

Bevezetés az algebrába 2 – Mátrixfüggvények

Wettl Ferenc
Algebra Tanszék



2016. április 18.

1 Diagonalizálható mátrixok függvényei

2 Mátrixfüggvény a Jordan-alakból

3 Mátrixfüggvény Hermite-polinommal

1 Diagonalizálható mátrixok függvényei

2 Mátrixfüggvény a Jordan-alakból

3 Mátrixfüggvény Hermite-polinommal

m Ha $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ és $\mathbf{D}$ diagonális, továbbá $\mathbf{D}$ főátlóbeli elemei benne vannak a hatványsor konvergenciatartományában, akkor

$$\begin{aligned} f(\mathbf{D}) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathbf{D}^k = \text{diag} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k d_1^k, \dots, \sum_{k=0}^{\infty} a_k d_n^k \right) \\ &= \text{diag}(f(d_1), \dots, f(d_n)). \end{aligned}$$

- m** Ha $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ és $\mathbf{D}$ diagonális, továbbá $\mathbf{D}$ főátlóbeli elemei benne vannak a hatványsor konvergenciatartományában, akkor

$$\begin{aligned} f(\mathbf{D}) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathbf{D}^k = \text{diag} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k d_1^k, \dots, \sum_{k=0}^{\infty} a_k d_n^k \right) \\ &= \text{diag}(f(d_1), \dots, f(d_n)). \end{aligned}$$

Eszerint például bármely diagonalizálható $\mathbf{A}$ mátrixra értelmezhető az $e^{\mathbf{A}}$ hatvány, nevezetesen

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \dots + \frac{\mathbf{A}^n}{n!} + \dots$$

- m** Ha $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ és $\mathbf{D}$ diagonális, továbbá $\mathbf{D}$ főátlóbeli elemei benne vannak a hatványsor konvergenciatartományában, akkor

$$\begin{aligned} f(\mathbf{D}) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathbf{D}^k = \text{diag} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k d_1^k, \dots, \sum_{k=0}^{\infty} a_k d_n^k \right) \\ &= \text{diag}(f(d_1), \dots, f(d_n)). \end{aligned}$$

Eszerint például bármely diagonalizálható $\mathbf{A}$ mátrixra értelmezhető az $e^{\mathbf{A}}$ hatvány, nevezetesen

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \dots + \frac{\mathbf{A}^n}{n!} + \dots$$

Hasonlóképp definiálható az $\ln(\mathbf{I} + \mathbf{A})$ mátrixfüggvény is.

Fölhasználva a

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad |x| < 1$$

hatványsort kapjuk, hogy

$$\ln(\mathbf{I} + \mathbf{A}) = \mathbf{A} - \frac{\mathbf{A}^2}{2} + \frac{\mathbf{A}^3}{3} - \frac{\mathbf{A}^4}{4} + \dots$$

- m** Egy hatványsorba fejthető függvénynek egy diagonális mátrixban – és így bármely diagonalizálható mátrixban – fölvelt értékét a függvénynek csak a sajátértékekben való viselkedése befolyásolja.

- m** Egy hatványsorba fejthető függvénynek egy diagonális mátrixban – és így bármely diagonalizálható mátrixban – fölvelt értékét a függvénynek csak a sajátértékekben való viselkedése befolyásolja.
- m** A Cayley–Hamilton-tétel szerint minden mátrix kielégíti saját karakterisztikus egyenletét, így egy n -edrendű mátrix minden hatványa legföljebb $n - 1$ -edik hatványok lineáris kombinációjával helyettesíthető, azaz a függvény értéke egy polinomba való helyettesítéssel is kiszámolható.

- m** Egy hatványsorba fejthető függvénynek egy diagonális mátrixban – és így bármely diagonalizálható mátrixban – fölvelt értékét a függvénynek csak a sajátértékekben való viselkedése befolyásolja.
- m** A Cayley–Hamilton-tétel szerint minden mátrix kielégíti saját karakterisztikus egyenletét, így egy n -edrendű mátrix minden hatványa legföljebb $n - 1$ -edik hatványok lineáris kombinációjával helyettesíthető, azaz a függvény értéke egy polinomba való helyettesítéssel is kiszámolható.
- Á** Legyen az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix Jordan-felbontása $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{J}\mathbf{C}^{-1}$ és $p \in \mathbb{C}[x]$ egy tetszőleges polinom. Ekkor

