

4.5. Diagonalizálhatóság

Mind bizonyos problémák megértésében, mind a gyakorlati alkalmazásokban fontos lehet, hogy egy lineáris leképezés mátrixát milyen bázisban írjuk fel. Láttuk milyen sokat segít, ha a bázis sajátvektorokból áll, sőt, ha még ortonormált is. Ekkor a mátrix diagonális alakot ölt. Kérdés azonban, milyen mátrixok diagonalizálhatók, és amelyek nem, azokkal mit tudunk kezdeni.

Ortogonalisan és unitéren diagonalizálható mátrixok

Schur-felbontás

Általánosított sajátvektorok és a Jordan-blokk Tekintsük a 4.58. példában szereplő

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrix hatását a standard bázis vektorain:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{e}_1 &= 4\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{A}\mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{A}\mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Átrendezés után kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{e}_1 &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_1 \\ (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

Az $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ mátrix fenti hatását a következő diagrammal fogjuk szemléltetni:

$$\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{e}_1 \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{e}_2 \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{e}_3$$

Eszerint $\mathbf{e}_1$ sajátvektor, és mint a 4.58. példában láttuk, $\mathbf{A}$ -nak más sajátvektora nincs. Viszont az előző egyenletekből a következő összefüggés adódik:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^2 \mathbf{e}_2 &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^3 \mathbf{e}_3 &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Az ilyen vektorokra külön elnevezést fogunk alkalmazni:

4.71. DEFINÍCIÓ: ÁLTALÁNOSÍTOTT SAJÁTVEKTOR. Az $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektort a négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékéhez tartozó *általánosított sajátvektornak* nevezzük, ha valamilyen k természetes számra $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k \mathbf{x} = \mathbf{0}$. $k = 1$ esetén $\mathbf{x}$ sajátvektor. Az általánosított vektorokból álló $\mathbf{x}_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$) sorozatot *Jordan-láncnak* nevezzük, ha $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1}$ és $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$.

Az előzőekben vizsgált konkrét példában tehát a térnek sajátvektorokból álló bázisa nincs, hisz a sajátaltér csak 1-dimenziós, de általánosított sajátvektorokból álló bázisa van.

4.72. PÉLDA: JORDAN-LÁNC KONSTRUKCIÓJA. Keressünk az alábbi mátrixok minden sajátaltérének minden bázisvektorához egy abban végződő Jordan-láncot:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ és a } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

MEGOLDÁS. A karakterisztikus polinom mindkét mátrix esetén $-\lambda^3 + 12\lambda^2 - 48\lambda + 64 = (4-\lambda)^3$, ezért $\lambda = 4$ háromszoros algebrai multiplicitású sajátérték.

Az $\mathbf{A}$ mátrix esetén a sajátaltér 1-dimenziós, melyet az $\mathbf{x}_1 = (1, -1, 1)$ vektor feszít ki.

Mivel $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^3 = \mathbf{O}$, ezért legföljebb három hosszú sorozatra számíthatunk: olyan $\mathbf{x}_2$ és $\mathbf{x}_3$ vektort keresünk, melyre $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1$ és $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_2$. Ez két egyenletrendszer, megoldását jelenti. Elég a megoldások közül egyet kiválasztani:

$$\mathbf{A} - 4\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \text{ egy-egy megoldás: } \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ezek a következő láncot adják:

$$\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{x}_1 = (1, -1, 1) \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{x}_2 = (0, -1, 0) \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{x}_3 = (-1, -2, 0)$$

A $\mathbf{B}$ mátrix esetén a sajátaltér 2-dimenziós, melyet az $\mathbf{x}_1 = (1, 0, 1)$ és az $\mathbf{y}_1 = (0, 1, 0)$ vektorok feszítenek ki.

Mivel $(\mathbf{B} - 4\mathbf{I})^2 = \mathbf{O}$, ezért legföljebb kettő hosszú láncra számíthatunk: olyan $\mathbf{x}_2$ és $\mathbf{y}_2$ vektort keresünk, melyre $(\mathbf{B} - 4\mathbf{I})\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1$ és $(\mathbf{B} - 4\mathbf{I})\mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_1$. Ezek közül az első megoldható, és megoldásainak egyike $(-1, 0, 0)$, míg a második nem oldható meg. Ez két láncra vezet:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &\xleftarrow{\mathbf{B}-4\mathbf{I}} \mathbf{x}_1 = (1, 0, 1) \xleftarrow{\mathbf{B}-4\mathbf{I}} \mathbf{x}_2 = (-1, 0, 0) \\ \mathbf{0} &\xleftarrow{\mathbf{B}-4\mathbf{I}} \mathbf{y}_1 = (0, 1, 0) \end{aligned}$$

A két lánc 2 és egy 1 hosszú. ■

A bevezetőben mutatott mátrix-típus fontos szerepet játszik a továbbiakban:

4.73. DEFINÍCIÓ: JORDAN-BLOKK. Azt a négyzetes mátrixot, melynek főátlójában azonos λ értékek, fölötte 1-esek, egyebütt 0-k állnak, azaz melynek alakja

$$\mathbf{J}_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Jordan-blokknak nevezzük.

