i*} \\ \vdots \end{vmatrix} \stackrel{D2}{=} - \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_{j*} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{i*} \\ \vdots \end{vmatrix}$$

Először az i -edik sort kivontuk a j -edikből, majd az így kapott j -ediket hozzáadtuk az i -edikhez, végül az i -ediket ismét kivontuk a j -edikből. $\square$

Az elemi mátrixok egyetlen sorművelettel kaphatók az egység mátrixból, így ezek determinánsa könnyen számolható. Hasonlóan könnyen számolható egy elemi mátrix és egy tetszőleges mátrix szorzatának determinánsa.

6.4. KÖVETKEZMÉNY (ELEMI MÁTRIXOK DETERMINÁNSA).

- a) *A hozzáadás sorműveletével kapott elemi mátrix determinánsa 1, a sorcserével kapotté -1 , egy sor c -vel való szorzásával kapotté c .*
 b) *Egy E elemi mátrix és egy tetszőleges négyzetes A mátrix szorzatának determinánsa megegyezik determinánsaik szorzatával, azaz*

$$\det(EA) = \det(E) \det(A).$$

BIZONYÍTÁS. Az (a) állítás abból következik, hogy az elemi mátrixok az 1 determinánsú egység mátrixból kaphatók egyetlen sorművelettel. Hasonlóképp adódik (b) abból, hogy az EA egyetlen sorművelettel kapható A -ból. $\square$

Például:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3.$$

6.5. ÁLLÍTÁS (PERMUTÁCIÓS MÁTRIX DETERMINÁNSA). Permutációs mátrix determinánsa 1 vagy -1 .

BIZONYÍTÁS. Mivel a permutációs mátrix csak elemi sorcserékkel megkapható az egység mátrixból, és a sorcsere csak a determináns előjelét változtatja meg, ezért permutációs mátrix determinánsa 1, ha páros sok sorcserére volt szükség, -1 , ha páratlan sokra. Például az alábbi determinánsok közül az első determináns két sorcserével, a második három sorcserével kapható meg az egység mátrixból, tehát

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

$\square$

6.6. TÉTEL (HÁROMSZÖGMÁTRIX DETERMINÁNSA). Az alsó vagy felső háromszögmátrix, s így a diagonális mátrix determinánsa megegyezik a főátlóbeli elemek szorzatával.

BIZONYÍTÁS. Ha egy háromszögmátrix főátlójában van 0, akkor a redukált lépcsős alakra hozás után a főelemek száma kevesebb lesz, mint

a sorok száma, azaz a mátrixban lesz egy zérussor, így determinánsának értéke 0. Ha nincs 0-elem a főátlóban, mind az alsó, mind a felső háromszögmátrix csak a hozzáadás sorműveletével – azaz a determináns értékének megváltoztatása nélkül – diagonálissá alakítható a főátlón kívüli elemek kiküszöbölésével, azaz

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ ? & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ? & ? & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & ? & \dots & ? \\ 0 & a_{22} & \dots & ? \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Egy diagonális mátrix determinánsában minden sorból kiemelve a főátlóban szereplő számot kapjuk, hogy

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn},$$

tehát a determináns értéke valóban a főátlóbeli elemek szorzata. $\square$

Például az alábbi determináns értéke egyetlen sorcsere után azonnal leolvasható:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = -72$$

6.7. PÉLDA (DETERMINÁNS KISZÁMÍTÁSA HÁROMSZÖG ALAKRA HOZÁS-SAL). Számítsuk ki a

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -4 \\ 4 & 5 & -6 \end{vmatrix} \quad \text{és } a \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$$

determinánsok értékét!

MEGOLDÁS. Elemi sorműveletekkel kapjuk, hogy

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -4 \\ 4 & 5 & -6 \end{vmatrix} \xrightarrow[S_3 - 2S_1]{S_2 - S_1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{S_2 \leftrightarrow S_3} - \begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -(-2) = 2.$$

A következő determinánsnál sorcsere nélkül eliminálhatók a főátló

alatti elemek, ezért a sorműveleteket nem is jelezzük.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 9 & 19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Egy érdekes észrevétel: a fenti determinánsban és sorlécsős alakjában is a Pascal-háromszög számai találhatók. Ezt kihasználva a fenti eredmény általánosítható, ahhoz azonban egy másik megoldás jobb esélyt ad: az első oszlop főátló alatti elemeit nullázzuk ki úgy, hogy először vonjuk ki az utolsó előtti sort az utolsóból, majd a második sort a harmadikból, végül az első a másodikból, majd kövessük e módszert a többi főátló alatti elemre is:

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} \xrightarrow{s_4-s_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \end{vmatrix} \xrightarrow{s_3-s_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \end{vmatrix} \\ s_2-s_1 \xrightarrow{s_4-s_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \end{vmatrix} \xrightarrow{s_3-s_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{s_4-s_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1. \end{array}$$

Az általánosítás a 6.14. feladatban található. $\square$

Mátrixműveletek és determináns Kérdés, hogy milyen kapcsolat van a mátrixműveletek és a determináns között. Fontos megjegyezni, hogy a determinánsfüggvénynek *nincs* a mátrixösszeadásra és a skalárral való szorzásra nézve művelettartó tulajdonsága, azaz általában $\det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \neq \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B})$, és $\det(c\mathbf{A}) \neq c \det(\mathbf{A})$. A determináns definíciója szerint lineáris tulajdonsága csak a sorvektorokra vonatkozóan van.

A skalárral való szorzás esetén viszont itt is mondható valami: mivel egy mátrix c -szeresének determinánása minden sorából kiemelhető c , ez annyi kiemelést jelent, ahány sora van a mátrixnak. Így tetszőleges $n \times n$ -es $\mathbf{A}$ mátrixra és tetszőleges c skalárra $\det(c\mathbf{A}) = c^n \det(\mathbf{A})$. Ez világos, ha $\mathbb{R}^2$ - vagy $\mathbb{R}^3$ -beli vektorokra gondolunk, hisz például egy paralelogramma előjeles területe 4-szeresére, egy paralelepipedon előjeles térfogata 8-szorosára nő, ha minden élét 2-szeresére növeljük.

A determináns művelettartó a négyzetes mátrixok szorzására nézve. Ezt mondja ki a következő állítás.

6.8. ÁLLÍTÁS (DETERMINÁNSOK SZORZÁSSZABÁLYA). Ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ azonos méretű négyzetes mátrixok, akkor $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$.

BIZONYÍTÁS. Tudjuk, hogy ha $\mathbf{A}$ szinguláris, akkor $\mathbf{AB}$ is, azaz ha $\det(\mathbf{A}) = 0$, akkor $\det(\mathbf{AB})$ is 0, tehát $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$. Ha $\mathbf{A}$ nem szinguláris, akkor felbontható elemi mátrixok szorzatára: $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_k$, így $\mathbf{AB} = \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_k \mathbf{B}$. A 6.4. állítás szerint tetszőleges $\mathbf{E}$ elemi mátrixra $\det(\mathbf{EB}) = \det(\mathbf{E}) \det(\mathbf{B})$. Ezt az összefüggést $\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_k$ -ra és $\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_k \mathbf{B}$ -re is használva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B}) &= \det(\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_k) \det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{E}_1) \det(\mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_k) \det(\mathbf{B}) \\ &= \det(\mathbf{E}_1) \det(\mathbf{E}_2) \det(\mathbf{E}_3 \dots \mathbf{E}_k) \det(\mathbf{B}) = \dots = \\ &= \det(\mathbf{E}_1) \det(\mathbf{E}_2) \dots \det(\mathbf{E}_k) \det(\mathbf{B}), \text{ másrészt} \\ \det(\mathbf{AB}) &= \det(\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_k \mathbf{B}) = \det(\mathbf{E}_1) \det(\mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_k \mathbf{B}) \\ &= \det(\mathbf{E}_1) \det(\mathbf{E}_2) \det(\mathbf{E}_3 \dots \mathbf{E}_k \mathbf{B}) = \dots = \\ &= \det(\mathbf{E}_1) \det(\mathbf{E}_2) \dots \det(\mathbf{E}_k) \det(\mathbf{B}), \end{aligned}$$

ami bizonyítja az állítást. Egy másik, nagyon szép bizonyítás található a 6.11. feladatban. $\square$

A determinánsok szorzásszabályának egy fontos alkalmazása a determináns értékének kiszámítása PLU-felbontással (ld. 6.5. kód és a program).

6.9. PÉLDA (DETERMINÁNS KISZÁMOLÁSA PLU-FELBONTÁSBÓL). Hogyan határozzuk meg egy $\mathbf{A}$ mátrix determinánsát, ha ismerjük PLU-felbontását? Konkrétan mennyi a következő mátrix determinánsa?

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3/4 & -1/4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{bmatrix}$$

MEGOLDÁS. Egy PLU-felbontásban szereplő mindegyik mátrix determinánsa könnyen meghatározható. $\mathbf{P}$ két sorcserével egységmátrixszá válik, tehát $\det \mathbf{P} = 1$. $\mathbf{L}$ és $\mathbf{U}$ háromszögmátrixok, amelyek determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata, ami $\mathbf{L}$ esetén mindig 1. A megadott konkrét esetben tehát $\det \mathbf{A} = 4 \cdot 1 \cdot (-1/4) = -1$. $\square$

Mátrix determinánsa és transzponáltjának determinánsa megegyezik. Ez lehetővé teszi, hogy a determináns kiszámításához nem csak az elemi sor-, de az elemi oszlopműveleteket is használjuk, hisz egy mátrixon végzett oszlopművelet a transzponált sorművelete.

6.10. ÁLLÍTÁS (TRANSPONÁLT DETERMINÁNSA). Mátrix determinánsa megegyezik transzponáltjának determinánsával, azaz bármely négyzetes $\mathbf{A}$ mátrixra $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$.

```
sage: M = matrix(3, range(9))
sage: M[2,2]=9
sage: N=M.change_ring(RDF)
sage: N
[0.0 1.0 2.0]
[3.0 4.0 5.0]
[6.0 7.0 9.0]
sage: N.det()
-3.0
sage: P,L,U = N.LU()
sage: P
[0.0 0.0 1.0]
[1.0 0.0 0.0]
[0.0 1.0 0.0]
sage: U
[ 6.0  7.0  9.0]
[ 0.0  1.0  2.0]
[ 0.0  0.0 -0.5]
sage: P.det()
1.0
sage: U.det()
-3.0
```

6.5. kód: Determináns kiszámítása a PLU-felbontásból. A felbontás az egészek gyűrűjében nem működik, ezért gyűrűt váltunk és dupla pontosságú lebegőpontos számokkal számolunk (RDF).

BIZONYÍTÁS. Az $\mathbf{A}$ mátrix redukált lépcsős alakra hozásának mátrix-szorozatos alakja legyen $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_k \mathbf{R}$, ahol $\mathbf{E}_i$ elemi mátrix, $\mathbf{R}$ az $\mathbf{A}$ redukált lépcsős alakja. A transzponált determinánsa

$$|\mathbf{A}^T| = |\mathbf{R}^T \mathbf{E}_k^T \dots \mathbf{E}_2^T \mathbf{E}_1^T| = |\mathbf{R}^T| |\mathbf{E}_k^T| \dots |\mathbf{E}_2^T| |\mathbf{E}_1^T|.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy minden elemi mátrix determinánsa megegyezik transzponáltjának determinánsával (ellenőrizzük!). Mivel $\mathbf{R}$ redukált lépcsős alak, ezért $\mathbf{R} = \mathbf{I}$, vagy $\mathbf{R}$ -nek van egy zérus sora. Ha $\mathbf{R} = \mathbf{I}$, akkor $|\mathbf{R}^T| = |\mathbf{R}| = |\mathbf{I}| = 1$, ha pedig $\mathbf{R}$ -nek van zérus sora, akkor $\mathbf{R}^T$ -nak zérus oszlopa, és egy ilyen mátrix nem alakítható elemi sorműveletekkel egységmátrixszá, tehát determinánsa 0. Azaz $|\mathbf{R}| = |\mathbf{R}^T|$ ekkor is fennáll. Ekkor pedig

$$\begin{aligned} |\mathbf{R}^T| |\mathbf{E}_k^T| \dots |\mathbf{E}_2^T| |\mathbf{E}_1^T| &= |\mathbf{R}| |\mathbf{E}_k| \dots |\mathbf{E}_2| |\mathbf{E}_1| = \\ |\mathbf{E}_1| |\mathbf{E}_2| \dots |\mathbf{E}_k| |\mathbf{R}| &= |\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_k \mathbf{R}| = |\mathbf{A}|. \end{aligned}$$

Tehát $|\mathbf{A}^T| = |\mathbf{A}|$. □

6.11. PÉLDA (DETERMINÁNS KISZÁMÍTÁSA ELEMI OSZLOPMŰVELETEKKEL). Az alábbi determinánst elemi sor- és oszlopműveletek alkalmazásával 2 lépésben is kiszámíthatjuk:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{S_2 \leftarrow S_5} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{O_4 \leftarrow O_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Mikor 0 a determináns értéke Gyakran vízválasztó, hogy egy determináns értéke zérus-e. A determináns definíciója és a 6.2. állítás alapján eddig annyit tudunk, hogy a determináns 0, ha van két azonos sora, vagy egy zérussora. Most szükséges és elégséges feltételeket adunk.

6.12. TÉTEL (ZÉRUS ÉRTÉKŰ DETERMINÁNS). Legyen $\mathbf{A}$ négyzetes mátrix. A következő állítások ekvivalensek:

1. $\det(\mathbf{A}) = 0$,
2. $\mathbf{A}$ sorvektorai lineárisan összefüggők.
3. $\mathbf{A}$ szinguláris,
4. a homogén lineáris $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása.

BIZONYÍTÁS. A ??? tételben láttuk, hogy négyzetes mátrix sorvektorai pontosan akkor lineárisan összefüggők, ha a mátrix szinguláris, azaz ha a lépcsős alakra hozás során keletkezik egy 0-sor, ez pedig azzal ekvivalens, hogy a determináns értéke 0. Az utolsó állítás ekvivalenciája

a mátrix invertálhatóságáról szóló 5.14. tétel közvetlen következménye. $\square$

6.13. PÉLDA (ZÉRUS ÉRTÉKŰ DETERMINÁNSOK). A sorvektorok lineáris összefüggőségének igazolásával mutassuk meg, hogy

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

MEGOLDÁS. Az első determináns első sora a második és a harmadik összege. De fogalmazhatunk úgy is, hogy az első sorból kivonva a másodikat és a harmadikat, a nullvektort kapjuk. Tehát az első mátrix sorvektorai lineárisan összefüggők, így determinánsa 0.

A második determináns sorvektorainak összege a nullvektor, tehát ennek is 0 az értéke.

A legegyszerűbb eseteket leszámítva a sorvektorok lineáris összefüggősége „ránézésre” nem látható, de az összefüggőséget bizonyító skalárok – ha szükségünk van rá – megkaphatók az $\mathbf{A}^T \mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszer nemtriviális megoldásaiból. $\square$

Az előző tétel, valamint az 5.14. tétel fontos következménye a determinánsnak az egyenletrendszerek megoldhatóságával való kapcsolatról szól:

6.14. TÉTEL (EGYENLETRENDSZER MEGOLDHATÓSÁGA ÉS A DETERMINÁNS). Legyen $\mathbf{A}$ négyzetes mátrix. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:

1. $\det \mathbf{A} \neq 0$,
2. az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer tetszőleges $\mathbf{b}$ -re egyértelműen megoldható,
3. az $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek csak triviális megoldása van.

► A gyakorlatban – például mért adatok esetén – az, hogy egy determináns nulla-e, nehezen dönthető el! Fontos tudni, hogy az, hogy egy mátrix „közel szinguláris”, nem feltétlenül olvasható le abból, hogy a determináns értéke „közel van a nullához”. Például az

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & n \end{vmatrix} = 1, \quad \text{és az} \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2^n}$$

determinánsok közül az első értéke tetszőlegesen nagy n -re is 1, pedig $\frac{1}{n}$ tetszőlegesen közel lehet 0-hoz, és az $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}$ mátrix már szinguláris. A második determinánsbeli $\frac{1}{2}\mathbf{I}_n$ mátrix nem szinguláris, pedig determinánsának értéke tetszőlegesen közel lehet 0-hoz, igaz, csak elegendően nagy n esetén.

A determináns invariáns mennyiség A determinánsok szorzásszabályának (6.8. állítás) azonnali következménye az alábbi tétel.

6.15. TÉTEL (A DETERMINÁNS INVARIÁNS A HASONLÓSÁGRA). Ha a négyzetes $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ hasonló mátrixok, akkor $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B})$.

BIZONYÍTÁS. Mivel $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ hasonlóak, ezért létezik egy olyan invertálható $\mathbf{C}$ mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}$. Így $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}) = \det(\mathbf{C}^{-1})\det(\mathbf{B})\det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{B})$, mivel $\det(\mathbf{C})\det(\mathbf{C}^{-1}) = 1$. $\square$

Két mátrix pontosan akkor hasonló, ha mindkettő ugyanannak a lineáris transzformációnak a mátrixa egy-egy megfelelő bázisban. Ezért beszélhetünk egy $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció determinánsáról:

6.16. DEFINÍCIÓ (LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓ DETERMINÁNSA). Egy $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció determinánsán egy tetszőleges bázisban fölírt mátrixának determinánsát értjük.

Tartományok mértékének változása, orientáció Egy lineáris transzformáció determinánsának egyszerű geometriai jelentése van, mely a terület/térfogat valamint az orientáció fogalmához kapcsolódik.

Megvizsgáljuk, hogy hogyan változik egy $\mathbb{R}^n$ -beli alakzat mértéke (területe/térfogata) egy lineáris transzformáció alkalmazása után.

A 2-dimenziós esetben, akár a területmérték Jordan-, akár Lebesgue-féle definícióját tekintjük (lásd a széljegyzetet), elég a kérdést olyan téglalapokra megválaszolni, amelyek oldalai párhuzamosak a tengelyekkel, de ezt az állítást nem igazoljuk. Könnyen belátható viszont, hogy egy ilyen téglalapnak egy L lineáris transzformáció általi képének területe mindig az eredeti téglalap területének $|\det(L)|$ -szerese (ld. 6.25. feladat). Hasonló eredményre jutunk magasabb dimenzióban is. Ezek a következő tételhez vezetnek:

6.17. TÉTEL (TARTOMÁNY MÉRTÉKÉNEK VÁLTOZÁSA LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓBAN). Ha $T \subseteq \mathbb{R}^n$ egy tartomány, melynek $m(T)$ a mértéke, és $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ egy lineáris transzformáció, akkor az $L(T)$ tartománynak van mértéke, és az $|\det(L)|m(T)$, vagyis a transzformáció eredményeként a tartomány mértéke $|\det(L)|$ -szeresére változik.

Azt mondjuk, hogy $\mathbb{R}^n$ két bázisának orientációja azonos, ha az egyiket a másikba vivő egyetlen lineáris transzformáció determinánsának előjele pozitív, és hogy e két bázis orientációja különböző, ha e determináns negatív. Megmutatható, hogy a bázisok két osztályba sorolhatók úgy, hogy az egy osztályba tartozók közül bármely kettő azonos, a különbözőkbe tartozók különböző orientációjúak (6.26. feladat). Ezek után, ha a két osztálynak nevet adunk (pl. *jobbsodrású* és *balsodrású*), akkor elég egyetlen bázishoz egy nevet rendelni, ez automatikusan megadja az összes bázishoz rendelendő nevet. Ezt fogjuk a bázis orientá-

Az $\mathbb{R}^2$ TARTOMÁNYAI TERÜLETÉNEK definíálására a matematika több megközelítést is ismer. Kettőt vázolunk. Mindkettő közös kiindulási pontja, hogy az $[a, b] \times [c, d]$ téglalap területe $(b-a)(d-c)$, és mindkét esetben csak a tengelyekkel párhuzamos helyzetű téglalapokat használunk.

Egy síkbeli T halmazhoz vegyünk véges sok közös belső pont nélküli téglalapot, melyek egyesítése lefedi T -t. E fedő téglalaprendszer területe legyen a téglalapok területeinek összege. Azt mondjuk, hogy T külső Jordan-mértéke a tartományt lefedő téglalaprendszerek területeinek infimuma. Hasonlóan, a T -be írt közös belső pont nélküli téglalaprendszerek területeinek szuprémumát T belső Jordan-mértékének nevezzük. T Jordan-mérhető, ha belső és külső Jordan-mértéke megegyezik, és e közös érték T Jordan-mértéke.

A LEBESGUE-MÉRTÉK definíálásához olyan fedő téglalaprendszereket veszünk, melyek megszámlálható (tehát akár végtelen) elemszámúak, és ezekhez a téglalapjaik területösszegét rendeljük. A T halmazt fedő összes téglalaprendszerhez ilyen módon rendelt számok infimumát a T külső mértékének nevezzük és $\lambda^*(T)$ -vel jelöljük. A T -t Lebesgue-mérhetőnek nevezzük, ha bármely síkbeli H halmazra

$$\lambda^*(H) = \lambda^*(H \cap T) + \lambda^*(H \setminus T).$$

Egy Jordan-mérhető T tartomány Lebesgue-mérhető is, és e két mérték ekkor megegyezik. Viszont például az egységnégyzet racionális koordinátájú pontjainak halmaza nem Jordan-mérhető, mert belső mértéke 0, külső mértéke 1, viszont Lebesgue-mérhető, mértéke 0.

ciójának nevezni. $\mathbb{R}^n$ standard bázisát jobbsodrásúnak szokás nevezni, aminek következtében ha $\mathbb{R}^3$ -bel a fizikai terünket írjuk le, a standard ($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ vektorokból álló) bázisnak fizikai értelemben is jobbsodrásúnak kell lennie.

Jacobi-determináns és az integrál transzformációja A 2- és 3-dimenziós tér leírására leggyakrabban használt koordináta-rendszerek közötti váltás a többváltozós integrálok kiszámításában fontos szerepet kap. Az a kérdés, hogy az integrálközelítő összegben szereplő „téglányoknak” mennyi a mértékük. E szakasz kalkulus-előismereteket igényel.

Felidézzük a síkbeli polárkoordináta-rendszernek, a térbeli henger- és gömbi koordináta-rendszereknek a derékszögű koordináta-rendszerrel való kapcsolatát:

(a) Polár	(b) Henger	(c) Gömbi
$x = r \cos \vartheta$	$x = r \cos \vartheta$	$x = \rho \sin \varphi \cos \vartheta$
$y = r \sin \vartheta$	$y = r \sin \vartheta$	$y = \rho \sin \varphi \sin \vartheta$
	$z = m$	$z = \rho \cos \varphi$

A felsorolt változók jelentése: r az xy -síkból az origótól való távolság, ρ a térben az origótól való távolság, ϑ az x -tengely pozitív felével bezárt szög az xy -síkból, φ a z -tengellyel bezárt szög.

Jacobi-determinánsnak nevezzük egy $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény deriváltleképezésének determinánsát.

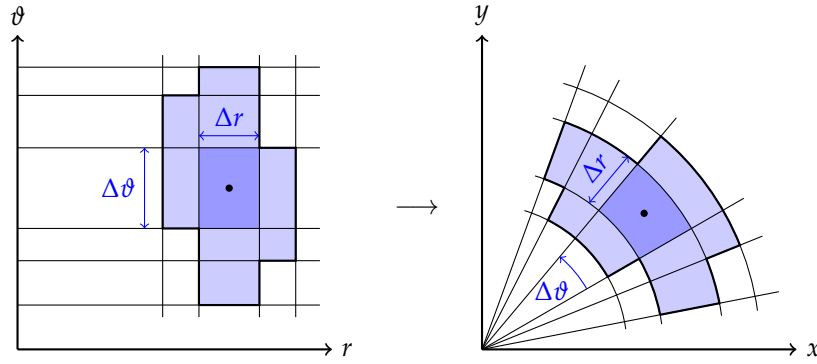
A síkbeli polárkoordináta-rendszerrel a derékszögűre való áttérés egy $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; (r, \vartheta) \mapsto (x, y)$ függvény, melyet a fenti (a)-beli képletek definiálnak. Ennek deriváltleképezése, pontosabban a leképezés $\mathbf{D}$ mátrixa (szokás Jacobi-mátrixnak is hívni), és annak determinánsa, a Jacobi-determináns:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -r \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & r \cos \vartheta \end{bmatrix} \quad |\mathbf{D}| = \begin{vmatrix} \cos \vartheta & -r \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & r \cos \vartheta \end{vmatrix} = r.$$

Az, hogy a Jacobi-determináns értéke r azt jelenti, hogy egy „kicsiny” $\Delta r \times \Delta \vartheta$ méretű téglány – melynek területe $\Delta r \Delta \vartheta$ – a transzformáció után, azaz a polárkoordináta-rendszerben „nagyjából” r -szerese lesz az eredetinek, azaz $r \Delta r \Delta \vartheta$, ahol r a téglány egy pontjának origótól való távolsága. Ezt a leképezést a 6.6 ábrával szemléltetjük.

Az r -szereződés geometriailag is könnyen igazolható, ahogy azt a 6.7 ábra mutatja. Kiszámoljuk egy polár-rendszerbeli téglány területét. Ez két körcikk területének különbsége. A nagyobbik sugara $r_k + \Delta r_k/2$, a határoló ív hossza $(r_k + \Delta r_k/2)\Delta \vartheta_k$, így területe $\frac{1}{2}(r_k + \Delta r_k/2)^2 \Delta \vartheta_k$. Hasonlóan kiszámolva a kisebbik körcikk területét, és kivonva a nagyobbikéból kapjuk, hogy a téglány ΔA_k területe

$$\Delta A_k = \frac{1}{2} \left(r_k + \frac{\Delta r_k}{2} \right)^2 \Delta \vartheta_k - \frac{1}{2} \left(r_k - \frac{\Delta r_k}{2} \right)^2 \Delta \vartheta_k = r_k \Delta r_k \Delta \vartheta_k.$$



6.6. ábra: A síkbeli polárkoordinátarendszerre való áttérést megadó leképezés szemléltetése egy téglányokból álló tartomány képeinek ábrázolásával.

Eszerint egy T tartományon értelmezett $f(r, \vartheta)$ függvény integrálközelítő összege és annak határértéke, amint a legnagyobb átmérőjű téglány átmérője tart 0-hoz (ld. 6.8 ábra):

$$\sum_k f(r_k, \vartheta_k) \Delta A_k = \sum_k f(r_k, \vartheta_k) \Delta r_k \Delta \vartheta_k \rightarrow \int_T f(r, \vartheta) r \, dr \, d\vartheta.$$

A két térbeli koordinátarendszerre való áttérés hasonló módon való megértését és a leképezések elképzelését már az Olvasóra hagyjuk, de a leképezések deriváltjának determinánsát még fölírjuk. A hengerkoordináták esetén az $(r, \vartheta, m) \mapsto (x, y, z)$ leképezésre ez

$$|\mathbf{D}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x}{\partial m} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial m} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \vartheta & -r \sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & r \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

A gömbi koordinátarendszer esetén a leképezés $(\rho, \varphi, \vartheta) \mapsto (x, y, z)$, amelynek Jacobi-determinánsa:

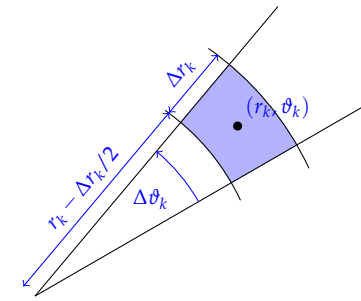
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \vartheta & \rho \cos \varphi \cos \vartheta & -\rho \sin \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta & \rho \cos \varphi \sin \vartheta & \rho \sin \varphi \cos \vartheta \\ \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 \sin \varphi.$$

Így tehát az integrál kiszámításának képletei e három koordinátarendszerre:

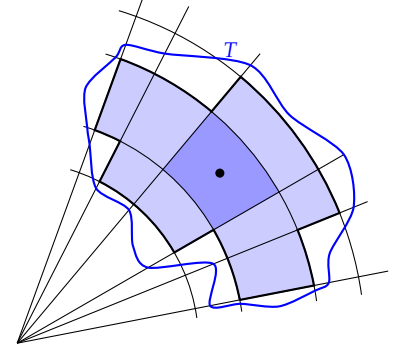
Polár:
$$\iint_T f(r, \vartheta) \, dA = \iint_T f(r, \vartheta) r \, dr \, d\vartheta$$

Henger:
$$\iiint_T f(r, \vartheta, m) \, dV = \iiint_T f(r, \vartheta, m) r \, dm \, dr \, d\vartheta$$

Gömbi:
$$\iiint_T f(\rho, \varphi, \vartheta) \, dV = \iiint_T f(\rho, \varphi, \vartheta) \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\vartheta.$$



6.7. ábra: A síkbeli polárkoordinátarendszer téglányának területe $r_k \Delta r_k \Delta \vartheta_k$.



6.8. ábra: Egy T tartományba eső téglányok, és a k -adik téglány kiemelve.

Feladatok

6.1.♥ Melyek igazak az alábbi állítások közül? (Az $\mathbf{A}$ itt mindig négyzetes mátrixot jelöl.)

1. Ha egy determináns értéke 0, akkor van két azonos sora.
2. Ha egy determináns értéke nem 0, akkor oszlopvektorai lineárisan függetlenek.
3. Ha az $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása, akkor $|\mathbf{A}| \neq 0$.
4. $|\mathbf{A}| \neq 0$ pontosan akkor igaz, ha az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer nem oldható meg.
5. $|\mathbf{A}| = 0$ pontosan akkor igaz, ha az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer egyértelműen megoldható.

6.2.♥ Számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét fejben!

$$\begin{array}{lll} a) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & b) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} & c) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\ d) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} & e) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} & f) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \\ g) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & -1 \\ 5 & 1 & 5 & 4 \\ 6 & 5 & 6 & 0 \end{vmatrix} & & \end{array}$$

6.3.♥ Mutassuk meg – lineáris összefüggőséget keresve a sorok közt –, hogy az alábbi determinánsok értéke 0.

$$\begin{array}{lll} a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix} & b) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} & c) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ d) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} & e) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} & f) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ g) \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & \sin(\alpha + \delta) \\ \sin \beta & \cos \beta & \sin(\beta + \delta) \\ \sin \gamma & \cos \gamma & \sin(\gamma + \delta) \end{vmatrix} & h) \begin{vmatrix} \ln 10 & \ln 4 & \ln 40 \\ \ln 5 & \ln 4 & \ln 20 \\ \ln 2 & 0 & \ln 2 \end{vmatrix} \end{array}$$

6.4.♥ Fölhasználva, hogy

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2.$$

számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét:

$$\begin{array}{ll} a) \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} & b) \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{vmatrix} \\ c) \begin{vmatrix} a & b & c \\ a+d & b+e & c+f \\ g & h & i \end{vmatrix} & d) \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} e) \begin{vmatrix} a & 3b & c \\ d & 3e & f \\ g & 3h & i \end{vmatrix} & f) \begin{vmatrix} a & b & c+a \\ d & e & f+d \\ g & h & i+g \end{vmatrix} \\ g) \begin{vmatrix} 2a & 3b & c+a \\ 2d & 3e & f+d \\ 2g & 3h & i+g \end{vmatrix} & h) \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 3d & 3e & 3f \\ g+4a & h+4b & i+4c \end{vmatrix} \end{array}$$

6.5.♥ Legyen $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ két 3×3 -as mátrix, és legyen $\det(\mathbf{A}) = 5$, $\det(\mathbf{B}) = 4$. Számítsuk ki a következő determinánsok értékét!

$$\begin{array}{lll} a) \det(\mathbf{A}^2) & b) \det(2\mathbf{A}) & c) \det((2\mathbf{A})^2) \\ d) \det(\mathbf{A}^{-1}) & e) \det(5\mathbf{A}^{-1}) & f) \det((5\mathbf{A})^{-1}) \\ g) \det(\mathbf{AB}^{-1}) & h) \det(\mathbf{A}^T \mathbf{B}) & i) |\mathbf{A}^{-1}| |\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}| |\mathbf{B}| \end{array}$$

6.6.♥ Csak sorcserék segítségével hozzuk egyszerűbb alakra (például háromszögalakra) az alábbi determinánsokat, és így számítsuk ki értéküket:

$$\begin{array}{ll} a) \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} & b) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ c) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ d) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 & 8 \\ 4 & 7 & 9 & 2 \end{vmatrix} & e) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ f) \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} & g) \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$$

6.7.♥ Számítsuk ki elemi sorműveletekkel az alábbi determinánsokat!

$$\begin{array}{ll} a) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} & b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{vmatrix} \\ c) \begin{vmatrix} 3 & 8 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \end{vmatrix} & d) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$$

6.8.* Számítsuk ki elemi sorműveletekkel az alábbi n -edrendű determinánsokat!

$$a) \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$$

$$b) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ a^{n-1} & 1 & a & \dots & a^{n-2} \\ a^{n-2} & a^{n-1} & 1 & \dots & a^{n-3} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a & a^2 & a^3 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

$$c) \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix} \quad d) \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ c & a & b & \dots & b \\ c & c & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \dots & a \end{vmatrix}$$

6.9. Számítsuk ki a Petersen-gráf szomszédsági mátrixának (ld. ?? feladat) determinánsát!

6.10. Írjuk fel a determináns definícióját oly módon, hogy $\det$ egy n -változós, n -dimenziós vektorokon értelmezett skalár értékű függvény legyen.

