

Tartalomjegyzék

1	Vektorok	2
1.1	Vektorok a 2- és 3-dimenziós térben	2
	Vektorok, 2 • Vektor magadása, 3 • Vektorműveletek a 2- és 3-dimenziós térben, 4 • Lineáris kombináció, 6 • Lineáris függetlenség, 8 • Speciális lineáris kombinációk, 9 .	
1.2	Távolság, szög, orientáció	11
	Skaláris szorzás, 11 • Hosszúság és szög, 12 • Pithagorász-tétel, 12 • Két fontos egyenlőtlenség, 12 • Egységvektorral való szorzás és a merőleges vetítés, 13 • Merőlegesség és orientáció, 14 • Vektori szorzás, 14 • Parallelepipedon térfogata, és előjeles térfogata, 16 • Vegyes szorzat, 17 .	
1.3	Vektorok koordinátás alakban	20
	Descartes-féle koordinátarendszer, 20 • Műveletek koordinátás alakban megadott vektorokkal, 21 • A derékszögű koordinátarendszer, 22 • Az $\mathbb{R}^n$ halmaz, 23 • Műveletek $\mathbb{R}^n$ vektoraival, 24 • Távolság és szög $\mathbb{R}^n$ -ben, 24 • Bitvektorok, 24 • Kódvektorok, kódok, 25 • Vektorműveletek $\mathbb{Z}_m^n$ -ben, 25 .	
1.4	Egyenes és sík vektoregyenletei	28
	Alakzatok és egyenletek, 28 • Síkbeli egyenes egyenletei, 29 • Síkbeli pont egyenletei, 32 • A 3-dimenziós tér síkjainak egyenletei, 32 • Térbeli egyenes egyenletei, 34 • Térbeli pont egyenletei, 36 • Egyenletek $\mathbb{R}^n$ -ben, 36 .	
2	Lineáris egyenletrendszerek	38
2.1	Két modell	38
	Lineáris egyenlet és egyenletrendszer, 38 • Ekvivalens lineáris egyenletrendszerek, 40 • Mátrixok, 41 • Egyenletrendszer mátrixa és bővített mátrixa, 42 • Sormodell: hipersík metszete, 43 • Oszlopmodell: vektor előállítás lineáris kombinációként, 45 .	
2.2	Megoldás kiküszöböléssel	48
	Elemi sorműveletek, 48 • Lépcsős alak, 48 • Gauss-módszer, 49 • Redukált lépcsős alak, 52 • Gauss–Jordan-módszer, 53 • A redukált lépcsős alak egyértelműsége, 53 • Szimultán egyenletrendszerek, 55 • Köötött változók száma, mátrix rangja, 56 • Kiküszöbölés $\mathbb{Z}_p$ -ben*, 57 .	
2.3	Kiküszöbölés a gyakorlatban	59
	A kiküszöbölés műveletigénye, 59 • Numerikusan instabil egyenletrendszerek, 60 • A lebegőpontos számábrázolás, 61 • Műveletek lebegőpontos számokkal, 62 • Részleges főelemkiválasztás, 63 • Skálázás, 65 • Lebegőpontos számok, 65 .	
2.4	Megoldhatóság és megoldás	67
	Egyenletrendszer megoldhatóságának feltétele, 67 • Homogén	