A fentiek mintájára könnyen látható, hogy az ilyen mátrixoknak a standard bázis minden vektora általánosított sajátvektora, tehát kimondható a következő megállapítás: minden Jordan-bloknak van általánosított sajátvektorokból álló bázisa.

4.74. PÉLDA: JORDAN-LÁNC HOZ TARTOZÓ JORDAN-BLOKK. Írjuk fel a 4.72. példában szereplő mátrixot az ott konstruált Jordan-lánc vektorából álló bázisban!

MEGOLDÁS. Mivel $\mathbf{A}\mathbf{x}_3 = 4\mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_2$, $\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = 4\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_1$ és $\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = 4\mathbf{x}_1$, ezért az $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ bázisban a leképezés mátrixa

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Ezt az eredményt az áttérés $\mathbf{C} = [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \mathbf{x}_3]$ mátrixával való közvetlen számolással is megkaphatjuk, ha elvégezzük az alábbi mátrixszorzásokat:

$$\mathbf{J} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -1 & -3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Jordan normálalak Nem hozható minden mátrix diagonális alakra, de egy ahhoz közeli alak megvalósítható, ahol csak közvetlenül a főátló fölött lehetnek nemnulla elemek, azok is csak 1-esek. Ráadásul ez az alak jól leírja a mátrix szerkezetét.

4.75. TÉTEL: JORDAN NORMÁLALAK. Bármely $\mathbb{C}^{n \times n}$ -beli mátrix hasonló egy Jordan-blokkokból álló blokkdiagonális mátrixhoz. E mátrix a Jordan-blokkok sorrendjétől eltekintve egyértelmű. Részletesen megfogalmazva: minden $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrixhoz létezik olyan $\mathbf{C}$ mátrix, hogy a $\mathbf{J} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ mátrix alakja

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{J}_2 & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{J}_k \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

ahol $\mathbf{J}_i$ a λ_i sajátértékhez tartozó Jordan-blokk és k az $\mathbf{A}$ független sajátvektorainak maximális száma.

► A különböző Jordan-blokkok nem szükségképp különböző sajátértékekhez tartoznak.

BIZONYÍTÁS. Megmutatjuk, hogy ha találunk k független sajátvektort, akkor találunk k Jordan-láncot is, melyek vektorai a tér bázisát adják.

A mátrix méretére vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk. $n = 1$ esetén az állítás nyilván igaz. Tegyük fel, hogy igaz az állítás minden n -nél kisebb méretű mátrixra.

Legyen λ az $n \times n$ -es $\mathbf{A}$ mátrix egy sajátértéke, és legyen $\mathbf{x}$ egy hozzá tartozó sajátvektor. Az $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ megoldásainak terét, vagyis a λ -hoz tartozó sajátalteret jelölje $\mathcal{N}_\lambda$. Ennek dimenzióját, vagyis $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ nullitását jelölje r .

Mivel $r > 0$, ezért a dimenziótétel miatt $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ oszlopterének dimenziója $n - r < n$. Jelölje az oszlopteret $\mathcal{O}_\lambda$. Az $\mathcal{O}_\lambda$ invariáns altér $\mathbf{A}$ -nak, azaz $\mathbf{A}(\mathcal{O}_\lambda) \subseteq \mathcal{O}_\lambda$, ugyanis $\mathcal{O}_\lambda$ elemei $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}$ alakúak, ahol $\mathbf{v}$ tetszőleges, és $\mathbf{A}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = (\mathbf{A}^2 - \lambda\mathbf{A})\mathbf{v} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})(\mathbf{A}\mathbf{v})$ ugyancsak eleme $\mathcal{O}_\lambda$ -nak. Az $\mathbf{A}$ mátrixleképezést szűkítsük le $\mathcal{O}_\lambda$ -ra, jelölje ezt $\hat{\mathbf{A}}$.