6.11. Adjunk új bizonyítást a determinánsok szorzászámbélyára azt igazolva, hogy az $A \mapsto \det(AB) / \det(B)$ leképezés eleget tesz a determináns definíciójában kirótt feltételeknek.

6.12. Bizonyítsuk be az LU-felbontás fölhasználásával a **transzponált determinánsára** vonatkozó 6.10. állítást.

6.13. Fejezzük ki az elemi mátrixokra használt jelöléseket használva ($E_{S_i+cS_j}$, $E_{S_i \leftrightarrow S_j}$, E_{cS_i}) azok determinánsát!

6.14. Számítsuk ki az

$$\left| \begin{pmatrix} i+j-2 \\ j-1 \end{pmatrix} \right|_{n \times n} = \begin{vmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{1} & \dots & \binom{n-1}{n-1} \\ \binom{1}{0} & \binom{2}{1} & \dots & \binom{n}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n-1}{0} & \binom{n}{1} & \dots & \binom{2n-2}{n-1} \end{vmatrix}$$

determináns értékét! (Útmutatás: az utolsó sorral kezdve mindegyik sorból vonjuk ki az előzőt, majd mindegyik oszlopból az előzőt!)

6.15. Mutassuk meg, hogy egy legalább 3-adrendű determináns értéke 0, ha elemei sorfolytonosan olvasva számtani sorozatot adnak. Például

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

6.16. Mutassuk meg, hogy egy legalább 3-adrendű deter-

mináns értéke 0, ha minden sora számtani sorozat, például

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

6.17. Mutassuk meg, hogy ha egy determináns elemei sorfolytonosan olvasva mértani sorozatot alkotnak, akkor értéke 0. Például

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 4 \\ 8 & 16 & 32 \end{vmatrix} = 0.$$

6.18. Mutassuk meg, hogy tetszőleges a, b, c és d valósok-ra

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

6.19. Mutassuk meg, hogy ha C invertálható, akkor $\det(CAC^{-1}) = \det(A)$ tetszőleges azonos méretű A mátrixra fennáll.

6.20. **VEKTOROK DETERMINÁNSA MÁSIK BÁZISBAN** Igazoljuk, hogy ha $A_{C \leftarrow B}$ az áttérés mátrixa, akkor a $v_1, v_2, \dots, v_n$ vektorok B - és C -beli koordinátas alakjaiból képzett V_B és V_C mátrixok determinánsára $|V_C| = |A_{C \leftarrow B}| |V_B|$.

6.21. Igazoljuk, hogy páratlan rendű ferdén szimmetrikus mátrix determinánsa 0.

6.22. **MÁTRIX NÉGYZETÉNEK DETERMINÁNSA** Igazoljuk, hogy bármely négyzetes A mátrixra $|A^2| = |A|^2$.

6.23. A **determináns négyzetének kiszámításával** (6.22. feladat) és a determinánsok szorzástételének alkalmazásával számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ b & -a & -d & c & f & -e & h & -g \\ c & d & -a & -b & g & -h & -e & f \\ d & -c & b & -a & h & g & -f & -e \\ e & -f & -g & -h & -a & b & c & d \\ f & e & h & -g & -b & -a & d & -c \\ g & -h & e & f & -c & -d & -a & b \\ h & g & -f & e & -d & c & -b & -a \end{vmatrix}.$$

6.24. Mutassuk meg, hogy az $(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2)$ szorzat előállítható két szám négyzetének összegeként, azaz

$$(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) = (z_1^2 + z_2^2),$$

ahol z_1 és z_2 mindegyike külön az x_i és külön az y_i változóknak is lineáris kifejezése ($i = 1, 2$). (Hasonló összefüggések bizonyíthatóak négy illetve nyolc négyzetösszegéről is. Például a négy szám négyzetösszegére vonatkozó képlet

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) = (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2),$$

ahol z_i az x_i és az y_i ($i = 1, 2, 3, 4$) változóknak lineáris. A megoldáshoz használjuk fel az előző feladat állítását.)

6.25. TÉGLALAP KÉPÉNEK TERÜLETE Legyen egy téglalap

négy csúcsa (p, q) , $(p + x, q)$, $(p, q + y)$, $(p + x, q + y)$, ahol $x, y > 0$. Tehát a téglalap oldalhossza x és y , területe xy . Mekkora lesz a területe annak a síkidomnak, mely e téglalapból keletkezik az $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mátrixú lineáris transzformáció hatására.

6.26* ORIENTÁCIÓ Azt mondjuk, hogy $\mathbb{R}^n$ két bázisa azonos orientációjú, ha az egyiket a másikba vivő lineáris transzformáció determinánsa pozitív. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}^n$ bázisain az „azonos orientációjú” reláció ekvivalencia reláció, amely így az összes bázist két osztályba sorolja.

A determináns, mint elemeinek függvénye

A determinánst eddig sorvektorainak függvényeként kezeltük, a következőkben elemeinek függvényeként fogjuk. Ehhez két olyan módszerrel fogunk megismerkedni, melyekben a determináns kiszámítását egyszerűbb determinánsok kiszámítására vezetjük vissza.

Eddig nagyvonalúan bántunk a determináns elemeinek mibenlétével. Annyit feltételeztünk róluk kimondatlanul, hogy azonos algebrai struktúrából valók, és az összeadás, kivonás, szorzás és osztás elvégezhető köztük. Az elemi sorműveletek elvégzéséhez épp e négy műveletre volt szükség. E szakaszban ki fog derülni, hogy a determináns kiszámolható osztás nélkül is. Ennek következménye például, hogy egészelemű mátrix determinánsa egész szám, akkor is, ha számolás közben racionálisokba botlunk. (Általánosan fogalmazva: nem csak testek pl. a valós $\mathbb{R}$, a racionális $\mathbb{Q}$, a komplex $\mathbb{C}$ számtestek vagy a véges $\mathbb{F}_q$ testek elemeiből álló determinánst számolhatunk ki az adott struktúrán belül, hanem pl. az egészek $\mathbb{Z}$ gyűrűjének vagy a polinomok gyűrűjének elemeiből képzett determinánsokat is. További részletekért lásd a függelék ?? szakaszát.)

Kígyók determinánsa A 2×2 -es determináns kiszámítására ismerjük azt a formulát, amely a determináns értékét a determináns elemeinek függvényében írja fel: $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$. Itt tehát csak az összeadásra, kivonásra és a szorzásra van szükség. Hasonló formulát keresünk az n -edrendű determinánsokra. Ehhez a kígyókat használjuk.

Minden kígyó megkapható egy diagonális mátrix sorainak permutációjával, azaz minden $\mathbf{K}$ kígyó felírható $\mathbf{K} = \mathbf{P} \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ alakban, ahol $\mathbf{P}$ egy permutációs mátrix. Ezt a kígyóhoz tartozó permutációs mátrixnak fogjuk nevezni. Mivel $\mathbf{P}$ determinánsa 1 vagy -1 , ezért $|\mathbf{K}| = a_1 a_2 \dots a_n$ vagy $|\mathbf{K}| = -a_1 a_2 \dots a_n$.

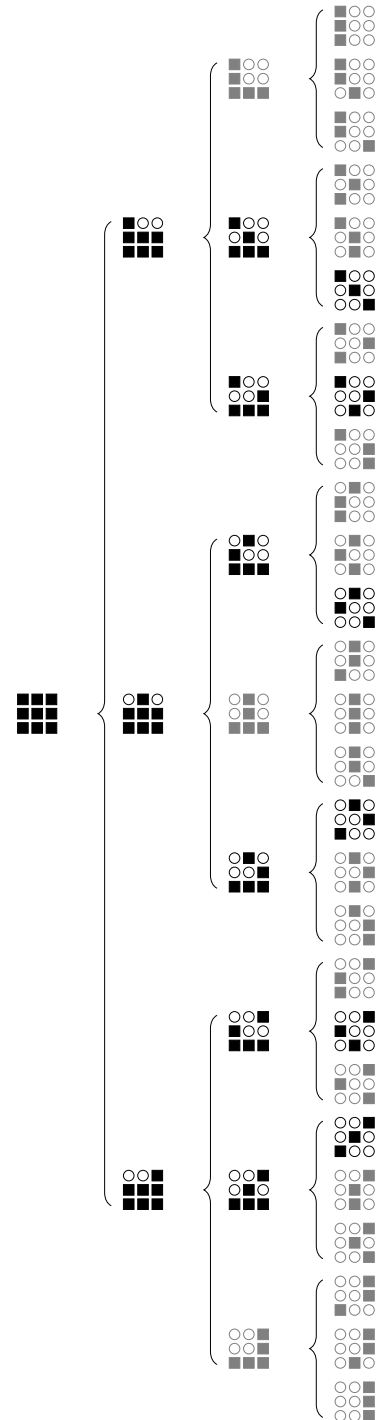
A determinánsok soronkénti linearitását használva érdekes felbontást kapjuk a determinánsnak. Tekintsük példaként az

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

determinánst. Első sorvektorának

$$(a, b, c) = (a, 0, 0) + (0, b, 0) + (0, 0, c)$$

felbontását fölhasználva bontsuk fel a determinánst három determi-



6.9. ábra: Egy 3×3 -as determináns felbontása 3^3 determináns összegére, melyek közül $3! = 6$ darabot kivéve mind-

náns összegére:

$$\begin{vmatrix} a+0+0 & 0+b+0 & 0+0+c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Ezután folytassuk e felbontást a második sorvektorral, így már az eredeti determinánst 9 determináns összegére bontottuk. Végül tegyük ugyanezt az utolsó sorral is. Az így kapott 27 determinánst nem írjuk föl, de szemléltetésül egy sematikus ábrán megmutatjuk a felbontás lépéseit (6.9 ábra). Tömör négyzet jelöli azokat a helyeket, ahol megtartjuk a determináns eredeti elemét, üres kör azokat, ahová zérust írunk. A 27 determináns mindegyikének minden sorában egy elem az eredeti determinánsból való, a többi zérus. Közöttük azonban csak 6 kígyó van. A többinek van zérus oszlopa, így azok értéke 0, vagyis az eredeti determinánst 6 kígyó összegére bontottuk (a 0 értékű determinánsokat szürke színnel jeleztük). Hasonló módon bármely n -edrendű determináns fölbomlik n^n olyan determináns összegére, melynek minden sorában egyetlen elem az eredeti determinánsból való, a többi 0, de ezek közül csak azok lesznek kígyók determinánsai, melyek minden oszlopában is van egy elem az eredetiből. (Ezeket nevezzük a mátrixból/determinánsból kiválasztható kígyóknak.) Ezek száma $n!$, mert az első sorból n -féleképp választhatunk egy elemet, a második sorból minden esetben már csak $n-1$ -féleképp, ..., és ez összesen $n(n-1)\dots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$ eset. Igaz tehát a következő állítás:

6.18. ÁLLÍTÁS (FELBONTÁS KÍGYÓK DETERMINÁNSAINAK ÖSSZEGÉRE). Minden n -edrendű determináns fölbomlik az összes belőle kiválasztható kígyó determinánsának összegére. Ha az $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{nj_n}$ elemeket tartalmazó kígyóhoz tartozó permutációs mátrix determinánsát $d_{j_1j_2\dots j_n}$ jelöli (ennek értéke $+1$ vagy -1), akkor

$$\det([a_{ij}]) = \sum d_{j_1j_2\dots j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n},$$

ahol az összegzés az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz összes lehetséges $\{j_1, j_2, \dots, j_n\}$ permutációján végigfut.

Az $n!$ az n növekedtével rendkívül gyorsan nő (pl. $10! = 3628800$), determináns ilyen módon való számítása viszonylag kis rend esetén már számítógéppel sem lehetséges emberi idő alatt. E felbontást a determinánsok tulajdonságainak vizsgálatában használjuk. Számításhoz csak az $n = 2$ és $n = 3$ esetekben használjuk, igaz, azokra gyakran. $n = 2$ esetén az előző állítás szerint

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} = ad - bc,$$

mivel a második determináns egyetlen sorcserével hozható diagonális alakra. $n = 3$ esetén – felhasználva a 6.9 ábrát is – kapjuk, hogy

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f \\ 0 & h & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & f \\ g & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ d & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ = aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg \\ = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg$$

E két formula könnyen megjegyezhető egy egyszerű szabállyal, amelyet az $n = 2$ és $n = 3$ esetben *Sarrus-szabálynak* is neveznek: a főátló irányú szorzatok összegéből vonjuk ki a mellékátló irányú szorzatokat. (Hogy mit értsünk főátló és mellékátló irányú szorzaton, a mellékelt ábrákról megérthető.) Fontos, hogy hasonló szabály $n > 3$ esetén már nem érvényes (ld. a 6.31. feladatot).

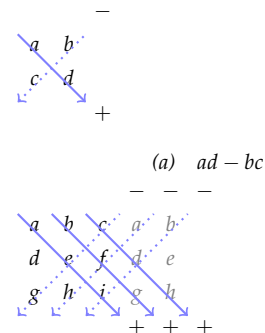
A determináns 6.18. tételbeli felbontása a determináns értékét a determináns elemeinek függvényeként állítja elő. Ennek sok szép és fontos következménye van. Íme kettő:

- Egy algebrai következmény: a determináns kiszámolásához elég csak az összeadás és szorzás művelete, az osztásra, melyet az elemi sorműveletek során használhatunk, nincs szükség. Eszerint egész számokból álló determináns értéke egész szám.
- Egy függvényanalízis körébe tartozó következmény: a determináns értéke folytonos, sőt differenciálható függvénye elemeinek. Eszerint bármely kis pozitív ε -hoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy ha a determináns bármely eleme legfőbb δ értékkel megváltozik, akkor a determináns értéke legfőbb ε -nyit változik.

Permutációs mátrix determinánsa* Kígyó determinánsának kiszámításában egyetlen bizonytalan pont maradt, a hozzá tartozó permutációs mátrix értékének kiszámítása. Vajon nem fordulhat-e elő, hogy páros és páratlan sok sorcserével is eljuthatunk egy permutációs mátrixból az identikusba.

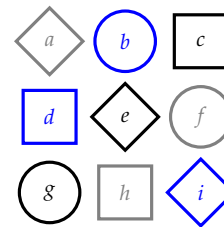
Azt mondjuk, hogy egy permutációs mátrix két sora inverzióban áll, ha az előbb álló sorbeli 1-es hátrébb van, mint a másik sorbeli. Például a

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$(b) aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg$$

6.10. ábra: Az (a) másod- és a (b) harmadrendű determináns kiszámítása: a főátló irányú szorzatok összegéből vonjuk ki a mellékátló irányú szorzatokat. Harmadrendű esetben kezdetben könnyíthetünk magunknak a determináns első két oszlopának a determináns utáni megismétlésével.



6.11. ábra: A harmadrendű determináns kiszámítására egy – IQ-tesztek típuskérdésére emlékeztető – másik módszer: az egyforma alakúak szorzatának összegéből ki kell vonni az egyforma színűek szorzatait.

mátrix inverzióinak száma 4, mert az első-második, első-negyedik, második-negyedik, harmadik-negyedik sorpárok inverzióban vannak.

6.19. TÉTEL (PERMUTÁCIÓS MÁTRIX DETERMINÁNSA). *A permutációs mátrix aszerint $+1$ vagy -1 , hogy inverzióban álló sorpárjainak száma páros vagy páratlan.*

BIZONYÍTÁS. Elég megmutatni, hogy egy sorcsere mindig megváltoztatja az inverziók számának paritását, vagyis azok száma párosból páratlanra, páratlanból párosra változik. Így ha egy permutációs mátrix inverzióinak száma páros, akkor csak páros sok sorcserével vihető az identikus mátrixba. Hasonlóan, ha az inverziók száma páratlan, akkor csak páratlan sokkal.

Ha a két megcserélendő sor szomszédos, akkor a sorcsere megváltoztatja e két sor viszonyát: ha inverzióban álltak, akkor ezután nem fognak, és fordítva. Az előttük és mögöttük álló sorokhoz való viszonyuk nem változott. Eszerint az inverziók száma eggyel nőtt vagy eggyel csökkent, azaz paritása megváltozott.

Ezután cseréljük fel az i -edik és j -edik sorokat (legyen $i < j$). Az inverziók számának nyomon követése érdekében ezt szomszédos sorok cseréjével valószínűsítjük meg. Cseréljük ki az i -ediket az $(i+1)$ -edikkel, majd azt az $(i+2)$ -edikkel, ..., míg az eredetileg i -edik sor a j -edik helyére nem kerül. Ehhez $j-i$ sorcserére van szükség. Ezután az eredetileg j -edik sort $j-i-1$ sorcserével az i -edik helyre visszük. Ez összesen $2(j-i)-1$, azaz páratlan sok sorcsere, ami a paritást valóban ellenkezőjére változtatja. $\square$

6.20. PÉLDA (INVERZIÓK SZÁMA ÉS A DETERMINÁNS). *Hány sor áll inverzióban abban a mátrixban, melynek mellékátlójában egyesek, egyebütt nullák állnak, és mennyi ennek determinánusa?*

MEGOLDÁS. E mátrixban bármely két sor inverzióban áll egymással, így ha a sorok száma n , a sorpároké $n(n-1)/2$. Eszerint e mátrix determinánusa $(-1)^{n(n-1)/2}$. (Az egységmátrix $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ sorcserével is megkapható e mátrixból, így determinánsát $(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ alakban is ki lehet fejezni, ld. még a 6.6. feladatban). $\square$

Végül egy fontos következmény:

6.21. KÖVETKEZMÉNY (DETERMINÁNSFÜGGVÉNY LÉTEZÉSE). *A determinánsfüggvény létezik, és egyértelmű.*

BIZONYÍTÁS. Mivel minden determináns egyenlő a belőle kiválasztható kigyók determinánsainak összegével, és minden kigyó determinánusa egyértelműen meghatározható, ezért minden négyzetes mátrix determinánusa egyértelmű. A kérdés már csak az, hogy az így meghatározott függvény valóban kielégíti-e a determináns definíciójának

mindegyik pontját. Ez azonnal látszik, hisz ezeket elég csak kígyók-
ra ellenőrizni, azokra pedig a linearitás és az azonos sorok feltétele is
fönnáll. $\square$

Előjeles aldetermináns Az előző paragrafushoz hasonlóan bontsuk az

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

determinánst, az első sorvektorának felbontásával három determináns
összegére, de egyúttal emeljük is ki az első sor elemét, majd oszlop-
cserékkel vigyünk az 1-est tartalmazó oszlopot az első oszlop helyére:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= a \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \\ &= a \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ e & d & f \\ h & g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f & d & e \\ i & g & h \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Ha ezt összevetjük a Sarrus-szabályban kapott képlettel, igen érdekes
sejtést fogalmazhatunk meg:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg \\ &= a(ei - fh) - b(fg - di) + c(dh - eg) \\ &= a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Mielőtt ezt megtennénk, némi előkészítés következik.

6.22. DEFINÍCIÓ (ELŐJELES ALDETERMINÁNS). Az n -edrendű $|\mathbf{A}|$ deter-
mináns i -edik sorának és j -edik oszlopának elhagyásával kapott $(n-1)$ -
edrendű determináns $(-1)^{i+j}$ -szeresét az $|\mathbf{A}|$ determináns a_{ij} eleméhez tar-
tozó előjeles aldeterminánsának nevezzük.

Az előjeles aldeterminánshoz kiszámítandó előjel a mátrixon sakk-
táblaszerűen változik, azaz a bal felső sarokban $+$, és két egymás mel-
letti vagy alatti mezőben ellenkező előjelű. Ezt nevezik *sakktáblasza-
bálynak*.

6.23. PÉLDA (ELŐJELES ALDETERMINÁNS). Számítsuk ki az

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 9 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

+	-	+	-	+	-	+	-
-	+	-	+	-	+	-	+
+	-	+	-	+	-	+	-
-	+	-	+	-	+	-	+
+	-	+	-	+	-	+	-
-	+	-	+	-	+	-	+
+	-	+	-	+	-	+	-
-	+	-	+	-	+	-	+

6.12. ábra: Sakktáblaszabály: a $(-1)^{i+j}$ előjele a bal felső sarokban, vagyis az első sor első oszlopában $+$, él mentén szomszédos mezőkben pedig ellentétes.

determináns második sor harmadik eleméhez tartozó előjeles aldeterminánst!

MEGOLDÁS. A determináns második sorát és harmadik oszlopát kiemeltük

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 9 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

Az ezek elhagyása után megmaradó aldetermináns és -1 megfelelő hatványának szorzata, vagyis a kért előjeles aldetermináns

$$(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-6) = 6.$$

Tehát a determináns második sor harmadik eleméhez tartozó előjeles aldeterminánsa -2 . $\square$

6.24. ÁLLÍTÁS (DETERMINÁNS RENDJÉNEK CSÖKKENTÉSE). Tegyük fel, hogy az n -edrendű $|\mathbf{A}|$ determináns a_{ij} elemének sorában vagy oszlopában minden további elem 0. Jelölje A_{ij} az a_{ij} elemhez tartozó előjeles aldeterminánst. Ekkor

$$|\mathbf{A}| = a_{ij} A_{ij}.$$

BIZONYÍTÁS. Legyen az $|\mathbf{A}|$ determináns i -edik sorában az a_{ij} -n kívül minden elem 0 (hasonlóan tárgyalható, ha a j -edik oszlopban vannak nullák). Cseréljük ki a j -edik oszlopot a $(j-1)$ -edikkel, majd ezt a $(j-2)$ -edikkel. ..., addig, míg az $\mathbf{A}_{*j}$ oszlop az első oszlopba nem kerül. Ez $j-1$ oszlopcserét jelent, azaz a determináns értéke $(-1)^{j-1}$ -szeresére változik. Ezután hasonlóképp vigyük az i -edik sort szomszédos sorok cseréjével az első sorba. Ehhez $i-1$ csere szükséges,

miközben a determináns értéke $(-1)^{i-1}$ -szeresére változik.

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{ij} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} a_{1j} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{2j} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{ij} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
 & = (-1)^{i-1}(-1)^{j-1} \begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{2j} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
 & \stackrel{*}{=} (-1)^{i+j} a_{ij} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{2j} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
 & \stackrel{**}{=} (-1)^{i+j} a_{ij} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
 & = a_{ij} A_{ij}.
 \end{aligned}$$

Az *-os egyenlőségnél kihasználtuk, hogy $i + j - 2$ és $i + j$ paritása azonos, tehát -1 kitevőjeként is azonos eredményt adnak, továbbá kiemeltük a_{ij} -t az első sorból. A **-os egyenlőség előtt álló determináns kiszámításához csak a másodiktól lefelé lévő sorokat kell használni, a végeredményt az első oszlop elemei nem befolyásolják, így az első sor és első oszlop elhagyásával kapott determináns értéke ugyanaz. Végül az így kapott determináns az előjellel együtt épp A_{ij} , és ezzel bizonyítottuk az állítást. $\square$

6.25. PÉLDA (DETERMINÁNS RENDJÉNEK CSÖKKENTÉSE). A determináns rendjének csökkentésével számítsuk ki az alábbi determináns értékét!

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 8 & 4 \\ 6 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 8 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

MEGOLDÁS. Minden lépésben – esetleg egy apró átalakítás után – találunk egy sort vagy oszlopot, melyben csak egy nemnulla szám áll, így a determináns könnyen számolható:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 8 & 4 \\ 6 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 8 & 9 & \boxed{8} & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{4+3} \cdot 8 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 8 & 4 \\ 6 & 0 & 7 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 (S_2 - S_1) &= (-8) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & 0 \\ 6 & 0 & 7 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\
 &= (-8) \cdot (-1)^{2+3} \cdot 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \boxed{6} & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} \\
 &= (-8) \cdot (-5) \cdot (-1)^{2+1} \cdot 6 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\
 &= (-8) \cdot (-5) \cdot (-6) \cdot (-12) \\
 &= 2880.
 \end{aligned}$$

□

Determináns kifejtése Ritkán adódik, hogy a determináns rendje az előző (6.24.) állítás segítségével csökkenthető, viszont fölhasználásával a determinánsok egy gyönyörű kifejtési tételét kapjuk.

6.26. TÉTEL (DETERMINÁNSOK KIFEJTÉSI TÉTELE). Egy determináns értéke megkapható úgy, hogy egy tetszőleges sorának vagy oszlopának minden elemét beszorozzuk a hozzá tartozó előjeles al-determinánssal, és e szorzatokat összeadjuk. Képletben, az n -edrendű $|\mathbf{A}|$ determináns értéke i -edik sora szerint kifejtve

$$|\mathbf{A}| = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik},$$

és j -edik oszlopa szerint kifejtve

$$|\mathbf{A}| = \sum_{k=1}^n a_{kj} A_{kj}.$$

E kifejtési tételt egyes könyvek *Laplace-féle kifejtési tételnek* nevezik, míg más könyvek csak ennek egy – a feladatok közt megtalálható – általánosítását hívják így, sok könyv pedig e tételbeli összefüggéssel definiálja a determinánst.

BIZONYÍTÁS. Hasonlóan a korábbiakban látottakhoz, az i -edik sorvektor felbontásával a determinánst n olyan determináns összegére bontjuk, amelyek i -edik sorában csak egy elem származik az eredeti determinánsból, a többi 0. Az egyszerűség kedvéért e felbontást csak $n = 3$ és $i = 2$ esetére írjuk fel, de tetszőleges n -re ugyanígy megy. Ezután

a 6.24. állítást alkalmazzuk mindegyik új determinánssra:

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{A}| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
 &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \\
 &= \sum_{k=1}^3 a_{2k}A_{2k}.
 \end{aligned}$$

A bizonyítás ugyanígy megy az oszlopokra is, amit példaként az $n = 3, j = 3$ esettel szemléltetünk:

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{A}| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
 &= a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} \\
 &= \sum_{k=1}^3 a_{k3}A_{k3}. \quad \square
 \end{aligned}$$

6.27. PÉLDA (KIFEJTÉSI TÉTEL). Számítsuk ki az alábbi determináns értékét a kifejtési tételt használva!

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

MEGOLDÁS. Érdemes e determinánst a harmadik oszlopa szerint kifejtetni, mert ott két 0 is van, így a velük megszorozott aldeterminánsokat le sem kell írni.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1. \quad \square$$

Cramer-szabály és a mátrix inverze Eddig akár az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldására, akár az $\mathbf{A}$ mátrix inverzének kiszámítására olyan módszert használtunk, mely az elemi sorműveletek használatával csak egy algoritmust ad a számításokra, de nem adja meg a kapcsolatot (képletet) az adatok és a kiszámítandók közt. E paragrafusban ezt pótoljuk!

Jelölje $\mathbf{A}_{i,\mathbf{b}}$ azt a mátrixot, melyet akkor kapunk, ha az $\mathbf{A}$ mátrix i -edik oszlopának helyére a $\mathbf{b}$ vektort írjuk. Kifejtve

$$\mathbf{A}_{i,\mathbf{b}} = [\mathbf{a}_{*1} \ \dots \ \mathbf{a}_{*,i-1} \ \mathbf{b} \ \mathbf{a}_{*,i+1} \ \dots \ \mathbf{a}_{*n}].$$

E jelöléssel $\mathbf{I}_{i,x}$ mátrixon az $[\mathbf{e}_{*1} \dots \mathbf{e}_{*,i-1} \ x \ \mathbf{e}_{*,i+1} \dots \mathbf{e}_{*n}]$ mátrixot értjük.

6.28. TÉTEL (CRAMER-SZABÁLY). Legyen $\mathbf{A}$ egy $n \times n$ -es mátrix. Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg egyértelműen, ha $\det \mathbf{A} \neq 0$. Ekkor a megoldás előáll

$$x_i = \frac{\det \mathbf{A}_{i,\mathbf{b}}}{\det \mathbf{A}}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

alakban.

BIZONYÍTÁS. Az állítás első felét már bizonyítottuk a 6.14. tételben. Eből felhasználjuk, hogy mivel az egyenletrendszer megoldható, $\det \mathbf{A} \neq 0$. Kihasználva, hogy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, továbbá hogy $\mathbf{Ae}_i = \mathbf{a}_{*i}$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{AI}_{i,x} &= \mathbf{A}[\mathbf{e}_{*1} \dots \mathbf{e}_{*,i-1} \ x \ \mathbf{e}_{*,i+1} \dots \mathbf{e}_{*n}] \\ &= [\mathbf{Ae}_{*1} \dots \mathbf{Ae}_{*,i-1} \ \mathbf{Ax} \ \mathbf{Ae}_{*,i+1} \dots \mathbf{Ae}_{*n}] \\ &= [\mathbf{a}_{*1} \dots \mathbf{a}_{*,i-1} \ \mathbf{b} \ \mathbf{a}_{*,i+1} \dots \mathbf{a}_{*n}] \\ &= \mathbf{A}_{i,\mathbf{b}} \end{aligned}$$

Mivel az $\mathbf{I}_{i,x}$ mátrix i -edik sorának és oszlopának elhagyása után egy identikus mátrix marad, ezért az i -edik sora szerint kifejtve

$$\det \mathbf{I}_{i,x} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & x_1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & x_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_n & \dots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{i+i} x_i = x_i.$$

Így a determinánsok szorzási szabályát is használva $\det(\mathbf{AI}_{i,x}) = \det \mathbf{A}_{i,\mathbf{b}}$, amiből $x_i \det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}_{i,\mathbf{b}}$, azaz $x_i = \det \mathbf{A}_{i,\mathbf{b}} / \det \mathbf{A}$. $\square$

6.29. PÉLDA (CRAMER-SZABÁLY). Oldjuk meg az

$$2x + 5y = 4$$

$$5x + 3y = 6$$

egyenletrendszert a Cramer-szabállyal!

