

Bevezetés az algebrába 2 – Jordan-féle normálalak

Wetttl Ferenc
Algebra Tanszék



2016. április 18.

Invariáns alterek

- D** Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ altér az $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ lineáris transzformáció (illetve az L valamely bázisbeli $\mathbf{L}$ mátrixának) **invariáns altére**, ha minden $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ vektorra $L\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ ($\mathbf{L}\mathbf{x} \in \mathcal{U}$).

Invariáns alterek

- D** Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ altér az $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ lineáris transzformáció (illetve az L valamely bázisbeli $\mathbf{L}$ mátrixának) **invariáns altére**, ha minden $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ vektorra $L\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ ($\mathbf{L}\mathbf{x} \in \mathcal{U}$).
- T** Az $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ altér pontosan akkor invariáns altér az L lineáris transzformációra nézve, ha $\mathcal{U}$ egy $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$ bázisának minden vektorára $L\mathbf{u}_i \in \mathcal{U}$ ($i = 1, \dots, k$).

Invariáns alterek

- D** Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ altér az $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ lineáris transzformáció (illetve az L valamely bázisbeli $\mathbf{L}$ mátrixának) **invariáns altére**, ha minden $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ vektorra $L\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ ($\mathbf{L}\mathbf{x} \in \mathcal{U}$).
- T** Az $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ altér pontosan akkor invariáns altér az L lineáris transzformációra nézve, ha $\mathcal{U}$ egy $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$ bázisának minden vektorára $L\mathbf{u}_i \in \mathcal{U}$ ($i = 1, \dots, k$).
- B** $(\Rightarrow)$ $\mathcal{U}$ invariáns altér $\rightsquigarrow \mathcal{U}$ minden vektorának képe $\mathcal{U}$ -ban van $\rightsquigarrow L\mathbf{u}_i \in \mathcal{U}$ ($i = 1, \dots, k$).

Invariáns alterek

- D** Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ altér az $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ lineáris transzformáció (illetve az L valamely bázisbeli $\mathbf{L}$ mátrixának) **invariáns altére**, ha minden $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ vektorra $L\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ ($\mathbf{Lx} \in \mathcal{U}$).
- T** Az $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ altér pontosan akkor invariáns altér az L lineáris transzformációra nézve, ha $\mathcal{U}$ egy $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$ bázisának minden vektorára $L\mathbf{u}_i \in \mathcal{U}$ ($i = 1, \dots, k$).
- B** $(\Rightarrow)$ $\mathcal{U}$ invariáns altér $\rightsquigarrow \mathcal{U}$ minden vektorának képe $\mathcal{U}$ -ban van $\rightsquigarrow L\mathbf{u}_i \in \mathcal{U}$ ($i = 1, \dots, k$).
- $(\Leftarrow) \forall \mathbf{u}_i : L\mathbf{u}_i \in \mathcal{U}$

Invariáns alterek

- D** Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ altér az $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ lineáris transzformáció (illetve az L valamely bázisbeli $\mathbf{L}$ mátrixának) **invariáns altére**, ha minden $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ vektorra $L\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ ($\mathbf{Lx} \in \mathcal{U}$).
- T** Az $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ altér pontosan akkor invariáns altér az L lineáris transzformációra nézve, ha $\mathcal{U}$ egy $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$ bázisának minden vektorára $L\mathbf{u}_i \in \mathcal{U}$ ($i = 1, \dots, k$).
- B** $(\Rightarrow)$ $\mathcal{U}$ invariáns altér $\rightsquigarrow \mathcal{U}$ minden vektorának képe $\mathcal{U}$ -ban van $\rightsquigarrow L\mathbf{u}_i \in \mathcal{U}$ ($i = 1, \dots, k$).
- $(\Leftarrow) \forall \mathbf{u}_i : L\mathbf{u}_i \in \mathcal{U}$
- $L! \mathbf{x} \in \mathcal{U} : \mathbf{x} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \dots + x_k\mathbf{u}_k \rightsquigarrow$

$$L\mathbf{x} = x_1L\mathbf{u}_1 + x_2L\mathbf{u}_2 + \dots + x_kL\mathbf{u}_k \in \mathcal{U},$$

P Tekintsük az $L : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{L}\mathbf{x}$ mátrixleképezést, ahol

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Mutassuk meg, hogy az $\mathcal{U} = \text{span}((1, -1, 2, -1), (1, 2, -1, 2))$ altér invariáns altére az L lineáris transzformációnak.

P Tekintsük az $L : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{L}\mathbf{x}$ mátrixleképezést, ahol

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Mutassuk meg, hogy az $\mathcal{U} = \text{span}((1, -1, 2, -1), (1, 2, -1, 2))$ altér invariáns altére az L lineáris transzformációnak.

M $L\mathbf{u} = (1, -2, 3, -2)$, $L\mathbf{v} = (1, 1, 0, 1)$

P Tekintsük az $L : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{L}\mathbf{x}$ mátrixleképezést, ahol

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Mutassuk meg, hogy az $\mathcal{U} = \text{span}((1, -1, 2, -1), (1, 2, -1, 2))$ altér invariáns altére az L lineáris transzformációnak.

M $L\mathbf{u} = (1, -2, 3, -2)$, $L\mathbf{v} = (1, 1, 0, 1)$

$$\text{rref}([\mathbf{u} \mid \mathbf{v} \mid L\mathbf{u} \mid L\mathbf{v}]) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix},$$

P Tekintsük az $L : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{L}\mathbf{x}$ mátrixleképezést, ahol

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Mutassuk meg, hogy az $\mathcal{U} = \text{span}((1, -1, 2, -1), (1, 2, -1, 2))$ altér invariáns altere az L lineáris transzformációnak.

M $L\mathbf{u} = (1, -2, 3, -2)$, $L\mathbf{v} = (1, 1, 0, 1)$

$$\text{rref}([\mathbf{u} \mid \mathbf{v} \mid L\mathbf{u} \mid L\mathbf{v}]) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix},$$

azaz

$$L \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad L \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

ami az előző tétel szerint azt jelenti, hogy $\mathcal{U}$ invariáns altér.



Blokkdiagonális mátrixok

T Blokkdiagonális mátrixok és az invariáns alterek L! az $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ lintrafó két invariáns altere $\mathcal{U}$ és $\mathcal{W}$. Ha $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$, akkor L mátrixa

$$L = \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{W} \end{bmatrix}$$

a $\mathcal{V}$ minden olyan bázisában, mely az $\mathcal{U}$ és $\mathcal{W}$ bázisainak uniója.

Blokkdiagonális mátrixok

- T** Blokkdiagonális mátrixok és az invariáns alterek L! az $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ lintrafó két invariáns altere $\mathcal{U}$ és $\mathcal{W}$. Ha $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$, akkor L mátrixa

$$L = \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{W} \end{bmatrix}$$

a $\mathcal{V}$ minden olyan bázisában, mely az $\mathcal{U}$ és $\mathcal{W}$ bázisainak uniója.

- m** Általánosítás: ha $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_k$ a $\mathcal{V}$ vektortér invariáns alterei, és $\mathcal{V} = \mathcal{U}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{U}_k$, akkor L mátrixa blokkdiagonális alakú minden olyan bázisban, mely az alterek bázisainak egyesítése.

Blokkdiagonális mátrixok

T Blokkdiagonális mátrixok és az invariáns alterek L! az $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ lineáris leképezés két invariáns altere $\mathcal{U}$ és $\mathcal{W}$. Ha $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$, akkor L mátrixa

$$L = \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W} \end{bmatrix}$$

a $\mathcal{V}$ minden olyan bázisában, mely az $\mathcal{U}$ és $\mathcal{W}$ bázisainak uniója.

m Általánosítás: ha $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_k$ a $\mathcal{V}$ vektortér invariáns alterei, és $\mathcal{V} = \mathcal{U}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{U}_k$, akkor L mátrixa blokkdiagonális alakú minden olyan bázisban, mely az alterek bázisainak egyesítése.

$$\mathbf{m} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \mathcal{U}_1 &= \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}, \\ \mathcal{U}_2 &= \{\mathbf{e}_4\}, \\ \mathcal{U}_3 &= \{\mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6\} \\ \mathcal{V} &= \mathbb{R}^6 = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 \oplus \mathcal{U}_3 \end{aligned}$$

B L! $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$ és $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-r}\}$ az $\mathcal{U}$ és $\mathcal{W}$ egy-egy bázisa.

B L ! $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$ és $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-r}\}$ az $\mathcal{U}$ és $\mathcal{W}$ egy-egy bázisa.