Az $\hat{\mathbf{A}}$ mátrix $n - r$ méretű, ezért az indukciós feltevés szerint van Jordan-láncokból álló bázisa. A következő diagram e láncokat szemlélteti, és azt, hogy $\hat{\mathbf{A}} - \lambda\mathbf{I}$ hogy hat rájuk. Mivel azonban e halmazon ez megegyezik $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ hatásával, a nyilak fölé is ezt írjuk:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^1 & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}} & \dots & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}} & \mathbf{x}_{s_1}^1 \\ \mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^2 & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}} & \dots & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}} & \mathbf{x}_{s_2}^2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda_p \mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^p & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda_p \mathbf{I}} & \dots & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda_p \mathbf{I}} & \mathbf{x}_{s_p}^p \end{array}$$

Itt az $\mathbf{x}_i^j$ vektor felső indexe a lánc sorszámát jelöli.

Az $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ oszloptere és magtere metszetének dimenzióját jelölje q , azaz legyen $q = \dim(\mathcal{O}_\lambda \cap \mathcal{N}_\lambda)$. Mivel $\mathcal{N}_\lambda$ elemei az $\mathbf{A}$ sajátvektora, azok $\mathcal{O}$ -ba eső báziselemei pedig az $\mathbf{x}_1^j$ vektorok, ezért q közülük a λ sajátvektora, azaz q sajátérték megegyezik λ -val, pl. az első q , azaz $\lambda_i = \lambda$ ($i = 1, 2, \dots, q$). E q lánc végén lévő $\mathbf{x}_{s_i}^i$ vektorok elemei $\mathcal{O}$ -nak, tehát mindegyikhez van olyan $\mathbf{y}_i$ vektor, hogy $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_{s_i}^i$ ($i = 1, 2, \dots, q$).

Az $\mathcal{N}_\lambda$ altér r -dimenziós, annak q -dimenziós alteréhez találunk olyan $\mathcal{Z}$ alteret, mely $r - q$ -dimenziós, és minden vektora sajátvektor. Így a Jordan-láncok így alakulnak:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^1 & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} & \dots & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} & \mathbf{x}_{s_1}^1 \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} \mathbf{y}_1 \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^q & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} & \dots & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} & \mathbf{x}_{s_q}^q \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} \mathbf{y}_q \\
 \mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda_{q+1} \mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^{q+1} & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda_{q+1} \mathbf{I}} & \dots & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda_{q+1} \mathbf{I}} & \mathbf{x}_{s_{q+1}}^{q+1} \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda_p \mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^p & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda_p \mathbf{I}} & \dots & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda_p \mathbf{I}} & \mathbf{x}_{s_p}^p \\
 \mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} & \mathbf{z}_1 & & & & \\
 \vdots & & \vdots & & & & \\
 \mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} & \mathbf{z}_{r-q} & & & &
 \end{array} \tag{4.9}$$

Az $\mathbf{x}$ -vektorok száma $n - r$, az $\mathbf{y}$ -vektorok száma q , a $\mathbf{z}$ -vektorok száma $r - q$, ezek összege pedig n , tehát van elég vektor egy bázishoz. Már csak a függetlenségüket kell belátni. A konstrukció olyan volt, hogy az $\mathbf{x}$ - és $\mathbf{z}$ -vektorok mind függetlenek egymástól, csak az $\mathbf{y}$ -vektorok közülük való függetlenségét kell bizonyítani. Tegyük fel, hogy

$$\sum_{i,j} \xi_{i,j} \mathbf{x}_j^i + \sum_i \eta_i \mathbf{y}_i + \sum_i \zeta_i \mathbf{z}_i = \mathbf{0},$$

ahol nem minden η_i nulla. Szorozzuk meg az egyenlőséget (balról) az $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ mátrixszal. Mivel az első q lánc végén lévő $\mathbf{x}_{s_i}^i$ -vektorok kisebb indexűekbe mennek, másrészt $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_{s_i}^i$, ezért olyan összefüggéshez jutunk, amelyben már csak $\mathbf{x}$ -vektorok lesznek, de nem minden együttható nulla, hisz van nemnulla η együttható, és ez ellentmondás.

Be kell még látnunk, hogy e felbontás egyértelmű. Ehhez elég belátni, hogy bármely két hasonló mátrix Jordan-alakjának meghatározó adatai a hasonlóságra nézve invariánsak.

A Jordan-blokkok, és így a Jordan-láncok száma megegyezik a független sajátvektorok maximális számával – ez invariáns.