MEGOLDÁS. A kiszámolandó determinánsok a $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ jelöléssel:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -19, \quad \mathbf{A}_{1,\mathbf{b}} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -18, \quad \mathbf{A}_{2,\mathbf{b}} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -8.$$

$$\text{Innen } x = \frac{-18}{-19} = \frac{18}{19}, \quad y = \frac{-8}{-19} = \frac{8}{19}.$$

Gabriel Cramer (1704–1752) genfi születésű svájci matematikus, akinek az algebrai görbékről szóló „Introduction à l’analyse des lignes courbes algébriques” című, 1750-ben publikált munkájában szerepelt a ma Cramer-szabály néven ismert tétel. A szabályt korábban már mások is ismerték.

Ha egyenletrendszert meg tudunk oldani, akkor szimultán egyenletrendszert is, és így pl. az $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ megoldásával a mátrix inverzét is ki tudjuk számítani. Az $\mathbf{x}_{ij}$ elem kiszámításához az $\mathbf{Ax}_{*j} = \mathbf{e}_j$ egyenletrendszert kell megoldani. A megoldás i -edik koordinátája az $\mathbf{x}_{ij}$ elem. A Cramer-szabály szerint

$$\mathbf{x}_{ij} = \frac{\det \mathbf{A}_{i,\mathbf{e}_j}}{\det \mathbf{A}}$$

Mivel az $\mathbf{A}_{i,\mathbf{e}_j}$ mátrix i -edik oszlopában csak egy elem nem 0, a kifejtési tétel szerint

$$\det \mathbf{A}_{i,\mathbf{e}_j} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & 1 & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = A_{ji},$$

valgyis e determináns megegyezik az $\mathbf{A}$ egy előjeles aldeterminánsával, tehát

$$\mathbf{x}_{ij} = \frac{\det \mathbf{A}_{i,\mathbf{e}_j}}{\det \mathbf{A}} = \frac{\det \mathbf{A}_{ji}}{\det \mathbf{A}}.$$

Mint látjuk, az $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$ előállításához az $\mathbf{A}$ előjeles aldeterminánsai mátrixának transzponáltjára van szükség. E mátrixot az $\mathbf{A}$ klasszikus adjungáltjának nevezzük és $\text{adj}(\mathbf{A})$ -val jelöljük. A klasszikus jelzőre azért van szükség, mert az adjungált szót komplex elemű mátrix konjugált transzponáltjára is használjuk, és ez félreértésekhez vezethet. Képletben tehát

$$\text{adj } \mathbf{A} = [A_{ij}]^T = [A_{ji}]. \quad (6.1)$$

Így a következő tételt kapjuk:

6.30. TÉTEL (MÁTRIX INVERZÉNEK ELEMEI). *Tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ egy invertálható mátrix. Ekkor inverzének ij indexű eleme az a_{ji} elemhez tartozó előjeles aldetermináns és az $\mathbf{A}$ mátrix determinánsának hányadosa, azaz*

$$[\mathbf{A}^{-1}]_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det \mathbf{A}}.$$

Így az inverz mátrix az

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} [\mathbf{A}_{ij}]^T = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \text{adj } \mathbf{A}. \quad (6.2)$$

alakba írható.

► Könnyen ellenőrizhető, hogy az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mátrix klasszikus adjungáltja

$$\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix},$$

így inverze

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \operatorname{adj} \mathbf{A} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

► A mátrix inverzének e kifejezése azt mutatja, hogy az inverz mátrix minden eleme folytonos függvénye a mátrix minden elemének minden olyan helyen, ahol a determináns nem 0, azaz minden olyan helyen, ahol az inverz egyáltalán létezik.

► Az előző megjegyzésből az is következik, hogy egy n -ismeretlenes n egyenletből álló egyenletrendszer megoldásvektorának minden koordinátája folytonos függvénye az egyenletrendszer együtthatóinak és a jobb oldalán álló vektor koordinátáinak, hisz a megoldás az inverzzel való szorzással megkapható.

► Egészelemű mátrix inverze pontosan akkor egészelemű, ha determinánsa 1 vagy -1 . Ez abból adódik, hogy $\det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{A}^{-1}) = \det \mathbf{I} = 1$, tehát ha $|\det \mathbf{A}| \neq 1$, akkor $\det(\mathbf{A}^{-1})$ nem egész szám, tehát $\mathbf{A}^{-1}$ nem lehet egészelemű, ha pedig $|\det \mathbf{A}| = 1$, akkor a (6.2) képlet szerint $\mathbf{A}^{-1}$ minden eleme egész szám.

► A tételbeli képlet könnyen kiterjeszthető szinguláris mátrixokra is, vagyis amikor a determináns 0, ugyanis

$$\mathbf{A} \operatorname{adj} \mathbf{A} = \det(\mathbf{A}) \mathbf{I} \quad (6.3)$$

minden négyzetes mátrixra fennáll (ld. a 6.42. feladatot).

6.31. PÉLDA (MÁTRIX INVERZE). Számítsuk ki a szemléltetés céljából csupa különböző elemet tartalmazó

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

mátrix inverzét!

MEGOLDÁS. Az $\operatorname{adj} \mathbf{A}$ determinánst olyan alakba írjuk föl, ahonnan látszik minden elem kiszámításának módja. Szürke színnel szedjük az

elhagyandó elemeket:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{adj} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T \\
 &= \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T \\
 &= \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 5 & -8 & 4 \\ -4 & 6 & -3 \end{bmatrix}^T
 \end{aligned}$$

Mivel $\det \mathbf{A} = -1$, ezért

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \operatorname{adj} \mathbf{A} = - \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 5 & -8 & 4 \\ -4 & 6 & -3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -3 & -5 & 4 \\ 3 & 8 & -6 \\ -1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \quad \square$$

Már ezekből az egyszerű példákból is látszik, hogy mátrix invertálása e módszerrel igen műveletigényes. Valóban, gyakorlati számításokhoz nem használjuk, elméleti okfejtésekben vesszük nagy hasznát.

Blokkmátrixok determinánsa* Az $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$ mátrix általában még négyzetes részmátrixok esetén sem számítható az $\mathbf{AD} - \mathbf{BC}$ képlettel (ld. a ?? feladatban)! Először egy speciális, de fontos esettel kezdjük.

6.32. TÉTEL (DETERMINÁNSOK SZORZATA BLOKKMÁTRIXBAN). *Legyenek $\mathbf{A}$ és $\mathbf{D}$ négyzetes mátrixok. Ekkor*

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}| |\mathbf{D}|.$$

BIZONYÍTÁS. Megmutatjuk, hogy minden olyan kígyó, melynek nincs eleme a $\mathbf{O}$ -mátrixból, egy $\mathbf{A}$ -beli és egy $\mathbf{D}$ -beli kígyó szorzata. Ehhez

elég megmutatni, hogy ha egy kígyónak van eleme a $\mathbf{B}$, illetve a $\mathbf{C}$ mátrixból, akkor az $\mathbf{O}$ -ból is. Valóban, ha pl. $\mathbf{B}$ egy eleme benne van egy kígyóban, akkor oszlopában nincs elem $\mathbf{D}$ -ben, így $\mathbf{D}$ -ben marad egy sor is üresen, amelyet csak egy $\mathbf{O}$ -beli elem foghat le. Ellenőrizni kell még, hogy az $\mathbf{A}$ - és $\mathbf{D}$ -beli kígyók előjeleinek szorzata megegyezik-e az egyesítésükkel kapott kígyó előjelével. Ez nyilván igaz, hisz egy $\mathbf{A}$ -t és egy $\mathbf{D}$ -t metsző sor nem lehet inverzióban, így az egyesített kígyó inverzióinak száma megegyezik a két kígyó inverzióinak összegével, az előjelet pedig a -1 -nek az inverziók számára emelt hatványa adja. $\square$

6.33. TÉTEL (2×2 -ES BLOKKMÁTRIX DETERMINÁNSA). Legyen

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix},$$

ahol $\mathbf{A}$ és $\mathbf{D}$ négyzetes mátrixok.

1. Ha $|\mathbf{A}| \neq 0$, akkor $|\mathbf{M}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}|$.
2. Ha $|\mathbf{D}| \neq 0$, akkor $|\mathbf{M}| = |\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}| |\mathbf{D}|$.

BIZONYÍTÁS. Ha $\mathbf{A}$ invertálható, akkor $\mathbf{M}$ alábbi alsó és felső blokkháromszögmátrix szorzatára való bontása segít:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Az utóbbi három mátrix közül a szélsők determinánsa 1, a középsőé pedig a bizonyítandó kifejezés. Az

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

felbontás bizonyítja a második összefüggést. $\square$

Vandermonde-determináns Bemutatunk egy fontos determinánst. Számtalan alkalmazása van, melyek egyike a polinominterpoláció.

6.34. PÉLDA (INTERPOLÁCIÓ MÁSODFOKÚ POLINOMOKRA). Legyen x , y és z három különböző valós, a , b és c három tetszőleges valós. Mutassuk meg, hogy egyetlen olyan legfőbb másodfokú f polinom létezik, melyre $f(x) = a$, $f(y) = b$ és $f(z) = c$.

MEGOLDÁS. Legyen $f : x \mapsto p + qx + rx^2$, ahol p , q és r a polinom ismeretlen együtthatói. Az $f(x) = a$, $f(y) = b$ és $f(z) = c$ egyenlőségek

a következő egyenletrendszerre vezetnek:

$$\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Ez az egyenletrendszer a 6.14. tétel szerint pontosan akkor oldható meg egyértelműen, ha az együtthatómátrix determinánsa nem 0. Osztóműveletekkel kezdjük az átalakítást:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} \stackrel{O_3 - xO_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ 1 & y & y^2 - xy \\ 1 & z & z^2 - xz \end{vmatrix} \stackrel{O_2 - xO_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & y - x & y^2 - xy \\ 1 & z - x & z^2 - xz \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} y - x & y^2 - xy \\ z - x & z^2 - xz \end{vmatrix} = (y - x) \begin{vmatrix} 1 & y \\ z - x & z^2 - xz \end{vmatrix} = (y - x)(z - x) \begin{vmatrix} 1 & y \\ 1 & z \end{vmatrix} \\ &= (y - x)(z - x)(z - y) \end{aligned}$$

Mivel x , y és z három különböző valós, ezért a determináns értéke nem 0, tehát az egyenletrendszer egyértelműen megoldható, vagyis egyetlen olyan polinom létezik, mely a feltételeket teljesíti. $\square$

E probléma, és a benne szereplő determináns általánosítása a következő definícióhoz vezet:

6.35. DEFINÍCIÓ (VANDERMONDE-DETERMINÁNS). Az $x_1, x_2, \dots, x_n$ számokhoz tartozó Vandermonde-determináns a

$$V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \quad (6.4)$$

determinánst vagy ennek

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

transzponáltját értjük. A hozzá tartozó mátrixot Vandermonde-mátrixnak nevezzük.

Mivel egy determináns értéke megegyezik transzponáltjának értékével, ezért a definícióbeli két determináns értéke is azonos, így mindig melyik alakot használjuk.

6.36. TÉTEL (VANDERMONDE-DETERMINÁNS ÉRTÉKE). Az $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($n > 1$) számokhoz tartozó Vandermonde-determináns értéke megegyezik az olyan $(x_j - x_i)$ alakú különbségek szorzatával, ahol $i < j$, azaz

$$V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i < j} (x_j - x_i).$$

BIZONYÍTÁS. A determináns utolsó oszlopával kezdve minden oszlop-ból vonjuk ki az előző oszlop x_1 -szeresét.

$$\begin{aligned} V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1 x_2 & \dots & x_2^{n-1} - x_1 x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1 x_n & \dots & x_n^{n-1} - x_1 x_n^{n-2} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

ami az első sora szerinti kifejtés, majd minden sorból kiemelve az első oszlopbeli elemet, a következő alakra vezet:

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1 x_2 & \dots & x_2^{n-1} - x_1 x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n^2 - x_1 x_n & \dots & x_n^{n-1} - x_1 x_n^{n-2} \end{vmatrix} \\ &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \dots (x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} \\ &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \dots (x_n - x_1) V_{n-1}(x_2, \dots, x_n) \\ &= \prod_{j>1} (x_j - x_1) \cdot V_{n-1}(x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Eredményül egy rekurzív képletet kaptunk, melyet önmagába helyettesítve, és a $V_2(x_{n-1}, x_n) = x_n - x_{n-1}$ képletet is fölhasználva a tételbeli összefüggésre jutunk. $\square$

Feladatok

6.27. Melyek igazak az alábbi állítások közül? (Az A itt mindig négyzetes mátrixot jelöl.)

1. A determináns folytonos függvénye minden elemének.
2. A determináns differenciálható függvénye minden elemének.
3. Ha egy determináns minden eleme racionális szám, akkor értéke is racionális.
4. Ha egy determináns minden sorában és minden oszlopában pontosan egy elem nem 0, akkor a determináns értéke nem 0.
5. Ha egy mátrix két kígyó összege, akkor determinánsa is két kígyó determinánsának összege.
6. Ha $i + j$ páratlan szám, akkor az előjeles A_{ij} aldetemináns negatív.
7. Ha egy determináns minden eleme pozitív, akkor értéke nem lehet negatív.
8. Mátrix inverze folytonos függvénye minden elemének.

Felbontás kígyók determinánsainak összegére

6.28. Válasszuk ki az alábbi determinánsokból az összes nemnulla determinánsú kígyót, és ezek segítségével számítsuk ki a determináns értékét!

a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

6.29. A determináns értékének kiszámítása nélkül mutassuk meg, hogy osztható 30-cal:

$$\begin{vmatrix} 24 & 40 & 68 \\ 27 & 15 & 31 \\ 51 & 55 & 53 \end{vmatrix}$$

6.30. Az alábbi – lottótípekből álló – determináns elemeinek csak a paritását vizsgálva minden számolás nélkül

igazoljuk, hogy

$$\begin{vmatrix} 12 & 25 & 28 & 44 & 56 \\ 21 & 34 & 54 & 68 & 80 \\ 10 & 40 & 52 & 69 & 72 \\ 24 & 36 & 53 & 56 & 84 \\ 18 & 24 & 28 & 58 & 87 \end{vmatrix} \neq 0.$$

6.31. A 4-edrendű determinánsok $4! = 24$ kígyó determinánsának összegére bonthatók. Soroljuk fel közülük azt a 12 darabot, melyet elemei szorzata után -1 -gyel kell szorozni! (A Sarrus-szabály 4-edrendű determinánsra csak 8 kígyóból állna, ezért nem használható!)

Kifejtési tétel

6.32. Tudjuk, hogy 504, 747 és 855 egyaránt oszthatók 9-cel. Ezt fölhasználva, a determináns értékének kiszámítása nélkül mutassuk meg, hogy az alábbi determináns osztható 9-cel:

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 7 & 4 & 7 \\ 8 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

6.33. Konstruáljunk olyan nemnulla értékű determinánst, melynek van olyan eleme, amelyet tetszőlegesen változtatva a determináns értéke nem változik.

Blokkdeterminánsok

6.34. Számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét kihasználva blokkstruktúrájukat!

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Speciális mátrixok determinánsa

6.35. Számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét!

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 8 & -1 & -8 & 1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 9 & -27 & 81 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & -8 & 16 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

$$c) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d+e & d^2+e^2 & d^3+e^3 \end{vmatrix}$$

6.36. Bizonyítsuk be, hogy

$$D = \begin{vmatrix} p^2 & p & 1 & qrs \\ q^2 & q & 1 & prs \\ r^2 & r & 1 & pqs \\ s^2 & s & 1 & pqr \end{vmatrix} \\ = (p-q)(p-r)(p-s)(q-r)(q-s)(r-s).$$

6.37. Igazoljuk, hogy az $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ képletekkel definiált Fibonacci-sorozat n -edik eleme egyenlő az alábbi $n \times n$ -es tridiagonális determinánssal:

$$a_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

6.38. Legyen

$$P_n = \begin{vmatrix} a_n & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a_{n-1} & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_{n-2} & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_1 \end{vmatrix}$$

Mutassuk meg, hogy

$$\frac{P_k}{P_{k-1}} = a_k + \frac{1}{a_{k-1} + \frac{1}{a_{k-2} + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_1}}}}}.$$

Vegyes feladatok

6.39. Elérhető-e egyetlen elem megváltoztatásával, hogy egy tetszőleges $n \times n$ -es nem szinguláris mátrix determinánsa 0-vá váljon?

6.40. **FERDE KIFEJTÉS** Vegyük egy determináns egy sorának elemeit, és szorozzuk meg mindegyiket egy másik sor azonos oszlopbeli eleméhez tartozó előjeles aldeterminánssával, majd képezzük ezek összegét. Ez mindig 0. Hasonló állítás igaz a determináns minden oszlopára is. Tehát az i -edik és u -adik sorra ($i \neq u$) és a j -edik és v -edik oszlopra ($j \neq v$):

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{uk} = 0, \quad \sum_{k=1}^n a_{kj} A_{kv} = 0.$$

6.41. Foglaljuk egyetlen állításba a kifejtési és a ferde kifejtési tételeket!

6.42. **MÁTRIX INVERZE A KIFEJTÉSI TÉTELEKKEL** A kifejtési és a ferde kifejtési (ld. az előző és a 6.40. feladatokat) segítségével adjunk új bizonyítást a **mátrix inverzére vonatkozó (6.2) formulára!**

6.43. Legyen $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ $n+1$ darab különböző valószínűség, $y_0, y_1, \dots, y_n$ ugyanannyi tetszőleges valószínűség. Mutassuk meg, hogy egyetlen olyan legfőbb n -edfokú p polinom van, melyre $p(x_i) = y_i$ minden $i = 0, \dots, n$ esetén.

Cramer-szabály és mátrix inverze

6.44.♥ Oldjuk meg Cramer-szabállyal az alábbi egyenlet-rendszereket!

$$\begin{array}{ll} a) \begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y = 4 \end{cases} & b) \begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases} \\ c) \begin{cases} x + 2y + 4z = 31 \\ 5x + y + 2z = 29 \\ 3x - y + z = 10 \end{cases} & d) \begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ y + 2z + w = 3 \\ z + 2w = 4 \end{cases} \end{array}$$

6.45.♥ Határozzuk meg a megadott mátrixok inverzének megadott indexű elemét!

$$a) \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}, a_{23} = ? \quad b) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, a_{24} = ?$$

6.46.♥ Határozzuk meg a megadott mátrixok inverzét a klasszikus adjungált kiszámolásával:

$$a) \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -7 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ c) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad d) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 e) \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} (abc \neq 0) \quad f) \begin{bmatrix} 1+i & i \\ i & i \end{bmatrix} \\
 g) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad h) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

6.47. Igazoljuk, hogy tetszőleges négyzetes mátrixra $\mathbf{A} \operatorname{adj}(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})\mathbf{I}$.

Véges testek fölötti mátrixok determinánsa*

6.48. A determináns kiszámításának megismert technikái véges testek fölött is működnek. Számítsuk ki az alábbi – a megadott test fölött értelmezett – mátrixok determinánsát!

$$\begin{aligned}
 a) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_5 \\
 b) \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 6 \\ 2 & 7 & 2 \end{bmatrix}, \mathbb{F}_{11}
 \end{aligned}$$

6.49. **VÉLETLEN BITMÁTRIX DETERMINÁNSA** Számítsuk ki $\mathbb{F}_2$ fölötti véletlen mátrixok determinánsát! Egy $\mathbb{F}_2^{5 \times 5}$ -beli mátrix determinánsa mekkora valószínűséggel 0? Kísérletezzünk számítógéppel, majd válaszoljuk meg a kérdést pontosan.

Projekt: a vektori szorzás általánosítása

6.50. Bizonyított tény, hogy nem lehet olyan bináris vektorműveletet definiálni az n -dimenziós tér vektorain, mely eredményül ugyanannak a térnek egy vektorát adja és rendelkezik a vektori szorzás műveleti tulajdonságaival. E feladatsorban egy másik irányú általánosítást dolgozunk fel, mely nem a bináris műveleti tulajdonságokat, hanem az eredménynek a vektorokra való merőlegességét tarja meg.

1. Fogalmazzuk meg, hogy mit kapunk eredményül, ha a vektori szorzásra vonatkozó formális

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

összefüggést 2×2 -es vagy 4×4 -es formális determinánssokra írjuk föl, vagyis mit ad eredményül az

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \quad \text{és az} \quad \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}$$

kifejezés?

2. Igazoljuk, hogy az n -dimenziós

$$\mathbf{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}),$$

$$\mathbf{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}),$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{a}_{n-1} = (a_{n-1,1}, a_{n-1,2}, \dots, a_{n-1,n})$$

vektorok által kifeszített $n - 1$ -dimenziós paralelepipedon térfogata megegyezik az

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \dots & \mathbf{e}_n \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

determináns abszolút értékével.

- Ha a fentiek alapján általánosított képlettel $n - 1$ darab n -dimenziós vektorhoz egy n -ediket rendelünk, akkor mit mondhatunk az így kapott n vektor körüljárásáról?
- Keressünk olyan formulát, mely a lineárisan független n -dimenziós $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}$ vektorokhoz olyan $\mathbf{a}_n$ vektort rendel, mely merőleges mindegyikükre, és amely azokkal az index szerinti sorrendben jobbrendszer alkot, és nincs a formulában -1 -hatvány!

6.51. **Határozzuk meg azt a vektort, mely merőleges a $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 2, 2, 2)$, $(1, 2, 3, 3)$ vektorokra, hossza megegyezik a három vektor által kifeszített paralelepipedon térfogatával, és e három vektor mellé negyedeknek véve velük jobbrendszer alkot.**

Megoldások

6.1. 1. Hamis. 2. Igaz. 3. Hamis. 4. Hamis. Az $|\mathbf{A}| \neq 0$ azzal ekvivalens, hogy az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer nem oldható meg egyértelműen, vagyis vagy nem oldható meg, vagy több megoldása is van. 5. Hamis.

6.2.

- a) -2 .
- b) 0 , mert van két azonos sora.
- c) 0 , mert a második sor az első konstansszorosa.
- d) 1 , mert háromszögmátrix determinánása a főátlóbeli elemek szorzata.
- e) 6 , mert háromszögmátrix determinánása a főátlóbeli elemek szorzata.
- f) 0 , mert van két azonos oszlopa.

6.3.

- a) a második sor az első -1 -szerese.
- b) a harmadik sor egyenlő az első kettő összegével.
- c) a harmadik sor egyenlő az első kettő összegével.
- d) a második sor az első és a harmadik számtani közepe (másként: a harmadik sorból kivonva a másodikat, majd a másodikból az első, mindkét esetben az $(1, 1, 1)$ vektort kapjuk, azaz így van két azonos sor).
- e) a második sor az első és a harmadik számtani közepe.
- f) a három sorvektor összege a zérusvektor.
- g) $\sin(\xi + \delta) = \sin \xi \cos \delta + \cos \xi \sin \delta$, így a harmadik oszlop az első és a második oszlop lineáris kombinációja, vagyis az oszlopvektorok lineárisan összefüggőek, tehát a determináns értéke 0 .
- h) Az első és második oszlop összege a harmadik oszlop (ill. az első és a második sor különbsége a harmadik sor), tehát az oszlopvektorok (ill. sorvektorok) lineárisan összefüggőek.

6.5. a) 125 , b) 40 , c) 1600 , d) $1/5$, e) 25 , f) $1/625$, g) $5/4$, h) 20 , i) 1 .

6.6.

$$a) \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

b) Az 1. és 2., azután az 1. és 3., végül az 1. és 5. sorokat

felcserélve:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -120.$$

c) $-1, -1, 1$.

d) 24 .

e) 24 .

f) Az első sort cseréljük fel az utolsóval, a másodikat az utolsó elöttivel, ..., így $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ sorcserét hajtottunk végre, tehát a determináns értéke $(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}$ (itt $\lfloor \cdot \rfloor$ az egészrész-függvényt jelöli). Ennek értéke 1 , ha $n = 4k$ vagy $n = 4k + 1$, és -1 , ha $n = 4k + 2$ vagy $n = 4k + 3$ valamilyen k természetes számra. Más alakban kapjuk meg az eredményt, ha csak szomszédos sorokat cserélünk: először az első sort visszük (szomszédos sorok cseréjével) az utolsóba, majd az eredeti determináns második sorát az utolsó elöttibe, ..., azaz az alábbi sorpárok cseréjét hajtjuk végre:

$(1, 2), (2, 3), (3, 4), \dots, (n-1, n),$

$(1, 2), (2, 3), \dots, (n-2, n-1),$

...

$(1, 2), (2, 3),$

$(1, 2).$

Ez összesen $(n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$ sorcserére. Minden sorcserével (-1) -szeresére változik a determináns értéke, így a végeredmény $(-1)^{n(n-1)/2}$. Természetesen e hatvány értéke is akkor 1 , ha $n = 4k$ vagy $4k + 1$, és akkor -1 , ha $n = 4k + 2$ vagy $4k + 3$. (Ugyanilyen gondolatmenettel kimutatható, hogy ha egy determináns mellékátlója felett csupa 0 áll, akkor a determináns értéke a mellékátlóbeli elemek szorzatának $(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}$ -szerese vagy más alakban $(-1)^{n(n-1)/2}$ -szerese.)

g) ld. az előző pontot.

6.7.

a) Az első sort kivonjuk a másodikból és a harmadikból, majd a másodikat a harmadikból:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

- b) Az első sort kivonva a többi sorból, majd a második sor kétszeresét kivonva a harmadikból, kapjuk, hogy

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{aligned} c) \quad & \begin{vmatrix} 3 & 8 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 8 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \\ & - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \\ & -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -16. \text{ Részle-} \end{aligned}$$

tezzük a megoldás lépéseit:

1. lépés: Cseréljük ki az első és második sort, hogy az első sor első eleme 1 legyen, s így ne kelljen törtekkel számolni. A determináns értéke (-1) -szeresére változik.
2. lépés: Az első sor (-3) -, (-1) - ill. (-2) -szeresét adjuk a második, harmadik ill. negyedik sorhoz.
3. lépés: Hogy a második sor második eleme is 1 legyen, emeljük ki 2-t a második sorból.
4. lépés: A második sort ill. (-1) -szeresét adjuk a harmadik ill. negyedik sorhoz.
5. lépés: Adjuk a harmadik sort a negyedikhez. A determináns értéke -16 .

d) 144.

6.8.

- a) $n = 1$ esetén $1 + x_1 y_1$, $n = 2$ esetén $x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_1 y_2 - x_2 y_1$ a determináns értéke. Ha $n \geq 3$, akkor a determináns értéke 0. Ezt úgy bizonyítjuk, hogy először a determinánst két determináns összegére bontjuk, majd mindkettőről belátjuk, hogy értékük 0. Az első determináns csupa 1-esből álló első sorát kivonjuk az összes többi sorból, az így kapott determináns értéke pedig valóban 0, hisz ha $x_2 = 0$, akkor a második sor csupa 0-ból áll, ha pedig $x_2 \neq 0$, akkor a második sorának x_3/x_2 -szerese egyenlő a harmadik sorral. A második determináns értéke is 0, hiszen ha $x_1 = 0$, akkor az első sor csupa 0-ból áll, ha pedig $x_1 \neq 0$, akkor az első sor x_i/x_1 -szeresét kivonva az i -edik sorból egy olyan determinánst kapunk, amelyben a második sortól kezdve minden sor 1-esekből áll, tehát a determinánsnak van

két azonos sora.

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1+x_2 y_1 & 1+x_2 y_2 & \dots & 1+x_2 y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+x_n y_1 & 1+x_n y_2 & \dots & 1+x_n y_n \end{vmatrix} \\ & + \begin{vmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \dots & x_1 y_n \\ 1+x_2 y_1 & 1+x_2 y_2 & \dots & 1+x_2 y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+x_n y_1 & 1+x_n y_2 & \dots & 1+x_n y_n \end{vmatrix} \\ & = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & \dots & x_2 y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n y_1 & x_n y_2 & \dots & x_n y_n \end{vmatrix} \\ & + \begin{vmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \dots & x_1 y_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} \\ & = 0. \end{aligned}$$

- b) $(1 - a^n)^{n-1}$. Vonjuk ki az első sor a^{n-1} -szeresét a második sorból, a^{n-2} -szeresét a harmadik sorból, ..., a -szorosát az utolsó sorból: így a főátló alatt csak nullák lesznek, a determináns értéke.
- c) $(a + (n-1)b)(a-b)^{n-1}$. Első megoldás: adjunk minden sort az elsőhöz, emeljük ki a közös $a + (n-1)b$ értéket, majd e sor b -szeresét vonjuk ki minden sorból. Másik megoldás: az utolsó sorral kezdve mindegyik sorból vonjuk ki a fölötte lévőt, majd jobbról kezdve mindegyik oszlopot adjuk a megelőzőhöz.

6.9. Az eredmény 48. Megoldás Sage-ben:

```
g = graphs.PetersenGraph()
G = matrix(g)
G.det()
```

6.12. Az A előáll PLU alakban, ahol P permutációs mátrix, L alsó, U felső háromszögmátrix. Az L és az U háromszögmátrixok, így determinánsuk megegyezik transzponáltjuk determinánsával, hisz a főátlóbeli elemek helyben maradnak a transzponálás során. A P permutációs mátrix determinánsa 1 vagy -1 , transzponáltja pedig megegyezik inverzével, így $\det(I) = \det(PP^T) = \det(P) \det(P^T) = 1$, azaz P és P^{-1} egyszerre 1 vagy -1 , tehát megegyeznek. Végül $\det(A) = \det(PLU) = \det(P) \det(L) \det(U)$, és $\det(A^T) = \det((PLU)^T) = \det(U^T L^T P^T) = \det(U) \det(L) \det(P)$ összevetése bizonyítja az állítást.

6.13. $\det(E_{S_i + cS_j}) = 1$, $\det(E_{S_i \leftrightarrow S_j}) = -1$, $\det(E_{cS_i}) = c$.

6.14. Felhasználva, hogy $\binom{n}{k} - \binom{n-1}{k} = \binom{n-1}{k-1}$, elvégezve az

ajánlott sor-, majd oszlopműveleteket, majd azt megismételve az egyre kisebb bal alsó részdeterminánssal kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \dots & \binom{n-1}{0} \\ 1 & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \dots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \binom{n-1}{n-2} & \binom{n}{n-2} & \dots & \binom{2n-3}{n-2} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \dots & \binom{n-2}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \dots & \binom{n-1}{1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \binom{n-2}{n-2} & \binom{n-1}{n-2} & \dots & \binom{2n-4}{n-2} \end{vmatrix} \\
 &= \dots = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{0}{0} \end{vmatrix} = 1.
 \end{aligned}$$

6.15. Az első sort kivonva a másodikból és a harmadikból két konstans sort kapunk, melyek egymás konstansszorosai, tehát a determináns értéke 0.

6.16. Vonjuk ki az első oszlopot a másodikból és a harmadikból. Az így kapott harmadik oszlop kétszerese a másodiknak, tehát a determináns értéke 0.

6.18. Első megoldás: vonjuk ki az első oszlopot a többiből, ezzel eltüntetve azokból a négyzetes tagot, majd vonjuk a második oszlop megfelelő skalárszorását a harmadik és negyedik oszlopból, hogy elimináljuk azok lineáris tagját, végül a harmadik oszlop konstansszorosát vonjuk ki a negyedikből, hogy ott csak 0-k maradjanak.