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{C}p(\mathbf{J})\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C} \begin{bmatrix} p(\mathbf{J}_1) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & p(\mathbf{J}_2) & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & p(\mathbf{J}_k) \end{bmatrix} \mathbf{C}^{-1},$$

m Tegyük fel, hogy az f függvény λ körül Taylor-sorba fejthető, azaz

$$f(x) = f(\lambda) + f'(\lambda)(x - \lambda) + \dots + \frac{f^{(m)}(\lambda)}{m!}(x - \lambda)^m + \dots$$

és legyen $\mathbf{J} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ egy Jordan-blokk, azaz

$$\mathbf{J} = \lambda \mathbf{I} + \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda & 1 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

m Tegyük fel, hogy az f függvény λ körül Taylor-sorba fejthető, azaz

$$f(x) = f(\lambda) + f'(\lambda)(x - \lambda) + \dots + \frac{f^{(m)}(\lambda)}{m!}(x - \lambda)^m + \dots$$

és legyen $\mathbf{J} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ egy Jordan-blokk, azaz

$$\mathbf{J} = \lambda \mathbf{I} + \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda & 1 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

■ Mivel $\mathbf{N}^n = \mathbf{O}$, fenn kell álljon az

$$f(\mathbf{J}) = f(\lambda \mathbf{I} + \mathbf{N}) = f(\lambda) \mathbf{I} + f'(\lambda) \mathbf{N} + \dots + \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \mathbf{N}^{n-1}$$

összefüggés – ha egyáltalán van értelme az $f(\mathbf{J})$ kifejezésnek.

m Tegyük fel, hogy az f függvény λ körül Taylor-sorba fejthető, azaz

$$f(x) = f(\lambda) + f'(\lambda)(x - \lambda) + \dots + \frac{f^{(m)}(\lambda)}{m!}(x - \lambda)^m + \dots$$

és legyen $\mathbf{J} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ egy Jordan-blokk, azaz

$$\mathbf{J} = \lambda \mathbf{I} + \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda & 1 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

■ Mivel $\mathbf{N}^n = \mathbf{O}$, fenn kell álljon az

$$f(\mathbf{J}) = f(\lambda \mathbf{I} + \mathbf{N}) = f(\lambda) \mathbf{I} + f'(\lambda) \mathbf{N} + \dots + \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \mathbf{N}^{n-1}$$

összefüggés – ha egyáltalán van értelme az $f(\mathbf{J})$ kifejezésnek.

Tehát az f függvénynek csak a Jordan-mátrix rendjénél kisebb rendű deriváltjai játszanak szerepet a függvényértékben.

1 Diagonalizálható mátrixok függvényei

2 Mátrixfüggvény a Jordan-alakból

3 Mátrixfüggvény Hermite-polinommal

Spektrumon definiált függvény

- D** Legyen az **A** mátrix spektruma $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$, a λ_i sajátértékhez tartozó legnagyobb Jordan-blokk rendjét jelölje m_i . Azt mondjuk, hogy **f** definiálva van az **A** spektrumán, ha az

$$f^{(j)}(\lambda_i), \quad j = 1, \dots, m_i - 1, \quad i = 1, \dots, k$$

értékek léteznek. Azt mondjuk, hogy ezek az értékek az **f** értékei az **A** spektrumán.

Spektrumon definiált függvény

- D** Legyen az **A** mátrix spektruma $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$, a λ_i sajátértékhez tartozó legnagyobb Jordan-blokk rendjét jelölje m_i . Azt mondjuk, hogy **f** definiálva van az **A** spektrumán, ha az

$$f^{(j)}(\lambda_i), \quad j = 1, \dots, m_i - 1, \quad i = 1, \dots, k$$

értékek léteznek. Azt mondjuk, hogy ezek az értékek az **f** értékei az **A** spektrumán.

- m** Minden függvény, mely **C** minden pontjában értelmezve van, tetszőleges mátrixra értelmezve van annak spektrumán. Így minden polinom értelmezve van minden mátrix spektrumán, ami összhangban lesz azzal, hogy minden négyzetes mátrixnak bármely polinomfüggvénye értelmezve van.

Spektrumon definiált függvény

- D** Legyen az **A** mátrix spektruma $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$, a λ_i sajátértékhez tartozó legnagyobb Jordan-blokk rendjét jelölje m_i . Azt mondjuk, hogy **f** definiálva van az **A** spektrumán, ha az

$$f^{(j)}(\lambda_i), \quad j = 1, \dots, m_i - 1, \quad i = 1, \dots, k$$

értékek léteznek. Azt mondjuk, hogy ezek az értékek az **f** értékei az **A** spektrumán.