lineáris egyenletrendszer megoldásai, 69	•	Altér, nulltér, 69	
• Kifeszített altér, 70	•	Lineáris függetlenség és összefüggőség, 71	
• Az inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldásai, 73	.		
2.5 A megoldások vizsgálata			74
Sor- és oszloptér, 74	•	Bázis, 76	•
Vektor egy bázisra vonatkozó koordinátás alakja, 78	•	Dimenzió és rang, 78	•
Ortogonalis és ortonormált bázis, 80	•	Gram–Schmidt-ortogonalizáció, 82	
• Elemi bázistranszformáció [*] , 84	.		
2.6 Megoldás iterációval			86
Iteratív módszerek, 86	•	Jacobi-iteráció, 86	
• Gauss–Seidel-iteráció, 88	•	Az iterációk konvergenciája, 88	
• Kémiai reakciók egyensúlyi egyenlete, 91	.		
3 Mátrixok			95
3.1 Bevezetés: műveletek táblázatokkal			95
Táblázatok, 95	•	Táblázatok összeadása, 95	•
Táblázat szorzása számmal, 96	•	Táblázatok szorzása, 96	•
Lineáris helyettesítés, 97	.		
3.2 Mátrixműveletek			99
Alapfogalmak, jelölések, 99	•	Elemenkénti mátrixműveletek, 100	
• Mátrixok lineáris kombinációi, 101	•	Mátrix transzponáltja, 103	•
Mátrixszorzás, 103	•	Skaláris szorzat és diadikus szorzat mátrixszorzatos alakja, 104	•
Lineáris egyenletrendszer mátrixszorzatos alakja, 105	•	Lineáris helyettesítés mátrixszorzatos alakja, 106	•
Szorzás vektorral, 106	•	Szorzás standard egységvektorral, 107	•
Egységmátrix, elemi mátrixok, 107	•	A báziscsere mátrixszorzatos alakja, 109	
• Bázisfelbontás [*] , 110	•	Mátrixműveletek $\mathbb{Z}_m$ -ben [*] , 111	.
3.3 Blokkmátrixok			111
Műveletek blokkmátrixokkal, 111	•	Vektorokra particionált mátrixok, 112	•
Lineáris egyenletrendszer megoldásának blokkmátrix alakja [*] , 114	.		
3.4 Mátrixműveletek tulajdonságai			118
Az összeadás és a skalárral való szorzás tulajdonságai, 118	•	A szorzás tulajdonságai, 118	•
Mátrix hatványozása, 120	•	A transzponálás tulajdonságai, 122	.
3.5 Mátrix inverze			123
Az inverz, 123	•	Elemi mátrixok inverze, 125	•
Az inverz kiszámítása, 125	•	Az inverz tulajdonságai, 127	•
Az invertálhatóság és az egyenletrendszerek megoldhatósága, 129	•	Invertálhatóság, bázis, báziscsere, 131	.
3.6 Műveletek speciális mátrixokkal			134
Diagonális mátrixok, 134	•	Permutációs mátrixok és kígyók, 134	
• Háromszögmátrixok, 135	•	Szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrixok, 136	•
Mátrix és diád összegének inverze [*] , 137	•	Gyorsszorzás [*] , 139	.
3.7 Az LU- és a QR-felbontás			141
Kiküszöbölés mátrixszorzással, 141	•	Az LU-felbontás használata egyenletrendszer megoldására, 142	•
Mátrix invertálása LU-felbontással, 142	•	Az LU-felbontás kiszámítása, 143	
• PLU-felbontás, 145	•	Az LU-felbontás a gyakorlatban, 147	
• Az oszloptér ortonormált bázisa, 147	.		
4 Mátrixok jellemzése			150
4.1 Determináns			150
Parallelogramma előjeles területe, 150	•	Parallelepipedon előjeles	

térfogata, 151 • A determináns definíciója, 152 • A determináns értékének kiszámítása, 153 • Mátrixműveletek és determináns, 156 • Amikor a determináns értéke 0, 157 • Kígyók determinánsa, 158 • Permutációs mátrix determinánsa [*] , 160 • Előjeles aldetermináns, 161 • Determináns kifejtése, 163 • Determinánsfüggvény létezése és egyértelműsége, 164 • Cramer-szabály és a mátrix inverze, 164 .	
4.2 Lineáris leképezések	168
Mátrixtranszformáció, 168 • Műveletek mátrixtranszformációk között, 168 • Mátrixtranszformációk tulajdonságai, 169 • Lineáris leképezések a síkban és a térben, 171 • Vetítés $\mathbb{R}^n$ -ben, 173 .	
4.3 A mátrix sor-, oszlop- és nullterei	174
Egy mátrix elemei, 174 .	
4.4 Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér	177
A sajátérték és a sajátvektor fogalma, 177 • Karakterisztikus polinom, 178 • Mátrix összes sajátértékének és sajátvektorának meghatározása, 179 • A karakterisztikus egyenlet komplex gyökei, 181 • A karakterisztikus egyenlet többszörös gyökei: az algebrai és a geometriai multiplicitás, 182 • Sajátértékek és a mátrix hatványai, 183 • Lineáris transzformációk sajátértékei, 184 • Hasonlóság, 185 • Mátrixok diagonalizálása, 186 • Mátrixok függvényei, 187 .	
4.5 Diagonalizálhatóság	188
Ortogonalisan és unitéren diagonalizálható mátrixok, 188 • Schur-felbontás, 188 • Általánosított sajátvektorok és a Jordan-blokk, 188 • Jordan normálalak, 191 • A Jordan-alak egyértelműsége, 193 • A Jordan-bázis konstrukciója, 195 • Mátrixfüggvények, 199.	