Az egyszerűség kedvéért először tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ minden sajátértéke azonos, jelölje λ . A továbbiak könnyebb megértésére lássunk egy konkrét példát. Legyen az $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus polinomja $(\lambda - x)^{13}$, és tegyük fel, hogy Jordan-bázisa a következőképp néz ki:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^1 & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} & \mathbf{x}_2^1 & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} & \mathbf{x}_3^1 \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} \mathbf{x}_4^1 \\
 \mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^2 & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} & \mathbf{x}_2^2 & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} & \mathbf{x}_3^2 \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} \mathbf{x}_4^2 \\
 \mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^3 & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} & \mathbf{x}_2^3 & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} & \mathbf{x}_3^3 \\
 \mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^4 & & & & \\
 \mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^5 & & & &
 \end{array} \tag{4.10}$$

A leghosszabb blokk mérete 4, ami $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ ismeretében úgy kapható meg, hogy 4 az a legkisebb s kitevő, melyre $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^s = \mathbf{O}$. Általában is igaz, a legnagyobb blokk mérete az a legkisebb s , melyre $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^s = \mathbf{O}$. A

mátrix hatványának zérus volta is invariáns, így hasonló mátrixokra a leghosszab lánc hossza is azonos.

Legyen a λ sajátértékhez tartozó i -hosszú Jordan-láncok száma m_i . A 4.10. diagramon $m_1 = 2, m_2 = 0, m_3 = 1, m_4 = 2$. Látható, hogy $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ hatványainak rangjából megmondható, hogy vektor nem futott még a nullvektorba, innen pedig az m_i értékek is kiszámolhatók. Esetünkben

$$\begin{aligned} m_4 &= r((\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^3) = 2 \\ m_3 + 2m_4 &= r((\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^2) = 5 \\ m_2 + 2m_3 + 3m_4 &= r(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 8 \\ m_1 + m_2 + m_3 + m_4 &= n - r(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 13 - 8 = 5 \end{aligned}$$

és ez az egyenletrendszer egyértelműen megoldható. Általában

$$\begin{aligned} m_s &= r((\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{s-1}) \\ m_{s-1} + 2m_s &= r((\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{s-2}) \\ m_{s-2} + 2m_{s-1} + 3m_s &= r((\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{s-2}) \\ &\vdots \\ m_2 + 2m_3 + \cdots + (s-1)m_s &= r(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \\ m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_{s-1} + m_s &= n - r(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \end{aligned}$$

Ennek az egyenletrendszernek a jobb oldalán a hasonlóságra nézve invariáns értékek vannak, az együtthatómátrix háromszög alakú, így egyszerű visszahelyettesítéssel megoldható, főátlójában csupa egyes van, melynek következtében a megoldás egyértelmű, másrészt a megoldások mindegyike egész szám.

Ha a mátrixnak nem csak egy sajátértéke van, akkor sajátértékenként egy ilyen egyenletrendszert kapunk, mely annyiban változik az előzőhöz képest, hogy ha λ multiplicitása $m(\lambda)$, akkor $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ hatványainak rangjához az összes λ -tól különböző sor eggyel hozzájárul, így az egyenletrendszerek jobb oldalából $(n - m(\lambda))$ -t ki kell vonni. A legnagyobb blokk mérete ekkor $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ -nek az a legkisebb s hatványa, melynek rangja először éri el $n - m(\lambda)$ -t. Így az összes esetre általánosan érvényes egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} m_s &= m(\lambda) - n + r((\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{s-1}) \\ m_{s-1} + 2m_s &= m(\lambda) - n + r((\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{s-2}) \\ m_{s-2} + 2m_{s-1} + 3m_s &= m(\lambda) - n + r((\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{s-2}) \\ &\vdots \\ m_2 + 2m_3 + \cdots + (s-1)m_s &= m(\lambda) - n + r(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \\ m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_{s-1} + m_s &= n - r(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \end{aligned}$$

4.76. PÉLDA: NORMÁLALAKOK. Hány hasonlósági osztálya van az olyan 4×4 -es mátrixoknak, melyeknek $(1 - \lambda)^4$ a karakterisztikus polinomja. Soroljuk fel az összes lehetséges Jordan-alakot.

MEGOLDÁS. A lehetséges öt alak elemi leszámplálással megkapható:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4.77. PÉLDA: JORDAN-BLOKKOK MÉRETE. Egy 10×10 -es $\mathbf{A}$ mátrixnak λ 10-szeres algebrai multiplicitású sajátértéke. $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 5, 2, 1, 0. Írjuk fel a Jordan normálalakját!