- m** Minden függvény, mely **C** minden pontjában értelmezve van, tetszőleges mátrixra értelmezve van annak spektrumán. Így minden polinom értelmezve van minden mátrix spektrumán, ami összhangban lesz azzal, hogy minden négyzetes mátrixnak bármely polinomfüggvénye értelmezve van.
- m** Ha μ az **A** mátrix minimálpolinomja, akkor μ értelmezve van **A** spektrumán, és μ értékei **A** spektrumán mind nullák. Ez egyből következik a minimálpolinom előállításából és a fenti definícióból.

Mátrixfüggvény a Jordan-alakból

D Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ Jordan-felbontása $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{J}\mathbf{C}^{-1}$, ahol $\mathbf{J} = \text{diag}(\mathbf{J}_1, \dots, \mathbf{J}_k)$ a Jordan-féle normálalakja, és n_i jelöli a $\mathbf{J}_i$ blokk rendjét. Ekkor

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{C}f(\mathbf{J})\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C} \text{diag}(f(\mathbf{J}_1), \dots, f(\mathbf{J}_k))\mathbf{C}^{-1},$$

ahol

$$f(\mathbf{J}_i) = \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{f''(\lambda_i)}{2!} & \dots & \frac{f^{(n_i-2)}(\lambda_i)}{(n_i-2)!} & \frac{f^{(n_i-1)}(\lambda_i)}{(n_i-1)!} \\ 0 & f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \dots & \dots & \frac{f^{(n_i-2)}(\lambda_i)}{(n_i-2)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f'(\lambda_i) & \frac{f''(\lambda_i)}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & f(\lambda_i) \end{bmatrix} \quad (1)$$

- Egyszerű képletbehelyettesítéssel $f(x) = x^3$ esetén

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} f(2) & f'(2) \\ 0 & f(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

- Egyszerű képletbehelyettesítéssel $f(x) = x^3$ esetén

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} f(2) & f'(2) \\ 0 & f(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

- Az $f(x) = e^x$ függvény esetén, ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ akkor } e^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} e^2 & e^2 & \frac{e^2}{2} \\ 0 & e^2 & e^2 \\ 0 & 0 & e^2 \end{bmatrix} = e^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Egyszerű képletbehelyettesítéssel $f(x) = x^3$ esetén

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} f(2) & f'(2) \\ 0 & f(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

- Az $f(x) = e^x$ függvény esetén, ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ akkor } e^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} e^2 & e^2 & \frac{e^2}{2} \\ 0 & e^2 & e^2 \\ 0 & 0 & e^2 \end{bmatrix} = e^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Általában a λ -hoz tartozó Jordan-blokkra

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} \text{ esetén } e^{\mathbf{J}} = e^{\lambda} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \dots & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & 1 & \dots & \frac{1}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{1}{(n-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Mátrix exponenciális függvénye

P Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

Határozzuk meg az $e^{\mathbf{A}}$ mátrixot!

Mátrix exponenciális függvénye

P Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

Határozzuk meg az $e^{\mathbf{A}}$ mátrixot!

M $\mathbf{A}$ karakterisztikus polinomja

$$x^3 + 10x^2 + 32x + 32 = (x + 2)(x + 4)^2,$$

Mátrix exponenciális függvénye

P Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

Határozzuk meg az $e^{\mathbf{A}}$ mátrixot!

M $\mathbf{A}$ karakterisztikus polinomja

$$x^3 + 10x^2 + 32x + 32 = (x + 2)(x + 4)^2,$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{P}e^{\mathbf{J}}\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{2e^4} \begin{bmatrix} e^2 + 1 & 2e^2 - 2 & e^2 - 1 \\ e^2 - 1 & 2e^2 & e^2 - 1 \\ 1 - e^2 & 2 - 2e^2 & 3 - e^2 \end{bmatrix}$$

1 Diagonalizálható mátrixok függvényei

2 Mátrixfüggvény a Jordan-alakból

3 Mátrixfüggvény Hermite-polinommal

Spektrumon azonos értékeket adó polinomok

Á Tetszőleges p és q polinomokra és $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrixra $p(\mathbf{A}) = q(\mathbf{A})$, pontosan akkor teljesül, ha p és q értékei $\mathbf{A}$ spektrumán azonosak.