1. fejezet

Vektorok



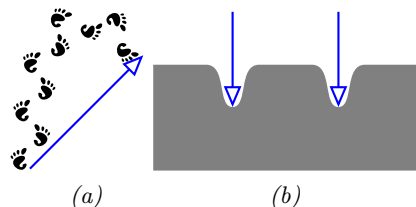
Általánosan elterjedt nézet szerint a természeti jelenségek leírásakor sok összefüggést számszerű adatokkal, ún. *skalárokkal* vagy *skalármennyiségekkel* fejezünk ki, míg mások leírásához a számadat mellett egy irány megadása is szükséges, és ez utóbbiakat nevezzük *vektoroknak*. A valóság ennél sokkal színesebb: a téridő 4-dimenziós vektoraitól, a bitvektorokon, a gazdasági számítások többszáz ezer-dimenziós, vagy az internetkeresők által kezelt sokmillió-dimenziós vektorain át a matematikai különböző területein gyümölcsöző absztrakt vektorfogalomig széles a skála.

E könyv a vektort a lineáris algebra legalapvetőbb fogalmaként kezeli, ezért természetes, hogy ez legyen az első fejezet témája. Kiindulópontnak (origónak) egy természetes, elemi geometriai megközelítést választunk, melytől hamar messzire jutunk a koordinátázás bevezetésével. A fejezetet a lineáris alakzatok (egyenes, sík) egyenleteinek tárgyalásával zárjuk, mely segíteni fogja a következő fejezet mélyebb megértését.

1.1. Vektorok a 2- és 3-dimenziós térben

E szakaszban a vektor szemléletes, geometriai fogalmával ismerkedünk. A vektorok összeadásán és skalárral való szorzásán keresztül két kulcsfogalomig – a lineáris kombináció és a lineáris függetlenség fogalmáig – jutunk.

Skalár, skaláris: a *lépcső, létra* jelentésű latin *scalae* (*scālae*) szóból ered. E szó származéka a *skála* szó is, mely jól őrzí az eredeti jelentést. A *skalár* vagy *skaláris* szót a matematikában szám vagy számszerű értelemben használjuk, például olyankor, amikor egy mennyiségről azt akarjuk hangsúlyozni, hogy irány nélküli, azaz nem vektor jellegű.



1.1. ábra. Kötött vektorok: (a) elmozdulásvektor (lábnyomokkal), (b) rugalmas testen alakváltozást okozó erő vektora

Vektorok Tekintsünk egy sárkányrepülőt repülés közben. Számtalan skalár- és vektormennyiség írja le állapotát. A földtől való távolság, a légnyomás, a légellenállási együttható vagy az emelkedés szöge skalármennyiségek, míg vektormennyiségek a sebesség- és gyorsulásvektor, a szárnyra ható felhajtóerő, a gravitációs erő, a szél ereje vagy az elmozdulást leíró vektor.

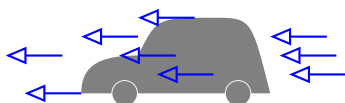
A vektor fogalma kapcsolatban van az irányított szakasz fogalmával.