Mivel $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$, ezért egyesítésük a $\mathcal{V}$ egy bázisát adja. L e bázisra vonatkozó mátrixa a bázisvektorok képvektoraiból alkotott mátrix:

$$L\mathbf{u}_i = u_{i1}\mathbf{u}_1 + \dots + u_{ir}\mathbf{u}_r + 0\mathbf{w}_1 + \dots + 0\mathbf{w}_{n-r}$$

$$L\mathbf{w}_j = 0\mathbf{u}_1 + \dots + 0\mathbf{u}_r + w_{j,r+1}\mathbf{w}_1 + \dots + w_{j,n}\mathbf{w}_{n-r}$$

B $L!$ $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$ és $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-r}\}$ az $\mathcal{U}$ és $\mathcal{W}$ egy-egy bázisa.

Mivel $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$, ezért egyesítésük a $\mathcal{V}$ egy bázisát adja. L e bázisra vonatkozó mátrixa a bázisvektorok képvektoraiból alkotott mátrix:

$$L\mathbf{u}_i = u_{i1}\mathbf{u}_1 + \dots + u_{ir}\mathbf{u}_r + 0\mathbf{w}_1 + \dots + 0\mathbf{w}_{n-r}$$

$$L\mathbf{w}_j = 0\mathbf{u}_1 + \dots + 0\mathbf{u}_r + w_{j,r+1}\mathbf{w}_1 + \dots + w_{j,n}\mathbf{w}_{n-r}$$

ahol $i = 1, \dots, r, j = r + 1, \dots, n$. Így a mátrix alakja

$$L = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{21} & \dots & u_{r1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_{1r} & u_{2r} & \dots & u_{rr} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & w_{r+1,r+1} & w_{r+2,r+1} & \dots & w_{n,r+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & w_{r+1,n} & w_{r+2,n} & \dots & w_{n,n} \end{bmatrix},$$

Általánosított sajátvektorok és a Jordan-blokk

$$\text{m Az } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Általánosított sajátvektorok és a Jordan-blokk

m Az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

mátrix hatása a standard bázison: $\mathbf{A}\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2$

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_1 = 4\mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3$$

Általánosított sajátvektorok és a Jordan-blokk

m Az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_1 = 4\mathbf{e}_1$$

mátrix hatása a standard bázison: $\mathbf{A}\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2$

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3$$

$$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}$$

Átrendezés után: $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1$

$$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2$$

Általánosított sajátvektorok és a Jordan-blokk

m Az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_1 = 4\mathbf{e}_1$$

mátrix hatása a standard bázison: $\mathbf{A}\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2$

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3$$

$$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}$$

Átrendezés után: $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1$

$$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2$$

■ $\mathbf{A} - 4\mathbf{I}$ hatásának diagramja: $\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{e}_1 \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{e}_2 \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{e}_3$

Általánosított sajátvektorok és a Jordan-blokk

$$\text{m Az } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_1 = 4\mathbf{e}_1$$

mátrix hatása a standard bázison: $\mathbf{A}\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2$

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3$$

$$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}$$

Átrendezés után: $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1$

$$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2$$

■ $\mathbf{A} - 4\mathbf{I}$ hatásának diagramja: $\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{e}_1 \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{e}_2 \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{e}_3$

■ Eszerint $\mathbf{e}_1$ sajátvektor, és $\mathbf{A}$ -nak más sajátvektora nincs, viszont

$$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^2 \mathbf{e}_2 = \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^3 \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}.$$

Általánosított sajátvektor

- D** Az $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektort a négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékéhez tartozó **általánosított sajátvektorának** nevezzük, ha valamilyen k természetes számra $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^k \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Általánosított sajátvektor

D Az $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektort a négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékéhez tartozó **általánosított sajátvektorának** nevezzük, ha valamilyen k természetes számra $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$k = 1$ esetén $\mathbf{x}$ sajátvektor. Az általánosított sajátvektorokból álló $\mathbf{x}_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$) sorozatot **Jordan-láncnak** nevezzük, ha $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1}$ és $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$.

Általánosított sajátvektor

D Az $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektort a négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékéhez tartozó **általánosított sajátvektorának** nevezzük, ha valamilyen k természetes számra $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^k \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$k = 1$ esetén $\mathbf{x}$ sajátvektor. Az általánosított sajátvektorokból álló $\mathbf{x}_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$) sorozatot **Jordan-láncnak** nevezzük, ha $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1}$ és $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$.

Egy tér általánosított sajátvektorokból álló bázisát **Jordan-bázisnak** nevezzük.

Általánosított sajátvektor

D Az $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektort a négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékéhez tartozó **általánosított sajátvektorának** nevezzük, ha valamilyen k természetes számra $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^k \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$k = 1$ esetén $\mathbf{x}$ sajátvektor. Az általánosított sajátvektorokból álló $\mathbf{x}_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$) sorozatot **Jordan-láncnak** nevezzük, ha $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1}$ és $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$.

Egy tér általánosított sajátvektorokból álló bázisát **Jordan-bázisnak** nevezzük.

m A Jordan-lánc definíciója korrekt: ha $\mathbf{x}_k$ általánosított sajátvektor, melyre $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$, de $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{k-1} \mathbf{x}_k \neq \mathbf{0}$, akkor minden $i < k$ esetén $\mathbf{x}_{k-i} = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^i \mathbf{x}_k$ ($i = 1, \dots, k-1$) vektorok is általánosított sajátvektorok. Ez abból következik, hogy

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{k-i} \mathbf{x}_{k-i} = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{k-i} (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^i \mathbf{x}_k = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$$



Jordan-lánc és Jordan-bázis konstrukciója

P Keressünk egy Jordan-bázist! Tudjuk, hogy $\chi_{\mathbf{A}}(x) = (4 - x)^3$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Jordan-lánc és Jordan-bázis konstrukciója

P Keressünk egy Jordan-bázist! Tudjuk, hogy $\chi_{\mathbf{A}}(x) = (4 - x)^3$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

M A sajátaltér 1-dimenziós, melyet az $\mathbf{x} = (1, -1, 1)$ vektor feszít ki.

Jordan-lánc és Jordan-bázis konstrukciója

P Keressünk egy Jordan-bázist! Tudjuk, hogy $\chi_{\mathbf{A}}(x) = (4 - x)^3$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

M A sajátaltér 1-dimenziós, melyet az $\mathbf{x} = (1, -1, 1)$ vektor feszít ki.

■ $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^3 = \mathbf{O}$, de $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^2 \neq \mathbf{O} \rightsquigarrow \exists \mathbf{x}_3 : (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^2 \mathbf{x}_3 \neq \mathbf{0}$

Jordan-lánc és Jordan-bázis konstrukciója

P Keressünk egy Jordan-bázist! Tudjuk, hogy $\chi_{\mathbf{A}}(x) = (4 - x)^3$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

M A sajátaltér 1-dimenziós, melyet az $\mathbf{x} = (1, -1, 1)$ vektor feszít ki.

■ $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^3 = \mathbf{O}$, de $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^2 \neq \mathbf{O} \rightsquigarrow \exists \mathbf{x}_3 : (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^2 \mathbf{x}_3 \neq \mathbf{0}$

■

$$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\rightsquigarrow (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^2(x, y, z) = (-x + z, x - z, -x + z) \rightsquigarrow x \neq z, \text{ pl } (1, 0, 0)$$

Jordan-lánc és Jordan-bázis konstrukciója

P Keressünk egy Jordan-bázist! Tudjuk, hogy $\chi_{\mathbf{A}}(x) = (4 - x)^3$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

M A sajátaltér 1-dimenziós, melyet az $\mathbf{x} = (1, -1, 1)$ vektor feszít ki.

■ $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^3 = \mathbf{O}$, de $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^2 \neq \mathbf{O} \rightsquigarrow \exists \mathbf{x}_3 : (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^2 \mathbf{x}_3 \neq \mathbf{0}$

■
$$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\rightsquigarrow (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^2(x, y, z) = (-x + z, x - z, -x + z) \rightsquigarrow x \neq z, \text{ pl } (1, 0, 0)$$

$$\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A} - 4\mathbf{I}} \mathbf{x}_1 = (-1, 1, -1) \xleftarrow{\mathbf{A} - 4\mathbf{I}} \mathbf{x}_2 = (2, -1, 2) \xleftarrow{\mathbf{A} - 4\mathbf{I}} \mathbf{x}_3 = (1, 0, 0)$$

- **A** alakja az $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ bázisban

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

- **A** alakja az $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ bázisban

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

ugyanis $\mathbf{A}\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_2 + 4\mathbf{x}_3$, $\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + 4\mathbf{x}_2$, $\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = 4\mathbf{x}_1$, aminek mátrixszorzat alakja:

$$\mathbf{A}[\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_3] = [\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_3] \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

- **A** alakja az $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ bázisban

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

ugyanis $\mathbf{A}\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_2 + 4\mathbf{x}_3$, $\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + 4\mathbf{x}_2$, $\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = 4\mathbf{x}_1$, aminek mátrixszorzat alakja:

$$\mathbf{A}[\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_3] = [\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_3] \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

↪ $\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{J}$, ahol $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_3]$ ($\mathbf{X}$ az $\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{X}$ áttérés mátrixa!)