Spektrumon azonos értékeket adó polinomok

- Á** Tetszőleges p és q polinomokra és $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrixra $p(\mathbf{A}) = q(\mathbf{A})$, pontosan akkor teljesül, ha p és q értékei $\mathbf{A}$ spektrumán azonosak.
- B** Ha $p(\mathbf{A}) = q(\mathbf{A})$, akkor $h = p - q$ annullálja $\mathbf{A}$ -t, így h osztható a minimálpolinommal, így a minimálpolinommal együtt h értékei is nullák az $\mathbf{A}$ spektrumán.

Spektrumon azonos értékeket adó polinomok

- Á** Tetszőleges p és q polinomokra és $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrixra $p(\mathbf{A}) = q(\mathbf{A})$, pontosan akkor teljesül, ha p és q értékei $\mathbf{A}$ spektrumán azonosak.
- B** Ha $p(\mathbf{A}) = q(\mathbf{A})$, akkor $h = p - q$ annullálja $\mathbf{A}$ -t, így h osztható a minimálpolinommal, így a minimálpolinommal együtt h értékei is nullák az $\mathbf{A}$ spektrumán.

Ha p és q értékei $\mathbf{A}$ spektrumán azonosak, akkor a $h = p - q$ polinom értékei mind nullák. Az ilyen polinomok alakja $\prod_{i=1}^s (x - \lambda_i)^{m_i} g(x)$, azaz $h = \mu g$, tehát h annullálja $\mathbf{A}$ -t, így $p(\mathbf{A}) = q(\mathbf{A})$.

Mátrixfüggvény kiszámítása polinominterpolációval

- D** Legyen $\mathbf{A}$ minimálpolinomja $\mu_{\mathbf{A}}$, és tegyük fel, hogy az f függvény definiálva van $\mathbf{A}$ spektrumán. Ekkor $f(\mathbf{A}) := p(\mathbf{A})$, ahol p az a polinom, melynek foka kisebb $\mu_{\mathbf{A}}$ fokánál, és amely eleget tesz a

$$p^{(j)}(\lambda_i) = f^{(j)}(\lambda_i), \quad j = 1, \dots, m_i - 1, \quad i = 1, \dots, k \quad (2)$$

feltételeknek, ahol m_i a λ_i sajátértékhez tartozó legnagyobb Jordan-blokk rendjét jelöli.

- m** A definícióban megadott polinom egyértelműen létezik, ezt nevezzük **Hermite-polinomnak**, mely explicit módon is megadható:

$$p(x) = \sum_{i=1}^s \left(\left(\sum_{j=0}^{m_i-1} g_i^{(j)} \frac{(x - \lambda_i)^j}{j!} \right) \prod_{j \neq i} (x - \lambda_j)^{m_j} \right), \quad g_i = \frac{f(x)}{\prod_{k \neq i} (x - \lambda_k)}$$

- m** A definícióban megadott polinom egyértelműen létezik, ezt nevezzük **Hermite-polinomnak**, mely explicit módon is megadható:

$$p(x) = \sum_{i=1}^s \left(\left(\sum_{j=0}^{m_i-1} g_i^{(j)} \frac{(x - \lambda_i)^j}{j!} \right) \prod_{j \neq i} (x - \lambda_j)^{m_j} \right), \quad g_i = \frac{f(x)}{\prod_{k \neq i} (x - \lambda_k)}$$

- m** Ha **A**-nak minden sajátértéke egyszeres algebrai multiplicitású, azaz $s = n$ és $m_i = 1$ minden i -re, akkor az előző formula az ismert Lagrange-féle interpolációs polinomot adja:

$$p(x) = \sum_{i=1}^n \left(f(\lambda_i) \prod_{j \neq i} \frac{x - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} \right). \quad (3)$$

- m** A definícióban megadott polinom egyértelműen létezik, ezt nevezzük **Hermite-polinomnak**, mely explicit módon is megadható:

$$p(x) = \sum_{i=1}^s \left(\left(\sum_{j=0}^{m_i-1} g_i^{(j)} \frac{(x - \lambda_i)^j}{j!} \right) \prod_{j \neq i} (x - \lambda_j)^{m_j} \right), \quad g_i = \frac{f(x)}{\prod_{k \neq i} (x - \lambda_k)}$$