Második megoldás: Elég megmutatnunk, hogy a determináns oszlopai lineárisan összefüggőek. Az $a^2x + (a+1)^2y + (a+2)^2z + (a+3)^2w = 0$ egyenlet a homogén

$$x + y + z + w = 0$$

$$2y + 4z + 6w = 0$$

$$y + 4z + 9w = 0$$

egyenletrendszerre vezet, aminek biztosan van nemtriviális megoldása, hisz 4 ismeretlenhez csak 3 egyenlet van adva. (Megoldani már szükségtelen, elég a megoldás létezését igazolni, de például az $(x, y, z, w) = (1, -3, 3, -1)$ egy megoldás).

6.20. Mivel a koordináták báziscserében való változásáról szóló **4.21.** állításban láttuk, hogy a koordinátás alakokat a $[\mathbf{v}_i]_C = \mathbf{A}_{C \leftarrow B}[\mathbf{v}_i]_B$ képlet kapcsolja össze, ezért a $\mathbf{v}$

vektorok koordinátás alakjaiból, mint oszlopvektorokból képzett mátrixokra $\mathbf{V}_C = \mathbf{A}_{C \leftarrow B}\mathbf{V}_B$, így determinánsaikra $|\mathbf{V}_C| = |\mathbf{A}_{C \leftarrow B}||\mathbf{V}_B|$.

6.21. Egyrészt $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^\top)$, másrészt mivel $\mathbf{A}^\top = -\mathbf{A}$, ezért $\det(\mathbf{A}^\top) = (-1)^n \det(\mathbf{A})$, azaz $\det(\mathbf{A}) = -\det(\mathbf{A})$, amiből $\det(\mathbf{A}) = 0$.

6.22. $|\mathbf{A}^2| = |\mathbf{A}|^2 = |\mathbf{A}||\mathbf{A}| = |\mathbf{A}||\mathbf{A}^\top| = |\mathbf{A}\mathbf{A}^\top|$.

6.23. Mindhárom determinánst a következőképpen számíthatjuk ki. Legyen $\mathbf{A}$ a determinánshoz tartozó mátrix. Tekintsük az $|\mathbf{A}\mathbf{A}^\top|$ determinánst. Ezt könnyű kiszámítani (hisz a főátlón kívül csak nullák állnak), s ennek négyzetgyöke lesz a determináns értéke. Ezek alapján a három determináns értéke: $a^2 + b^2$, $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$, $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2)^4$.

6.24. A determinánsok szorzási szabályát is felhasználva:

$$\begin{aligned}
 (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) &= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2 & x_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -y_2 & y_1 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} x_1y_1 - x_2y_2 & x_1y_2 + x_2y_1 \\ -x_2y_1 - x_1y_2 & -x_2y_2 + x_1y_1 \end{vmatrix} \\
 &= (x_1y_1 - x_2y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2.
 \end{aligned}$$

A négy illetve a nyolc négyzet összegére vonatkozó analóg összefüggések hasonlóan bizonyíthatóak. (Hurwitz bebizonyította, hogy ha n négyzetszám összegére igaz a feladatbelivel analóg összefüggés, akkor $n = 1, 2, 4$ vagy 8 .)

6.25. Minthogy lineáris transzformáció alteret altérbe, eltolt alteret eltolt altérbe visz, e téglalap képe egy (esetleg elfajuló) téglalap lesz. Ezért elég kiszámolni csak a téglalap 4 csúcának képét. Ez kiszámolható egyetlen mátrixszorzással:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & p+x & p & p+x \\ q & q & q+y & q+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap+bq & ap+ax+bq & ap+bq+by & ap+ax+bq+by \\ cp+dq & cp+cx+dq & cp+dq+dy & cp+cx+dq+dy \end{bmatrix}$$

Innen leolvasható, hogy a téglalap képeként kapott paralelogramma oldalvektorai (ax, cx) és (by, dy) , és így területe

$$|(ax)(dy) - (cx)(by)| = |ad - bc|xy.$$

Eszerint tehát a téglalap képének területe független a téglalap helyzetétől, és mindig a téglalap területének $|ad - bc|$ -szerese.

6.27. 1. Igaz. 2. Igaz. 3. Igaz. 4. Igaz. 5. Hamis. Mátrixok összegének determinánsa általában nem egyenlő determinánsaik összegével (ld. a **6.28.** feladatot). 6. Hamis. Egy al-determináns értéke bármilyen előjelű lehet, az előjeles al-determinánst belőle úgy kapjuk, hogy páratlan $i + j$ esetén

megszorozzuk -1 -gyel. 7. Hamis. 8. Hamis. Csak azokon a helyeken folytonos függvénye a mátrix elemeinek, ahol a determinánsa nem 0.

6.28.

$$a) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 8$$

$$b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 + 16 - 4 - 4 = 9$$

$$c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

6.29. Az első sor minden eleme páros, az első oszlop minden eleme osztható 3-mal, a második oszlop minden eleme osztható 5-tel, tehát minden kígyó osztható $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ -cal, így az összegük is.

6.30. Csak egyetlen kígyó áll csupa páratlan számból, így a kígyók összegére bontásnál csak annak determinánsa páratlan, a többi páros, összegük tehát páratlan, vagyis nem lehet 0.

6.31. Megadjuk, hogy melyik sorban hányadik elem lesz a kígyóba választva. A 12 kígyó: 1243, 1324, 1432, 2134, 2341, 2413, 3142, 3214, 3421, 4123, 4231, 4312. Ezek alapján a 12 determináns – a kígyó elemeit négyzettel jelölve:

$$\begin{vmatrix} \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 \\ 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 \\ 0 & \blacksquare & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ \blacksquare & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & \blacksquare & 0 \\ \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & \blacksquare & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \blacksquare & 0 \\ 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \blacksquare & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ \blacksquare & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 \\ \blacksquare & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \blacksquare & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

6.32. Adjuk a harmadik oszlophoz az első 100-szorosát és a második 10-szeresét. Így az utolsó sorban a megadott, 9-cel osztható számok szerepelnek. Ha e sor szerint fejtjük ki a determinánst, akkor minden összeadandó osztható lesz 9-tel, tehát a determináns is.

6.33. Egy olyan determinánst kell konstruálni, melynek van egy nulla értékű aldeterminánsa. például a

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

determináns értéke 1, de a 9-hez tartozó aldetermináns értéke 0, így a második sor vagy oszlop szerinti kifejtésben e szám 0-val szorzódik, vagyis nem befolyásolja a determináns értékét.

6.34.

a) $-6 \cdot 6 = -36$, mert a blokkmátrixok determinánsára vonatkozó tétel szerint a bal felső 2×2 -es és a jobb alsó 3×3 -as determinánsok szorzata adja az eredményt.

b) 24, mert a bal felső 1×1 -es és a jobb alsó 4×4 -es determinánsok értéke 1, illetve 24, és ezek szorzata 24. Másik megoldáshoz jutunk, ha a determinánst az első oszlopa, az egyetlen kiszámítandó aldeterminánst az első sora... szerint fejtjük ki.

6.35.

a) A determináns a 2, -1 , -2 , 1 számokból képezett Vandermonde-determináns, így értéke: $(-1-2)(-2-2)(1-2)(-2-(-1))(1-(-1))(1-(-2)) = 72$.

b) Vandermonde-determináns; értéke -2880 .

c) A determináns két Vandermonde-determináns összegére bomlik:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & e & e^2 & e^3 \end{vmatrix} \\ = (b-a)(c-a)(c-b) \\ \times [(d-a)(d-b)(d-c) + (e-a)(e-b)(e-c)].$$

6.36. Ha $pqrs \neq 0$, akkor szorozzuk be az első sort p -vel, a másodikat q -val, a harmadikat r -rel, a negyediket s -sel, majd a negyedik oszlopból emeljük ki $pqrs$ -t; így egy Vandermonde-determinánst kapunk:

$$D = \frac{pqrs}{pqrs} \begin{vmatrix} p^3 & p^2 & p & 1 \\ q^3 & q^2 & q & 1 \\ r^3 & r^2 & r & 1 \\ s^3 & s^2 & s & 1 \end{vmatrix} \\ = (q-p)(r-p)(s-p)(r-q)(s-q)(s-r).$$

Ha $pqrs = 0$, például $s = 0$, akkor az eredeti determináns negyedik oszlopa szerinti kifejtéssel kapjuk, hogy

$$D = pqr \begin{vmatrix} p^2 & p & 1 \\ q^2 & q & 1 \\ r^2 & r & 1 \end{vmatrix}.$$

Ezekből rövid átalakítás után látható, hogy az összefüggés ebben az esetben is fennáll.

6.37. $a_1 = \det[1] = 1$, $a_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2$, az $(n \times n)$ -es determinánst első sora szerint kifejtve kapjuk, hogy $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

6.39. Igen. Tekintsük a determináns első sor szerinti kifejtését! Ha mindegyik elemhez tartozó előjeles alldetermináns 0 lenne, akkor a mátrix szinguláris lenne, így valamelyik elemhez tartozó alldetermináns nem 0. Legyen pl. $A_{1j} \neq 0$. Ekkor a kifejtés összes többi tagját összevonva kapjuk, hogy $\det \mathbf{A} = a_{1j}A_{1j} + c$. Mivel $A_{1j} \neq 0$, ezért az $a_{1j}A_{1j} + c = 0$ egyenlet megoldható a_{ij} -re, tehát ennek az elemnek a megváltoztatása 0-vá teszi a determinánst.

6.40. Ha az i -edik sor elemeit az u -adik sorhoz tartozó előjeles alldeterminánsokkal szorozzuk, akkor az u -adik sor elemeit nem használjuk, tehát szabadon megváltoztathatjuk. Másoljuk az i -edik sort az u -adik helyére, tehát minden k -ra $a_{ik} = a_{uk}$. Ekkor egyrészt $\sum_{k=1}^n a_{ik}A_{uk} = \sum_{k=1}^n a_{uk}A_{uk}$, azaz e determináns u -adik sor szerinti kifejtését kaptuk, másrészt e determinánsnak van két azonos sora, tehát determinánsa 0. Az oszlopokra vonatkozó állítás egy transzponálással visszavezethető erre.

6.41. A két tétel képletei közös képletbe foglalhatók. Sorokra:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}A_{uk} = \begin{cases} \det \mathbf{A}, & \text{ha } i = u, \\ 0, & \text{ha } i \neq u, \end{cases} \quad (6.5)$$

oszlopokra:

$$\sum_{k=1}^n a_{kj}A_{kv} = \begin{cases} \det \mathbf{A}, & \text{ha } j = v, \\ 0, & \text{ha } j \neq v. \end{cases} \quad (6.6)$$

6.42. A két kifejtési tételből adódik, hogy

$$[a_{ij}][A_{ij}]^T = \det(\mathbf{A})\mathbf{I},$$

ugyanis $[a_{ij}]$ i -edik sorának és $[A_{ij}]^T$ u -adik oszlopának, azaz $[A_{ij}]$ u -adik sorának skaláris szorzata a (6.5) képlet szerint $\det(\mathbf{A})$, ha $i = u$, azaz a szorzat főátlójában, egyebütt pedig 0. Ebből pedig mindkét képlet adódik.

6.46.

a) Az előjeles alldeterminánsok mátrixának transzponáltja:

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -7 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -7 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -7 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 42 & 4 & -49 \\ -11 & -1 & 13 \end{bmatrix}$$

Mivel a mátrix determinánsa 1, ezért inverze megegyezik az előjeles alldeterminánsok előbb kiszámolt mátrixával.

b) Az előjeles alldeterminánsok mátrixának transzponáltja:

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 4 \\ 4 & 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Mivel a mátrix determinánsa 16, ezért az inverz mátrix

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

c) Mivel $\det(\mathbf{A}) = 1$, ezért $\mathbf{A}^{-1}$ megegyezik az előjeles alldeterminánsok mátrixának transzponáltjával. Ennek mind a 16 elemét nem kell kiszámolni, mert felső háromszögmátrix inverze felső háromszögmátrix. Hasonlóan könnyen látható, hogy a főátlóbeli elemekhez tartozó előjeles alldeterminánsok értéke 1. Tehát csak a főátló alatti elemek előjeles alldeterminánsait kell kiszámolni. Példaként egyet mutatunk:

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

Hasonlóan kiszámolva a többit is kapjuk, hogy

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mi lehet e feladat általánosítása, és mi a válasz?

d) A mátrixból csak egy nemnulla kigyó választható ki, így determinánsa könnyen számolható: $\det \mathbf{B} = 16$. Az inverz kiszámításához nem kell sok alldeterminánst számolni, mert nagy részük láthatóan 0 értékű. Vegyük figyelembe a számolásnál azt is, hogy $\mathbf{B}$ szimmetrikus, így egyrészt a szimmetrikusan elhelyezkedő elemek közül csak az egyiket kell kiszámolni, másrészt a szimmetria miatt a végén szükségtelen a transzponálás.

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 0 & 8 & 0 & -8 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ -8 & 0 & 8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

e) Az inverz

$$\frac{1}{abc} \begin{bmatrix} bc & 0 & 0 \\ 0 & ac & 0 \\ 0 & 0 & ab \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix},$$

ha $abc \neq 0$. Az $abc = 0$ esetben a mátrix nem invertálható.

f) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1-i \end{bmatrix}.$

g) Az inverz $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6.48. a) A három eredmény: 1, 2, 4. Mivel mindhárom test esetén ugyanazokat a számolásokat kell elvégezni, csak más modulus szerinti maradék lesz az eredmény, legegyszerűbb, ha az egészek fölött számolunk, és annak maradékait tekintjük. Valóban, az egészek fölött -1 a determináns, és $-1 \bmod 2 = 1$, $-1 \bmod 3 = 2$, $-1 \bmod 5 = 4$. b) 5. Legegyszerűbb, ha az első sor 2-szeresét hozzáadjuk a második, és 3-szorosát a harmadik sorhoz.

6.49. Sage-kód egy $\mathbb{F}_2$ fölötti véletlen mátrix kiírására:

```
sage: random_matrix(GF(2), 5)
```

```
[1 0 0 1 1]
```

```
[1 1 1 0 1]
```

```
[1 1 1 0 0]
```

```
[1 0 0 0 0]
```

```
[0 0 1 0 0]
```

```
sage: _.det()
```

```
1
```

Hány olyan $\mathbb{F}_2^{5 \times 5}$ -beli mátrix van, amelynek determinánsa nem 0? Az első sora bármelyik vektor lehet, kivéve a

0-vektort, így $2^5 - 1$ lehetőség van. A második sor nem lehet ez a vektor és a 0-vektor, ez $2^5 - 2$ lehetőség. A harmadik vektor nem lehet az előző két vektor által kifeszített altér, melynek a 0-vektorral együtt $2^2 = 4$ eleme van, e vektor kiválasztására tehát $2^5 - 2^2$ lehetőség adódik. Hasonlóan folytatva kapjuk, hogy az összes független vektorötösök – azaz a nemnulla értékű determinánsok – száma $(2^5 - 2^0)(2^5 - 2^1)(2^5 - 2^2)(2^5 - 2^3)(2^5 - 2^4)$. Ha ezt elosztjuk az összes $\mathbb{F}_2^{5 \times 5}$ -beli mátrixok számával, 0.2980-t kapunk, így a determináns 0.7020 valószínűséggel lesz 0.

6.50. 3. Ha a megadott $n - 1$ darab vektort $\mathbf{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$, $\dots$, $\mathbf{a}_{n-1} = (a_{n-1,1}, a_{n-1,2}, \dots, a_{n-1,n})$ jelöli, akkor az a formula, amiben van -1 -hatvány, az eddigiek alapján a következő:

$$(-1)^{n-1} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \dots & \mathbf{e}_n \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

Ennek könnyű olyan változatát kitalálni, melyben eltűnik a -1 -hatvány, a következő kettő bármelyike jó:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \dots & \mathbf{e}_n \end{vmatrix} \quad \text{vagy} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & \mathbf{e}_1 \\ a_{12} & a_{22} & \dots & \mathbf{e}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & \mathbf{e}_n \end{vmatrix}.$$

6.51. Az előző feladat szerint a kért vektort a következőképp kaphatjuk meg:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_4 - \mathbf{e}_3$$

azaz a negyedik vektor $(0, 0, -1, 1)$.

7

Lineáris leképezések geometriája

E fejezetet a lineáris leképezések geometriai indíttatású megközelítése dominálja. Merőlegesség, távolság, vetítés, forgatás, és ezek általánosításai lesznek az alapfogalmak.

2- és 3-dimenziós geometriai transzformációk mátrixa

Az 5.49. tétel bizonyításában megkonstruáltuk egy lineáris $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ leképezéshez azt a mátrixot, mely ezt a leképezést generálja, nevezetesen bizonyítottuk, hogy minden $\mathbf{x}$ vektorra

$$A\mathbf{x} = [A\mathbf{e}_1 | A\mathbf{e}_2 | \dots | A\mathbf{e}_n] \mathbf{x}.$$

Először vizsgáljunk meg néhány geometriailag leírható $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ és $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezést.

Forgatás Vizsgáljuk meg a síbeli pont körüli és a térbeli egyenes körüli forgatások mátrixát!

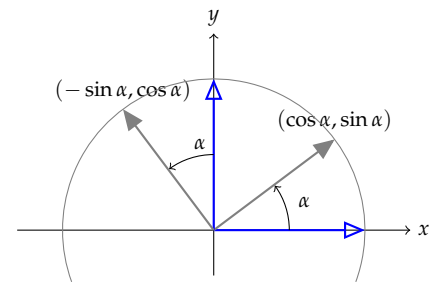
7.1. ÁLLÍTÁS (A FORGATÁS MÁTRIXA). A sík vektorait egy pont körül α szöggel elforgató leképezés mátrixa

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

BIZONYÍTÁS. Az 5.52. állítás szerint a forgatás lineáris leképezés, így van mátrixa, melynek alakja $[A\mathbf{i} \ A\mathbf{j}]$, ahol $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ jelöli az $\mathbb{R}^2$ standard bázisának elemeit. E vektorokat szemlélteti a 7.1 ábra.

Az $A\mathbf{i}$ vektor megegyezik $\mathbf{i}$ elforgatottjával, amelynek ismerjük koordinátáit: $A\mathbf{i} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}$. A $\mathbf{j}$ vektor α szöggel való elforgatottja megegyezik az $A\mathbf{i}$ vektor $\pi/2$ szöggel való elforgatottjával, azaz $A\mathbf{j} = \begin{bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix}$. Így az A -hoz tartozó mátrix

$$A = [A\mathbf{i} \ A\mathbf{j}] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$



7.1. ábra: Az $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ vektorok α szöggel való elforgatottjai

Tehát egy $\mathbf{x}$ vektor α szöggel való elforgatottja $\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \mathbf{x}$. $\square$

7.2. PÉLDA (FORGATÁS EGY TETSZŐLEGES PONT KÖRÜL). *Határozzuk meg a koordinátáit a $(4, 3)$ pont $(2, 1)$ körül $\pi/3$ radiánnal való elforgatásával kapott pontnak!*

MEGOLDÁS. A forgatás középpontját toljuk az origóba, így a $(4, 3)$ pont a $(4, 3) - (2, 1) = (2, 2)$ pontba kerül. E pontot, illetve az oda mutató helyvektort forgassuk el $\pi/3$ radiánnal, azaz 60° -kal. Ez a forgatás mátrixával való beszorzással megkapható:

$$\begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \sqrt{3} \\ 1 + \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

E pontot a $(2, 1)$ vektorral eltoljuk, hogy ne az origó, hanem a $(2, 1)$ pont körüli elforgatottat kapjuk meg:

$$\begin{bmatrix} 1 - \sqrt{3} \\ 1 + \sqrt{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - \sqrt{3} \\ 2 + \sqrt{3} \end{bmatrix} \quad \square$$

7.3. PÉLDA (KOORDINÁTATENGELY KÖRÜLI FORGATÁS A TÉRBEN). *Írjuk fel a koordinátatengelyek körüli α szöggel való forgatás mátrixát.*

MEGOLDÁS. Tekintsük először a z -tengely körüli forgatást. Ekkor az $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ vektorok úgy transzformálódnak, mint a sík elforgatásánál, míg a $\mathbf{k}$ vektor helyben marad, tehát a bázisvektorok így transzformálódnak:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Így a z -tengely körüli forgatás mátrixa:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hasonlóképp kapjuk az x - és az y -tengely körüli forgatás mátrixát is:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Ez utóbbi mátrix előjelhibásnak tűnhet, de nem az, ha itt is a forgatás tengelyiránya felől nézve pozitív a forgásirány, azaz $\mathbf{k}$ -t forgatjuk $\mathbf{i}$ -be, és nem fordítva. $\square$

7.4. TÉTEL (TENGEY KÖRÜLI FORGATÁS – RODRIGUES-FORMULA). Ha $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$ egységvektor, akkor az $\mathbf{e}$ körüli α szögű forgatás tetszőleges $\mathbf{x}$ vektort az

$$\mathbf{x} \cos \alpha + (\mathbf{e} \times \mathbf{x}) \sin \alpha + \mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{x})(1 - \cos \alpha) \quad (7.1)$$

vektorba visz. E leképezés mátrixa

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{I} + \sin \alpha [\mathbf{e}]_{\times} + (1 - \cos \alpha) [\mathbf{e}]_{\times}^2 \\ &= \mathbf{I} + \sin \alpha [\mathbf{e}]_{\times} + (1 - \cos \alpha) (\mathbf{e}\mathbf{e}^T - \mathbf{I}) \end{aligned} \quad (7.2)$$

BIZONYÍTÁS. Ha $\mathbf{x}$ párhuzamos $\mathbf{e}$ -vel, akkor elforgatottja önmaga, és valóban, ekkor $(\mathbf{e} \times \mathbf{x}) = \mathbf{0}$ és $\mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{x}$, így a (7.1) képlet $\mathbf{x}$ -et ad eredményül.

A továbbiakban legyen tehát $\mathbf{x}$ az $\mathbf{e}$ -vel nem párhuzamos vektor. Jelölje $\mathbf{x}$ -nek az $\mathbf{e}$ -re eső merőleges vetületét $\mathbf{x}_e$, azaz legyen

$$\mathbf{x}_e = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{x})\mathbf{e}.$$

Jelölje továbbá az $\mathbf{x}$ vektornak az $\mathbf{e}$ -re merőleges síkra eső merőleges vetületét $\mathbf{x}_1$, azaz

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x} - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{x})\mathbf{e}.$$

Végül legyen $\mathbf{x}_2 = \mathbf{e} \times \mathbf{x}$. Világos, hogy $\mathbf{x}_1 \perp \mathbf{x}_2$. E két vektor hossza:

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_1| &= |\mathbf{x}| \sin \gamma, \\ |\mathbf{x}_2| &= |\mathbf{e}| |\mathbf{x}| \sin \gamma = |\mathbf{x}| \sin \gamma, \end{aligned}$$

tehát $|\mathbf{x}_1| = |\mathbf{x}_2|$. Ha R jelöli a forgató leképezést, akkor

$$\begin{aligned} R\mathbf{x}_1 &= \mathbf{x}_1 \cos \alpha + \mathbf{x}_2 \sin \alpha \\ &= (\mathbf{x} - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{x})\mathbf{e}) \cos \alpha + (\mathbf{e} \times \mathbf{x}) \sin \alpha. \end{aligned}$$

Mivel $R\mathbf{x}_e = \mathbf{x}_e$, és $\mathbf{x} = \mathbf{x}_e + \mathbf{x}_1$, ezért

$$\begin{aligned} R\mathbf{x} &= R\mathbf{x}_e + R\mathbf{x}_1 \\ &= (\mathbf{e} \cdot \mathbf{x})\mathbf{e} + (\mathbf{x} - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{x})\mathbf{e}) \cos \alpha + (\mathbf{e} \times \mathbf{x}) \sin \alpha \\ &= \mathbf{x} \cos \alpha + (\mathbf{e} \times \mathbf{x}) \sin \alpha + \mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{x})(1 - \cos \alpha). \end{aligned}$$

Ezzel igazoltuk a (7.1) formulát. A leképezés könnyen átírható mátrix-szorzat alakba:

$$\cos \alpha \mathbf{I} \mathbf{x} + [\mathbf{e}]_{\times} \mathbf{x} \sin \alpha + (1 - \cos \alpha) (\mathbf{e}\mathbf{e}^T) \mathbf{x},$$

így a forgatás $\mathbf{R}$ mátrixa

$$\mathbf{R} = \cos \alpha \mathbf{I} + \sin \alpha [\mathbf{e}]_{\times} + (1 - \cos \alpha) (\mathbf{e}\mathbf{e}^T).$$

Egyszerű számolással igazolható, hogy $\mathbf{e}\mathbf{e}^T - \mathbf{I} = [\mathbf{e}]_{\times}^2$ (ld. ?? feladat), amiből azonnal adódnak a (7.2) képletei. $\square$

7.5. PÉLDA (FORGATÁS MÁTRIXA). Írjuk fel annak a leképezésnek a mátrixát, mely az $(2, 0, 1)$ vektor egyenesét körül α szöggel forgat, ahol $\cos \alpha = \frac{2}{3}$. Határozzuk meg a $(3, 2, -1)$ vektor elforgatottját! Más eredményt kapnánk-e, ha a $(-2, 0, -1)$ vektor egyenesét körül kéne forgatnunk α szöggel?

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 0, 1)$ egységvektorral

$$[\mathbf{e}]_{\times} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{e}]_{\times}^2 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Így rövid számolás után a forgatás mátrixa

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{I} + \sin \alpha [\mathbf{e}]_{\times} + (1 - \cos \alpha) [\mathbf{e}]_{\times}^2 \\ &= \begin{bmatrix} 14/15 & -1/3 & 2/15 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/15 & 2/3 & 11/15 \end{bmatrix} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 14 & -5 & 2 \\ 5 & 10 & -10 \\ 2 & 10 & 11 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

és $\mathbf{R} \cdot (3, 2, -1) = (2, 3, 1)$.

A $(-2, 0, -1)$ vektor körüli forgatással más eredményt kapnánk, hisz a forgatás iránya a vektor irányától is függ, és mivel az az ellenkezőjére változott, így a forgásirány is ellenkező irányú lesz. $\square$

7.6. PÉLDA (A FORGATÁS MÁTRIXÁNAK INVERZE). Határozzuk meg a síkot α szöggel elforgató mátrix inverzét!

MEGOLDÁS. Először megállapítjuk, hogy a forgatás mátrixa invertálható, ugyanis determinánsa nem 0, hiszen $\begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$. Az egyik lehetséges megoldás, hogy egyszerűen a 2×2 -es mátrixok 5.12. tételben leírt invertálási technikáját alkalmazva határozzuk meg az inverzet, mely szerint

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Egy másik megoldás arra épül, hogy a ?? állítás szerint két mátrix pontosan akkor inverze egymásnak, ha a hozzájuk tartozó lineáris leképezések is inverzei egymásnak. Az α szöggel való elforgatásnak, mint leképezésnek az inverze nyilvánvalóan a $-\alpha$ szöggel való elforgatás, tehát mátrixaik is egymás inverzei. Eszerint

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}. \quad \square$$

Merőleges vetítés A merőlegesség mind az elméleti matematika, mind az alkalmazások fontos fogalma.

7.7. ÁLLÍTÁS (EGYENESRE VALÓ MERŐLEGES VETÍTÉS MÁTRIXA). A sík vagy a tér vektorait egy $\mathbf{b}$ irányvektorú egyenesre merőlegesen vetítő leképezés mátrixa

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\mathbf{b}^T \mathbf{b}} \mathbf{b} \mathbf{b}^T. \quad (7.3)$$

Speciálisan e mátrix alakja

$$\mathbf{P} = \mathbf{e} \mathbf{e}^T, \quad (7.4)$$

ha az egyenes irányvektora az $\mathbf{e}$ egységvektor.

BIZONYÍTÁS. Az 5.52. állítás szerint a merőleges vetítés lineáris leképezés, van tehát mátrixa. Az 1.24. tétel szerint ha $\mathbf{x}$ egy tetszőleges vektor és $\mathbf{e}$ egy egységvektor, akkor $\mathbf{x}$ -nek a $\mathbf{e}$ egyenesére eső merőleges vetülete

$$\text{proj}_{\mathbf{e}} \mathbf{x} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}) \cdot \mathbf{e}.$$

Ennek mátrixszorzással való átírása:

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{e} = \mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{e}(\mathbf{e}^T \mathbf{x}) = (\mathbf{e} \mathbf{e}^T) \mathbf{x},$$

tehát

$$\text{proj}_{\mathbf{e}} \mathbf{x} = (\mathbf{e} \mathbf{e}^T) \mathbf{x}.$$

Ebből kiolvasható, hogy az $\mathbf{e}$ egységvektor-irányú egyenesre való merőleges vetítés mátrixa

$$\mathbf{P} = \mathbf{e} \mathbf{e}^T.$$

Ha $\mathbf{b}$ egy tetszőleges zérustól különböző vektor, akkor az $\mathbf{e} = \mathbf{b}/|\mathbf{b}|$ jelölés mellett $\mathbf{P} = \mathbf{e} \mathbf{e}^T = \mathbf{b} \mathbf{b}^T / |\mathbf{b}|^2$, ami $|\mathbf{b}|^2 = \mathbf{b}^T \mathbf{b}$ behelyettesítésével bizonyítja a tételt. $\square$

► A tételből következik, hogy a sík vektorait az x -tengellyel α szöget bezáró egyenesre merőlegesen vetítő lineáris leképezés mátrixa

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix}, \quad (7.5)$$

mivel ekkor $\mathbf{e} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$.

7.8. ÁLLÍTÁS (SÍKRA VALÓ MERŐLEGES VETÍTÉS MÁTRIXA). A tér vektorait az $\mathbf{n}$ normálvektorú síkra merőlegesen vetítő leképezés mátrixa

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{n} \mathbf{n}^T.$$

BIZONYÍTÁS. Egy tetszőleges $\mathbf{x}$ vektornak a normálvektor egyenesére eső merőleges vetülete a 7.7. állítás szerint $\text{proj}_{\mathbf{n}} \mathbf{x} = (\mathbf{n}\mathbf{n}^T)\mathbf{x}$. Az $\mathbf{n}$ normálvektorú S síkra eső merőleges vetületre $\text{proj}_S \mathbf{x} = \mathbf{x} - \text{proj}_{\mathbf{n}} \mathbf{x} = \mathbf{x} - (\mathbf{n}\mathbf{n}^T)\mathbf{x}$ (lásd a 7.2. ábrát). Ebből következik, hogy a síkra való merőleges vetítés mátrixa $\mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n}^T$.

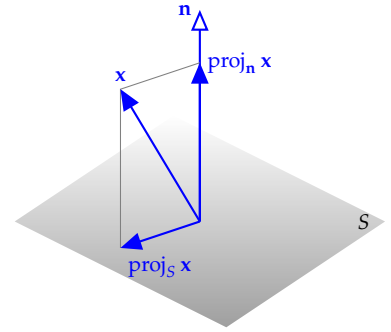
7.9. PÉLDA (SÍKRA ESŐ MERŐLEGES VETÜLET KISZÁMÍTÁSA). *Határozzuk meg a $(-2, 1, 3)$ vektornak a $2x + y - 2z = 0$ egyenletű síkra eső merőleges vetületét! (ld. később a 7.23. példát)*

MEGOLDÁS. A sík egy normálvektora $(2, 1, -2)$, így az egységnyi hosszú normálvektor $\mathbf{n} = (2/3, 1/3, -2/3)$. A $\mathbf{P}$ vetítő mátrix

$$\mathbf{P} = \mathbf{I}_3 - \mathbf{n}\mathbf{n}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Így a $(-2, 1, 3)$ vektor merőleges vetülete

$$\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$



7.2. ábra: Vektor vetülete egy síkra

Tükrözés Vizsgáljuk meg síkban az egyenesre való és térben a síkra való tükrözés mátrixát!