- **A** alakja az $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ bázisban

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

ugyanis $\mathbf{A}\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_2 + 4\mathbf{x}_3$, $\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + 4\mathbf{x}_2$, $\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = 4\mathbf{x}_1$, aminek mátrixszorzat alakja:

$$\mathbf{A}[\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_3] = [\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_3] \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

↪ $\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{J}$, ahol $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_3]$ ($\mathbf{X}$ az $\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{X}$ áttérés mátrixa!)

- Konkrétan: $\mathbf{J} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -1 & -3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$



P $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 4 & 10 & -4 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \chi_{\mathbf{C}}(x) = (4 - x)^3.$

P $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 4 & 10 & -4 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \chi_{\mathbf{C}}(x) = (4 - x)^3.$

M Sajátaltér: $\text{span}((1, 0, 1), (0, 2, 3))$

P $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 4 & 10 & -4 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \chi_{\mathbf{C}}(x) = (4 - x)^3.$

M Sajátaltér: $\text{span}((1, 0, 1), (0, 2, 3))$

$(\mathbf{C} - 4\mathbf{I})^2 = \mathbf{O}$ (legfölbbs kettő hosszú láncra számíthatunk),

P $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 4 & 10 & -4 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$, $\chi_{\mathbf{C}}(x) = (4 - x)^3$.

M Sajátaltér: $\text{span}((1, 0, 1), (0, 2, 3))$

$(\mathbf{C} - 4\mathbf{I})^2 = \mathbf{O}$ (legfölbbs kettő hosszú láncra számíthatunk),

$\exists \mathbf{x}_2 : (\mathbf{C} - 4\mathbf{I})\mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$

P $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 4 & 10 & -4 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$, $\chi_{\mathbf{C}}(x) = (4 - x)^3$.

M Sajátaltér: $\text{span}((1, 0, 1), (0, 2, 3))$

$(\mathbf{C} - 4\mathbf{I})^2 = \mathbf{O}$ (legfölbbs kettő hosszú láncra számíthatunk),

$\exists \mathbf{x}_2 : (\mathbf{C} - 4\mathbf{I})\mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$

■ $\mathbf{C} - 4\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 4 & 6 & -4 \\ 4 & 6 & -4 \end{bmatrix},$

$\leadsto$ pl. $\mathbf{x}_2 = (1, 0, 0)$ megfelel.

P $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 4 & 10 & -4 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$, $\chi_{\mathbf{C}}(x) = (4 - x)^3$.

M Sajátaltér: $\text{span}((1, 0, 1), (0, 2, 3))$

$(\mathbf{C} - 4\mathbf{I})^2 = \mathbf{O}$ (legfölbbs kettő hosszú láncra számíthatunk),

$\exists \mathbf{x}_2 : (\mathbf{C} - 4\mathbf{I})\mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$

■ $\mathbf{C} - 4\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 4 & 6 & -4 \\ 4 & 6 & -4 \end{bmatrix},$

$\rightsquigarrow$ pl. $\mathbf{x}_2 = (1, 0, 0)$ megfelel.

■ $\mathbf{x}_1 = (\mathbf{C} - 4\mathbf{I})\mathbf{x}_2 = (-2, 4, 4)$ (a sajátaltérben van, de különbözik a kapott sajátvektoroktól: $\mathbf{x}_1 = (-2, 4, 4) = -2(1, 0, 1) + 2(0, 2, 3)$.)

P $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 4 & 10 & -4 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$, $\chi_{\mathbf{C}}(x) = (4 - x)^3$.

M Sajátaltér: $\text{span}((1, 0, 1), (0, 2, 3))$

$(\mathbf{C} - 4\mathbf{I})^2 = \mathbf{O}$ (legfölbbe kettő hosszú láncra számíthatunk),

$\exists \mathbf{x}_2 : (\mathbf{C} - 4\mathbf{I})\mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$

■ $\mathbf{C} - 4\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 4 & 6 & -4 \\ 4 & 6 & -4 \end{bmatrix},$

$\leadsto$ pl. $\mathbf{x}_2 = (1, 0, 0)$ megfelel.

■ $\mathbf{x}_1 = (\mathbf{C} - 4\mathbf{I})\mathbf{x}_2 = (-2, 4, 4)$ (a sajátaltérben van, de különbözik a kapott sajátvektoroktól: $\mathbf{x}_1 = (-2, 4, 4) = -2(1, 0, 1) + 2(0, 2, 3)$.)

■ $\mathbf{y}_1$ legyen független $\mathbf{x}_1$ -től:

$$\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{C}-4\mathbf{I}} \mathbf{x}_1 = (-2, 4, 4) \xleftarrow{\mathbf{C}-4\mathbf{I}} \mathbf{x}_2 = (1, 0, 0)$$

$$\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{C}-4\mathbf{I}} \mathbf{y}_1 = (1, 0, 1)$$

- **C** alakja az $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1\}$ bázisban

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

- **C** alakja az $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1\}$ bázisban

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

- $\mathbf{J} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} =$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 4 & 6 & -4 \\ 4 & 6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Jordan-blokk

- D** Azt a négyzetes mátrixot, melynek főátlójában azonos λ értékek, fölötté 1-esek, egyébütt 0-k állnak, **Jordan-blokknak** nevezzük:

$$\mathbf{J}_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (1)$$

Jordan-blokk

- D** Azt a négyzetes mátrixot, melynek főátlójában azonos λ értékek, fölötté 1-esek, egyebütt 0-k állnak, **Jordan-blokknak** nevezzük:

$$\mathbf{J}_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (1)$$

- m** Egy Jordan-blokknak a standard bázis minden vektora általánosított sajátvektora, ugyanis $i > 1$ esetén $\mathbf{J}_\lambda \mathbf{e}_i = \lambda \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{i-1}$, azaz $(\mathbf{J}_\lambda - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_{i-1}$, és így e vektorok egyetlen Jordan-láncot alkotnak:

$$0 \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} \mathbf{e}_1 \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} \mathbf{e}_2 \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} \dots \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} \mathbf{e}_n$$

Jordan-blokk

- D** Azt a négyzetes mátrixot, melynek főátlójában azonos λ értékek, fölötté 1-esek, egyebütt 0-k állnak, **Jordan-blokknak** nevezzük:

$$\mathbf{J}_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (1)$$

- m** Egy Jordan-blokknak a standard bázis minden vektora általánosított sajátvektora, ugyanis $i > 1$ esetén $\mathbf{J}_\lambda \mathbf{e}_i = \lambda \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{i-1}$, azaz $(\mathbf{J}_\lambda - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_{i-1}$, és így e vektorok egyetlen Jordan-láncot alkotnak:

$$0 \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} \mathbf{e}_1 \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} \mathbf{e}_2 \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} \dots \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} \mathbf{e}_n$$

- m** Sőt, ha egy mátrix Jordan-blokkokból álló blokkdiagonális mátrix, akkor a standard bázis Jordan-láncokból áll.

Jordan-normálalak

T Bármely $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ -beli mátrix hasonló egy Jordan-blokkokból álló blokkdiagonális mátrixhoz, azaz $\exists \mathbf{C} : \mathbf{J} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{C}$ alakja

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{J}_k \end{bmatrix} \quad (2)$$

ahol k az $\mathbf{A}$ független sajátvektorainak maximális száma, és $\mathbf{J}_i$ az i -edik **sajátvektorhoz** tartozó Jordan-blokk.

Jordan-normálalak

T Bármely $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ -beli mátrix hasonló egy Jordan-blokkokból álló blokkdiagonális mátrixhoz, azaz $\exists \mathbf{C} : \mathbf{J} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{C}$ alakja

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{J}_k \end{bmatrix} \quad (2)$$

ahol k az $\mathbf{A}$ független sajátvektorainak maximális száma, és $\mathbf{J}_i$ az i -edik **sajátvektorhoz** tartozó Jordan-blokk.

m minden komplex lineáris transzformációhoz van olyan bázis, melyben mátrixa Jordan-normálalakú (a bázis a $\mathbf{C}$ oszlopvektoraiból áll).

Jordan-normálalak

T Bármely $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ -beli mátrix hasonló egy Jordan-blokkokból álló blokkdiagonális mátrixhoz, azaz $\exists \mathbf{C} : \mathbf{J} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{C}$ alakja

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{J}_k \end{bmatrix} \quad (2)$$

ahol k az $\mathbf{A}$ független sajátvektorainak maximális száma, és $\mathbf{J}_i$ az i -edik **sajátvektorhoz** tartozó Jordan-blokk.