MEGOLDÁS. A blokkok száma, ami megegyezik a Jordan-láncok számával 5, mivel $n - r(\mathbf{A}) = 10 - 5 = 5$. A leghosszabb lánc hossza 4, mivel $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ legkisebb zérusmátrixot adó hatványa a 4-dik. Az egyenletrendszer és megoldása, valamint a $\mathbf{J}$ Jordan-mátrix:

$$\begin{array}{rcl} m_4 = 1 & m_4 = 1 \\ m_3 + 2m_4 = 2 & m_3 = 0 \\ m_2 + 2m_3 + 3m_4 = 5 & m_2 = 2 \\ m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 5 & m_1 = 2 \end{array} \Rightarrow \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & 1 & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{bmatrix}$$

4.78. PÉLDA: JORDAN-BLOKKOK MÉRETE. Egy 14×14 -es $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus polinomja $(3 - \lambda)^5(2 - \lambda)^5(1 - \lambda)^4$.

$$\begin{array}{ll} \mathbf{A} - 3\mathbf{I} \text{ hatványainak rangja rendre:} & 12, 11, 10, 9; \\ \mathbf{A} - 2\mathbf{I} \text{ hatványainak rangja rendre:} & 12, 10, 9; \\ \mathbf{A} - \mathbf{I} \text{ hatványainak rangja rendre:} & 11, 10. \end{array}$$

Írjuk fel a Jordan normálalakját!

MEGOLDÁS. Most $n = 14$, $m(3) = 5$, $m(2) = 5$, $m(1) = 4$.

$\lambda = 3$ esetén a blokkok (Jordan-láncok) száma $n - r(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) = 14 - 12 = 2$. A leghosszabb lánc hossza $s = 4$, ugyanis ez a legkisebb s , melyre $r((\mathbf{A} - 3\mathbf{I})^s) = 14 - 5 = 9$. Az egyenletrendszer és megoldása

$$\begin{array}{rcl} m_4 = 5 - 14 + 10 = 1 & m_4 = 1 \\ m_3 + 2m_4 = 5 - 14 + 11 = 2 & m_3 = 0 \\ m_2 + 2m_3 + 3m_4 = 5 - 14 + 12 = 3 & m_2 = 0 \\ m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 14 - 12 = 2 & m_1 = 1 \end{array} \Rightarrow$$

Hasonlóan járunk el a többi sajátérték esetén is (gondoljuk végig):

$$\begin{array}{rcl} m_3 = 5 - 14 + 10 = 1 & m_3 = 1 \\ m_2 + 2m_3 = 5 - 14 + 12 = 3 & m_2 = 1 \\ m_1 + m_2 + m_3 = 14 - 12 = 2 & m_1 = 0 \\ \\ m_2 = 4 - 14 + 11 = 1 & m_2 = 1 \\ m_1 + m_2 = 14 - 11 = 3 & m_1 = 2 \end{array} \Rightarrow$$

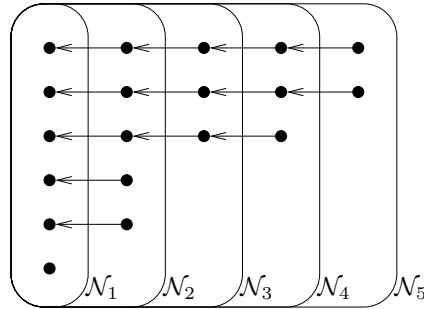
Összefoglalva:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 3 & 1 & & & & & & & \\ & 3 & 1 & & & & & & \\ & & 3 & 1 & & & & & \\ & & & 3 & & & & & \\ & & & & 3 & & & & \end{array} & & & \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 2 & 1 & & & & & & & \\ & 2 & 1 & & & & & & \\ & & 2 & & & & & & \\ & & & 2 & 1 & & & & \\ & & & & 2 & & & & \end{array} & & \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \end{array} \end{bmatrix}$$

az $\mathbf{A}$ mátrix Jordan normálalakja. ■

A Jordan-bázis konstrukciója A Jordan-tétel bizonyításában megkonstruált bázist kis mátrixokra kézzel is ki lehet számolni. Az itt ismertetendő egyszerű naív algoritmus nem számítógépes megvalósításra való, ennél hatékonyabb is létezik.

Példaként tekintsünk egy 18-adrendű $\mathbf{A}$ mátrixot, melynek λ 18-szoros sajátértéke, és amelyre a Jordan-lánckok hossza rendre $m_5 = 2$, $m_4 = 1$, $m_3 = 0$, $m_2 = 1$, $m_1 = 2$. Ennek alapján az $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ hatása a Jordan-bázison meghatározható, amit a 4.9. ábra szemlélt. Jelölje $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^k$ nullterét $\mathcal{N}_k$. $\mathcal{N}_5$ a λ -hoz tartozó teljes általánosított sajátaltér – e példában $\mathbb{C}^{18}$. A nulltér meghatározása egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldását jelenti, ami nem okoz nehézséget, de az már nem teljesen mindegy, hogy a bázist hogy választjuk benne.