Írányított szakaszon olyan szakaszt értünk, melynek végpontjain megadunk egy sorrendet, azaz kijelöljük, hogy melyik a *kezdő-* és melyik a *végpontja*. Más szóhasználatban az irányított szakaszt szokás *kötött vektornak* is nevezni. Az A kezdőpontú és B végpontú irányított szakaszt $\overrightarrow{AB}$ jelöli.

Több jelenség leírására a kötött vektor alkalmas. Természetes példa az elmozdulásvektor, mely megadja, hogy egy tárgy a tér mely pontjából melyik pontjába jutott. Másik példa kötött vektorra a rugalmas testen alakváltozást okozó erőt leíró vektor (1.1. ábra).

Alkalmazásokban gyakran előfordul, hogy egy jelenség különböző irányított szakaszokkal is ugyanúgy leírható.

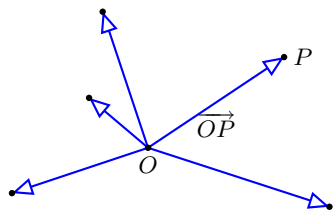
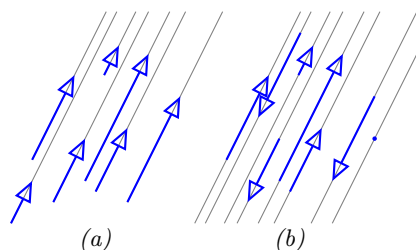
Például ha egy tárgy mozgását egy olyan irányított szakasszal jellemezzük, melynek hossza az időegység alatt megtett út hosszával egyen-



1.2. ábra. Példa szabad vektorra

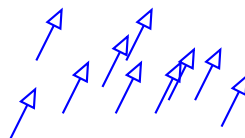
Vektor: a hordozó, vivő, utazó jelentésű latin *vector* szóból származik. A tudomány más területein hordozó anyag, az élettanban vírushordozó értelemben használják.

Vektorok jelölése: Műszaki, fizikai szövegek szedésének tipográfiai szabályait az ISO 31-11 szabvány írja le. Eszerint a vektorok félkövér betűkkel szedendők. Kézírásban aláhúzással, vagy fölé írt nyíllal szokás jelezni a vektort (pl. $\underline{x}$, $\underline{u}$, $\vec{v}$...), de körültekintő jegyzetelés esetén elhagyhatók a jelzések. Felsőbb matematikai művek nem használják e szabványt, mondván, kiderül a szövegből, hogy vektort jelölnek-e a betűk (x , u , v ...).

1.4. ábra. A sík pontjai és vektorai közti kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés: egy P pontnak az $\vec{OP}$ vektor felel meg.

1.5. ábra. (a) egyirányú vektorok,

lő, iránya pedig a mozgás irányát jelzi, akkor mindegy hogy a tér melyik pontjából indítjuk e szakaszt, a mozgást ugyanúgy leírja (1.2. ábra). Ekkor tehát nem a két pont, hanem azok viszonya a kérdés, vagyis például hogy az egyik pont a másiktól milyen *távolságra*, és milyen *irányban* van. Az, hogy a két pont pontosan hol van, nem lényeges. Ekkor bármely két irányított szakasz, mely párhuzamosan egymásba tolható, ugyanazt a viszonyt fejezi ki. Az így kapott fogalmat a fizikában *szabad vektornak* nevezik. Ez a fogalom a lineáris algebra vektor-fogalmának egyik forrása. A *vektor* fogalma az irányított szakaszból származtatható, annak a feltételnek a hozzáadásával, hogy két irányított szakasz pontosan akkor reprezentálja ugyanazt a vektort, ha párhuzamosan egymásba tolhatók.



1.3. ábra. Ugyanazt a vektort reprezentáló irányított szakaszok

Vektorok jelölésére félkövér kisbetűket használunk, pl. $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, stb. A műszaki és fizikai szakirodalomban a félkövér nagy betű is előfordul, pl. az $\mathbf{F}$ erő, a $\mathbf{B}$ indukció is vektormennyiségek.