- m** minden komplex lineáris transzformációhoz van olyan bázis, melyben mátrixa Jordan-normálalakú (a bázis a $\mathbf{C}$ oszlopvektoraiból áll).
- m** A különböző Jordan-blokkok különböző sajátvektorokhoz tartoznak, de egy sajátérték több Jordan-blokkban is szerepelhet.

Jordan-normálalak

T Bármely $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ -beli mátrix hasonló egy Jordan-blokkokból álló blokkdiagonális mátrixhoz, azaz $\exists \mathbf{C} : \mathbf{J} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{C}$ alakja

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{J}_k \end{bmatrix} \quad (2)$$

ahol k az $\mathbf{A}$ független sajátvektorainak maximális száma, és $\mathbf{J}_i$ az i -edik **sajátvektorhoz** tartozó Jordan-blokk.

- m** minden komplex lineáris transzformációhoz van olyan bázis, melyben mátrixa Jordan-normálalakú (a bázis a $\mathbf{C}$ oszlopvektoraiból áll).
- m** A különböző Jordan-blokkok különböző sajátvektorokhoz tartoznak, de egy sajátérték több Jordan-blokkban is szerepelhet.
- D** Az $\mathbf{A} = \mathbf{C} \mathbf{J} \mathbf{C}^{-1}$ alakú felbontását az $\mathbf{A}$ **Jordan-felbontásának** nev.

Jordan-normálalak

T Bármely $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ -beli mátrix hasonló egy Jordan-blokkokból álló blokkdiagonális mátrixhoz, azaz $\exists \mathbf{C} : \mathbf{J} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{C}$ alakja

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{J}_k \end{bmatrix} \quad (2)$$

ahol k az $\mathbf{A}$ független sajátvektorainak maximális száma, és $\mathbf{J}_i$ az i -edik **sajátvektorhoz** tartozó Jordan-blokk.

m minden komplex lineáris transzformációhoz van olyan bázis, melyben mátrixa Jordan-normálalakú (a bázis a $\mathbf{C}$ oszlopvektoraiból áll).

m A különböző Jordan-blokkok különböző sajátvektorokhoz tartoznak, de egy sajátérték több Jordan-blokkban is szerepelhet.

D Az $\mathbf{A} = \mathbf{C} \mathbf{J} \mathbf{C}^{-1}$ alakú felbontását az $\mathbf{A}$ **Jordan-felbontásának** nev.

m $\mathbb{F}$ test, $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ összes sajátértéke $\mathbb{F}$ -beli $\Rightarrow$ a tétel igaz.



- B** Megmutatjuk, hogy ha van maximum k független sajátvektor, akkor található k Jordan-lánc is, melyek vektorai a tér bázisát adják.

- B** Megmutatjuk, hogy ha van maximum k független sajátvektor, akkor található k Jordan-lánc is, melyek vektorai a tér bázisát adják.
- 1** Teljes indukció: $n = 1$ ✓, tfh minden n -nél kisebb rendű mátrixra igaz.

- B** Megmutatjuk, hogy ha van maximum k független sajátvektor, akkor található k Jordan-lánc is, melyek vektorai a tér bázisát adják.
- 1** Teljes indukció: $n = 1$ ✓, tfh minden n -nél kisebb rendű mátrixra igaz.
- 2** $(\lambda, \mathbf{x})$ saját pár, $\mathcal{N}_\lambda$ a sajátaltér, dimenziója r , $\mathcal{O}_\lambda = \mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$.

- B** Megmutatjuk, hogy ha van maximum k független sajátvektor, akkor található k Jordan-lánc is, melyek vektorai a tér bázisát adják.
- 1** Teljes indukció: $n = 1$ ✓, tfh minden n -nél kisebb rendű mátrixra igaz.
- 2** $(\lambda, \mathbf{x})$ saját pár, $\mathcal{N}_\lambda$ a sajátaltér, dimenziója r , $\mathcal{O}_\lambda = \mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$.
 $r > 0 \rightsquigarrow \dim(\mathcal{O}_\lambda) = n - r < n$

- B** Megmutatjuk, hogy ha van maximum k független sajátvektor, akkor található k Jordan-lánc is, melyek vektorai a tér bázisát adják.
- 1** Teljes indukció: $n = 1$ ✓, tfh minden n -nél kisebb rendű mátrixra igaz.
- 2** $(\lambda, \mathbf{x})$ saját pár, $\mathcal{N}_\lambda$ a sajátaltér, dimenziója r , $\mathcal{O}_\lambda = \mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$.
 $r > 0 \rightsquigarrow \dim(\mathcal{O}_\lambda) = n - r < n$
- 3** $\mathcal{O}_\lambda$ invariáns altér $\mathbf{A}$ -nak, azaz $\mathbf{A}(\mathcal{O}_\lambda) \subseteq \mathcal{O}_\lambda$,

- B** Megmutatjuk, hogy ha van maximum k független sajátvektor, akkor található k Jordan-lánc is, melyek vektorai a tér bázisát adják.
- 1** Teljes indukció: $n = 1$ ✓, tfh minden n -nél kisebb rendű mátrixra igaz.
- 2** $(\lambda, \mathbf{x})$ saját pár, $\mathcal{N}_\lambda$ a sajátaltér, dimenziója r , $\mathcal{O}_\lambda = \mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$.
 $r > 0 \rightsquigarrow \dim(\mathcal{O}_\lambda) = n - r < n$
- 3** $\mathcal{O}_\lambda$ invariáns altér $\mathbf{A}$ -nak, azaz $\mathbf{A}(\mathcal{O}_\lambda) \subseteq \mathcal{O}_\lambda$,
ugyanis $\mathcal{O}_\lambda$ elemei $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v}$ alakúak, ahol $\mathbf{v}$ tetszőleges, és
 $\mathbf{A}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = (\mathbf{A}^2 - \lambda \mathbf{A})\mathbf{v} = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})(\mathbf{A}\mathbf{v}) \in \mathcal{O}_\lambda$.

- B** Megmutatjuk, hogy ha van maximum k független sajátvektor, akkor található k Jordan-lánc is, melyek vektorai a tér bázisát adják.
- 1** Teljes indukció: $n = 1$ ✓, tfh minden n -nél kisebb rendű mátrixra igaz.
- 2** $(\lambda, \mathbf{x})$ saját pár, $\mathcal{N}_\lambda$ a sajátaltér, dimenziója r , $\mathcal{O}_\lambda = \mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$.
 $r > 0 \rightsquigarrow \dim(\mathcal{O}_\lambda) = n - r < n$
- 3** $\mathcal{O}_\lambda$ invariáns altér $\mathbf{A}$ -nak, azaz $\mathbf{A}(\mathcal{O}_\lambda) \subseteq \mathcal{O}_\lambda$,
ugyanis $\mathcal{O}_\lambda$ elemei $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v}$ alakúak, ahol $\mathbf{v}$ tetszőleges, és
 $\mathbf{A}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = (\mathbf{A}^2 - \lambda \mathbf{A})\mathbf{v} = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})(\mathbf{A}\mathbf{v}) \in \mathcal{O}_\lambda$.
- 4** Jelölje $\hat{\mathbf{A}}$ az $\mathbf{A}$ mátrixleképezés $\mathcal{O}_\lambda$ -ra való leszűkítésének mátrixát,
rendje $n - r$. $\hat{\mathbf{A}} - \lambda \mathbf{I}$ és $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ hatása $\mathcal{O}_\lambda$ -n azonos.

- B** Megmutatjuk, hogy ha van maximum k független sajátvektor, akkor található k Jordan-lánc is, melyek vektorai a tér bázisát adják.
- 1** Teljes indukció: $n = 1$ ✓, tfh minden n -nél kisebb rendű mátrixra igaz.
- 2** $(\lambda, \mathbf{x})$ saját pár, $\mathcal{N}_\lambda$ a sajátaltér, dimenziója r , $\mathcal{O}_\lambda = \mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$.
 $r > 0 \rightsquigarrow \dim(\mathcal{O}_\lambda) = n - r < n$
- 3** $\mathcal{O}_\lambda$ invariáns altere $\mathbf{A}$ -nak, azaz $\mathbf{A}(\mathcal{O}_\lambda) \subseteq \mathcal{O}_\lambda$,
 ugyanis $\mathcal{O}_\lambda$ elemei $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v}$ alakúak, ahol $\mathbf{v}$ tetszőleges, és
 $\mathbf{A}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = (\mathbf{A}^2 - \lambda \mathbf{A})\mathbf{v} = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})(\mathbf{A}\mathbf{v}) \in \mathcal{O}_\lambda$.
- 4** Jelölje $\hat{\mathbf{A}}$ az $\mathbf{A}$ mátrixleképezés $\mathcal{O}_\lambda$ -ra való leszűkítésének mátrixát, rendje $n - r$. $\hat{\mathbf{A}} - \lambda \mathbf{I}$ és $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ hatása $\mathcal{O}_\lambda$ -n azonos.
- Indukciós feltevés: létezik Jordan-láncokból álló bázisa:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^1 & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}} & \dots & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}} & \mathbf{x}_{s_1}^1 \\
 \mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^2 & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}} & \dots & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}} & \mathbf{x}_{s_2}^2 \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda_p \mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^p & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda_p \mathbf{I}} & \dots & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda_p \mathbf{I}} & \mathbf{x}_{s_p}^p
 \end{array}$$