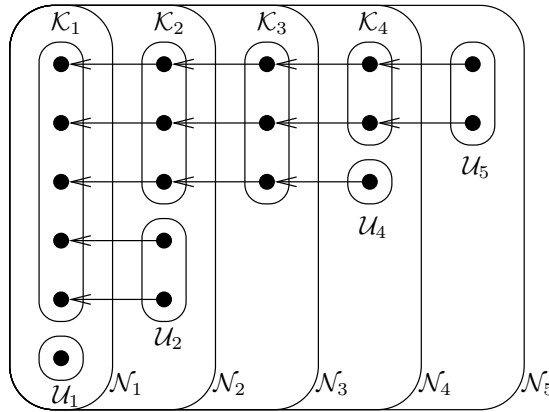
4.9. ábra. Az $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ hatványainak nullterei, és hatása az $\mathbf{A}$ mátrix Jordan-bázisán

Az algoritmus – melyet a 4.10. ábra is szemléltet – lényege, hogy a nagyobb indexű terek felől indulva minden lépésben kiterjesztjük $\mathcal{N}_{i-1}$ bázisát $\mathcal{N}_i$ bázisává, majd a kiterjesztésnek vesszük az $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ általi képét, ami már $\mathcal{N}_{i-1}$ -be esik, és ezt $\mathcal{N}_{i-2}$ bázisához adva azt kiterjesztjük $\mathcal{N}_{i-1}$ új bázisává. ... A konvenció az lesz, hogy a vektortér egy generátorának vektorait egyetlen mátrixba tesszük, és azt azonos, de félkövér betűvel jelöljük, tehát pl. $\mathcal{N}$ generátormátrixát $\mathbf{N}$ jelöli. Részletezve:

- Meghatározzuk $\mathcal{N}_i$ egy tetszőleges $\mathbf{N}_i$ bázismátrixát ($i = 1, 2, 3, 4, 5$).
- Kiegészítjük $\mathbf{N}_4$ -et $\mathcal{N}_5$ bázisává, az új báziselemek mátrixát jelölje $\mathbf{U}_5$, tehát $\mathcal{N}_5$ bázisa most $[\mathbf{N}_4 | \mathbf{U}_5]$.
- Legyen $\mathbf{K}_4$ az új elemek $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ általi képe, azaz $\mathbf{K}_4 = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{U}_5$. Mivel $\mathbf{K}_4 \subset \mathcal{N}_4$, de független az $\mathcal{N}_3$ altértől, ezért alkalmas arra, hogy bázisvektorait a Jordan-bázis $\mathcal{N}_4 \setminus \mathcal{N}_3$ -ba eső elemei közé vegyük.
- Ha szükséges, egészítsük ki a $[\mathbf{N}_3 | \mathbf{K}_4]$ -et $\mathcal{N}_4$ bázisává új elemek hozzávételével, így $\mathcal{N}_4$ bázisa most $[\mathbf{N}_3 | \mathbf{K}_4 | \mathbf{U}_4]$.
- Vegyük a $[\mathbf{K}_4 | \mathbf{U}_4]$ mátrix képét, azaz legyen $\mathbf{K}_3 = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})[\mathbf{K}_4 | \mathbf{U}_4]$, és ha szükséges, egészítsük ki $[\mathbf{N}_2 | \mathbf{K}_3]$ -at $\mathcal{N}_3$ bázisává új elemek hozzávételével (azaz $\mathcal{N}_3$ bázisa most $[\mathbf{N}_2 | \mathbf{K}_3 | \mathbf{U}_3]$ – most $\mathcal{U}_3 = \emptyset$). Hasonlóan folytatjuk $\mathcal{N}_i$ indexét csökkentve: $\mathbf{K}_2 = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})[\mathbf{K}_3 | \mathbf{U}_3]$, új elemek hozzávételével előállítjuk $\mathcal{N}_2$ bázisát: $[\mathbf{N}_1 | \mathbf{K}_2 | \mathbf{U}_2]$.
- Végül legyen $\mathbf{K}_1 = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})[\mathbf{K}_2 | \mathbf{U}_2]$, amit $\mathbf{U}_1$ -gyel kibővítünk $\mathcal{N}_1$ bázisává. A tér Jordan-bázisa a kép- és az új elemek egyesítése:

$$[\mathbf{K}_4 | \mathbf{K}_3 | \mathbf{K}_2 | \mathbf{K}_1 | \mathbf{U}_5 | \mathbf{U}_4 | \mathbf{U}_3 | \mathbf{U}_2 | \mathbf{U}_1].$$