7.10. ÁLLÍTÁS (SÍKBELI TÜKRÖZÉS MÁTRIXA). *A sík vektorait az x -tengellyel $\alpha/2$ szöget bezáró egyenesre tükröző lineáris leképezés mátrixa*

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix}.$$

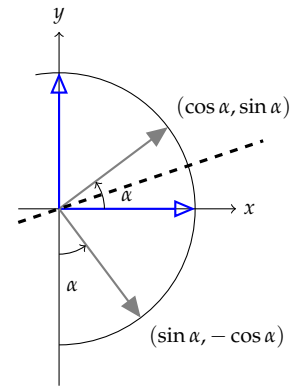
BIZONYÍTÁS. az 5.52. állítás szerint a tükrözés lineáris leképezés. A vektorok tükrösképe csak a tükrözés tengelyének állásától függ, ami most $\alpha/2$. Helyvektorokban gondolkodva a tükrözés tengelyének át kell mennie az origón.

A mellékelt ábráról leolvasható, hogy $\mathbf{i}$ tükrösképe $A\mathbf{i} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}$, míg a $\mathbf{j}$ vektoré $A\mathbf{j} = \begin{bmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{bmatrix}$. Így a sík vektorait az első tengellyel $\alpha/2$ szöget bezáró egyenesre tükröző leképezés mátrixa $\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix}$. $\square$

A térben egy síkra való tükrözés feladata a síkra való vetítéshez hasonlóan adódik:

7.11. ÁLLÍTÁS (SÍKRA VALÓ TÜKRÖZÉS MÁTRIXA). *Igazoljuk, hogy a tér vektorait az $\mathbf{n}$ normálvektorú síkra tükröző leképezés mátrixa*

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^T.$$



7.3. ábra: Az $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ vektorok egy egyenesre való tükrösképe

BIZONYÍTÁS. A 7.8. állításhoz hasonlóan minden leolvasható a mellékelt 7.4. ábráról: ha $\mathbf{x}$ -ből kivonjuk a $\text{proj}_{\mathbf{n}} \mathbf{x}$ vektort, akkor a síkra eső vetületet kapjuk, így ha a kétszeresét vonjuk ki, a tükörképhez jutunk. E leképezés mátrixa az $\mathbf{x} - 2(\mathbf{nn}^T)\mathbf{x} = (\mathbf{I} - 2\mathbf{nn}^T)\mathbf{x}$ összefüggésből adódik.

Vetítés Tárgyaltuk a merőleges vetítést. Vetíteni azonban másként is lehet.

7.12. PÉLDA (VETÍTÉS SÍKRA). Határozzuk meg annak a lineáris leképezésnek a mátrixát, mely a tér összes pontját az $(1, -2, 1)$ vektorral párhuzamos irányban az $x + y + 2z = 0$ egyenletű síkra vetíti.

MEGOLDÁS. Elemi geometriai eszközökkel könnyen látható, hogy e leképezés valóban lineáris. Világos, hogy a képtér az $x + y + 2z = 0$ egyenletű sík összes vektora lesz. E teret megkapjuk a sík egyenletéből, ha azt mint egyenletrendszert megoldjuk. A megoldás $(-s - 2t, s, t)$, azaz e tér egy bázisa a $(-1, 1, 0)$, és a $(-2, 0, 1)$ vektorokból áll. Könnyen látható az is, hogy a nulltérbe pontosan azok a vektorok tartoznak, amelyek párhuzamosak a vetítő vektorral, azaz az $(1, -2, 1)$ vektorral. A vetítés $\mathbf{P}$ mátrixa tehát eleget kell hogy tegyen az alábbi feltételeknek:

$$\mathbf{P} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

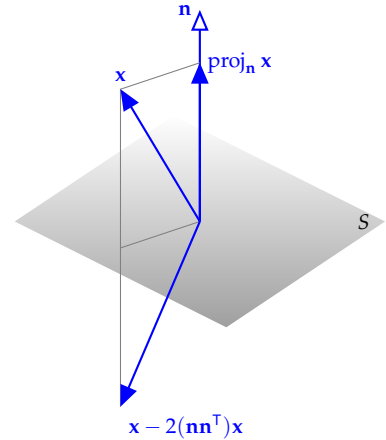
E három feltétel egyetlen mátrixszorzásba foglalható:

$$\mathbf{P} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{ahonnan } \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \square$$

► Az előző feladatban kapott $\mathbf{P}$ mátrix eleget tesz a $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ összefüggésnek. Ez szemléletesen világos is, hisz ha P jelöli a lineáris transzformációt, akkor arra is igaz, hogy $P^2 = P$. Ez abból következik, hogy a P vetítés az $x + y + 2z = 0$ egyenletű sík minden vektorát helyben hagyja, másrészt bármely $\mathbf{x}$ vektor esetén $P\mathbf{x}$ ebben a síkban van, így a második vetítés már minden vektort helyben hagy.

Eltolás Az eltolás nem lineáris leképezés, hisz minden vektorhoz egy konstans vektort ad, tehát a nullvektort nem a nullvektorba képzi. Egy szellemes ötlettel mégis megvalósítható lineáris leképezéssel.

El szeretnénk tolni a síkot egy (a, b) vektorral. Az ötlet az, hogy beágyazzuk a síkot a térbe, és ott keresünk egy olyan térbeli lineáris leképezést, amely ezt a síkot eltolja (hogyan másutt meg mit csinál,



7.4. ábra: Vektor tükörképe egy síkra

nem is érdekes). Legyen tehát a vizsgált sík a $z = 1$ egyenletű sík, és keressük azt a lineáris T leképezést, melyre

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + a \\ y + b \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ez ugyan még mindig nem tűnik lineárisnak, de mivel $z = 1$, ezért a

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + az \\ y + bz \\ z \end{bmatrix}$$

leképezés már minden tekintetben megfelel. E leképezés mátrixa

$$\mathbf{T} = T \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

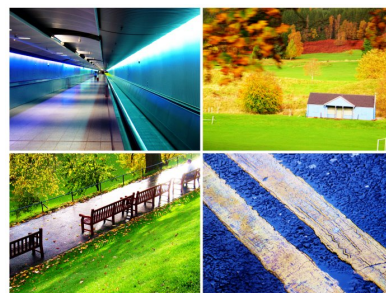
Hasonló ötlettel a tér eltolása is megvalósítható. A tér tetszőleges $(x, y, z) \mapsto (x + a, y + b, z + c)$ eltolása megvalósítható a következő mátrixleképezéssel:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + a \\ y + b \\ z + c \\ 1 \end{bmatrix}.$$

III. rész

Mátrixok sajátosságai

E rész a mátrixok legfontosabb tulajdonságait, sajátságait vizsgálja. A *sajátságokra* való utalás egyúttal egy szójáték, mely a mátrix *sajátértékének*, *sajátvektorának* és *sajátalterének* igen fontos fogalmára, valamint a születésekor ugyancsak *sajátértéknek* nevezett szinguláris értékre utal. Vizsgálatainkat a négyzetes mátrixok lehető legegyszerűbb – diagonális – alakra hozásával kezdjük, amihez a sajátértékek meghatározása vezet. Az alkalmazásokban az utóbbi időben különösen fontossá vált, és minden mátrixra működő másik diagonalizáló technika a szinguláris értékekhez kapcsolódik. Ennek tárgyalását a diagonalizálhatósághoz kapcsolódó kérdések tisztázása, a „majdnem diagonális alak”, a Jordan-féle normálalak leírása követi, végül e részt az alkalmazásokban különösen fontos nemnegatív mátrixok vizsgálata zárja.



green&blue (CC) by Joós Andi

8

Sajátérték, diagonalizálás

Egy mátrix jellemzésének különösen hatékony eszköze azoknak a nullvektortól különböző $\mathbf{x}$ vektoroknak a meghatározása, amelyeket a mátrixszal való szorzás önmagukkal párhuzamos vektorba visz, azaz amelyekre $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$. E vektorok ismerete olyan bázis megtalálásához is hozzásegít, amelyben e mátrix lényegesen egyszerűbb – például diagonális – alakot ölt.

Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér

A sajátérték és a sajátvektor fogalma Kezdjük egy egyszerű feladattal, melyből kiolvasható annak lényege, amiről e fejezetben szó lesz.

8.1. PÉLDA (JÓ BÁZIS TÜKRÖZÉSHEZ). *Tükrözzük a 3-dimenziós tér vektorait a tér egy megadott síkjára! Geometriai szemléletünkre hagyatkozva válasszunk e lineáris leképezés leírásához egy megfelelő bázist, majd írjuk fel a tükrözés e bázisra vonatkozó mátrixát!*

MEGOLDÁS. A síkra való tükrözés a síkra merőleges vektorokat ellentettjükbe viszi, míg a sík vektorait helyben hagyja. A tér minden vektorra egyértelműen előáll egy síkba eső és egy rá merőleges vektor összegként. A mellékelt ábra szemlélteti, hogy a tér mindegyik vektorának tükörképe úgy kapható meg, hogy a síkba eső összetevőjét meghagyjuk, és ahhoz adjuk a síkra merőleges összetevő ellentettjét. Természetes módon adódik az ötlet, hogy válasszuk ki a sík egy tetszőleges bázisát (álljon ez az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokból), és e két vektorhoz vegyünk hozzá egy síkra merőleges $\mathbf{c}$ vektort harmadik bázisvektornak. Ekkor a tükröző T leképezés hatása e vektorokon: $T\mathbf{a} = \mathbf{a}$, $T\mathbf{b} = \mathbf{b}$ és $T\mathbf{c} = -\mathbf{c}$. Az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ bázisban e három vektor koordinátás alakja a három standard egységvektor, így T mátrixa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Így e bázisban egy tetszőleges (x, y, z) vektor tükörképe $(x, y, -z)$. $\square$

E példában úgy választottunk bázist, hogy olyan vektorokat kerestünk, melyek önmaguk skalárszorosába mennek, azaz amelyek kielégítenek egy $T\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ alakú egyenletet. Ez a következő definícióhoz vezet, melyet először csak mátrixokra mondunk ki.

8.2. DEFINÍCIÓ (SAJÁTÉRTÉK, SAJÁTVEKTOR). Azt mondjuk, hogy a λ szám az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértéke, ha létezik olyan nemnulla $\mathbf{x}$ vektor, melyre $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$. Az ilyen $\mathbf{x}$ vektorokat az $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékéhez tartozó sajátvektorainak, a $(\lambda, \mathbf{x})$ párokat pedig az $\mathbf{A}$ sajátpárjainak nevezzük.

8.3. PÉLDA (SAJÁTÉRTÉK, SAJÁTVEKTOR). Igazoljuk, hogy az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ mátrixnak -1 egy sajátértéke, és $(2, 1)$ az egyik hozzátartozó sajátvektora, azaz $(-1, (2, 1))$ egy sajátpár. Mutassuk meg, hogy a $(2, (1, 2))$ pár egy másik sajátpár!

MEGOLDÁS. Valóban,

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \text{azaz} \quad \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

E mátrix egy másik sajátértéke 2, ugyanis

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \text{azaz} \quad \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = (2) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}. \quad \square$$

Ha $\mathbf{x}$ egy sajátvektor, akkor minden nemnulla konstansszorosa is az, ugyanis

$$\mathbf{A}(c\mathbf{x}) = c\mathbf{Ax} = c\lambda\mathbf{x} = \lambda(c\mathbf{x}),$$

azaz $\mathbf{A}(c\mathbf{x}) = \lambda(c\mathbf{x})$. Ennél több is igaz:

8.4. ÁLLÍTÁS (A SAJÁTVEKTOROK ALTEREI). Ha az $\mathbf{A}$ mátrixnak λ egy sajátértéke, akkor a λ -hoz tartozó sajátvektorok a nullvektorral együtt alteret alkotnak, mely megegyezik $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ nullterével.

BIZONYÍTÁS. A nem nullvektor $\mathbf{x}$ pontosan akkor egy λ sajátértékhez tartozó sajátvektor, ha kielégíti az $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ egyenletet, azaz az $\mathbf{Ax} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletet, vagyis ha megoldása a homogén lineáris $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletnek. Ez pedig épp azt jelenti, hogy $\mathbf{x}$ eleme $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ nullterének. $\square$

8.5. DEFINÍCIÓ (SAJÁTALTÉR). A négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékéhez tartozó sajátvektorai és a nullvektor által alkotott alteret a λ sajátértékhez tartozó sajátaltérnek nevezzük.

8.6. PÉLDA (SAJÁTALTÉR BÁZISÁNAK MEGHATÁROZÁSA). Adjuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrix 2-höz, mint sajátértékhez tartozó sajátalterét úgy, hogy megadjuk egy bázisát! Tegyük meg ugyanezt a 10-hez tartozó sajátaltérrel is.

MEGOLDÁS. Először ellenőrizzük, hogy a 2 sajátérték! Ehhez meg kell mutatni, hogy az $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása. Hozzuk az együtthatómátrixot redukált lépcsős alakra:

$$\mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mivel $r(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = 1$, ezért az $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszer szabad változóinak száma 2, és megoldása

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -6s - t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tehát a sajátaltér egy bázisa a $(-6, 1, 0)$ és $(-1, 0, 1)$ vektorokból áll.

A 10 is sajátérték, mivel az $(\mathbf{A} - 10\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása, ugyanis

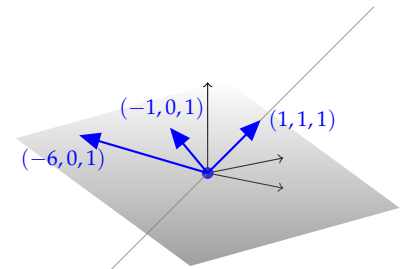
$$\mathbf{A} - 10\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -7 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & -7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

tehát a megoldás

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Így a sajátalteret az $(1, 1, 1)$ vektor feszíti ki.

A két sajátaltér egyike 2-, másika 1-dimenziós altér. Ezt szemlélteti a 8.1. ábra. □



8.1. ábra: A 8.6. feladatbeli $\mathbf{A}$ mátrix sajátalterei: a 2-höz tartozó 2-dimenziós altér, melyet a $(-6, 1, 0)$ és $(-1, 0, 1)$ vektorok feszítenek ki, és a 10-hez tartozó 1-dimenziós altér, melyet a $(1, 1, 1)$ vektor feszít ki.

Karakterisztikus polinom Láttuk, hogy az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ egyenletnek pontosan akkor van a zérusvektortól különböző megoldása, ha a homogén lineáris $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása. Ez a 6.12. tétel szerint pontosan akkor igaz, ha

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0. \quad (8.1)$$

Ez tehát azt jelenti, hogy λ pontosan akkor sajátérték, ha kielégíti a (8.1) egyenletet. Ezt az egyenletet az $\mathbf{A}$ mátrix *karakterisztikus egyenletének* nevezzük. Ha $\mathbf{A}$ egy $n \times n$ -es mátrix, akkor az egyenlet bal oldala a determináns kifejtése után egy n -edfokú polinom, melyet *karakterisztikus polinomnak* nevezünk.

8.7. PÉLDA (KARAKTERISZTIKUS POLINOM FELÍRÁSA). *Határozzuk meg az*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

mátrixok karakterisztikus polinomját és ahol lehet, próbáljunk meg általánosabb érvényű állításokat megsejteni az eredmény alapján!

MEGOLDÁS. Ki kell számítanunk a $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ determináns értékét:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc \\ &= \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) \\ &= \lambda^2 - \text{trace}(\mathbf{A})\lambda + \det \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Kimondható a következtetés: 2×2 -es mátrixok karakterisztikus polinomját a mátrix nyomával és determinánsával is ki tudjuk fejezni.

A $\mathbf{B}$ mátrix karakterisztikus polinomja

$$\det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & a & b \\ 0 & 1 - \lambda & c \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^3.$$

Ebből leolvasható, hogy a háromszögmátrixok karakterisztikus polinomjának alakját nem befolyásolják a főátlón kívüli elemek (ld. a 8.8. tételt).

A $\mathbf{C}$ mátrix karakterisztikus polinomja

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} a - \lambda & b & c \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (a - \lambda)\lambda^2 + c + b\lambda \\ &= -\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c. \end{aligned}$$

Ez azt sejteti, hogy minden polinomhoz könnyen konstruálható olyan mátrix, melynek az a karakterisztikus polinomja (ld. a ?? feladatot). $\square$

Az előző feladat tanulságait külön állításokban is megfogalmazzuk:

A karakterisztikus polinomot a

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})$$

determinánssal is szokás definiálni. Előnye, hogy ekkor a polinom főegyütthatója mindig 1, míg az általunk használt definíció szerint a páratlan rendű mátrixok karakterisztikus polinomjának -1 a főegyütthatója. Hátránya viszont az, hogy a konstans tag nem mindig a determináns, másrészt a kézzel való számolás is nehezebb, ezért az elemi feladatok egyszerűbb számolhatósága érdekében is hasznosabb a $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ alakot választani.

8.8. ÁLLÍTÁS (HÁROMSZÖGMÁTRIXOK SAJÁTÉRTÉKEI). *A háromszögmátrixok és így a diagonális mátrixok sajátértékei megegyeznek a főátló elemeivel.*

BIZONYÍTÁS. Ha $\mathbf{A}$ háromszögmátrix, akkor $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ is, és egy háromszögmátrix determinánsa megegyezik főátlóbeli elemeinek szorzatával. Eszerint az $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ mátrix karakterisztikus egyenlete

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda) = 0$$

aminek a gyökei a_{ii} ($i = 1, \dots, n$). Így ezek az $\mathbf{A}$ sajátértékei. $\square$

8.9. ÁLLÍTÁS (DETERMINÁNS, NYOM ÉS A SAJÁTÉRTÉKEK). *Ha az n -edrendű $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, akkor*

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}) &= \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \\ \text{trace}(\mathbf{A}) &= \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n\end{aligned}$$

Ezek az értékek megjelennek a karakterisztikus polinomban: a determináns a konstans tag, a nyom a $(-\lambda)^{n-1}$ együtthatója.

BIZONYÍTÁS. A karakterisztikus polinom gyöktényezői alakja:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda)$$

$\lambda = 0$ behelyettesítése után kapjuk, hogy

$$\det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n.$$

Az állítás nyomra vonatkozó részének bizonyítását feladatként tűzzük ki. $\square$

A valós 2×2 -es mátrixok sajátaltéréinek jellemzése Olyan eredményekkel fogunk megismerkedni e paragrafusban, melyek általánosíthatók lesznek magasabb dimenzióra, de 2-dimenzió esetén egyszerűbb a szemléltetésük.

Láttuk, hogy ha $\mathbf{x}$ sajátvektor, akkor bármely konstansszorosa is az. Így egy egyenessel párhuzamos vektorok közül elég csak egy vektor képét vizsgálni, mondjuk az egységvektorét. Hasznos lesz tehát a lineáris leképezések korábban megismert egységkör-ábrázolása (ld. 5.10 ábra).

8.10. PÉLDA (2×2 -ES MÁTRIXOK SAJÁTVEKTORAINAK ÁBRÁZOLÁSA). *Határozzuk meg az 5.53. és az 5.54. példákban is szereplő*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait. Szemléltessük ezeket az egységkör-ábrákban.

MEGOLDÁS. Egyszerű számolással meghatározható mind a négy mátrix karakterisztikus egyenlete, sajátértékei és sajátvektorai, bár a **D** mátrix esetén ezek komplex számokat is tartalmaznak. A karakterisztikus polinomot jelölje p , indexében a mátrix jelével. Ezután megadjuk a sajátértékeket, majd a sajátvektorokat:

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda + 1, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$p_{\mathbf{B}}(\lambda) = \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda - 1, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$p_{\mathbf{C}}(\lambda) = \lambda^2 - 1, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$p_{\mathbf{D}}(\lambda) = \lambda^2 + 1, \quad \lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Némi nehézséget a **D** mátrix okoz, ezért az ahhoz tartozó számításokat részletezzük:

$$|\mathbf{D} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} - \lambda & \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

$$\lambda_1 = i: \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} - i & \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} - i \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ amiből } \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \\ 1 \end{bmatrix},$$

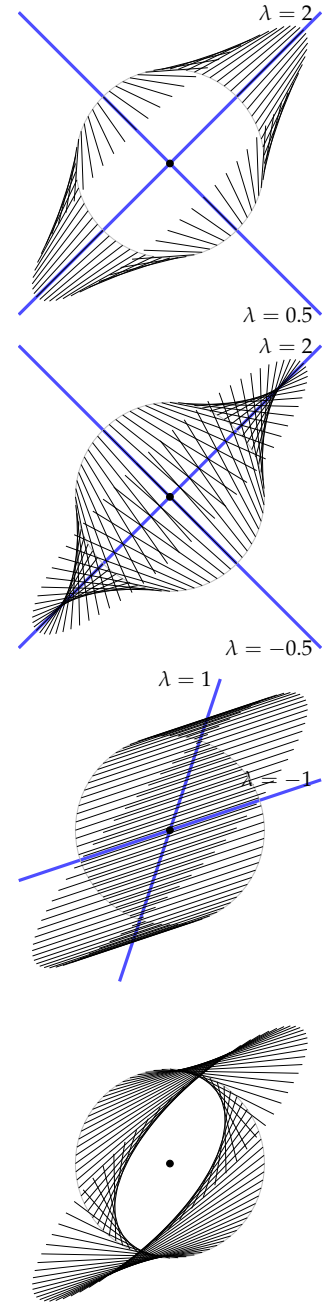
$$\lambda_2 = -i: \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} + i & \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} + i \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ amiből } \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A négy mátrixhoz tartozó egységkörábra a 8.2 ábrán látható. □

8.11. TÉTEL (2×2 -ES SZIMMETRIKUS MÁTRIXOK SAJÁTALTEREI). Legyen **A** egy 2×2 -es szimmetrikus mátrix. Ekkor

- A** minden sajátértéke valós,
- A**-nak pontosan akkor van két azonos sajátértéke, ha $a\mathbf{I}$ alakú, ekkor a sík összes vektora sajátvektor,
- minden egyéb esetben **A**-nak két különböző sajátértéke van, és ekkor sajátalterei merőlegesek egymásra.

BIZONYÍTÁS. A 2×2 -es szimmetrikus valós mátrix általános alakja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$, ahol $a, b, d \in \mathbb{R}$. Ennek karakterisztikus egyenlete a (8.2) szerint $\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - b^2)$. Az egyenlet diszkriminánsa $D = (a+d)^2 - 4(ad - b^2) = (a-d)^2 + 4b^2 \geq 0$. Tehát a gyökök, vagyis a sajátértékek valósak. Ez bizonyítja a)-t. A két sajátérték csak akkor egyezik meg, ha $D = 0$, ez viszont csak $a = d$ és $b = 0$ esetén lehetséges, ami bizonyítja b)-t. A c) állítás igazolását a feladatok közt tűzzük ki. □



8.2. ábra: A négy leképezés sajátirányai.

Mátrix összes sajátértékének és sajátvektorának meghatározása Az előző paragrafusokban leírtak alapján egy mátrix sajátértékeinek és sajátvektorainak meghatározása két lépésben elvégezhető:

1. megoldjuk a $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ karakterisztikus egyenletet, ennek gyökei a sajátértékek,
2. minden λ sajátértékhez meghatározzuk az $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ nullterének egy bázisát, az általa kifeszített altér nemzérus vektorai a λ -hoz tartozó sajátvektorok.

8.12. PÉLDA (AZ ÖSSZES SAJÁTÉRTÉK ÉS SAJÁTVEKTOR MEGHATÁROZÁSA). Határozzuk meg a

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

MEGOLDÁS. Az első lépés a karakterisztikus egyenlet felírása és megoldása. A kiszámítandó determináns háromszög alakú, így értéke a főátlóbeli elemek szorzata:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2 - \lambda)^2$$

A karakterisztikus egyenlet gyökei, és így az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

Tekintsük először a $\lambda_1 = 0$ esetet. $\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}$ nullterének meghatározásához redukált lépcsős alakra hozzuk az $\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}$ mátrixot:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{matrix}$$

Ennek megoldása $x_1 = t$, azaz az összes megoldás

$$\begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tehát a $\lambda_1 = 0$ sajátértékhez tartozó sajátaltér az $(1, 0, 0)$ vektor által kifeszített altér.

Tekintsük ezután a $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ esetet. Meghatározzuk az $\mathbf{A} - 2\mathbf{I}$ mátrix nullterét.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

Ennek az (egy egyenletből álló) egyenletrendszernek a megoldása: $x_2 = s$, $x_3 = t$, $x_1 = (s + t)/2$, azaz

$$\begin{bmatrix} (s+t)/2 \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tehát a $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ sajátértékhez tartozó sajátaltér az $(\frac{1}{2}, 1, 0)$ és az $(\frac{1}{2}, 0, 1)$ vektorok által kifeszített altér. $\square$

Az $n \times n$ -es mátrixok karakterisztikus egyenlete n -edfokú. Egy ilyen egyenlet megoldására $n \leq 4$ esetén van megoldóképlet, ezért ezeket az egyenleteket – például egy komputer algebra program segítségével – meg tudjuk oldani. Egyébként vagy szerencsénk van, és az egyenlet olyan alakú, amilyenhez vannak gyors megoldási lehetőségek, vagy csak közelítő megoldás megtalálására van esély.

8.13. PÉLDA (MAGASABBFOKÚ KARAKTERISZTIKUS EGYENLET). *Határozzuk meg az*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

MEGOLDÁS. A karakterisztikus egyenlet:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} &= \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 3 & 3 & 2-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2(2-\lambda) + 24 - 12(1-\lambda) - 4(2-\lambda) \\ &= -(\lambda^3 - 4\lambda^2 - 11\lambda - 6) \end{aligned}$$

E harmadfokú egyenlet megoldására használhatunk számítógépet, vagy például a függelékben megtalálható Rolle-féle gyöktételt. Eszerint a karakterisztikus egyenlet $-(\lambda + 1)^2(\lambda - 6) = 0$, így gyökei $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ és $\lambda_3 = 6$.

A $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ esetben

$$\mathbf{A} + \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Ennek megoldása

$$\begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

azaz a -1 sajátértékhez tartozó sajátalteret a $(-1, 1, 0)$ és a $(-1, 0, 1)$ vektorok feszítik ki.

A $\lambda_3 = 6$ esetben

$$\mathbf{A} - 6\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 2 \\ 3 & 3 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 - \frac{2}{3}x_3 &= 0 \\ x_2 - \frac{2}{3}x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Ennek megoldása a törtek alkalmazását elkerülő $x_3 = 3t$ paraméterválasztással

$$\begin{bmatrix} 2t \\ 2t \\ 3t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Tehát a $\lambda_3 = 6$ sajátértékhez tartozó sajátalteret a $(2, 2, 3)$ vektor feszíti ki. $\square$

A karakterisztikus egyenlet komplex gyökei Ha valóselemű mátrixot vizsgálunk, megeshet, hogy a karakterisztikus egyenletnek vannak komplex gyökei. Mivel a valós számok egyúttal komplexek is, a valós elemű mátrixot tekinthetjük komplex eleműnek is, ekkor viszont a karakterisztikus egyenlet komplex gyökeit is sajátértéknek tekinthetjük. Ebben az esetben a komplex sajátértékhez komplex elemű sajátvektor fog tartozni.

8.14. PÉLDA (KOMPLEX SAJÁTÉRTÉKEK ÉS KOMPLEX ELEMŰ SAJÁTVEKTOROK). Határozzuk meg a komplex elemű

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

MEGOLDÁS. A karakterisztikus egyenlet

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \lambda^2 - \lambda + 1.$$

A $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ egyenlet gyökei $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Először vizsgáljuk a $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ sajátértéket:

$$\mathbf{A} - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}i & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x - iy = 0.$$

Ennek az egyenlet(rendszer)nek a megoldása az $y = t$ paraméterválasztással

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} it \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tehát a $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ sajátértékhez tartozó sajátaltér egy bázisa az $(i, 1)$ vektorból áll.

A $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ sajátérték esetén

$$\mathbf{A} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}i & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x + iy = 0.$$

Ennek az egyenlet(rendszer)nek a megoldása az $y = t$ paraméterválasztással

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -it \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tehát a $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ sajátértékhez tartozó sajátalteret a $(-i, 1)$ sajátvektor feszíti ki. $\square$

A karakterisztikus egyenlet többszörös gyökei: az algebrai és a geometriai multiplicitás Ha λ a karakterisztikus egyenlet k -szoros gyöke, vagy más szóval λ multiplicitása vagy *algebrai multiplicitása* k , akkor a λ -hoz tartozó sajátaltér d dimenziójára $1 \leq d \leq k$. Ezt az állítást később bebizonyítjuk. A sajátaltér dimenzióját szokták a λ *geometriai multiplicitásának* nevezni. A 8.12. és a 8.13. példák olyan eseteket mutattak, amikor a sajátértékek algebrai és geometriai multiplicitása azonos, azaz minden sajátaltér épp annyi dimenziós, amennyi a gyök (algebrai) multiplicitása. A következő feladat azt mutatja, hogy a sajátaltér dimenziója kisebb is lehet.

8.15. PÉLDA (SAJÁTÉRTÉK ALGEBRAI ÉS GEOMETRIAI MULTIPLICITÁSA).
Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ és a } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és azok algebrai és geometriai multiplicitását?

MEGOLDÁS. Mivel $\mathbf{A}$ háromszögmátrix, ezért karakterisztikus polinomja $(4 - \lambda)^3$, a 4 tehát háromszoros gyök, azaz algebrai multiplicitása 3. Mivel

$$\mathbf{A} - 4\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ezért az $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszer az $y = 0, z = 0$ alakot ölti, aminek megoldása

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Eszerint $\mathbf{A}$ sajátaltère 1-dimenziós, melyet az $(1, 0, 0)$ vektor feszít ki. A $\lambda = 4$ sajátérték geometriai multiplicitása tehát 1.

A $\mathbf{B}$ mátrix karakterisztikus polinomja $(1 - \lambda)^2(2 - \lambda)^2$, ennek gyökei 1 és 2, és mindegyiknek kettő az algebrai multiplicitása. Meghatározzuk sajátaltèreiket. $\lambda = 1$ esetén

$$\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I} = \mathbf{B} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Az ehhez tartozó homogén egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tehát az altér dimenziója 2, vagyis a geometriai multiplicitás megegyezik az algebraival. Ha $\lambda = 2$, akkor

$$\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I} = \mathbf{B} - 2\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ahonnan az ehhez tartozó homogén egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tehát az altér dimenziója most 1, vagyis a geometriai multiplicitás kisebb, mint az algebrai. $\square$

Sajátértékek és a mátrix hatványai A mátrixok függvényeinek számolása szoros kapcsolatban van a sajátértékekkel. E témában első lépés a mátrixokhatványok sajátértékeinek és sajátvektorának meghatározása.

8.16. TÉTEL (MÁTRIX INVERTÁLHATÓSÁGA ÉS A 0 SAJÁTÉRTÉK). Az $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor invertálható, ha a 0 nem sajátértéke.

BIZONYÍTÁS. $\mathbf{A}$ pontosan akkor invertálható, ha $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, de ez ekvivalens azzal, hogy $\det(\mathbf{A} - 0\mathbf{I}) \neq 0$, azaz 0 nem sajátértéke $\mathbf{A}$ -nak. $\square$

8.17. TÉTEL (MÁTRIX HATVÁNYAINAK SAJÁTÉRTÉKEI ÉS SAJÁTVEKTORAI). Ha λ az $\mathbf{A}$ mátrix egy sajátértéke és $\mathbf{x}$ egy hozzá tartozó sajátvektor, akkor bármely egész n esetén λ^n sajátértéke az $\mathbf{A}^n$ mátrixnak és $\mathbf{x}$ egy hozzá tartozó sajátvektor, amennyiben λ^n és $\mathbf{A}^n$ is értelmezve van.