5 $q = \dim(\mathcal{O}_\lambda \cap \mathcal{N}_\lambda)$

5 $q = \dim(\mathcal{O}_\lambda \cap \mathcal{N}_\lambda)$

$q = 0$ ($\mathcal{O}_\lambda \cap \mathcal{N}_\lambda = \{\mathbf{0}\}$) $\rightsquigarrow \mathcal{O}_\lambda$ és $\mathcal{N}_\lambda$ kiegészítő alterek $\rightsquigarrow \mathcal{O}_\lambda$
J-bázisa $\cup \mathcal{N}_\lambda$ egy bázisa = tér egy Jordan-bázisa

5 $q = \dim(\mathcal{O}_\lambda \cap \mathcal{N}_\lambda)$

$q = 0$ ($\mathcal{O}_\lambda \cap \mathcal{N}_\lambda = \{\mathbf{0}\}$) $\rightsquigarrow \mathcal{O}_\lambda$ és $\mathcal{N}_\lambda$ kiegészítő alterek $\rightsquigarrow \mathcal{O}_\lambda$

J-bázisa $\cup \mathcal{N}_\lambda$ egy bázisa = tér egy Jordan-bázisa

$q > 0$. $\mathcal{N}_\lambda$ elemei az $\mathbf{A}$ sajátvektorai: $\mathbf{Q}$ egy bázisa $\mathbf{x}_1^1, \mathbf{x}_1^2, \dots, \mathbf{x}_1^q$.

Láncaik végén $\mathbf{x}_{s_k}^k \in \mathcal{O}_\lambda \rightsquigarrow \exists \mathbf{y}_k: (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{y}_k = \mathbf{x}_{s_k}^k$ ($k = 1, 2, \dots, q$).

5 $q = \dim(\mathcal{O}_\lambda \cap \mathcal{N}_\lambda)$

$q = 0$ ($\mathcal{O}_\lambda \cap \mathcal{N}_\lambda = \{\mathbf{0}\}$) $\rightsquigarrow \mathcal{O}_\lambda$ és $\mathcal{N}_\lambda$ kiegészítő alterek $\rightsquigarrow \mathcal{O}_\lambda$

J-bázisa $\cup \mathcal{N}_\lambda$ egy bázisa = tér egy Jordan-bázisa

$q > 0$. $\mathcal{N}_\lambda$ elemei az $\mathbf{A}$ sajátvektorai: $\mathbf{Q}$ egy bázisa $\mathbf{x}_1^1, \mathbf{x}_1^2, \dots, \mathbf{x}_1^q$.

Láncaik végén $\mathbf{x}_{s_k}^k \in \mathcal{O}_\lambda \rightsquigarrow \exists \mathbf{y}_k: (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{y}_k = \mathbf{x}_{s_k}^k$ ($k = 1, 2, \dots, q$).

6 $\dim(\mathcal{N}_\lambda) = r$, $\dim(\mathbf{Q}) = q \rightsquigarrow \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{r-q}$ sajátvektorokból:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^1 & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} & \dots & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} & \mathbf{x}_{s_1}^1 \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} \mathbf{y}_1 \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 0 & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^q & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} & \dots & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} & \mathbf{x}_{s_q}^q \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} \mathbf{y}_q \\
 0 & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda_{q+1} \mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^{q+1} & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda_{q+1} \mathbf{I}} & \dots & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda_{q+1} \mathbf{I}} & \mathbf{x}_{s_{q+1}}^{q+1} \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 0 & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda_p \mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^p & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda_p \mathbf{I}} & \dots & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda_p \mathbf{I}} & \mathbf{x}_{s_p}^p \\
 0 & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} & \mathbf{z}_1 & & & & \\
 \vdots & & \vdots & & & & \\
 0 & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} & \mathbf{z}_{r-q} & & & &
 \end{array}$$

- 7 **x**-vektorok száma $n - r$, **y**-vektorok száma q , **z**-vektorok száma $r - q$,
 $(n - r) + q + (r - q) = n$.

- 7 **x**-vektorok száma $n - r$, **y**-vektorok száma q , **z**-vektorok száma $r - q$,
 $(n - r) + q + (r - q) = n$.

Megmutatjuk, hogy függetlenek (az **x**- és **z**-vektorok azok). Tfh

$$\sum_{i,j} \xi_{i,j} \mathbf{x}_j^i + \sum_t \eta_t \mathbf{y}_t + \sum_k \zeta_k \mathbf{z}_k = \mathbf{0},$$

ahol nem minden $\eta_t = 0$.

- 7 **x**-vektorok száma $n - r$, **y**-vektorok száma q , **z**-vektorok száma $r - q$,
 $(n - r) + q + (r - q) = n$.

Megmutatjuk, hogy függetlenek (az **x**- és **z**-vektorok azok). Tfh

$$\sum_{i,j} \xi_{i,j} \mathbf{x}_j^i + \sum_t \eta_t \mathbf{y}_t + \sum_k \zeta_k \mathbf{z}_k = \mathbf{0},$$

ahol nem minden $\eta_t = 0$.

Szorozzuk meg az egyenlőséget (balról) az $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ -val. Minden vektor **x**-vektorok lineáris kombinációjába megy, mivel $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{y}_t = \mathbf{x}_{s_t}^t$, ezért lesz nemnulla η együttható, és ez ellentmondás.

P Hány nem hasonló normálalak létezik, ha $\chi(\lambda) = (1 - \lambda)^4$.

P Hány nem hasonló normálalak létezik, ha $\chi(\lambda) = (1 - \lambda)^4$.

M

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A Jordan-alak egyértelműsége

- T** Egy komplex mátrix Jordan-normálalakja a Jordan-blokkok sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

A Jordan-alak egyértelműsége

- T** Egy komplex mátrix Jordan-normálalakja a Jordan-blokkok sorrendjétől eltekintve egyértelmű.
- B** Elég belátni, hogy bármely két hasonló mátrix Jordan-alakjának meghatározó adatai a hasonlóságra nézve invariánsak.

A Jordan-alak egyértelműsége

- T** Egy komplex mátrix Jordan-normálalakja a Jordan-blokkok sorrendjétől eltekintve egyértelmű.
- B** Elég belátni, hogy bármely két hasonló mátrix Jordan-alakjának meghatározó adatai a hasonlóságra nézve invariánsak.
- A Jordan-blokkok, és így a Jordan-láncok száma megegyezik a független sajátvektorok maximális számával – ez invariáns.

A Jordan-alak egyértelműsége

- T** Egy komplex mátrix Jordan-normálalakja a Jordan-blokkok sorrendjétől eltekintve egyértelmű.
- B** Elég belátni, hogy bármely két hasonló mátrix Jordan-alakjának meghatározó adatai a hasonlóságra nézve invariánsak.
 - A Jordan-blokkok, és így a Jordan-láncok száma megegyezik a független sajátvektorok maximális számával – ez invariáns.
 - TFH **A** minden sajátértéke λ . Pl. $\chi_{\mathbf{A}}(x) = (\lambda - x)^{13}$, és

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \overleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^1 & \overleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} & \mathbf{x}_2^1 & \overleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} & \mathbf{x}_3^1 & \overleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} & \mathbf{x}_4^1 \\
 0 & \overleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^2 & \overleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} & \mathbf{x}_2^2 & \overleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} & \mathbf{x}_3^2 & \overleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} & \mathbf{x}_4^2 \\
 0 & \overleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^3 & \overleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} & \mathbf{x}_2^3 & \overleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} & \mathbf{x}_3^3 & & \\
 0 & \overleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^4 & & & & & & \\
 0 & \overleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^5 & & & & & &
 \end{array}$$

- A leghosszabb lánc 4-elemű: 4 az a legkisebb s kitevő, melyre $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^s = \mathbf{O}$.

- A leghosszabb lánc 4-elemű: 4 az a legkisebb s kitevő, melyre $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^s = \mathbf{O}$.

Egy mátrix hatványának zérus volta is invariáns, így hasonló mátrixokra a leghosszab lánc hossza is azonos (ha $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, akkor $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} \sim \mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}$).

- A leghosszabb lánc 4-elemű: 4 az a legkisebb s kitevő, melyre $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^s = \mathbf{O}$.

Egy mátrix hatványának zérus volta is invariáns, így hasonló mátrixokra a leghosszab lánc hossza is azonos (ha $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, akkor $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} \sim \mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}$).