Ezek után lássunk egy konkrét példát, majd az algoritmust általánosan. A számolás kivitelezéséhez két megjegyzés:



4.10. ábra. A Jordan-bázist megkonstruáló algoritmus

► Ha $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ két altér, és $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$, illetve $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ ($m < n$) a bázisuk, akkor elemi sorműveletekkel konstruálhatunk $\mathcal{V}$ -nek egy olyan $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$ bázist, hogy $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m\}$ az $\mathcal{U}$ bázisa legyen. Ehhez írjuk $\mathcal{U}$, majd $\mathcal{V}$ bázisvektorait egyetlen

$$[\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_m \mid \mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_n]$$

mátrixba. Ennek lépcsős alakjában vezéregyesek lesznek az első m oszlopban, és $n-m$ további oszlopban. A nekik megfelelő vektorok az eredeti bázisokban (tehát $\mathcal{V}$ összes vektora és $\mathcal{U}$ -nak $n-m$ vektora) adják az új bázist.

► Emlékeztetünk rá, hogy ha egy mátrix redukált lépcsős alakja $[\mathbf{I}|\mathbf{S}]$ alakú, akkor $\begin{bmatrix} -\mathbf{S} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$ vagy $\begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix}$ oszlopvektorai a mátrix nulltere bázisát adják. Vigyázzunk, ha $\mathbf{I}$ nem az első oszlopokban van, akkor $\begin{bmatrix} -\mathbf{S} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$ sorait megfelelően permutálni kell.

4.79. PÉLDA: JORDAN-BÁZIS ELŐÁLLÍTÁSA. Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 6 & -2 & 4 \\ 4 & -5 & 9 & -3 & 5 \\ 4 & -5 & 8 & -2 & 5 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix Jordan normálalakját és Jordan-bázisát!

MEGOLDÁS. A karakterisztikus polinom

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = -\lambda^5 + 4\lambda^4 - 6\lambda^3 + 4\lambda^2 - \lambda = -\lambda(1 - \lambda)^4.$$

A 0-hoz tartozó sajátvektor a redukált lépcsős alakból kiszámítva:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mivel itt az algebrai és geometriai multiplicitás egyaránt 1, ez a Jordan-lánc egyelemű. A $\lambda = 1$ esetén a geometriai multiplicitás 2, ugyanis $\mathbf{A} - \mathbf{I}$ redukált lépcsős alakja és abból a nulltér bázisa:

$$\text{rref}(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$(\mathbf{A} - \mathbf{I})^2$ nullterét gyorsabb úgy számolni, ha nem $\mathbf{A} - \mathbf{I}$ -t szorozzuk önmagával, hanem lépcsős alakját jobbról, és annak a szorzatnak vesszük a lépcsős alakját. A lépcsős alak kiszámolása ugyanis csak elemi mátrixokkal való balról szorzást jelent, így

$$(\text{rref}(\mathbf{A} - \mathbf{I}))(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \mathbf{E}(\mathbf{A} - \mathbf{I})(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \mathbf{E}(\mathbf{A} - \mathbf{I})^2$$

vagyis a szorzat az $(\mathbf{A} - \mathbf{I})^2$ -en végrehajtott elemi sorműveletek eredménye. Sokkal kevesebb viszont a számolnivaló, mivel a 0-sorok elhagyhatók:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\text{rref}(\mathbf{A} - \mathbf{I}))(\mathbf{A} - \mathbf{I}) \\ \text{a 0-sorok nélkül} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ahonnan a bázis vektorai:

$$\mathbf{N}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hasonlóan határozzuk meg $(\mathbf{A} - \mathbf{I})^3$ bázisát!

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ami már lépcsős alakú, és ahonnan a bázismátrix

$$\mathbf{N}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ezután határozzuk meg $\mathbf{U}_3$ vektorait, vagyis azokat, amelyek $\mathcal{N}_2$ bázisát $(\mathbf{N}_2$ -t) $\mathcal{N}_3$ bázisává egészítik ki. Ehhez az $[\mathbf{N}_2 | \mathbf{N}_3]$ mátrixot kell redukált lépcsős alakra hozni, $\mathcal{U}_3$ elemei a $\mathbf{N}_3$ azon oszlopai lesznek, melyek függetlenek $\mathbf{N}_2$ -től, azaz melyek redukált lépcsős alakjában vezéregyes van.