BIZONYÍTÁS. $n = 0$ esetén $\lambda^0 = 1$ és $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$, és ekkor minden vektor sajátvektor, tehát ekkor az állítás igaz.

Pozitív n -re indukcióval igazoljuk az állítást: $n = 1$ esetén nyilván igaz, $n = 2$ esetén:

$$\mathbf{A}^2 \mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{A} \mathbf{x}) = \mathbf{A}(\lambda \mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{A} \mathbf{x}) = \lambda(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^2 \mathbf{x}.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy ha $n = k - 1$ esetén már igaz az állítás, akkor $n = k$ esetén is:

$$\mathbf{A}^k \mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{k-1} \mathbf{x}) = \mathbf{A}(\lambda^{k-1} \mathbf{x}) = \lambda^{k-1}(\mathbf{A} \mathbf{x}) = \lambda^{k-1}(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^k \mathbf{x}.$$

Ha $\mathbf{A}$ invertálható, akkor

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}, \text{ amiből } \frac{1}{\lambda} \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}, \text{ azaz } \lambda^{-1} \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}.$$

Végül negatív kitevők esetén:

$$\mathbf{A}^k \mathbf{x} = \lambda^k \mathbf{x}, \text{ amiből } \lambda^{-k} \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-k} \mathbf{x}. \quad \square$$

8.18. TÉTEL (MÁTRIX HATVÁNYAINAK HATÁSA). Tegyük fel, hogy $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ sajátértékei az $n \times n$ -es $\mathbf{A}$ mátrixnak, és hogy $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ a hozzájuk tartozó sajátvektorok. Ha egy n -dimenziós $\mathbf{v}$ vektor előáll e sajátvektorok lineáris kombinációjaként, azaz

$$\mathbf{v} = c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + \dots + c_k \mathbf{x}_k,$$

akkor bármely egész m esetén

$$\mathbf{A}^m \mathbf{v} = c_1 \lambda_1^m \mathbf{x}_1 + c_2 \lambda_2^m \mathbf{x}_2 + \dots + c_k \lambda_k^m \mathbf{x}_k.$$

BIZONYÍTÁS. A bizonyítás magától értetődő, hisz

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^m \mathbf{v} &= \mathbf{A}^m (c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + \dots + c_k \mathbf{x}_k) \\ &= c_1 \mathbf{A}^m \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{A}^m \mathbf{x}_2 + \dots + c_k \mathbf{A}^m \mathbf{x}_k \\ &= c_1 \lambda_1^m \mathbf{x}_1 + c_2 \lambda_2^m \mathbf{x}_2 + \dots + c_k \lambda_k^m \mathbf{x}_k \end{aligned} \quad \square$$

► Sajnos az nem igaz, hogy minden mátrixhoz találunk n független sajátvektort, amelyek lineáris kombinációjaként minden vektor felírható, így e tétel csak a sajátvektorok lineáris kombinációjaként előálló vektorokról szól! E tétel azt mutatja, fontos kérdés annak eldöntése, hogy egy mátrix sajátvektoraiból mikor alkotható bázis.

Speciális mátrixok sajátértékei A mátrixok egyes különleges tulajdonságai a sajátértékek bizonyos tulajdonságát is befolyásolják.

8.19. TÉTEL (SPECIÁLIS MÁTRIXOK SAJÁTÉRTÉKE). Legyen $\mathbf{A}$ egy n -edrendű valós mátrix. Ekkor

- a) ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus, akkor minden sajátértéke valós,
- b) ha $\mathbf{A}$ ferdén szimmetrikus, akkor minden sajátértéke imaginárius,
- c) ha $\mathbf{A}$ ortogonális, akkor minden sajátértékének 1 az abszolút értéke,
- d) $\mathbf{A}$ pontosan akkor nilpotens, ha minden sajátértéke 0, azaz karakterisztikus polinomja λ^n alakú.

BIZONYÍTÁS. a), b) Írjuk fel a saját pár elemeit komplex algebrai alakban, azaz legyen $\lambda = a + bi$ a valós $\mathbf{A}$ mátrix sajátértéke, és legyen $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}i$ a hozzá tartozó sajátvektor. Tehát $\mathbf{Ax} = \mathbf{A}(\mathbf{y} + \mathbf{z}i) = (a + bi)(\mathbf{y} + \mathbf{z}i)$. Ha ennek mindkét oldalát balról beszorozzuk az $\mathbf{x}$ konjugáltjának transzponáltjával, azaz az $\bar{\mathbf{x}}^T = (\mathbf{y} - \mathbf{z}i)^T$ vektorral, akkor kapjuk, hogy

$$\bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{Ax} = (\mathbf{y} - \mathbf{z}i)^T (a + bi)(\mathbf{y} + \mathbf{z}i) = (a + bi)(|\mathbf{y}|^2 + |\mathbf{z}|^2).$$

Itt kihasználtuk, hogy $\mathbf{y}^T \mathbf{y} = |\mathbf{y}|^2$ és $\mathbf{z}^T \mathbf{z} = |\mathbf{z}|^2$. Véve mindkét oldal konjugáltját és kihasználva hogy $\mathbf{A}$ valós, tehát $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$, kapjuk, hogy

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}} = (a - bi)(|\mathbf{y}|^2 + |\mathbf{z}|^2).$$

Ezután vegyük mindkét oldal transzponáltját. A jobb oldal nem változik, hisz ott egy szám, azaz egy 1×1 -es mátrix áll:

$$\bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{x} = (a - bi)(|\mathbf{y}|^2 + |\mathbf{z}|^2).$$

Ezt összevetve a (119) egyenlőség két oldalán álló kifejezéssel, és kihasználva, hogy $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ miatt $|\mathbf{y}|^2 + |\mathbf{z}|^2 \neq 0$, kapjuk, hogy

$$a + bi = \begin{cases} a - bi, & \text{ha } \mathbf{A} \text{ szimmetrikus,} \\ -a + bi, & \text{ha } \mathbf{A} \text{ ferdén szimmetrikus.} \end{cases}$$

Eszerint $b = 0$, ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus, és $a = 0$, ha $\mathbf{A}$ ferdén szimmetrikus, ami bizonyítja az első két állítást.

c) Ha $\mathbf{A}$ ortogonális, akkor bármely $\mathbf{x}$ vektorra $|\mathbf{Ax}| = |\mathbf{x}|$. Így a sajátvektorra is, azaz $|\mathbf{x}| = |\mathbf{Ax}| = |\lambda \mathbf{x}| = |\lambda| |\mathbf{x}|$, amiből $|\lambda| = 1$.

d) Ha $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$, és λ sajátértéke $\mathbf{A}$ -nak, akkor λ^k sajátértéke az $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$ mátrixnak, annak viszont csak a 0 sajátértéke, így $\mathbf{A}$ -nak is minden sajátértéke 0. Az állítás megfordítása a Cayley–Hamilton-tételből következik, melyet hamarosan bizonyítunk. Eszerint minden mátrix kielégíti karakterisztikus polinomját, így ha a karakterisztikus polinom $\lambda^n = 0$, akkor $\mathbf{A}^n = \mathbf{O}$, vagyis $\mathbf{A}$ nilpotens. $\square$

Az előző tétel bizonyításából minimális változtatással megkapható a következő tétel bizonyítása is, melyet feladatként tűzünk ki:

8.20. TÉTEL (SPECIÁLIS KOMPLEX MÁTRIXOK SAJÁTÉRTÉKE). *Ha az n -edrendű komplex $\mathbf{A}$ mátrix*

- a) önadjungált, akkor minden sajátértéke valós,*
- b) ferdén önadjungált, akkor minden sajátértéke imaginárius,*
- c) unitér, akkor minden sajátértékének 1 az abszolút értéke.*

Feladatok

játértéke van, akkor sajátalterei merőlegesek egymásra.

8.1. Igazoljuk a ?? tétel c) állítását, mely szerint ha egy 2×2 -es szimmetrikus valós mátrixnak két különböző sa-

Hasonlóság, diagonalizálhatóság

Egy lineáris transzformáció sajátértékei és karakterisztikus polinomja megőrződnek a különféle bázisokban fölírt mátrixaira is. Olyan bázist keresünk, melyben mátrixa a legegyszerűbb alakú.

Lineáris transzformációk sajátértékei A sajátérték, sajátvektor, sajátaltér fogalma természetes módon átvihető lineáris leképezésekre is.

8.21. DEFINÍCIÓ (LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓ SAJÁTÉRTÉKE, SAJÁTVEKTORA). Azt mondjuk, hogy a λ szám az L lineáris transzformáció sajátértéke, ha létezik olyan nemnulla $\mathbf{x}$ vektor, melyre $L\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Az ilyen $\mathbf{x}$ vektorokat az L lineáris transzformáció λ sajátértékéhez tartozó sajátvektorainak nevezzük.

Ha a lineáris transzformáció $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vagy $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezés, mely valamilyen egyszerű geometriai transzformációt valósít meg, akkor néha a transzformáció mátrixának ismerete nélkül is könnyen meghatározhatjuk a sajátértékeket és sajátvektorokat.

8.22. PÉLDA (LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓ SAJÁTÉRTÉKE, SAJÁTALTERE). Adjuk meg – pusztán geometriai szemléletünkre hagyatkozva – az alábbi lineáris leképezések sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátaltereket.

- a sík vektorainak tükrözése egy egyenesre (vagy pontjainak tükrözése egy origón átmenő egyenesre);
- a sík vektorainak merőleges vetítése egy egyenesre (vagy pontjainak merőleges vetítése egy origón átmenő egyenesre);
- a tér vektorainak elforgatása egy egyenes körül a π egész számú többszörösétől különböző szöggel;
- a tér vektorainak merőleges vetítése egy síkra;
- a tér vektorainak tükrözése egy síkra.

MEGOLDÁS. Az előző fejezetben, így a ?? példában bizonyítottakhoz hasonlóan látható, hogy mindegyik feladatbeli transzformáció lineáris.

a) Egy egyenesre való tükrözés esetén csak az egyenessel párhuzamos és rá merőleges vektorok mennek saját konstansszorosukba, mégpedig az egyenessel párhuzamos vektorok saját magukba, a rá merőlegesek a saját ellentettjükbe. Tehát e transzformációnak az 1 sajátértékhez tartozó sajátaltér az egyenessel párhuzamos vektorokból, a -1 -hez tartozó sajátaltér a rá merőleges vektorokból áll. A pontokra vonatkozó állítás a pontokba mutató helyvektorokkal adódik.

b) A sík merőleges vetítése egy egyenesre – hasonlóan az előző esethez – helyben hagyja az egyenessel párhuzamos vektorokat, és a 0 -vektorba viszi a rá merőlegeseket. Tehát az 1 sajátértékhez tartozó

sajátaltér az egyenessel párhuzamos vektorokból, a 0-hoz tartozó sajátaltér a rá merőleges vektorokból áll.

c) A tér π egész számú többszörösétől különböző szöggel való elforgatása egy egyenes körül a forgástengellyel párhuzamos vektorokat önmagukba viszi, és semelyik másikat sem viszi a saját skalárszorosába, így az egyetlen sajátérték az 1, amelyhez tartozó sajátaltér a forgástengellyel párhuzamos vektorokból áll.

d) A tér vektorainak merőleges vetítése egy síkra helyben hagyja a sík összes vektorát, míg a síkra merőleges vektorokat a $\mathbf{0}$ vektorba viszi, tehát a két sajátérték 1 és 0. Az 1-hez tartozó sajátaltér a sík vektoraiból, a 0-hoz tartozó sajátaltér a rá merőleges vektorokból áll.

e) E feladatot megoldottuk a 8.1. példában. A két sajátérték 1 és -1 , az 1 sajátértékhez tartozó sajátaltér a sík vektoraiból, a -1 -hez tartozó sajátaltér a rá merőleges vektorokból áll. $\square$

Egy lineáris leképezéshez bázisonként más-más mátrix tartozhat, de a sajátértékeik mégis ugyanazok, hisz ha egy leképezés egy vektort a λ -szorosába viszi, akkor azt λ -szorosába viszi minden bázisban.

Hasonló mátrixok sajátértékei Az 5.58. és az 5.59. tételekből tudjuk, hogy egy lineáris leképezéshez különböző bázisokban tartozó mátrixok hasonlóak, másrészt tudjuk azt is, hogy fontos mátrixtulajdonságok invariánsak a hasonlóságra. E paragrafusban e tulajdonságok körét fogjuk bővíteni.

8.23. TÉTEL (SAJÁTÉRTÉKHEZ KAPCSOLÓDÓ INVARIÁNSOK). Ha $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, akkor $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ karakterisztikus polinomja azonos, így sajátértékei, azok algebrai és geometriai multiplicitásai is megegyeznek.

BIZONYÍTÁS. A bizonyítás során föltesszük, hogy valamely invertálható $\mathbf{C}$ mátrixszal $\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}$. Ekkor

$$\begin{aligned}\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} &= \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C} - \lambda\mathbf{C}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{C} \\ &= \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{B}\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I}\mathbf{C}) \\ &= \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{C},\end{aligned}$$

azaz $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ és $\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}$ is hasonlóak. Az 5.59. tétel szerint hasonló mátrixok determinánsa megegyezik, így $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})$, azaz megegyeznek $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ karakterisztikus polinomjai is. Ez maga után vonja, hogy megegyeznek sajátértékeik, és azok (algebrai) multiplicitásai. A geometriai multiplicitások egyenlőségéhez elég belátni, hogy $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ és $\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}$ nullterének dimenziója megegyezik, azt viszont ugyancsak az 5.59. tételben igazoltuk. $\square$

► E tétel egyik következménye, hogy hasonló mátrixok determinánsa megegyezik, hisz ezek a sajátértékek szorzatával egyenlők. Ezt már bi-

zonyítottuk az 5.59. tételben. Hasonlóan igaz, hogy hasonló mátrixok nyoma is megegyezik, hisz ezek a sajátértékek összegével egyenlők.

► Fontos következménye tehát e tételnek, hogy van értelme *lineáris transzformáció karakterisztikus polinomjáról, sajátértékeiről, sajátaltéréről* beszélni. Legalábbis véges dimenziós esetben, pl. $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vagy $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ transzformációk esetén ezt látjuk.

Mátrixok diagonalizálása és sajátfelbontása Igen fontos kérdés, hogy egy adott lineáris leképezés sajátvektoraiból kiválasztható-e egy bázis. Ebben a bázisban ugyanis mátrixa – mint azt bizonyítani fogjuk – diagonális alakot ölt.

8.24. DEFINÍCIÓ (DIAGONALIZÁLHATÓSÁG). Az $n \times n$ -es $\mathbf{A}$ mátrix diagonalizálható, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz, azaz ha létezik egy olyan diagonális $\mathbf{\Lambda}$ és egy invertálható $\mathbf{C}$ mátrix, hogy

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}. \quad (8.3)$$

8.25. TÉTEL (DIAGONALIZÁLHATÓSÁG SZÜKSÉGES ÉS ELÉGSÉGES FELTÉTELE). Az $n \times n$ -es $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható, azaz pontosan akkor létezik olyan $\mathbf{C}$ mátrix, melyre $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ diagonális, ha $\mathbf{A}$ -nak van n lineárisan független sajátvektora. Ekkor a diagonális mátrix az $\mathbf{A}$ sajátértékeiből, $\mathbf{C}$ a sajátvektoraiból áll.

BIZONYÍTÁS. Ha $\mathbf{A}$ hasonló egy diagonális mátrixhoz, azaz van olyan $\mathbf{C}$ mátrix, hogy $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ diagonális, akkor $\mathbf{C}$ -vel balról szorozva a $\mathbf{C}\mathbf{\Lambda} = \mathbf{A}\mathbf{C}$ egyenlőséget kapjuk. Ha $\mathbf{C} = [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \dots \ \mathbf{x}_n]$ és $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, akkor

$$[\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \dots \ \mathbf{x}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = \mathbf{A}[\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \dots \ \mathbf{x}_n], \quad (8.4)$$

és itt a bal oldali mátrix i -edik oszlopa $\lambda_i \mathbf{x}_i$, a jobb oldali mátrixé $\mathbf{A}\mathbf{x}_i$, amik megegyeznek, azaz $\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$, tehát $\mathbf{x}_i$ a λ_i sajátértékhez tartozó sajátvektor. Mivel $\mathbf{C}$ invertálható, ezért oszlopvektorai függetlenek, ami bizonyítja az állításunk egyik felét. Tegyük most fel, hogy van $\mathbf{A}$ -nak n független sajátvektora. Képezzünk a sajátértékekből egy $\mathbf{\Lambda}$ diagonális mátrixot, a sajátvektorokból pedig egy $\mathbf{C}$ mátrixot úgy, hogy a $\mathbf{\Lambda}$ i -edik oszlopába kerülő λ_i sajátértékhez tartozó sajátvektor a $\mathbf{C}$ mátrix i -edik oszlopába kerüljön. Mivel $\lambda_i \mathbf{x}_i = \mathbf{A}\mathbf{x}_i$, ezért fennáll a (8.4) összefüggés, azaz $\mathbf{\Lambda}$ hasonló $\mathbf{A}$ -hoz. $\square$

► A $\Lambda = C^{-1}AC$ átírható

$$A = C\Lambda C^{-1} \quad (8.5)$$

alakba, amit az A mátrix *sajátfelbontásának* nevezünk.

8.26. PÉLDA (MÁTRIX DIAGONALIZÁLÁSA). *Diagonalizálható-e a 8.12. példabeli*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix?

MEGOLDÁS. Az A mátrix sajátértégeit és sajátvektorait meghatároztuk a 8.12. példában. Mivel $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, a hozzájuk tartozó sajátvektorok $(1, 0, 0)$, $(1/2, 1, 0)$ és $(1/2, 0, 1)$, és ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ezért A hasonló a Λ diagonális mátrixhoz, ahol

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{és} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ez könnyen igazolható a $C\Lambda = AC$ összefüggés ellenőrzésével:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \square$$

*Bal sajátvektorok és a sajátfelbontás diadikus alakja** Az $Ax = \lambda x$ egyenlet helyett vizsgálhatjuk az $y^T A = \lambda y^T$ egyenletet is.

Az $y^T A = \lambda y^T$ egyenlet $y^T \neq 0^T$ feltételnek megfelelő sorvektorait az A mátrix *bal sajátvektorainak* nevezzük. E megfogalmazásban a sajátvektorokat szokás jobb sajátvektoroknak is nevezni.

A fenti egyenletet transzponálva kapjuk, hogy

$$A^T y = \lambda y,$$

vagyis a bal sajátvektorok a transzponált sajátvektorainak transzponáltjai. Mivel $\det(A - \lambda I) = \det((A - \lambda I)^T) = \det(A^T - \lambda I)$, azaz A és A^T karakterisztikus polinomja azonos, ezért a bal és jobb sajátvektorokhoz tartozó sajátértékek azonosak. A bal és jobb sajátvektorok azonban általában nem egyeznek meg.

Ha A diagonalizálható, azaz $\Lambda = C^{-1}AC$, akkor a 8.25. tételhez hasonlóan a $\Lambda C^{-1} = C^{-1}A$ mátrixegyenletből azt kapjuk, hogy C^{-1} sorvektorai A bal sajátvektorai. Jelölje ugyanis a C^{-1} mátrix i -edik

sorvektorát $\mathbf{y}_i^\top$, ekkor

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^\top \\ \mathbf{y}_2^\top \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^\top \\ \mathbf{y}_2^\top \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n^\top \end{bmatrix} \mathbf{A} \quad (8.6)$$

tehát $\lambda_i \mathbf{y}_i^\top = \mathbf{y}_i^\top \mathbf{A}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), vagyis $\mathbf{y}_i^\top$ valóban bal sajátvektor. Ekkor a sajátfelbontás azonnal diádok összegévé bontható:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \mathbf{C} \mathbf{\Lambda} \mathbf{C}^{-1} &= [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \dots \ \mathbf{x}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^\top \\ \mathbf{y}_2^\top \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n^\top \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1 \mathbf{x}_1 \mathbf{y}_1^\top + \lambda_2 \mathbf{x}_2 \mathbf{y}_2^\top + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n \mathbf{y}_n^\top \end{aligned} \quad (8.7)$$

Ezt nevezzük a *sajátfelbontás diadikus alakjának*.

8.27. PÉLDA (SAJÁTFELBONTÁS DIADIKUS ALAKJA ÉS A BAL SAJÁTVEKTOROK). *Határozzuk meg a 8.26. és a 8.12. példában szereplő*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix bal sajátvektorait, sajátfelbontását és annak diadikus alakját.

MEGOLDÁS. A bal sajátvektorok megegyeznek a transzponált sajátvektorainak transzponáltjaival. Így a bal sajátvektorok a szokásos technikával kiszámolhatók. Ha azonban a sajátfelbontást is kiszámoljuk, a bal sajátvektorok kiolvashatók a $\mathbf{C}^{-1}$ mátrixból is. A 8.26. példában meghatároztuk a $\mathbf{C}$ mátrixot, annak inverzét kiszámolva kapjuk a sajátfelbontást:

$$\mathbf{A} = \mathbf{C} \mathbf{\Lambda} \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ebből a diádokká való átírás a következő:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad \square$$

*Diagonalizálható mátrixok polinomjai és a Cayley–Hamilton-tétel** Belátjuk, hogy ha egy mátrixot behelyettesítünk saját karakterisztikus polinomjába, nullmátrixot kapunk.

Ha $p(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$ egy tetszőleges polinom, akkor értelmezhető e polinomnak egy tetszőleges négyzetes mátrixban fölvetett értéke, vagyis értelmezhető négyzetes mátrix polinomja a következő képlettel:

$$p(\mathbf{A}) = c_n \mathbf{A}^n + c_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \dots + c_1 \mathbf{A} + c_0 \mathbf{I}.$$

Ha az $\mathbf{A}$ mátrix diagonalizálható, és sajátfelbontása $\mathbf{A} = \mathbf{C} \mathbf{\Lambda} \mathbf{C}^{-1}$, akkor $\mathbf{A}^2 = \mathbf{C} \mathbf{\Lambda} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{\Lambda} \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C} \mathbf{\Lambda}^2 \mathbf{C}^{-1}$. Hasonlóképp tetszőleges nemnegatív k egészre

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{C} \mathbf{\Lambda}^k \mathbf{C}^{-1}.$$

Eszerint bármely $p(x)$ polinomra $p(\mathbf{A}) = \mathbf{C} p(\mathbf{\Lambda}) \mathbf{C}^{-1}$. Másrészt bármely diagonális mátrix polinomja a diagonális elemek polinomjával számolható, azaz

$$p(\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)) = \text{diag}(p(\lambda_1), p(\lambda_2), \dots, p(\lambda_n)).$$

Tehát bizonyítottuk a következő állítást:

8.28. ÁLLÍTÁS (DIAGONALIZÁLHATÓ MÁTRIX POLINOMJA). Legyen $\mathbf{A} = \mathbf{C} \mathbf{\Lambda} \mathbf{C}^{-1}$, ahol $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, és $p(x)$ egy tetszőleges polinom. Ekkor

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{C} \begin{bmatrix} p(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p(\lambda_n) \end{bmatrix} \mathbf{C}^{-1}.$$

Jelölje most $p_{\mathbf{A}}$ az $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus polinomját! Tehát ha λ az $\mathbf{A}$ sajátértéke, akkor $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0$. Innen azonnal adódik, hogy $p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$, ugyanis

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) &= \mathbf{C} p_{\mathbf{A}}(\mathbf{\Lambda}) \mathbf{C}^{-1} \\ &= \mathbf{C} \text{diag}(p_{\mathbf{A}}(\lambda_1), p_{\mathbf{A}}(\lambda_2), \dots, p_{\mathbf{A}}(\lambda_n)) \mathbf{C}^{-1} \\ &= \mathbf{O}. \end{aligned}$$

Ez az állítás nem csak diagonalizálható mátrixokra igaz, hanem általánosan is. Erre azonnal mutatunk egy egyszerű, de rossz bizonyítást! Mivel a karakterisztikus polinom $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$, gondolhatnánk, hogy akkor $p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A} - \mathbf{A} \mathbf{I}) = \det(\mathbf{O}) = 0$. Ez azonban hibás érvelés: λ helyébe egy mátrixban mátrixokat helyettesítettünk, ráadásul a jobb oldalon skalár, a bal oldalon mátrix áll!

8.29. TÉTEL (CAYLEY–HAMILTON-TÉTEL). Ha $\mathbf{A}$ egy tetszőleges négyzetes mátrix, melynek karakterisztikus polinomja $p_{\mathbf{A}}$, akkor $p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$.

BIZONYÍTÁS.

Különböző sajátértékek sajátalterei A diagonalizálhatóság fontos voltára tekintettel érdemes további feltételeket gyűjteni, melyek könnyen ellenőrizhetők.

Több elégséges feltétel származtatható a következő tételből:

8.30. TÉTEL (KÜLÖNBÖZŐ SAJÁTÉRTÉKEK SAJÁTVEKTORAI). Ha $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ különböző sajátértékei az $n \times n$ -es $\mathbf{A}$ mátrixnak, akkor a hozzájuk tartozó $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ sajátvektorok lineárisan függetlenek.

BIZONYÍTÁS. Indirekt módon tegyük fel, hogy e vektorok lineárisan összefüggők. Ekkor van a vektorok közt olyan, amely csak a kisebb indexűek lineáris függvénye. Legyen ezek közül a legkisebb indexű $\mathbf{x}_i$, azaz

$$\mathbf{x}_i = c_1 \mathbf{x}_1 + \dots + c_{i-1} \mathbf{x}_{i-1}, \quad (8.8)$$

de az i -nél kisebb indexű vektorok már lineárisan függetlenek. Szorozzuk meg az egyenlőség mindkét oldalát balról az $\mathbf{A}$ mátrixszal:

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \mathbf{A}(c_1 \mathbf{x}_1 + \dots + c_{i-1} \mathbf{x}_{i-1}) = c_1 \mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \dots + c_{i-1} \mathbf{A}\mathbf{x}_{i-1},$$

majd használjuk ki, hogy e vektorok sajátvektorok:

$$\lambda_i \mathbf{x}_i = c_1 \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + c_{i-1} \lambda_{i-1} \mathbf{x}_{i-1}. \quad (8.9)$$

Ezután a (8.8) egyenlet mindkét oldalát λ_i -vel szorozva kapjuk, hogy

$$\lambda_i \mathbf{x}_i = c_1 \lambda_i \mathbf{x}_1 + \dots + c_{i-1} \lambda_i \mathbf{x}_{i-1}. \quad (8.10)$$

Végül a (8.10) egyenletből a (8.9) egyenletet kivonva kapjuk, hogy

$$\mathbf{0} = c_1 (\lambda_i - \lambda_1) \mathbf{x}_1 + \dots + c_{i-1} (\lambda_i - \lambda_{i-1}) \mathbf{x}_{i-1},$$

Mivel az $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}$ vektorok már lineárisan függetlenek, és a $\lambda_1, \dots, \lambda_i$ értékek különbözőek, így $c_1 = \dots = c_{i-1} = 0$. Eszerint

$$\mathbf{x}_i = 0\mathbf{x}_1 + \dots + 0\mathbf{x}_{i-1} = \mathbf{0},$$

ami ellentmondás, hisz $\mathbf{x}_i$ sajátvektor, tehát nem lehet a $\mathbf{0}$. Ez bizonyítja az indirekt feltevés helytelen voltát, azaz igazolja állításunkat. $\square$

► Szokás úgy fogalmazni, hogy a különböző sajátértékekhez tartozó sajátalterek lineárisan függetlenek, hisz bárhogyan választunk mindegyikükből egy-egy nemzérus vektort, azok lineárisan függetlenek lesznek.

- Másik fontos következménye e tételnek, hogy ha különböző sajátértékekhez tartozó sajátalterek mindegyikéből lineárisan független vektorokat választunk, akkor még ezek egyesítése is lineárisan független lesz. Ha ugyanis lineárisan összefüggnének, akkor az egy altérbe eső vektorok lineáris kombinációit összevonva egyetlen vektorrá, minden sajátértékhez egy-egy sajátvektort kapnánk, melyek összefüggők lennének, ami a fenti tételnek ellentmond.
- Speciálisan az is igaz, hogy különböző sajátértékekhez tartozó sajátalterek mindegyikéből egy bázist választva, azok egyesítése is lineárisan független vektorrendszert ad.

8.31. KÖVETKEZMÉNY (KÜLÖNBÖZŐ SAJÁTÉRTÉKEK ÉS A DIAGONALIZÁLHATÓSÁG). *Ha az n -edrendű A mátrixnak n darab különböző sajátértéke van, akkor diagonalizálható.*

BIZONYÍTÁS. A 8.25. és a 8.30. tételek szerint n különböző sajátértékhez n független sajátvektor tartozik, ami épp azt jelenti, hogy a mátrix diagonalizálható. $\square$

Végezetül felsorolunk néhány mátrixosztályt, melyekbe tartozó mátrixok mindegyike egyformán viselkedik a diagonalizálhatóságra nézve:

- a) Egy valós n -edrendű mátrix nem diagonalizálható a valós mátrixok körében, ha karakterisztikus egyenletének vannak komplex gyökei, a komplex sajátértékekhez ugyanis nem található valós sajátvektor, így nem találhatunk n független sajátvektort, hisz a valós sajátértékek száma kisebb n -nél. Például a

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix a valósok fölött nem diagonalizálható, de a komplexek fölött igen (ld. a ?? feladatot).

- b) Nem diagonalizálhatók a nilpotens mátrixok, például a

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix (?? feladat).

- c) Diagonalizálható minden szimmetrikus mátrix, sőt, sajátvektoraiból ortonormált bázis is kiválasztható. Ezt hamarosan belátjuk (9.2. tétel).

8.32. PÉLDA (DIAGONALIZÁLHATÓSÁG MEGÁLLAPÍTÁSA). *Döntsük el,*

hogy az alábbi mátrixok közül melyik diagonalizálható valós mátrixként!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}.$$

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{A}$ mátrix nilpotens, mert $\mathbf{A}^2 = \mathbf{O}$, így nem diagonalizálható. A $\mathbf{B}$ mátrixnak vannak komplex sajátértékei, így a valósok fölött nem diagonalizálható, de a komplexek fölött igen, mert két különböző sajátértéke van. A $\mathbf{C}$ mátrixnak különbözőek a sajátértékei, és mind valósak (1, 4, 6), így diagonalizálható. A $\mathbf{D}$ mátrix szimmetrikus, tehát diagonalizálható. $\square$

Sajátértékek multiplicitása és a diagonalizálhatóság* A sajátértékek algebrai és geometriai multiplicitása, valamint a diagonalizálhatóság közt egyszerű, de fontos összefüggés van. Nevezetesen a geometriai multiplicitás sosem nagyobb az algebrainál, másrészt a diagonalizálhatóság ekvivalens azzal, hogy a geometriai és algebrai multiplicitások minden sajátérték esetén megegyeznek.

8.33. TÉTEL (ALGEBRAI ÉS GEOMETRIAI MULTIPLICITÁS KAPCSOLATA). Egy mátrix valamely sajátértékének geometriai multiplicitása nem lehet nagyobb az algebrai multiplicitásánál.