- n_i : λ -hoz tartozó i -hosszú Jordan-láncok száma (itt $n_1 = 2$, $n_2 = 0$, $n_3 = 1$, $n_4 = 2$).

- A leghosszabb lánc 4-elemű: 4 az a legkisebb s kitevő, melyre $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^s = \mathbf{O}$.

Egy mátrix hatványának zérus volta is invariáns, így hasonló mátrixokra a leghosszabb lánc hossza is azonos (ha $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, akkor $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} \sim \mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}$).

- n_i : λ -hoz tartozó i -hosszú Jordan-láncok száma (itt $n_1 = 2$, $n_2 = 0$, $n_3 = 1$, $n_4 = 2$).
- $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ hatványainak rangjából

$$n_4 = r((\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^3) = 2$$

$$n_3 + 2n_4 = r((\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^2) = 5$$

$$n_2 + 2n_3 + 3n_4 = r(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 8$$

$$n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 = r((\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^0) = n = 13,$$

- A leghosszabb lánc 4-elemű: 4 az a legkisebb s kitevő, melyre $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^s = \mathbf{O}$.

Egy mátrix hatványának zérus volta is invariáns, így hasonló mátrixokra a leghosszab lánc hossza is azonos (ha $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, akkor $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} \sim \mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}$).

- n_i : λ -hoz tartozó i -hosszú Jordan-láncok száma (itt $n_1 = 2$, $n_2 = 0$, $n_3 = 1$, $n_4 = 2$).
- $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ hatványainak rangjából

$$n_4 = r((\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^3) = 2$$

$$n_3 + 2n_4 = r((\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^2) = 5$$

$$n_2 + 2n_3 + 3n_4 = r(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 8$$

$$n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 = r((\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^0) = n = 13,$$

Ez egyértelműen megoldható.

■ Általában

$$n_s = r \left((\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{s-1} \right)$$

$$n_{s-1} + 2n_s = r \left((\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{s-2} \right)$$

$$n_{s-2} + 2n_{s-1} + 3n_s = r \left((\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{s-3} \right)$$

$$\vdots$$

$$n_2 + 2n_3 + \cdots + (s-1)n_s = r(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$$

$$n_1 + 2n_2 + \cdots + (s-1)n_{s-1} + sn_s = n.$$

■ Általában

$$n_s = r \left((\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{s-1} \right)$$

$$n_{s-1} + 2n_s = r \left((\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{s-2} \right)$$

$$n_{s-2} + 2n_{s-1} + 3n_s = r \left((\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{s-3} \right)$$

$$\vdots$$

$$n_2 + 2n_3 + \cdots + (s-1)n_s = r(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$$

$$n_1 + 2n_2 + \cdots + (s-1)n_{s-1} + sn_s = n.$$

a jobb oldalon invariáns értékek vannak, az együtthatómátrix háromszög alakú mellékátlójában csupa egyes van $\rightsquigarrow$ a megoldás egyértelmű, másrészt a megoldások mindegyike egész szám (visszahelyettesítéssel mo-ható).

- több különböző sajátérték esetén: ha λ algebrai multiplicitása $m(\lambda)$, akkor $A - \lambda I$ hatványainak rangjához az összes λ -tól különböző sor egygyel hozzájárul, így az egyenletrendszerek jobb oldalából $(n - m(\lambda))$ -t ki kell vonni.

$$n_s = m(\lambda) - n + r((A - \lambda I)^{s-1})$$

$$n_{s-1} + 2n_s = m(\lambda) - n + r((A - \lambda I)^{s-2})$$

$$n_{s-2} + 2n_{s-1} + 3n_s = m(\lambda) - n + r((A - \lambda I)^{s-3})$$

$$\vdots$$

$$n_2 + 2n_3 + \cdots + (s-1)n_s = m(\lambda) - n + r(A - \lambda I)$$

$$n_1 + 2n_2 + \cdots + (s-1)n_{s-1} + sn_s = m(\lambda)$$

QED

P $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{10 \times 10}$, λ 10-szeres algebrai multiplicitású sajátérték. $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 5, 2, 1, 0. Írjuk fel a Jordan-normálalakját!

- P** $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{10 \times 10}$, λ 10-szeres algebrai multiplicitású sajátérték. $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 5, 2, 1, 0. Írjuk fel a Jordan-normálalakját!
- M** A blokkok száma, ami megegyezik a Jordan-láncok számával 5, mivel $n - r(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 10 - 5 = 5$.

P $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{10 \times 10}$, λ 10-szeres algebrai multiplicitású sajátérték. $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 5, 2, 1, 0. Írjuk fel a Jordan-normálalakját!

M A blokkok száma, ami megegyezik a Jordan-láncok számával 5, mivel $n - r(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 10 - 5 = 5$.

A leghosszabb lánc hossza 4, mivel $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ legkisebb zérusmátrixot adó hatványa a 4-dik.

P $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{10 \times 10}$, λ 10-szeres algebrai multiplicitású sajátérték. $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 5, 2, 1, 0. Írjuk fel a Jordan-normálalakját!

M A blokkok száma, ami megegyezik a Jordan-láncok számával 5, mivel $n - r(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 10 - 5 = 5$.

A leghosszabb lánc hossza 4, mivel $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ legkisebb zérusmátrixot adó hatványa a 4-dik.

Az egyenletrendszer és megoldása, valamint a $\mathbf{J}$ Jordan-mátrix:

$$\begin{array}{rcl}
 n_4 = 1 & n_4 = 1 \\
 n_3 + 2n_4 = 2 & n_3 = 0 \\
 n_2 + 2n_3 + 3n_4 = 5 & n_2 = 2 \\
 n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 = 10 & n_1 = 2
 \end{array}
 \Rightarrow \mathbf{J} = \begin{bmatrix}
 \lambda & 1 & & & \\
 & \lambda & 1 & & \\
 & & \lambda & 1 & \\
 & & & \lambda & \\
 & & & & \lambda & 1 \\
 & & & & & \lambda & 1 \\
 & & & & & & \lambda & 1 \\
 & & & & & & & \lambda & 1 \\
 & & & & & & & & \lambda
 \end{bmatrix}$$

P $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{14 \times 14}$ karakterisztikus polinomja $(3 - \lambda)^5(2 - \lambda)^5(1 - \lambda)^4$.

$\mathbf{A} - 3\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre: 12, 11, 10, 9;

$\mathbf{A} - 2\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre: 12, 10, 9;

$\mathbf{A} - \mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre: 11, 10.

Írjuk fel a Jordan-normálalakját!

P $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{14 \times 14}$ karakterisztikus polinomja $(3 - \lambda)^5(2 - \lambda)^5(1 - \lambda)^4$.

$\mathbf{A} - 3\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre: 12, 11, 10, 9;

$\mathbf{A} - 2\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre: 12, 10, 9;

$\mathbf{A} - \mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre: 11, 10.

Írjuk fel a Jordan-normálalakját!

M $n = 14$, $m(3) = 5$, $m(2) = 5$, $m(1) = 4$.

P $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{14 \times 14}$ karakterisztikus polinomja $(3 - \lambda)^5(2 - \lambda)^5(1 - \lambda)^4$.

$\mathbf{A} - 3\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre: 12, 11, 10, 9;

$\mathbf{A} - 2\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre: 12, 10, 9;

$\mathbf{A} - \mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre: 11, 10.

Írjuk fel a Jordan-normálalakját!

M $n = 14$, $m(3) = 5$, $m(2) = 5$, $m(1) = 4$.

$\lambda = 3$: a blokkok (Jordan-láncok) száma $n - r(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) = 14 - 12 = 2$.

A leghosszabb lánc hossza $s = 4$, ugyanis ez a legkisebb s , melyre $r((\mathbf{A} - 3\mathbf{I})^s) = 14 - 5 = 9$. Az egyenletrendszer és megoldása

$$\begin{array}{rcll} n_4 & = & 5 - 14 + 10 & = 1 & n_4 & = & 1 \\ n_3 + 2n_4 & = & 5 - 14 + 11 & = 2 & n_3 & = & 0 \\ n_2 + 2n_3 + 3n_4 & = & 5 - 14 + 12 & = 3 & n_2 & = & 0 \\ n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 & = & 5 & & n_1 & = & 1 \end{array} \Rightarrow$$

- Hasonlóan járunk el a többi sajátértékkel is:

$$n_3 = 5 - 14 + 10 = 1 \qquad n_3 = 1$$

$$n_2 + 2n_3 = 5 - 14 + 12 = 3 \quad \Rightarrow \quad n_2 = 1$$

$$n_1 + 2n_2 + 3n_3 = 5 \qquad n_1 = 0$$

$$n_2 = 4 - 14 + 11 = 1 \quad \Rightarrow \quad n_2 = 1$$

$$n_1 + 2n_2 = 4 \qquad n_1 = 2$$

- Hasonlóan járunk el a többi sajátértékkel is:

$$n_3 = 5 - 14 + 10 = 1 \quad n_3 = 1$$

$$n_2 + 2n_3 = 5 - 14 + 12 = 3 \Rightarrow n_2 = 1$$

$$n_1 + 2n_2 + 3n_3 = 5 \quad n_1 = 0$$

$$n_2 = 4 - 14 + 11 = 1 \Rightarrow n_2 = 1$$

$$n_1 + 2n_2 = 4 \quad n_1 = 2$$

- Összefoglalva: $\mathbf{J} =$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & & & & & \\ & 3 & 1 & & & & \\ & & 3 & 1 & & & \\ & & & 3 & & & \\ & & & & 3 & & \\ & & & & & 2 & 1 \\ & & & & & 2 & 1 \\ & & & & & & 2 \\ & & & & & & & 2 & 1 \\ & & & & & & & 2 \\ & & & & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Jordan normálalak és minimálpolinom

T Legyen az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix spektruma $\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$.