$$[\mathbf{N}_2 | \mathbf{N}_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Tehát $\mathbf{U}_3 = \{(-1, 0, 1, 0, 0)\}$, és ebből $\mathbf{K}_2 = (\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{U}_3 = \{(-1, 3, 4, 4, 0)\}$. Mivel $\mathbf{K}_2$ egyetlen vektorból áll, és $\mathcal{N}_3$ és $\mathcal{N}_2$ dimenzióinak különbsége is 1, ezért itt nem kell számolnunk semmit, $\mathcal{U}_2 = \{\emptyset\}$. $\mathbf{K}_1 = (\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{K}_2 = (0, 1, 1, 1, 0)$, és mivel e vektor benn van $\mathcal{N}_1$ bázisában, $\mathcal{U}_1 = \{(0, 1, 0, 0, 1)\}$ teret a másik bázisvektor generálja. A Jordan normálalak felírásához a Jordan-láncok vektorait egymás után fel kell sorolni, a belőlük képzett $\mathbf{P}$ mátrixszal lesz $\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$. E két mátrix

$$\mathbf{P} = \left[\begin{array}{c|ccc|c} 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad \mathbf{J} = \left[\begin{array}{c|cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Az algoritmus általánosan:

- Input: $\mathbf{A}$, $p(x)$ karakterisztikus polinom lineáris tényezőkre bontva,

- Minden λ sajátértékre
 - Határozzuk meg a leghosszabb lánc s hosszát, és $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^i$ nullterét $\mathcal{N}_i$, $i = 1, 2, \dots, s$. Legyen $\mathcal{U}_{s+1} = \mathcal{K}_{s+1} = \mathcal{N}_0 = \{\mathbf{0}\}$, azaz e terek bázisa az üreshalmaz.
 - Minden i -re s -től 1-ig haladva:
 - * Legyen $\mathbf{K}_i = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})[\mathbf{K}_{i+1} | \mathbf{U}_{i+1}]$.
 - * Határozzuk meg $\mathbf{U}_i$ -t úgy, hogy $[\mathbf{N}_{i-1} | \mathbf{K}_i | \mathbf{U}_i]$ bázisa legyen $\mathcal{N}_i$ -nek. Ehhez az $[\mathbf{N}_{i-1} | \mathbf{K}_i | \mathbf{N}_i]$ mátrix redukált lépcsős alakja alapján válasszuk a vezéroszlopokat $\mathbf{N}_i$ -ből az $\mathbf{U}_i$ -be.
- Tegyük a Jordan-láncok vektorait balról jobbra egymás mellé, az így kapott $\mathbf{P}$ mátrixszal $\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}$.

Mátrixfüggvények

4.80. DEFINÍCIÓ: MÁTRIX EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNYE. Az $\mathbf{A}$ négyzetes mátrix exponenciális függvényét a következő sor definiálja:

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \dots + \frac{\mathbf{A}^n}{n!} + \dots$$

4.81. ÁLLÍTÁS: EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY KISZÁMÍTÁSA. Ha $\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}$ az $\mathbf{A}$ mátrix Jordan normálalakja, akkor

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{P} e^{\mathbf{J}} \mathbf{P}^{-1},$$

ahol $e^{\mathbf{J}}$ blokkonként számolható, és

$$\mathbf{J}_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{esetén} \quad e^{\mathbf{J}_\lambda} = e^\lambda \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \dots & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & 1 & \dots & \frac{1}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{1}{(n-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Általában mondható, hogy

$$f \left(\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{f(\lambda)}{0!} & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \dots & \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \\ 0 & \frac{f(\lambda)}{0!} & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \dots & \frac{f^{(n-2)}(\lambda)}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{f(\lambda)}{0!} \end{bmatrix}.$$

4.82. PÉLDA: MÁTRIX EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNYE. Legyen

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

Határozzuk meg az $e^{\mathbf{A}}$ mátrixot!

MEGOLDÁS. $\mathbf{A}$ karakterisztikus polinomja

$$x^3 + 10x^2 + 32x + 32 = (x + 2)(x + 4)^2,$$

így

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{P} e^{\mathbf{J}} \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{e^2+1}{e^4} & \frac{e^2-1}{e^4} & \frac{1}{2} \frac{e^2-1}{e^4} \\ \frac{1}{2} \frac{e^2-1}{e^4} & e^2 & \frac{1}{2} \frac{e^2-1}{e^4} \\ -\frac{1}{2} \frac{e^2-1}{e^4} & -\frac{e^2-1}{e^4} & -\frac{1}{2} \frac{e^2-3}{e^4} \end{bmatrix}$$