- m** Ha **A**-nak minden sajátértéke egyszeres algebrai multiplicitású, azaz $s = n$ és $m_i = 1$ minden i -re, akkor az előző formula az ismert Lagrange-féle interpolációs polinomot adja:

$$p(x) = \sum_{i=1}^n \left(f(\lambda_i) \prod_{j \neq i} \frac{x - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} \right). \quad (3)$$

Ha pedig **A**-nak csak egyetlen sajátértéke λ , melynek n az algebrai multiplicitása, azaz $s = 1$, $m_1 = n$, akkor f Taylor-polinomját kapjuk:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n-1} f^{(j)}(\lambda) \frac{(x - \lambda)^j}{j!}.$$

- m Az Hermite-polinom ugyan egyértelmű, de nem mindig tudjuk könnyen meghatározni, például ha a mátrixnak csak a sajátértékeit ismerjük, de a legnagyobb Jordan-blokk méretét nem. A korábbiak szerint bármely más polinom is megfelel, mely kielégíti a (2) feltételeket.

- m Az Hermite-polinom ugyan egyértelmű, de nem mindig tudjuk könnyen meghatározni, például ha a mátrixnak csak a sajátértékeit ismerjük, de a legnagyobb Jordan-blokk méretét nem. A korábbiak szerint bármely más polinom is megfelel, mely kielégíti a (2) feltételeket.
- m Nézzük az $f(x) = x^3$ függvény helyettesítési értékét a $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ mátrixban. Ugyan f polinom, de mivel $\mu_{\mathbf{A}}(x) = (x - 2)^2$, azaz a minimálpolinom kisebb fokú, ezért van olyan elsőfokú polinom is, mely $\mathbf{A}$ -ban azonos értéket ad. E polinom az $x^3 : \mu_{\mathbf{A}}(x)$ osztás maradéka. Mivel $x^3 = (x - 2)^2(x + 4) + (12x - 16)$, azaz a maradék $12x - 16$, ezért

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^3 = 12 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - 16 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

m Keressük meg az $f(x) = x^3$ Hermit-féle interpolációs polinomját

$$\begin{aligned} f(2) = 8 = p(2) = 2a + b \\ f'(2) = 12 = p'(2) = a. \end{aligned} \rightsquigarrow a = 12, b = -16.$$

m Keressük meg az $f(x) = x^3$ Hermit-féle interpolációs polinomját

$$\begin{aligned} f(2) = 8 &= p(2) = 2a + b \\ f'(2) = 12 &= p'(2) = a. \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad a = 12, b = -16.$$

■ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, e^{\mathbf{A}} = ?$

m Keressük meg az $f(x) = x^3$ Hermit-féle interpolációs polinomját

$$\begin{aligned} f(2) = 8 = p(2) = 2a + b \\ f'(2) = 12 = p'(2) = a. \end{aligned} \rightsquigarrow a = 12, b = -16.$$

■ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $e^{\mathbf{A}} = ?$

$$\mu_{\mathbf{A}}(x) = (x - 2)^3 \rightsquigarrow \text{Hermit-polinom: } p(x) = ax^2 + bx + c$$

$$e^x|_2 = e^2 = p(2) = 4a + 2b + c$$

$$(e^x)'|_2 = e^2 = p'(2) = 4a + b \rightsquigarrow a = e^2/2, b = -e^2, c = e^2, \rightsquigarrow$$

$$(e^x)''|_2 = e^2 = p''(2) = 2a.$$

m Keressük meg az $f(x) = x^3$ Hermit-féle interpolációs polinomját

$$\begin{aligned} f(2) = 8 &= p(2) = 2a + b \\ f'(2) = 12 &= p'(2) = a. \end{aligned} \rightsquigarrow a = 12, b = -16.$$

■ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $e^{\mathbf{A}} = ?$

$$\mu_{\mathbf{A}}(x) = (x - 2)^3 \rightsquigarrow \text{Hermit-polinom: } p(x) = ax^2 + bx + c$$

$$e^x|_2 = e^2 = p(2) = 4a + 2b + c$$

$$(e^x)'|_2 = e^2 = p'(2) = 4a + b \rightsquigarrow a = e^2/2, b = -e^2, c = e^2, \rightsquigarrow$$

$$(e^x)''|_2 = e^2 = p''(2) = 2a.$$

$$e^{\mathbf{A}} = p(\mathbf{A}) = \frac{e^2}{2} \mathbf{A}^2 - e^2 \mathbf{A} + e^2 \mathbf{I}$$

$$= \frac{e^2}{2} \begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - e^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + e^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$