Jordan normálalak és minimálpolinom

T Legyen az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix spektruma $\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$.

1 $\mu_{\mathbf{A}}(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} (x - \lambda_2)^{m_2} \dots (x - \lambda_s)^{m_s}$, ahol m_k a λ_k -hoz tartozó legnagyobb Jordan-blokk mérete.

Jordan normálalak és minimálpolinom

T Legyen az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix spektruma $\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$.

- 1** $\mu_{\mathbf{A}}(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} (x - \lambda_2)^{m_2} \dots (x - \lambda_s)^{m_s}$, ahol m_k a λ_k -hoz tartozó legnagyobb Jordan-blokk mérete.
- 2** $\mu_{\mathbf{A}} = \chi_{\mathbf{A}} \iff \mathbf{A}$ minden sajátértékének 1 a geometriai multiplicitása.

Jordan normálalak és minimálpolinom

T Legyen az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix spektruma $\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$.

- 1** $\mu_{\mathbf{A}}(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} (x - \lambda_2)^{m_2} \dots (x - \lambda_s)^{m_s}$, ahol m_k a λ_k -hoz tartozó legnagyobb Jordan-blokk mérete.
- 2** $\mu_{\mathbf{A}} = \chi_{\mathbf{A}} \iff \mathbf{A}$ minden sajátértékének 1 a geometriai multiplicitása.
- 3** $\mathbf{A}$ diagonalizálható $\iff$ a minimálpolinom lineáris tényezők szorzata:
 $\mu_{\mathbf{A}}(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_s)$.

Jordan normálalak és minimálpolinom

T Legyen az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix spektruma $\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$.

1 $\mu_{\mathbf{A}}(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} (x - \lambda_2)^{m_2} \dots (x - \lambda_s)^{m_s}$, ahol m_k a λ_k -hoz tartozó legnagyobb Jordan-blokk mérete.

2 $\mu_{\mathbf{A}} = \chi_{\mathbf{A}} \iff \mathbf{A}$ minden sajátértékének 1 a geometriai multiplicitása.

3 $\mathbf{A}$ diagonalizálható $\iff$ a minimálpolinom lineáris tényezők szorzata:
 $\mu_{\mathbf{A}}(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_s)$.

B Hasonló mátrixok minimálpolinomja azonos, elég csak a Jordan normálalakú mátrixokra szorítkozni. $\chi_{\mathbf{A}}(x) = \prod_{i=1}^s (x - \lambda_i)^{a_i}$.

Jordan normálalak és minimálpolinom

T Legyen az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix spektruma $\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$.

1 $\mu_{\mathbf{A}}(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} (x - \lambda_2)^{m_2} \dots (x - \lambda_s)^{m_s}$, ahol m_k a λ_k -hoz tartozó legnagyobb Jordan-blokk mérete.

2 $\mu_{\mathbf{A}} = \chi_{\mathbf{A}} \iff \mathbf{A}$ minden sajátértékének 1 a geometriai multiplicitása.

3 $\mathbf{A}$ diagonalizálható $\iff$ a minimálpolinom lineáris tényezők szorzata:
 $\mu_{\mathbf{A}}(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_s)$.

B Hasonló mátrixok minimálpolinomja azonos, elég csak a Jordan normálalakú mátrixokra szorítkozni. $\chi_{\mathbf{A}}(x) = \prod_{i=1}^s (x - \lambda_i)^{a_i}$.

1 $\mu_{\mathbf{A}}(x) \mid \chi_{\mathbf{A}}(x)$, $x - \lambda_i \mid \mu_{\mathbf{A}}(x) \rightsquigarrow \mu_{\mathbf{A}}(x) = \prod_{i=1}^s (x - \lambda_i)^{k_i}$ ($1 \leq k_i \leq a_i$).

Jordan normálalak és minimálpolinom

T Legyen az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix spektruma $\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$.

1 $\mu_{\mathbf{A}}(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} (x - \lambda_2)^{m_2} \dots (x - \lambda_s)^{m_s}$, ahol m_k a λ_k -hoz tartozó legnagyobb Jordan-blokk mérete.

2 $\mu_{\mathbf{A}} = \chi_{\mathbf{A}} \iff \mathbf{A}$ minden sajátértékének 1 a geometriai multiplicitása.

3 $\mathbf{A}$ diagonalizálható $\iff$ a minimálpolinom lineáris tényezők szorzata:
 $\mu_{\mathbf{A}}(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_s)$.

B Hasonló mátrixok minimálpolinomja azonos, elég csak a Jordan normálalakú mátrixokra szorítkozni. $\chi_{\mathbf{A}}(x) = \prod_{i=1}^s (x - \lambda_i)^{a_i}$.

1 $\mu_{\mathbf{A}}(x) \mid \chi_{\mathbf{A}}(x)$, $x - \lambda_i \mid \mu_{\mathbf{A}}(x) \rightsquigarrow \mu_{\mathbf{A}}(x) = \prod_{i=1}^s (x - \lambda_i)^{k_i}$ ($1 \leq k_i \leq a_i$).

$\mu_{\mathbf{A}}(x) = \prod_{i=1}^s (x - \lambda_i)^{m_i}$ annullálja $\mathbf{A}$ -t, hisz $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^{m_i}$ annullálja az összes λ_i -hez tartozó Jordan-blokkot $\rightsquigarrow \prod (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^{m_i} = \mathbf{O}$.

Jordan normálalak és minimálpolinom

T Legyen az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix spektruma $\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$.

1 $\mu_{\mathbf{A}}(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} (x - \lambda_2)^{m_2} \dots (x - \lambda_s)^{m_s}$, ahol m_k a λ_k -hoz tartozó legnagyobb Jordan-blokk mérete.

2 $\mu_{\mathbf{A}} = \chi_{\mathbf{A}} \iff \mathbf{A}$ minden sajátértékének 1 a geometriai multiplicitása.

3 $\mathbf{A}$ diagonalizálható $\iff$ a minimálpolinom lineáris tényezők szorzata:
 $\mu_{\mathbf{A}}(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_s)$.

B Hasonló mátrixok minimálpolinomja azonos, elég csak a Jordan normálalakú mátrixokra szorítkozni. $\chi_{\mathbf{A}}(x) = \prod_{i=1}^s (x - \lambda_i)^{a_i}$.

1 $\mu_{\mathbf{A}}(x) \mid \chi_{\mathbf{A}}(x)$, $x - \lambda_i \mid \mu_{\mathbf{A}}(x) \rightsquigarrow \mu_{\mathbf{A}}(x) = \prod_{i=1}^s (x - \lambda_i)^{k_i}$ ($1 \leq k_i \leq a_i$).

$\mu_{\mathbf{A}}(x) = \prod_{i=1}^s (x - \lambda_i)^{m_i}$ annullálja $\mathbf{A}$ -t, hisz $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^{m_i}$ annullálja az összes λ_i -hez tartozó Jordan-blokkot $\rightsquigarrow \prod (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^{m_i} = \mathbf{O}$.

ha vmely $x - \lambda_i$ tényező m_i -nél alacsonyabb hatványon szerepelne, nem annullálná a λ_i -hez tartozó legnagyobb Jordan-blokkot, így e

blokk nem lenne zérus $\mu(\mathbf{A})$ -ban sem ($\prod_{i \neq j} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) \neq \mathbf{O}$)

- 2 $\mu_{\mathbf{A}} = \chi_{\mathbf{A}} \iff \mathbf{A}$ minden sajátértékéhez egyetlen Jordan-blokk tartozik $\iff$ minden geometriai multiplicitás 1.

- 2 $\mu_{\mathbf{A}} = \chi_{\mathbf{A}} \iff \mathbf{A}$ minden sajátértékéhez egyetlen Jordan-blokk tartozik $\iff$ minden geometriai multiplicitás 1.
- 2 $\mathbf{A}$ diagonalizálható $\iff$ minden Jordan-blokkja 1×1 -es $\iff$ a legnagyobb Jordan-blokkok 1×1 -esek.