BIZONYÍTÁS. Az $\mathbf{A}$ mátrix egy μ sajátértékének geometriai multiplicitását jelölje g . Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{A} - \mu\mathbf{I}$ nullterének van g vektorból álló bázisa. Legyen ez $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_g$. Egészítsük ki e bázist az egész tér bázisává a $\mathbf{x}_{g+1}, \dots, \mathbf{x}_n$ vektorokkal. E független vektorokból képzett $\mathbf{C} = [\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_g | \mathbf{x}_{g+1} \dots \mathbf{x}_n]$ mátrix invertálható. Írjuk $\mathbf{C}$ -t blokkmátrix alakba: $\mathbf{X}$ legyen az első g oszlopból álló blokk, azaz $\mathbf{C} = [\mathbf{X} | \mathbf{Y}]$. Mivel $\mathbf{X}$ oszlopai a μ -höz tartozó sajátvektorok, ezért $\mathbf{AX} = \mu\mathbf{X}$. A $\mathbf{C}^{-1}$ inverzet első g sora után bontsuk blokkokra:

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z} \\ \mathbf{W} \end{bmatrix}.$$

Írjuk fel az $\mathbf{I} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}$ összefüggést blokkmátrix alakban:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_g & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I}_{n-g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z} \\ \mathbf{W} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{ZX} & \mathbf{ZY} \\ \mathbf{WX} & \mathbf{WY} \end{bmatrix}.$$

Innen leolvasható, hogy $\mathbf{WX} = \mathbf{O}$, $\mathbf{ZY} = \mathbf{O}$, $\mathbf{ZX} = \mathbf{I}_g$, $\mathbf{WY} = \mathbf{I}_{n-g}$. Ezeket felhasználva kapjuk, hogy

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z} \\ \mathbf{W} \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{ZAX} & \mathbf{ZAY} \\ \mathbf{WAX} & \mathbf{WAY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu\mathbf{I}_g & \mathbf{ZAY} \\ \mathbf{O} & \mathbf{WAY} \end{bmatrix},$$

ugyanis $\mathbf{ZAX} = \mathbf{Z}\mu\mathbf{X} = \mu\mathbf{ZX} = \mu\mathbf{I}_g$, és $\mathbf{WAX} = \mu\mathbf{WX} = \mathbf{O}$. Az így kapott mátrix karakterisztikus polinomja

$$\begin{vmatrix} \mu\mathbf{I}_g - \lambda\mathbf{I}_g & \mathbf{ZAY} \\ \mathbf{O} & \mathbf{WAY} - \lambda\mathbf{I}_{n-g} \end{vmatrix},$$

ami a 6.32. tétel szerint $(\mu - \lambda)^g \det(\mathbf{WAY} - \lambda\mathbf{I}_{n-g})$. Ez pedig azt jelenti, hogy $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$ és ezzel együtt $\mathbf{A}$ karakterisztikus polinomjának μ legalább g -szeres algebrai multiplicitású gyöke. $\square$

8.34. TÉTEL (DIAGONALIZÁLHATÓSÁG ÉS A GEOMETRIAI MULTIPLICITÁS). Egy n -edrendű négyzetes mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha a sajátértékeihez tartozó geometriai multiplicitások összege n .

BIZONYÍTÁS. $(\Rightarrow)$ Ha a mátrix diagonalizálható, akkor az azonos sajátértékhez tartozó vektorok által kifeszített sajátaltér dimenziója megegyezik e sajátérték geometriai multiplicitásával. A geometriai multiplicitások összege tehát épp n , hisz egyetlen sajátvektor sem lehet két sajátaltérben.

$(\Leftarrow)$ A geometriai multiplicitás nem nagyobb az algebrainál, az algebraiak összege pedig legfeljebb n (komplex esetben pontosan n , valós esetben lehet n -nél kisebb is, ha a karakterisztikus polinomnak vannak komplex gyökei). Így ha a geometriai multiplicitások összege n , akkor minden sajátaltérből kiválasztva egy bázist, és véve ezek egyesítését, egy n sajátvektorból álló független vektorrendszert kapunk (ld. a 8.30. tétel utáni megjegyzéseket). Így tehát a mátrix diagonalizálható. $\square$

► E tétel elegáns megfogalmazása így hangzik: egy $\mathbb{T}$ test fölötti n -edrendű mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha a $\mathbb{T}^n$ tér előáll sajátaltéreneinek direkt összegeként.

► A tétel lineáris leképezésekre is kimondható: az $A : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ lineáris leképezés pontosan akkor diagonalizálható, ha sajátaltérei dimenziójának összege n .

8.35. PÉLDA (LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓ DIAGONALIZÁLÁSA). Az alábbi lineáris leképezésekhez keressünk – pusztán geometriai szemléletünkre hagyatkozva – olyan bázist, melyben a mátrixa diagonális. Használjuk fel a 8.22. példa eredményeit.

- a sík vektorainak tükrözése egy egyenesre (vagy pontjainak tükrözése egy origón átmenő egyenesre);
- a sík vektorainak merőleges vetítése egy egyenesre (vagy pontjainak merőleges vetítése egy origón átmenő egyenesre);
- a tér vektorainak elforgatása egy egyenes körül a π egész számú többszörösétől különböző szöggel;
- a tér vektorainak merőleges vetítése egy síkra;

e) a tér vektorainak tükrözése egy síkra.

MEGOLDÁS. A 8.22. példában meghatároztuk e leképezések sajátaltérét. Ezeket használjuk a következőkben.

a) Az egyenes – melyre tükrözünk – egyik irányvektora legyen $\mathbf{a}$, egy rá merőleges nemnulla vektor legyen $\mathbf{b}$. Ekkor $T\mathbf{a} = \mathbf{a}$ és $T\mathbf{b} = -\mathbf{b}$, ahol T a tükröző lineáris leképezés. Ennek az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ bázisban a mátrixa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

b) Az egyenes – melyre vetítünk – egyik irányvektora legyen $\mathbf{a}$, egy rá merőleges nemnulla vektor legyen $\mathbf{b}$. Ekkor $P\mathbf{a} = \mathbf{a}$ és $P\mathbf{b} = -\mathbf{b}$, ahol P a vetítő lineáris leképezés. Ennek az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ bázisban a mátrixa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

c) E leképezésnek nincs valós diagonális mátrixa, mert csak egyetlen valós sajátaltér van, és az csak 1-dimenziós: ez a tengely irányvektora által kifeszített altér. A forgástengelyre merőleges sík ugyan nem sajátaltér, de a forgatás önmagába viszi (az ilyet nevezik *invariáns altérnek*), így ennek bázisával egy „diagonálshoz közeli” alakot kaphatunk. Ha a forgás tengelyének egy irányvektora $\mathbf{a}$, a rá merőleges sík egy ortonormált bázisa $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\}$, ahol a $\mathbf{b}$ vektor $\pi/2$ radiánnal való elforgatottja épp $\mathbf{c}$, akkor az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ bázisban a forgató F leképezés mátrixa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix},$$

ugyanis $F\mathbf{a} = \mathbf{a}$, $F\mathbf{b} = \cos \alpha \mathbf{b} + \sin \alpha \mathbf{c}$, $F\mathbf{c} = -\sin \alpha \mathbf{b} + \cos \alpha \mathbf{c}$.

d) A sík, melyre vetítünk az 1 sajátértékhez tartozik. Ha ebben választva egy $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ bázist, és $\mathbf{c}$ egy a síkra merőleges nemzérus vektor, akkor $T\mathbf{a} = \mathbf{a}$, $T\mathbf{b} = \mathbf{b}$, $T\mathbf{c} = \mathbf{0}$, így T mátrixa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

e) A sík, melyre tükrözünk az 1 sajátértékhez tartozik. Ha ebben választva egy $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ bázist, és $\mathbf{c}$ egy a síkra merőleges nemzérus vektor, akkor $T\mathbf{a} = \mathbf{a}$, $T\mathbf{b} = \mathbf{b}$, $T\mathbf{c} = -\mathbf{c}$, így T mátrixa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

□

Diagonalizálható mátrixok spektrálfelbontása* A diagonalizálható $\mathbf{A}$ mátrix $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1}$ alakja egy hasznos felbontását, az ún. spektrálfelbontását adja a mátrixnak.

Legyen $\mathbf{A}$ spektruma $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$. Bontsuk fel a $\mathbf{\Lambda}$ mátrixot blokkdiagonális alakra úgy, hogy az azonos sajátértékek egy blokkba kerüljenek, majd ennek megfelelően bontsuk fel a $\mathbf{C}$ és $\mathbf{C}^{-1}$ mátrixot is blokkokra a következők szerint:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{I} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \lambda_2 \mathbf{I} & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \lambda_k \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [\mathbf{X}_1 \quad \mathbf{X}_2 \quad \dots \quad \mathbf{X}_k], \quad \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1^T \\ \mathbf{Y}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_k^T \end{bmatrix}.$$

Írjuk föl e mátrixokkal az $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1}$ felbontást, majd fejtsük ki a blokkműveleteket:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1} &= [\mathbf{X}_1 \quad \mathbf{X}_2 \quad \dots \quad \mathbf{X}_k] \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{I} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \lambda_2 \mathbf{I} & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \lambda_k \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1^T \\ \mathbf{Y}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_k^T \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1 \mathbf{X}_1 \mathbf{Y}_1^T + \lambda_2 \mathbf{X}_2 \mathbf{Y}_2^T + \dots + \lambda_k \mathbf{X}_k \mathbf{Y}_k^T \\ &= \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 \mathbf{P}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{P}_k, \end{aligned}$$

ahol $\mathbf{P}_i = \mathbf{X}_i \mathbf{Y}_i^T$ a λ_i sajátértékhez tartozó mátrix, melyről a következőket fogjuk megmutatni:

8.36. ÁLLÍTÁS (DIAGONALIZÁLHATÓ MÁTRIXOK SPEKTRÁLFELBONTÁSA). Minden $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ spektrumú diagonalizálható $\mathbf{A}$ mátrix felírható

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 \mathbf{P}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{P}_k$$

alakban, ahol

- a) $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \dots + \mathbf{P}_k = \mathbf{I}$,
- b) $\mathbf{P}_i \mathbf{P}_j = \mathbf{O}$, ha $i \neq j$,
- c) $\mathbf{P}_i$ az $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})$ sajátaltérre való $\mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})$ altér menti vetítés.

► Valójában több is igaz, nevezetesen megmutatható, hogy a fenti három feltétel szükséges és elégséges feltétele annak, hogy $\mathbf{A}$ diagonalizálható legyen. E tételt a diagonalizálható mátrixok spektráltételének is nevezik.

BIZONYÍTÁS. A fent konstruált felbontásról megmutatjuk, hogy eleget tesz a feltételeknek.

a) A $\mathbf{C}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{I}$ egyenlőséget blokkmátrixokként kezelve és fölhasználva a $\mathbf{P}_i = \mathbf{X}_i \mathbf{Y}_i^T$ egyenlőségeket kapjuk, hogy $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \dots + \mathbf{P}_k = \mathbf{I}$.

b) A $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C} = \mathbf{I}$ egyenlőség blokkmátrixokalakja viszont az $\mathbf{Y}_i^T \mathbf{X}_i = \mathbf{I}$, és az $\mathbf{Y}_i^T \mathbf{X}_j = \mathbf{O}$ ($i \neq j$) egyenlőségre vezet.

c) Az előzőekből adódik, hogy $\mathbf{P}_i^2 = \mathbf{P}_i$, ugyanis $\mathbf{P}_i^2 = \mathbf{X}_i (\mathbf{Y}_i^T \mathbf{X}_i) \mathbf{Y}_i^T =$

$\mathbf{X}_i \mathbf{Y}_i^T = \mathbf{P}_i$. Eszerint tehát $\mathbf{P}_i$ vetítés. Meg kell még mutatnunk, hogy $\mathcal{O}(\mathbf{P}_i) = \mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})$. Ehhez fölhasználjuk, hogy bármely két $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ mátrixra $\mathcal{O}(\mathbf{XY}) \subseteq \mathcal{O}(\mathbf{X})$.

$$\mathcal{O}(\mathbf{P}_i) = \mathcal{O}(\mathbf{X}_i \mathbf{Y}_i^T) \subseteq \mathcal{O}(\mathbf{X}_i) = \mathcal{O}(\mathbf{X}_i \mathbf{Y}_i^T \mathbf{X}_i) = \mathcal{O}(\mathbf{P}_i \mathbf{X}_i) \subseteq \mathcal{O}(\mathbf{P}_i).$$

Tehát mindenütt egyenlőség áll fenn, és $\mathcal{O}(\mathbf{P}_i) = \mathcal{O}(\mathbf{X}_i) = \mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})$. Végül megmutatjuk, hogy a vetítés nulltere $\mathcal{N}(\mathbf{P}_i) = \mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})$. Kihasználva a fönt bizonyítottakat kapjuk, hogy

$$\mathbf{P}_i(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) = \mathbf{P}_i \left(\sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{P}_j - \lambda_i \sum_{j=1}^k \mathbf{P}_j \right) = \sum_{j=1}^k (\lambda_j - \lambda_i) \mathbf{P}_i \mathbf{P}_j = \mathbf{O}.$$

Eszerint $\mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) \subseteq \mathcal{N}(\mathbf{P}_i)$. Másrészt $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) = \mathcal{O}(\mathbf{P}_i)$, így a dimenziótétel miatt $\dim \mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) = \dim \mathcal{N}(\mathbf{P}_i)$, ami bizonyítja, hogy $\mathcal{N}(\mathbf{P}_i) = \mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})$. $\square$

A sajátérték kiszámítása

A sajátérték becslése, extrémumtulajdonságai, kiszámításának iteratív technikái nem csak a numerikus számítások szempontjából fontosak.

Gerschgorin-körök Egy mátrix elemeiből nagyon egyszerű számításokkal becslések adhatók a sajátértékekre. A komplex számsík Gerschgorin-köröi például tartalmazzák az összes sajátértéket.

Az $n \times n$ -es valós vagy komplex $\mathbf{A}$ mátrix Gerschgorin-köreire az a_{ii} közepű, és r_i^{SOR} és r_i^{OSZ} sugarú G_i^{SOR} és G_i^{OSZ} köröket értjük ($i = 1, 2, \dots, n$), ahol

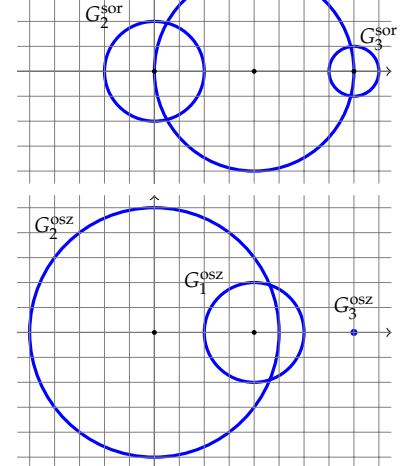
$$r_i^{\text{SOR}} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad r_i^{\text{OSZ}} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ji}|. \quad (8.11)$$

Más szavakkal pl. a G_i^{SOR} kör középpontja a_{ii} , sugara az $\mathbf{A}$ mátrix i -edik sorában lévő, nem a főátlón lévő elemek abszolút értékeinek összege, míg G_i^{OSZ} sugara az i -edik oszlop nem a főátlón lévő elemei abszolút értékének összege.

8.37. PÉLDA (GERSCHGORIN-KÖRÖK). Rajzoljuk föl a

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

mátrix Gerschgorin köreit!



8.3. ábra: Az A mátrix Gerschgorin körei

A megoldás a 8.3 ábrán látható.

8.38. TÉTEL (GERSHGORIN-KÖRÖK TULAJDONSÁGAI). Legyen A valós vagy komplex $n \times n$ -es mátrix. Ekkor igazak a következők:

- Minden sajátérték benne van a G_i^{sor} körök egyesítésében.
- Minden sajátérték benne van a G_i^{osz} körök egyesítésében.
- Minden sajátérték benne van az előző két halmaz metszetében.
- Ha a G_i^{sor} körök egy k -elemű részhalmaza diszjunkt a maradék $n - k$ kör mindegyikétől, akkor uniójuk multiplicitással számolva pontosan k sajátértéket tartalmaz.

BIZONYÍTÁS. Jelölje $\sigma(A)$ az A mátrix spektrumát!

a) Az állítás szerint $\sigma(A) \subseteq \bigcup_i G_i^{sor}$. A λ sajátértékhez tartozó egyik sajátvektort osszuk el legnagyobb abszolút értékű koordinátájával. E vektort jelölje x , legyen $x_i = 1$, tehát $|x_j| \leq 1$ ($j = 1, 2, \dots, n$). Mivel $\lambda = \lambda x_i = [\lambda x]_i = [Ax]_i = \sum_j a_{ij} x_j$, így $\lambda - a_{ii} = \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j$, tehát

$$|\lambda - a_{ii}| = \left| \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| |x_j| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| = r_i^{sor}.$$

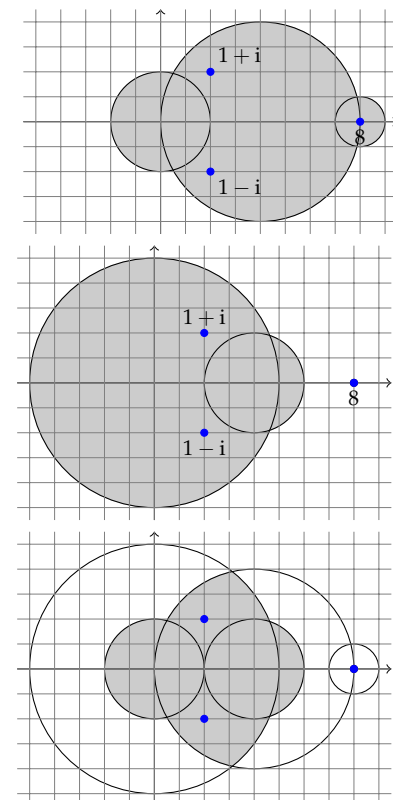
b) Mivel A és A^T sajátértékei megegyeznek, ezért sorok helyett oszlopokkal ugyanezek a számítások megismételhetők.

c) Mivel a sajátértékek az előző két pontban megadott halmazok mindegyikében benne vannak, ezért metszetükben is.

d) Legyen $B(r)$ az a mátrix, melynek elemeire $b_{ii} = a_{ii}$, $b_{ij} = r a_{ij}$, ha $i \neq j$. Mátrixműveletekkel kifejezve $B(r) = rA + (1 - r) \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$. Eszerint $B(0) = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$, $B(1) = A$. Változtassuk r folyamatosan 0-tól 1-ig. Eközben $B(r)$ Gerschgorin-körei 0-sugarúból indulva nőnek az A Gerschgorin-köreiig, középpontjaik közben nem változnak. Mivel a sajátértékek a mátrix elemeinek folytonos függvényei, ezért az egymással fedésbe kerülő, de a többitől diszjunkt maradó k számú kör által lefedett sajátértékek száma k marad. $\square$

► Az nem igaz, hogy mindegyik Gerschgorin-körben van legalább egy sajátérték. Például a $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékei $1 + i$ és $1 - i$. Ezek nem esnek bele sem a 0-közepű 1-sugarú sem a 2 közepű 1-sugarú Gerschgorin-körbe (ld. 8.5 a), b) ábra).

► Az előző megjegyzésnek megfelelően nem lehet úgy keresni a sajátértékeket, hogy minden főátlóbeli elemhez a sor- és oszlopösszegek közül a kisebbiket választjuk. Helyesen a tétel a) és b) pontjaiban konstruált halmazok metszetét kell venni, ami például esetünkben a 8.5 c) ábrán látható.



8.4. ábra: Az A mátrix sajátértékeit tartalmazza a) a sorösszeg szerinti halmaz, b) az oszlopösszeg szerinti halmaz, c) a két halmaz metsze

8.39. PÉLDA (GERSCHGORIN-KÖRÖK HASZNÁLATA). Mutassuk meg a Gerschgorin-körök segítségével, hogy a

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

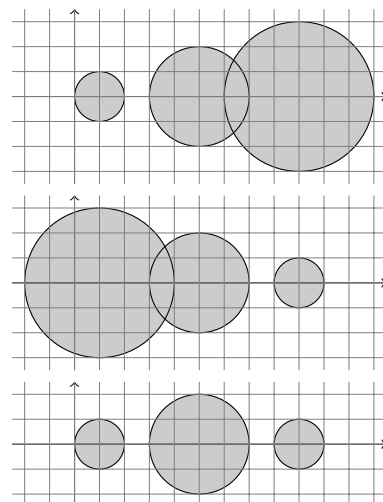
mátrixnak minden sajátértéke valós.

MEGOLDÁS. Mivel valóselemű mátrix komplex gyökei párosával egymás konjugáltjai, ezért ha egy Gerschgorin-kör diszjunkt a többitől, abban csak egy valós sajátérték lehet. Az $\mathbf{A}$ mátrix sorok szerinti Gerschgorin-körei azt mutatják, hogy az 1-közepű 1-sugarú körben egy valós sajátérték van. Mivel a másik két kör metszi egymást, ezért a másik két sajátérték még lehetne komplex. Az oszlopok szerinti 9-közepű 1-sugarú Gerschgorin-kör viszont egy újabb valós sajátértéket garantál, így a harmadik is szükségképpen az. Ezt mutatja a sorok és oszlopok szerinti halmazok metszete is. A sajátértékek a $[0, 2]$, $[3, 7]$ és a $[8, 10]$ intervallumba esnek. $\square$

8.40. ÁLLÍTÁS (DOMINÁNS FŐÁTLÓJÚ MÁTRIX INVERTÁLHATÓSÁGA). Bármely soronként domináns főátlójú valós vagy komplex mátrix invertálható. Hasonló igaz az oszloponként domináns főátlójú mátrixokra is.

BIZONYÍTÁS. A ?? definíció szerint az $\mathbf{A}$ mátrix soronként domináns főátlójú, ha bármely főátlóbeli elemére $|a_{ii}| < \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$. Ez épp azt jelenti, hogy $\mathbf{A}$ minden Gerschgorin-körének középpontja messzebb van az origótól, mint amekkora a sugara, azaz a 0 szám egyik Gerschgorin-körben sincs benne, tehát a 0 nem sajátérték, így $\mathbf{A}$ invertálható. $\square$

Hatványmódszer



8.5. ábra: A $\mathbf{B}$ mátrix sorösszeg és oszlopösszeg szerinti Gerschgorin körei és ezek metszete. Utóbbi mutatja, hogy $\mathbf{B}$ -nek három valós sajátértéke van.

*Feladatok**Gerschgorin-körök*

8.2. Mutassuk meg, hogy az

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

mátrixnak legalább két sajátértéke valós.

8.3. utassuk meg, hogy az alábbi mátrixok minden sajátér-

téke valós! a) $\begin{bmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 9 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

Megoldások

8.2. A 9-közepű 1-sugarú Gerschgorin-körben csak 1 gyök lehet, így az valós. Mivel összesen 4 gyöke van és a komplexek párosan fordulnak elő, ezért kell még valós gyöknek lennie.

8.3. a) A sorokhoz tartozó Gerschgorin-körök közül az 1-közepű, 1-sugarú kör diszjunkt a többitől, így ebben a körben egy van egy valós sajátérték, az oszlopokhoz tartozók közül a 9-közepű, 1-sugarú diszjunkt a többitől, így ebben a körben is van egy valós sajátérték, és ha két sajátérték valós, akkor a harmadik is. Az a)-beli mátrixban a sorokra, a b)-beliben az oszlopokra alkalmazva

9

Diagonalizálás ortonormált bázisban

Ortogonalis és unitér diagonalizálás

Egy mátrixot diagonalizálni azzal ekvivalens, hogy a hozzá tartozó mátrixleképezéshez egy olyan bázist találni, melyben mátrixa diagonális. Különösen szerencsés, ha e bázis még ortonormált is!

Valós mátrixok ortogonalis diagonalizálása, valós spektráltétel Megmutatjuk, hogy a valós mátrixok közt pontosan a szimmetrikusak azok, amelyekhez találni olyan ortonormált bázist, melyben diagonális alakot ölt.

A 8.25. tétel szerint a diagonalizálhatóság szükséges és elégséges feltétele, hogy létezzen a mátrix rendjével egyező számú független sajátvektora. Ha e vektorok ortonormált rendszert alkotnak, akkor a belőlük alkotott mátrix ortogonalis mátrix.

9.1. DEFINÍCIÓ (ORTOGONÁLIS DIAGONALIZÁLHATÓSÁG). Az $\mathbf{A}$ mátrix ortogonalisan diagonalizálható, ha találunk egy ortogonalis $\mathbf{Q}$ és egy diagonális $\mathbf{\Lambda}$ mátrixot, hogy $\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}$.

Először megmutatjuk, hogy szimmetrikus mátrix esetén a sajátalterek nem csak függetlenek egymástól, de merőlegesek is egymásra.

9.2. TÉTEL (SZIMMETRIKUS MÁTRIX SAJÁTALTEREI). Szimmetrikus mátrix bármely két különböző sajátaltére merőleges egymásra.

BIZONYÍTÁS. Két különböző sajátaltér két különböző sajátértékhez tartozik. Megmutatjuk, hogy az egyik altér bármelyik vektora merőleges a másik altér bármely vektorára. Legyen tehát $(\lambda, \mathbf{x})$ és $(\mu, \mathbf{y})$ két saját pár, ahol $\lambda \neq \mu$ két különböző sajátértéke $\mathbf{A}$ -nak. Így $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ és $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mu\mathbf{y}$. Ebből adódik, hogy

$$\lambda(\mathbf{x}^T \mathbf{y}) = (\lambda\mathbf{x})^T \mathbf{y} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^T \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mu \mathbf{y} = \mu(\mathbf{x}^T \mathbf{y}).$$

Eszerint $(\lambda - \mu)(\mathbf{x}^\top \mathbf{y}) = 0$, de $\lambda - \mu \neq 0$, ezért $\mathbf{x}^\top \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$, azaz a két vektor merőleges egymásra. $\square$

9.3. TÉTEL (VALÓS SPEKTRÁLTÉTEL). *A valós $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható ortogonálisan, ha szimmetrikus.*

BIZONYÍTÁS. $(\Rightarrow)$ Tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ ortogonálisan diagonalizálható, azaz létezik olyan ortogonális $\mathbf{Q}$ és diagonális $\mathbf{\Lambda}$ mátrix, hogy $\mathbf{Q}^\top \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}$, azaz balról a $\mathbf{Q}$, jobbról a $\mathbf{Q}^\top$ mátrixszal szorozva $\mathbf{A} = \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^\top$. Ekkor

$$\mathbf{A}^\top = (\mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^\top)^\top = (\mathbf{Q}^\top)^\top \mathbf{\Lambda}^\top \mathbf{Q}^\top = \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^\top = \mathbf{A}.$$

Tehát $\mathbf{A}$ szimmetrikus.

$(\Leftarrow)$ Az $\mathbf{A}$ mátrix rendjére vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk. $n = 1$ esetén nincs mit bizonyítani, ekkor $\mathbf{A}$ szimmetrikus és diagonális alakú. Tegyük fel, hogy minden legföljebb $n - 1$ -edrendű mátrixra igaz az állítás, azaz hogy ha szimmetrikus, akkor ortogonálisan hasonló egy diagonális mátrixhoz. Mivel $\mathbf{A}$ szimmetrikus, ezért minden sajátértéke valós. Legyen ezek egyike λ , a hozzá tartozó egyik egységnyi hosszú sajátvektor $\mathbf{u}_1$. Egészítsük ki $\mathbf{u}_1$ -et a teljes tér egy $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ ONB-ává. Ekkor a $\mathbf{Q}_0 = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{u}_n]$ mátrix ortogonális, és

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_0^\top \mathbf{A} \mathbf{Q}_0 &= \mathbf{Q}_0^\top \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{u}_n \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_0^\top \begin{bmatrix} \mathbf{A} \mathbf{u}_1 & \mathbf{A} \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{A} \mathbf{u}_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^\top \\ \mathbf{u}_2^\top \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \mathbf{u}_1 & \mathbf{A} \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{A} \mathbf{u}_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{B}, \end{aligned} \tag{9.1}$$

ugyanis $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ ONB, így $\mathbf{u}_1^\top (\lambda \mathbf{u}_1) = \lambda (\mathbf{u}_1^\top \mathbf{u}_1) = \lambda$, és $i > 1$ esetén $\mathbf{u}_i^\top (\lambda \mathbf{u}_1) = \lambda (\mathbf{u}_i^\top \mathbf{u}_1) = 0$. A $\mathbf{B}$ blokkmátrixban tehát $\mathbf{A}_1$ egy $(n - 1) \times (n - 1)$ -es valós mátrix. Másrészt

$$\mathbf{B}^\top = (\mathbf{Q}_0^\top \mathbf{A} \mathbf{Q}_0)^\top = \mathbf{Q}_0^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}_0^\top \mathbf{A} \mathbf{Q}_0 = \mathbf{B},$$

azaz $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \lambda & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix}$ szimmetrikus, tehát $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix}$, és $\mathbf{A}_1$ is szimmetrikus!

Mivel $\mathbf{B}$ hasonló $\mathbf{A}$ -hoz, ezért sajátértékeik megegyeznek, tehát $\mathbf{A}_1$ minden sajátértéke $\mathbf{A}$ -nak is sajátértéke. A teljes indukció miatt viszont $\mathbf{A}_1$ -hez létezik olyan $\mathbf{Q}_1$ ortogonális és $\mathbf{\Lambda}_1$ diagonális mátrix, hogy $\mathbf{A}_1 = \mathbf{Q}_1 \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{Q}_1^\top$. Ekkor viszont a $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix}$ mátrix ortogonális, hisz két ortogonális mátrix szorzata, és $\mathbf{A}$ -t hasonlóvá teszi egy

diagonális mátrixhoz:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} &= \left(\mathbf{Q}_0 \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} \right)^T \mathbf{A} \left(\mathbf{Q}_0 \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix}^T \mathbf{Q}_0^T \mathbf{A} \mathbf{Q}_0 \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1^T \mathbf{A}_1 \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \Lambda_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ezzel bizonyítottuk, hogy a szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrix is ortogonálisan diagonalizálható. $\square$

► A tétel bizonyítása egyúttal ötletet ad a diagonalizálás megvalósításához is. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix egy λ sajátértékét, és állítsuk elő a

$$\begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix}, \quad \text{és a} \quad \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix}$$

mátrixokat. A következő lépésben ismételjük meg e lépést az $\mathbf{A}_1$ mátrixszal, de az ott előálló $(n-2) \times (n-2)$ -es $\mathbf{Q}_2$ mátrixból az

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathbf{0}^T \\ 0 & 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix}$$

ortogonális mátrixot képezzük, stb. Végül az így kapott mátrixok szorzata lesz $\mathbf{Q}$, azaz

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathbf{0}^T \\ 0 & 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathbf{0}^T \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{0}^T \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_3 \end{bmatrix} \cdots$$

9.4. PÉLDA. *Diagonalizáljuk az alábbi mátrixot ortogonálisan!*

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Határozzuk meg az áttérés mátrixát a standardról arra a bázisra, melyben e mátrix diagonális alakot vesz fel!