Valós Jordan-alak

- m Valós mátrix Jordan-alakja komplex sajátértékek esetén nem valós, de átalakítható.

Valós Jordan-alak

- m** Valós mátrix Jordan-alakja komplex sajátértékek esetén nem valós, de átalakítható.
- T** Minden $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix hasonló egy olyan blokkdiagonális mátrixhoz, melynek minden diagonális blokkja vagy valós sajátértékhez tartozó Jordan-blokk, vagy egy t -multiplicitású komplex $a \pm bi$ sajátértékpárhoz tartozó $2t \times 2t$ méretű,

$$\begin{bmatrix} a & b & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -b & a \end{bmatrix}$$

alakú blokk.

- B** Valós sajátértékhez tartozó invariáns altérben valós vektorokból is találunk Jordan-láncot, pl. a komplex láncok vektorainak valós része megfelel.

- B** Valós sajátértékhez tartozó invariáns altérben valós vektorokból is találunk Jordan-láncot, pl. a komplex láncok vektorainak valós része megfelel.
- Legyen $a \pm bi$ komplex sajátérték t multiplicitással, a Jordan-lánc $\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1 i, \mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2 i, \dots$, ahol
- $$\mathbf{A}(\mathbf{u}_j \pm \mathbf{v}_j i) = (a \pm bi)(\mathbf{u}_j \pm \mathbf{v}_j i) + \mathbf{u}_{j-1} \pm \mathbf{v}_{j-1} i,$$
- $$\mathbf{A}(\mathbf{u}_1 \pm \mathbf{v}_1 i) = (a \pm bi)(\mathbf{u}_1 \pm \mathbf{v}_1 i).$$

- B** Valós sajátértékhez tartozó invariáns altérben valós vektorokból is találunk Jordan-láncot, pl. a komplex láncok vektorainak valós része megfelel.
- Legyen $a \pm bi$ komplex sajátérték t multiplicitással, a Jordan-lánc $\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1 i, \mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2 i, \dots$, ahol
- $$\mathbf{A}(\mathbf{u}_j \pm \mathbf{v}_j i) = (a \pm bi)(\mathbf{u}_j \pm \mathbf{v}_j i) + \mathbf{u}_{j-1} \pm \mathbf{v}_{j-1} i,$$
- $$\mathbf{A}(\mathbf{u}_1 \pm \mathbf{v}_1 i) = (a \pm bi)(\mathbf{u}_1 \pm \mathbf{v}_1 i).$$
- Legyen $t = 2$, a $t = 1$ és a $t > 2$ esetek kezelése hasonló. A valós és imaginárius részek összevetéséből

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_1 = a\mathbf{u}_1 - b\mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = b\mathbf{u}_1 + a\mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_2 = a\mathbf{u}_2 - b\mathbf{v}_2 + \mathbf{u}_1$$

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_2 = b\mathbf{u}_2 + a\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1$$

■ Mátrix alakban

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{v}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{v}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & 1 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{bmatrix}$$

P

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

P

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

M

$$\chi(x) = x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 14x + 5 = (x - 1 - 2)(x + 1 - 2)(x - 1)^2$$

(kísérő mátrix)

P

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

M

$$\chi(x) = x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 14x + 5 = (x - 1 - 2)(x + 1 - 2)(x - 1)^2$$

(kísérő mátrix)

$$\mathbf{A} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & -1 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

P

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

M

$$\chi(x) = x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 14x + 5 = (x - 1 - 2)(x + 1 - 2)(x - 1)^2$$

(kísérő mátrix)

$$\mathbf{A} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & -1 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_1 = (-5, 9, -5, 1),$$

P

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

M

$$\chi(x) = x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 14x + 5 = (x - 1 - 2)(x + 1 - 2)(x - 1)^2$$

(kísérő mátrix)

$$\mathbf{A} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & -1 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_1 = (-5, 9, -5, 1),$$

- $(\mathbf{A} - 1 \cdot \mathbf{I})^2$ nullterét gyorsabb úgy számolni, ha nem $\mathbf{A} - \mathbf{I}$ -t szorozzuk önmagával, hanem lépcsős alakját jobbról, és annak a szorzatnak vesszük a lépcsős alakját, ugyanis

$$(\text{rref}(\mathbf{A} - \mathbf{I}))(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \mathbf{E}(\mathbf{A} - \mathbf{I})(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \mathbf{E}(\mathbf{A} - \mathbf{I})^2$$

vagyis a szorzat az $(\mathbf{A} - \mathbf{I})^2$ -en végrehajtott elemi sorműveletek eredménye.

$$\blacksquare \text{rref}(\mathbf{A} - \mathbf{I})(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 & 20 \\ 1 & -1 & -9 & -31 \\ 0 & 1 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & -20 \\ 0 & 1 & 4 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\blacksquare \text{ rref}(\mathbf{A} - \mathbf{I})(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 & 20 \\ 1 & -1 & -9 & -31 \\ 0 & 1 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & -20 \\ 0 & 1 & 4 & 11 \end{bmatrix}$$

innen $\mathbf{x}_2 = (5, -4, 1, 0)$, és $(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1$.

$$\blacksquare \text{rref}(\mathbf{A} - \mathbf{I})(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 & 20 \\ 1 & -1 & -9 & -31 \\ 0 & 1 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & -20 \\ 0 & 1 & 4 & 11 \end{bmatrix}$$

innen $\mathbf{x}_2 = (5, -4, 1, 0)$, és $(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1$.

$$\blacksquare \mathbf{A} - (2 + i)\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -2 - i & 0 & 0 & -5 \\ 1 & -2 - i & 0 & 14 \\ 0 & 1 & -2 - i & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 4 - i \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 - i \\ 0 & 1 & 0 & -5 + 2i \\ 0 & 0 & 1 & 4 - i \end{bmatrix}$$

$$\blacksquare \text{rref}(\mathbf{A} - \mathbf{I})(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 & 20 \\ 1 & -1 & -9 & -31 \\ 0 & 1 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & -20 \\ 0 & 1 & 4 & 11 \end{bmatrix}$$

innen $\mathbf{x}_2 = (5, -4, 1, 0)$, és $(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1$.

$$\blacksquare \mathbf{A} - (2 + i)\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -2 - i & 0 & 0 & -5 \\ 1 & -2 - i & 0 & 14 \\ 0 & 1 & -2 - i & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 4 - i \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 - i \\ 0 & 1 & 0 & -5 + 2i \\ 0 & 0 & 1 & 4 - i \end{bmatrix}$$

innen $\mathbf{y}_1 = (-2 + i, 5 - 2i, -4 + i, 1)$

$$\blacksquare \mathbf{A} - (2 + i)\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -2 + i & 0 & 0 & -5 \\ 1 & -2 + i & 0 & 14 \\ 0 & 1 & -2 + i & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 4 + i \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 + i \\ 0 & 1 & 0 & -5 - 2i \\ 0 & 0 & 1 & 4 + i \end{bmatrix}$$

$$\blacksquare \mathbf{A} - (2 + i)\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -2 + i & 0 & 0 & -5 \\ 1 & -2 + i & 0 & 14 \\ 0 & 1 & -2 + i & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 4 + i \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 + i \\ 0 & 1 & 0 & -5 - 2i \\ 0 & 0 & 1 & 4 + i \end{bmatrix}$$

innen $\mathbf{y}_2 = (-2 - i, 5 + 2i, -4 - i, 1)$

$$\blacksquare \mathbf{A} - (2+i)\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -2+i & 0 & 0 & -5 \\ 1 & -2+i & 0 & 14 \\ 0 & 1 & -2+i & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 4+i \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2+i \\ 0 & 1 & 0 & -5-2i \\ 0 & 0 & 1 & 4+i \end{bmatrix}$$

innen $\mathbf{y}_2 = (-2-i, 5+2i, -4-i, 1)$

$$\blacksquare \mathbf{J} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 2+i & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2-i & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2+i & -2-i & -5 & 5 \\ 5-2i & 5+2i & 9 & -4 \\ -4+i & -4-i & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\blacksquare \mathbf{A} - (2+i)\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -2+i & 0 & 0 & -5 \\ 1 & -2+i & 0 & 14 \\ 0 & 1 & -2+i & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 4+i \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2+i \\ 0 & 1 & 0 & -5-2i \\ 0 & 0 & 1 & 4+i \end{bmatrix}$$

innen $\mathbf{y}_2 = (-2-i, 5+2i, -4-i, 1)$

$$\blacksquare \mathbf{J} = \left[\begin{array}{c|cc|cc} 2+i & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2-i & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2+i & -2-i & -5 & 5 \\ 5-2i & 5+2i & 9 & -4 \\ -4+i & -4-i & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\blacksquare \mathbf{A} = \mathbf{XJC}^{-1}$$