MEGOLDÁS. A karakterisztikus polinom:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 24\lambda + 20,$$

melynek gyökei 2, 2 és 5. Tehát a diagonális alak $\text{diag}(2, 2, 5)$. Az áttérés mátrixához szükségünk lesz a sajátvektorokra. $\lambda = 2$ esetén:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

az $x + y + z = 0$ egyenletrendszer megoldása pedig $(x, y, z) = (-1, 1, 0)s + (-1, 0, 1)t$. Ennek az alternek egy bázisa tehát a $(-1, 1, 0)$ és a $(-1, 0, 1)$ vektorokból áll. A $\lambda = 5$ esetén:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

amely egyenletrendszer megoldása $(x, y, z) = (1, 1, 1)t$. A két különböző sajátaltérből való vektorok merőlegesek egymásra, de a $\lambda = 2$ -höz tartozó sajátaltér két sajátvektora nem alkot ortogonális rendszert, ezért az általuk kifeszített térben új bázist keresünk, egy ortonormáltat. Legyen az $\mathbf{a} = (-1, 1, 0)/\sqrt{2}$ vektor az egyik, ekkor

$$(-1, 0, 1) - \left((-1, 0, 1) \cdot \frac{(-1, 1, 0)}{\sqrt{2}} \right) \frac{(-1, 1, 0)}{\sqrt{2}} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right).$$

Ezt normálva kapjuk a $\mathbf{b} = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$ vektort, végül a $\lambda = 5$ -höz tartozó normált vektor $\mathbf{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. A standard bázisra való áttérés mátrixa tehát az $[\mathbf{a}|\mathbf{b}|\mathbf{c}]$ mátrix, azaz

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Ennek inverze lesz a standard bázisról való áttérés mátrixa, mely ortogonális mátrixról lévén szó a transzponáltja, azaz

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

□

Schur-felbontás* Olyan ortonormált bázist találni, melyben egy mátrix egyszerűbb alakú akkor is fontos, ha az az alak nem a diagonális. Ilyen például a felsőháromszög-mátrix-alak.

A **valós spektráltétel** bizonyításának csekély változtatása egy másik hasznos tételre vezet. Az ott konstruált $\mathbf{B}$ mátrixban ugyanis elimináltuk az $\mathbf{A}$ első oszlopának főátló alatti elemeit. Ezt a lépést ismételve elérhető, hogy a mátrixot felső háromszög-alakra hozzuk.

9.5. TÉTEL (SCHUR-FELBONTÁS).

a) Minden valós négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix, melynek minden sajátértéke valós, ortogonálisan hasonló egy $\mathbf{T}$ felső háromszögmátrixhoz, azaz van olyan $\mathbf{Q}$ ortogonális mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T$.

b) Minden komplex négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix unitéren hasonló egy $\mathbf{T}$ felső háromszögmátrixhoz, azaz van olyan $\mathbf{U}$ unitér mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{T}\mathbf{U}^H$.

► Fontos megjegyezni, hogy a tétel valós és komplex mátrixokra vonatkozó része közt csak annyi a különbség, hogy valós mátrixoknál megköveteltük a sajátértékek valós voltát, míg komplexeknél nem tettünk semmi kikötést – sejtetően azért, mert komplex mátrix sajátértékei mindig komplexek.

BIZONYÍTÁS. A bizonyítást csak a valós esetre írjuk le, a komplex eset tárgyalása lényegében azonos.

Követve a 9.3. tételt, teljes indukcióval bizonyítunk. $n = 1$ esetén az állítás nyilván igaz. A feltételek szerint $\mathbf{A}$ minden sajátértéke valós, legyen ezek egyike λ , a hozzá tartozó egységnyi sajátvektorok egyike $\mathbf{u}_1$. Innen a 9.3. tétel bizonyítását megismételjük egészen a (9.1) mátrix előállításáig, azaz kapjuk, hogy az $\mathbf{u}_1$ vektort kiegészítve a teljes tér egy $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ ONB-ává, az ortogonális $\mathbf{Q}_0 = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{u}_n]$ mátrixszal

$$\mathbf{Q}_0^T \mathbf{A} \mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} \lambda & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{B}.$$

Mivel $\mathbf{B}$ hasonló $\mathbf{A}$ -hoz, ezért sajátértékeik megegyeznek, tehát $\mathbf{A}_1$ minden sajátértéke $\mathbf{A}$ -nak is sajátértéke. A teljes indukció miatt viszont $\mathbf{A}_1$ -hez létezik olyan $\mathbf{Q}_1$ ortogonális és $\mathbf{T}_1$ felső háromszög mátrix, hogy $\mathbf{A}_1 = \mathbf{Q}_1 \mathbf{T}_1 \mathbf{Q}_1^T$. Ekkor viszont a $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix}$ mátrix ortogonális, hisz két ortogonális mátrix szorzata, és $\mathbf{A}$ -t hasonlóvá teszi egy felsőháromszög-mátrixhoz:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} &= \left(\mathbf{Q}_0 \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} \right)^T \mathbf{A} \left(\mathbf{Q}_0 \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix}^T \mathbf{Q}_0^T \mathbf{A} \mathbf{Q}_0 \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{v}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{v}^T \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1^T \mathbf{A}_1 \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{v}^T \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ez utóbbi mátrix pedig felsőháromszög-mátrix. □

9.6. PÉLDA (SCHUR-FELBONTÁS). Hozzuk ortogonális hasonlósági transzformációval felső háromszögalakra az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & -3 \\ 3 & 17 & -6 \\ -12 & 14 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrixot!

MEGOLDÁS. A karakterisztikus polinom $-x^3 + 28x^2 - 245x + 686 = (7-x)^2(14-x)$. A 7 kétszeres sajátérték, a sajátaltér 1-dimenziós, sajátvektor $\mathbf{x}_1 = (2, 3, 6)$, a 14-hez tartozó sajátvektor $\mathbf{x}_2 = (9, 17, 13)$, diagonalizálni nem lehet, mivel a geometriai multiplicitások összege (2) kisebb az algebraiak összegénél (3).

Az első sajátvektorhoz választunk egy ortonormált bázist, abból képezzük a $\mathbf{Q}_0$ és az $\mathbf{Q}_0^T \mathbf{A} \mathbf{Q}_0$ mátrixot:

$$\mathbf{Q}_0 = [\mathbf{x}_1 | \mathbf{u}_2 | \mathbf{u}_3] = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & -6 & 3 \\ 3 & -2 & -6 \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_0^T \mathbf{A} \mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -21 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

tehát

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$$

A 7 sajátértékhez tartozó sajátvektor $(0, 1)$, rá merőleges az $(1, 0)$. Így

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Innen

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 3 & -6 & -2 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \text{ és ebből}$$

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 7 & -21 & 0 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix} \quad \square$$

Mátrixok unitér diagonalizálása* A valós mátrixok ortogonális diagonalizálhatóságához hasonlóan a komplex mátrixok unitér diagonalizálhatósága is alapvető kérdés. Itt azonban a normális mátrixok játsszák a főszerepet.

9.7. DEFINÍCIÓ (UNITÉR DIAGONALIZÁLHATÓSÁG). Az $\mathbf{A}$ mátrix unitérren diagonalizálható, ha találunk egy unitér $\mathbf{U}$ és egy diagonális $\mathbf{\Lambda}$ mátrixot, hogy $\mathbf{U}^H \mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbf{\Lambda}$.

9.8. DEFINÍCIÓ (NORMÁLIS MÁTRIX). Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix normális, ha $\mathbf{A}^H \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^H$, azaz ha felcserélhető saját adjungáltjával.

E példa fejben számolva is ellenőrizhető mátrixokkal lett megkonstruálva, így az egészelemű $\mathbf{A}$ mátrixhoz racionális elemű ortogonális mátrix is található, mely az $\mathbf{A}$ -t felsőháromszög-mátrixba transzformálja. Ilyen mátrix keresése nem része a példának, mivel a gyakorlatban nemigen találkozni ilyen speciális esettel.

9.9. TÉTEL. Az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix pontosan akkor unitéren diagonalizálható, ha normális.

BIZONYÍTÁS. $(\Rightarrow)$ Tegyük fel, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H$, azaz $\mathbf{A}$ unitéren diagonalizálható. Mivel bármely komplex z számra $\bar{z}z = z\bar{z}$, ezért minden komplex diagonális mátrix normális, így $\mathbf{\Lambda}^H\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}^H$. Eszerint

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^H\mathbf{A} &= (\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H)^H(\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H) = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^H\mathbf{U}^H\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^H\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H \\ &= \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}^H\mathbf{U}^H = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^H\mathbf{U}^H = (\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H)(\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H)^H = \mathbf{A}\mathbf{A}^H.\end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$ A **Schur-felbontás** szerint minden komplex négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix előáll

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{T}\mathbf{U}^H$$

alakban, ahol $\mathbf{U}$ unitér, $\mathbf{T}$ felsőháromszög-mátrix. Tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ normális. Ekkor $\mathbf{T}$ is normális, ugyanis

$$\begin{aligned}\mathbf{T}^H\mathbf{T} &= (\mathbf{U}^H\mathbf{A}\mathbf{U})^H(\mathbf{U}^H\mathbf{A}\mathbf{U}) = \mathbf{U}^H\mathbf{A}^H\mathbf{U}\mathbf{U}^H\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{U}^H\mathbf{A}^H\mathbf{A}\mathbf{U} \\ &= \mathbf{U}^H\mathbf{A}\mathbf{A}^H\mathbf{U} = \mathbf{U}^H\mathbf{A}\mathbf{U}\mathbf{U}^H\mathbf{A}^H\mathbf{U} = (\mathbf{U}^H\mathbf{A}\mathbf{U})(\mathbf{U}^H\mathbf{A}\mathbf{U})^H = \mathbf{T}\mathbf{T}^H.\end{aligned}$$

A $\mathbf{T}$ mátrix alakja

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{bmatrix},$$

ezért $[\mathbf{T}^H\mathbf{T}]_{11} = |t_{11}|^2$, $[\mathbf{T}\mathbf{T}^H]_{11} = |t_{11}|^2 + |t_{12}|^2 + \dots + |t_{1n}|^2$, amiből $t_{12} = \dots = t_{1n} = 0$ adódik. Hasonlóan fölrva a $[\mathbf{T}^H\mathbf{T}]_{22}$ és a $[\mathbf{T}\mathbf{T}^H]_{22}$ elemeket kapjuk, hogy $t_{23} = \dots = t_{2n} = 0$, stb. Tehát $\mathbf{T}$ diagonális. $\square$

Spektrálfelbontás szimmetrikus és önadjungált mátrixokra Megmutatjuk, hogy valós szimmetrikus és komplex önadjungált mátrixok a sajátalt-ereikre való merőleges vetítések valós lineáris kombinációi.

A **valós spektráltétel** bizonyításának első része, azaz a $\Rightarrow$ irány bizonyítása nem vihető át valós szimmetrikus mátrixokról komplex önadjungált mátrixokra, mivel $\mathbf{\Lambda}^H = \mathbf{\Lambda}$ csak valós mátrixokra igaz. Így az az állítás nem igaz, hogy ha egy komplex mátrix unitéren diagonalizálható, akkor önadjungált.

Feladatok

Kvadratikus formák

A csupa másodfokú tagot tartalmazó többváltozós polinomok mátrixok sajátértékeinek és sajátvektorainak ismeretében egyszerűbb alakra hozhatók, így könnyebben vizsgálhatók. E témának számtalan lineáris algebrán kívüli matematikai és matematikán kívüli alkalmazása is van.

Homogén másodfokú polinomok mátrixszorzatos alakja Egy polinom egy tagja *másodfokú*, ha abban az ismeretlenek fokszámainak összege 2. Például az x , y és z változókban másodfokú tagok az alábbiak: $3x^2$, axy , $2b^3xz$, $-\pi^2z^2$. Az olyan többváltozós polinomot, melyben csak másodfokú tagok vannak, többváltozós *homogén másodfokú polinomnak* nevezzük. Például $2x^2 + 4xy - y^2$ egy 2-változós homogén másodfokú polinom. Mivel $xy = yx$, ezért ezt a polinomot ekvivalens módon több más alakba is át lehet írni, például: $2x^2 + 3xy + yx - y^2$, $2x^2 - 5xy + 9yx - y^2, \dots, 2x^2 + 2xy + 2yx - y^2$. Az utolsó formula egy mátrixszorzatos fölírás lehetőségét sejteti:

$$2x^2 + 2xy + 2yx - y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Valóban, általában is igaz, hogy

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = ax^2 + bxy + byx + cy^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Hasonlóképp a háromváltozós homogén másodfokú polinomok is mátrixszorzatos alakba írhatók:

$$\begin{aligned} & ax^2 + 2bxy + 2cxz + dy^2 + 2eyz + fz^2 \\ &= ax^2 + bxy + cxz + byx + dy^2 + eyz + czx + ezy + fz^2 \\ &= \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

9.10. PÉLDA (MÁSODFOKÚ POLINOM MÁTRIXSZORZATOS ALAKJA). Írjuk fel az $x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 5x_1x_2 - 3x_2x_1 + 5x_1x_3 - x_3x_1$ kifejezést mátrixszorzatos alakban!

MEGOLDÁS. A vegyes tagokat először összevonva, majd két egyenlő

együtthatójú részre bontva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 & x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_1x_2 + 4x_1x_3 \\
 &= x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_1 + 2x_1x_3 + 2x_3x_1 \\
 &= x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_1 + 2x_2^2 + 0x_2x_3 + 2x_3x_1 + 0x_3x_2 + 2x_3^2 \\
 &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \quad \square
 \end{aligned}$$

A fentieket követve az $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektor koordinátáitól függő homogén másodfokú polinomok mindegyike

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$$

alakra hozható, ahol $\mathbf{A}$ szimmetrikus mátrix. Ezt nevezzük kvadratikusan alaknak, vagy kvadratikusan formának. Tipikus alkalmazásokban a mátrix valós elemű. Ennek megfelelően e szakaszban a továbbiakban kvadratikusan formán mindig valós kvadratikusan formát értünk, tehát *kvadratikusan formának* nevezzük azt az

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$$

függvényt, ahol $\mathbf{A}$ szimmetrikus mátrix.

Főtengelytétel Egy kvadratikusan formához tartozó szimmetrikus mátrix diagonalizálásával a kvadratikusan forma is egyszerű alakra hozható.

A **spektráltétel** szerint minden valós szimmetrikus mátrix ortogonálisan diagonalizálható, azaz létezik egy olyan ortogonális $\mathbf{Q}$ mátrix, és egy diagonális $\mathbf{\Lambda}$ mátrix, melyre $\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}$. Tudjuk, hogy az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A} \mathbf{x}$ mátrixleképezés mátrixa a $\mathbf{Q}$ oszlopvektorai alkotta $\mathcal{Q}$ ortonormált bázisban $\mathbf{\Lambda}$. Ha egy tetszőleges $\mathbf{x}$ vektor alakja e bázisban $\mathbf{y}$, akkor $\mathbf{x} = \mathbf{Q} \mathbf{y}$. E helyettesítést elvégezve ugyanennek a függvénynek a $\mathcal{Q}$ bázisban fölírt alakját kapjuk:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = (\mathbf{Q} \mathbf{y})^T \mathbf{A} (\mathbf{Q} \mathbf{y}) = \mathbf{y}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{y}.$$

Eszerint, a kvadratikusan forma e bázisban nagyon egyszerűvé válik, csak négyzetes tagokat tartalmaz: $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$, ahol $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Ezzel bizonyítottuk az alábbi tételt:

9.11. TÉTEL (FŐTENGELYTÉTEL). Ha $\mathbf{A}$ egy n -edrendű valós szimmetrikus mátrix, és a $\mathbf{Q}$ mátrix ortogonálisan diagonalizálja, azaz $\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}$ diagonális, akkor az $\mathbf{x} = \mathbf{Q} \mathbf{y}$ helyettesítés az $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ kvadratikusan formát a $\mathbf{y}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{y}$ kvadratikusan formába transzformálja, mely kifejtve csak négyzetes tagokat tartalmaz, azaz

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2, \quad (9.2)$$

ahol $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei.

- A tétel nevét később fogjuk részletesen megmagyarázni, most csak annyit, hogy az $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = c$ egyenletű felületnek a $\mathcal{Q}$ bázis vektorai mind szimmetriatengelyei, melyeket főtengelyeknek is nevezünk.
- Mivel $\mathbf{Q}$ ortogonális mátrix, ezért $\det \mathbf{Q} = 1$ vagy $\det \mathbf{Q} = -1$. Gyakorlati (például bizonyos 3-dimenziós) alkalmazásokban fontos lehet, hogy a $\mathcal{Q}$ bázis is jobbsodrású legyen, azaz hogy $\det \mathbf{Q} = 1$ legyen. Így a standard bázis beleforgatható az új bázisba. Ez elérhető, ha $\det \mathbf{Q} = -1$ esetén $\mathbf{Q}$ bármelyik oszlopát -1 -szeresére változtatjuk. Ez a kvadratikusság formán nem változtat, hisz abban csak a sajátértékek szerepelnek.
- A főtengelytétel alkalmazását egy kvadratikusság formán *főtengely-transzformációnak* nevezzük.

9.12. PÉLDA (FŐTENGELY-TRANSZFORMÁCIÓ). Végezzük el a főtengely-transzformációt az

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 8xy + 4xz$$

kvadratikusság formán. Keressünk olyan jobbsodrású ortonormált bázist, melyben épp ez a kvadratikusság forma alakja. Mi az áttérés mátrixa?

MEGOLDÁS. A kvadratikusság mátrixszorzat-alakja

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Mátrixának karakterisztikus polinomja $-\lambda^3 + 5\lambda^2 + 12\lambda - 36$, ennek gyökei, azaz a sajátértékek 6, -3 , 2, a hozzájuk tartozó sajátvektorok rendre $(2, -2, 1)$, $(-5, -4, 2)$, $(0, 1, 2)$. Így a keresett kvadratikusság forma

$$\begin{bmatrix} \xi & \eta & \zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = 6\xi^2 - 3\eta^2 + 2\zeta^2.$$

A sajátvektorokat normálva megkapjuk az ortonormált bázist, melynek vektoraiból képzett determináns

$$\begin{vmatrix} 2/9 & -5/3\sqrt{5} & 0 \\ -2/9 & -4/3\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/9 & 2/3\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{vmatrix} = -1,$$

tehát egy megfelelő ortonormált bázis: $(\frac{2}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{1}{9})$, $(\frac{5}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, -\frac{2}{3\sqrt{5}})$, $(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$. $\square$

Kvadratikusság formák és mátrixok defínitsége A főtengelytétel könnyen áttekinthetővé teszi a kvadratikusság forma által fölvetett értékek lehetséges

előjelét. Ez lehetővé teszi a kvadratikus formák egy fontos osztályozását.

9.13. DEFINÍCIÓ (KVADRATIKUS FORMÁK ÉS MÁTRIXOK DEFINITSÉGE).

Azt mondjuk, hogy az $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ kvadratikus forma

a) pozitív definit, ha $f(\mathbf{x}) > 0$,

b) pozitív szemidefinit, ha $f(\mathbf{x}) \geq 0$,

c) negatív definit, ha $f(\mathbf{x}) < 0$,

d) negatív szemidefinit, ha $f(\mathbf{x}) \leq 0$

bármely $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektor esetén, és azt mondjuk, hogy f

e) indefinit, ha pozitív és negatív értékeket is fölvesz.

Azt mondjuk, hogy a szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrix pozitív/negatív definit/szemidefinit, illetve indefinit, ha a hozzá tartozó kvadratikus forma az.

► Ha $\mathbf{A}$ negatív definit, akkor $-\mathbf{A}$ pozitív definit. Hasonló állítás igaz a szemidefinitségre is.

► Ha $\mathbf{A} = [a]$, azaz $\mathbf{A}$ 1×1 -es, akkor $\mathbf{A}$ pontosan akkor pozitív definit, ha $a > 0$.

►

► Világos, hogy ha egy kvadratikus formában csak négyzetes tagok szerepelnek, akkor azonnal leolvasható definitségének típusa. Például az $f(x, y) = x^2 + 2y^2$, $g(x, y) = x^2 - 2y^2$, $h(x, y) = -x^2 - 2y^2$, $k(x, y, z) = x^2 + 2y^2$ formákról látható, hogy f pozitív definit, hisz az $(x, y) \neq (0, 0)$ esetén értéke mindig pozitív, g indefinit, h negatív definit, és k pozitív szemidefinit, hisz értéke $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ esetén is lehet 0 (ha $x = y = 0$, de $z \neq 0$). Miután a főtengetyítétel szerint minden kvadratikus forma egyenlő változók négyzeteinek a sajátértékekkel vett lineáris kombinációjával, ezért a definitség típusa pusztán csak a sajátértékek előjeleinek ismeretében eldönthető.

9.14. PÉLDA (DEFINITSÉG MEGHATÁROZÁSA A SAJÁTÉRTÉKEKBŐL). Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

mátrixok definitségének típusát!

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei 1, 1 és 4. Így a főtengety-transzformáció után kapott

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi & \eta & \zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \xi^2 + \eta^2 + 4\zeta^2$$

alakból látható, hogy e kvadratikus forma minden értéke pozitív, ha a változók nem mindegyike 0. Tehát e kvadratikus forma pozitív definit.

Hasonlóképp a $\mathbf{B}$ sajátértékei -1 , -1 és 2 , a főtengety-transzformáció után kapott alak $-\zeta^2 - \eta^2 + 4\zeta^2$. E forma negatív értéket vesz fel például az $(1, 0, 0)$ helyen és pozitívat a $(0, 0, 1)$ helyen, tehát indefinit. Végül $\mathbf{C}$ sajátértékei -3 , -3 és 0 , így a főtengety-transzformáció után kapott alak $-3\zeta^2 - 3\eta^2 + 0\zeta^2 = -3\zeta^2 - 3\eta^2$. Ennek értéke a $(0, 0, 1)$ helyen 0 , és pozitív értéket nem vesz fel, tehát negatív szemidefinit. $\square$

9.15. TÉTEL (DEFINITSÉG MEGHATÁROZÁSA A SAJÁTÉRTÉKEKBŐL). *A valós szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrix, illetve az $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ kvadratikuss forma pontosan akkor*

- a) pozitív definit, ha $\mathbf{A}$ minden sajátértéke pozitív;
- b) pozitív szemidefinit, ha $\mathbf{A}$ minden sajátértéke nemnegatív;
- c) negatív definit, ha $\mathbf{A}$ minden sajátértéke negatív;
- d) negatív szemidefinit, ha $\mathbf{A}$ minden sajátértéke nempozitív;
- e) indefinit, ha $\mathbf{A}$ -nak van pozitív és negatív sajátértéke is.

Definitesség és főminorok Mátrix definitssége gyakran könnyen eldönthető főminorainak vagy vezető főminorainak értékéből.

Ha egy mátrix diagonális alakú és pozitív definit, azaz minden sajátértéke pozitív, akkor minden főminora is pozitív. E megfigyelés átvihető nem diagonális alakú mátrixokra is.

9.16. TÉTEL (DEFINIT MÁTRIXOK FŐMINORAI ÉS VEZETŐ FŐMINORAI). *A valós szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrix, illetve az $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ kvadratikuss forma pontosan akkor*

- a) pozitív definit, ha $\mathbf{A}$ minden főminora pozitív;
- b) pozitív szemidefinit, ha $\mathbf{A}$ minden főminora nemnegatív;
- c) pozitív definit, ha $\mathbf{A}$ minden vezető főminora pozitív;
- d) negatív definit, ha $\mathbf{A}$ minden páratlan rendű vezető főminora negatív, páros rendű vezető főminora pozitív.

BIZONYÍTÁS. ... $\square$

► Az állítás vezető főminorokra vonatkozó pontjai nem vihetők át minden további feltétel nélkül szemidefinit mátrixokra. Az ugyan igaz, hogy ha egy mátrix pozitív szemidefinit, akkor vezető főminorainak sorozata egy darabig pozitív, majd onnan 0 . Ennek megfordítása viszont már nem igaz.

►

Szélsőérték A többváltozós függvények szélsőértékének első és második parciális deriváltjaira vonatkozó feltételei azonnal érthetővé válnak a definitesség fogalmának segítségével.

A függvényanalízisből ismert Taylor tételének többváltozós alakja szerint egy legalább kétszer differenciálható $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény a

következő alakban írható fel:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})(x_i - a_i) + \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j) + \sum_{i,j} \varepsilon_{ij}(\mathbf{x})(x_i - a_i)(x_j - a_j),$$

ahol $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ az f értelmezési tartományának egy belső pontja.

Megoldások

Irodalomjegyzék

Wolf Holzmann. Uniqueness of reduced row echelon form. <http://www.cs.uleth.ca/~holzmann/notes/reduceduniq.pdf>, 2002.

Tárgymutató

általános megoldás, 87

adjungált, 258

affin altér, 122

alakzat egyenletrendszere, 60

alapvektorok, 38

algebrai multiplicitása, 360

alsó háromszögmátrix, 195

altér, 118

affin, 122

invariáns, 376

merőleges kiegészítő, 135

altér eltoltja, 122

alterek merőlegessége, 135

alulhatározott, 75

ASCII-kód, 52

bázis, 38

altéré, 127

standard, 128

bázisfelbontás, 163

bázisoszlop, 84

bázisvektorok, 38

bővített mátrix, 77

bal sajátvektor, 369

balrendszer, 31

BCD-kód, 52

bináris reláció, 37

bitvektor, 52

blokkmátrix, 154

csoport, 21

deriváltleképezés, 223

determináns, 233

lineáris transzformáció, 242

rendje, 233

diád, 158

diadikus szorzat, 158

diagonalizálhatóság, 368

differentiálhatóság, 222

dimenzió, 131

együtthatómátrix, 77

egyenletrendszer

numerikusan instabil, 99

egységmátrix, 164

egységvektor, 30

Einstein-konvenció, 177

ekvivalenciareláció, 37

ekvivalens

átalakítások, 75

lineáris egyenletrendszerek, 75

előjeles terület, 231

előjeles aldetermináns, 252

elemi mátrix, 165

elemi sorműveletek, 84

ellenőrző összeg, 55

euklideszi norma, 19

explicit, 61

főátló, 76

főelem, 84

főoszlop, 84

fejléc (táblázat), 147

felső háromszögmátrix, 195

ferdén szimmetrikus, 196

forogatónyomaték, 32

Gauss-módszer, 85

Gauss-Seidel-iteráció, 105

Gauss-Jordan-módszer, 90

geometriai multiplicitás, 360

gradiens, 224

háromszögmódszer, 19

hajlásszög, 48

Hamming-kód, 96

hasonló mátrixok, 219

hipersík, 71

homogén lineáris egyenletrendszer

inhomogénhez tartozó, 87

implicit, 60

inkonzisztens, 75

invariáns altér, 376

invertálható, 182

invertálható művelet, 181

inverz

elemé, 181

irányított szög, 32

irányított szakasz, 17

irányvektor, 61

ISO 31-11, 18

jól kondicionált, 99

Jacobi-determináns, 224, 243

Jacobi-iteráció, 105

Jacobi-mátrix, 223

jobbrendszer, 31

Jordan-mérték, 242

kötött változó, 86

kötött vektor, 17

kígyó, 194

képtér, 210

kód

hossza, 53

kódszó, 53

kódvektor, 53

karakterisztikus egyenlet, 354

karakterisztikus polinom, 354

kernel, 210

kifeszített altér, 120

kitüntetett altér, 135

klasszikus adjungált, 258

kollineáris vektor, 19

- komplanáris, 20
- kompozíció
 - lineáris helyettesítéseké, 150
- konjugált, 220
- konstans tag, 73
- konzisztens, 75
- koordináta, 38
- koordinátarendszer, 38
- korrelációs együttható, 51
- kvadratikusan forma, 392

- lépcsős alak, 84
- Lebesgue-mérték, 242
- levéldiagram, 118
- lineáris
 - egyenlet, 73
 - egyenletrendszer, 74
 - kombináció, 21
- lineáris egyenletrendszer
 - konzisztens, 75
- lineáris egyenletrendszerek
 - homogén, 74
 - megoldása, 75
- lineáris transzformáció
 - karakterisztikus polinomja, 368
 - sajátértéke, 366
 - sajátértékei, 368
- lineáris helyettesítés
 - mátrixa, 160
- lineáris egyenletrendszer
 - alulhatározott, 75
 - túlhatarozott, 75
- lineáris egyenletrendszerek
 - ekvivalens, 75
 - inhomogén, 74
- lineáris helyettesítés, 149
- lineáris leképezés, 212
 - képtere, 210
 - magtere, 210
- lineáris transzformáció, 212
 - determinánsa, 242
- lineárisan összefüggő, 23
- lineárisan független, 23, 46
- LU-felbontás, 202

- másodfokú tag, 391
- mátrix, 76, 150
 - diagonális, 151
 - elemi, 165
 - ellentettje, 152
 - ferdén szimmetrikus, 196
 - négyzetes, 151
 - normális, 388
 - rangja, 114
 - ritka, 77
 - sűrű, 77
 - soronként domináns főátlójú, 107
 - szimmetrikus, 196
 - szinguláris, 182
- mátrixleképezés, 210
- mátrixok tere, 151
- mátrixszorzat
 - diádok összegére bontása, 167
- magtér, 210
- megoldás
 - általános, 87
 - partikuláris, 87
 - triviális, 116
- megoldásvektor, 75
- megoldható, 75

- négy kitüntetett altér, 135
- negatív (szemi)definit, 394
- nilpotens, 182
- normális mátrix, 388
- norma
 - euklideszi, 19
- nullosztó, 176
- nulltér, 120
- nullvektor, 18
- numerikusan instabil, 99
- numerikusan stabil, 99

- orientáció, 243
- origó, 18
- ortogonális, 41
- ortogonális diagonalizálás, 383
- ortonormált bázis, 41
- oszlopmátrix, 77
- oszloptér, 122
- oszlopvektor, 39, 77
- osztályfelbontás, 37
- osztályozás, 37

- párhuzamos vektor, 19
- parallelepipedon, 25
- parallelogramma, 25
 - előjeles területe, 231
- paritásbit, 55
- partíció, 37
- partikuláris megoldás, 87
- permutációs mátrix, 194

- pivotelem, 84
- PLU-felbontás, 207
- polinom
 - homogén másodfokú, 391
- pozitív (szemi)definit, 394
- precedencia-elv, 178

- részleges főelemkiválasztás, 101
- részleges pivotálás, 101
- rang, 114, 132
 - lineáris leképezésé, 220
- redukált lépcsős alak, 89
- reflexív, 37
- reláció, 37
- ritka mátrix, 77
- rosszul kondicionált, 99
- rref függvény, 93

- sajátérték, 352
 - lineáris transzformációé, 366
- sajátaltér, 352
- sajátfelbontás, 369
 - diadikus alakja, 370
- sajátpár, 352
- sajátvektor, 352
 - bal, 369
- sakktáblaszabály, 252
- Sarrus-szabály, 250
- skalázás, 102
- skalár, 17
- skaláris szorzat, 27
- sorlépcsős alak, 84
- sormátrix, 77
- soronként domináns főátló, 107
- sortér, 122
- sorvektor, 77
- standard bázis, 128
- sudoku, 171
- szög, 48
- szabad változó, 86
- szabad vektor, 18
- személyi szám, 52
- szimmetrikus mátrix, 196
- szimmetrikus reláció, 37
- szimultán egyenletrendszer, 93
- szinguláris, 182

- táblázat, 147
- távolság, 28
- túlhatarozott, 75
- torzor, 21

transzponált, 132
tranzitív reláció, 37
triviális megoldás, 116

unitér diagonalizálás, 388

Vandermonde-determináns, 262

Vandermonde-mátrix, 262

vegyes szorzat, 36

vektor, 18

összeg, 19

abszolút értéke, 19

azonos irányú, 19

egyirányú, 19

ellenkező irányú, 19

hossza, 19, 28

jelölése, 18, 77

kollineáris, 19

koordinátáinak elválasztása, 77

koordinátás alakja, 38

mátrix alakja, 77

párhuzamos, 19

vektoregyenlet, 60

vektori szorzat, 33

vektorok

merőlegessége, 48

szöge, 28, 48

távolsága, 48

zérustér, 118

zérusvektor, 18