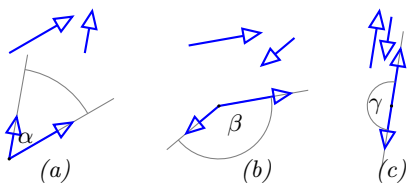
Vektor megadása Egy vektor megadható egy irányított szakasszal, azaz két pont és a köztük lévő sorrend kijelölésével. Valójában ennyi adat felesleges, hisz egy irányított szakasz önmagával párhuzamosan eltolva ugyanazt a vektort adja meg, ezért például kiköthető, hogy a kezdőpont a sík (tér) egy előre kijelölt rögzített pontja legyen. Ezt a közös kezdőpontot nevezzük *origónak*. Egy origóból induló irányított szakaszt egyértelműen definiálja a végpontja, így a vektorok megadásához elég egyetlen pont, a végpont megadása. Ezzel a sík vagy tér pontjai és vektorai közt kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesíthetünk (1.4. ábra). Az origóból egy P pontba húzott irányított $\vec{OP}$ szakaszt a ponthoz tartozó *helyvektornak* is szokás nevezni. Világos, hogy minden vektor reprezentánsai közt pontosan egy helyvektor van.

A későbbiekben gyakran fogunk egy ponthalmazt úgy jellemezni, hogy az origóból a ponthalmaz pontjaiba mutató vektorokat jellemezzük. Amikor vektorok végpontjairól beszélünk, mindig a vektorokat megadó, az origóból indított irányított szakaszok végpontjaira gondolunk.

Az olyan vektort, melynek kezdő és végpontja egybeesik, *zérusvektornak* vagy *nullvektornak* nevezzük. A zérusvektort általában félkövér zérussal, azaz $\mathbf{0}$ -val jelöljük. A pontok és vektorok közti megfeleltetésben a zérusvektornak az origó felel meg.

Ha tudunk távolságot mérni, és irányt meghatározni, akkor a vektor megadható hosszával és irányával is. Vektor *hosszát*, azaz két végpontjának távolságát a vektor *abszolút értékének* is nevezzük. Az $\mathbf{a}$ vektor abszolút értékét $|\mathbf{a}|$ jelöli.

Az irány fogalmát az 1.2.9. feladatban definiáljuk. Itt megelégszünk annyival, hogy két nemzérus vektort *azonos irányúnak* vagy *egyirányúnak* nevezzünk, ha a kezdőpontjukból induló, és a végpontjukon áthaladó félegyenesek párhuzamos eltolással fedésbe hozhatók (1.5. (a) ábra). Két nemzérus vektort *kollineárisnak* vagy *párhuzamosnak* nevezzünk, ha az őket tartalmazó egyenesek párhuzamosak. Két vektort, amely párhuzamos, de nem egyirányú, *ellenkező irányúnak* nevezzünk (1.5. (b) ábra). A zérusvektor irányát tetszőlegesnek tekintjük, így az bármely vektorral egyirányú. Belátható, hogy a vektort egyértelműen meghatározza hossza és iránya.



1.6. ábra. Két vektor szöge ($0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \pi$). Az ábra felső felén a két adott vektor, alatta szögük meghatározásának módja szerepel.

Vektor irányának meghatározásakor gyakran hívjuk segítségül a szög fogalmát.

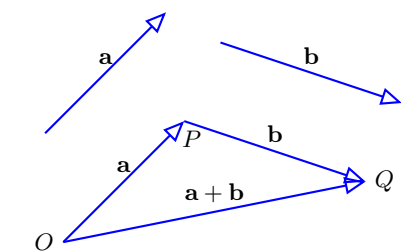
Két vektor szögén azt a szöget értjük, melyet a sík vagy tér egy tetszőleges pontjából kiindul és az adott vektorokkal egyirányú félegyenesek zárnak be (1.6. ábra). Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok szögét $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle$ jelöli.

Két vektor szöge tehát mindig 0° és 180° – radiánban mérve 0 és π – közé esik, beleértve a határokat is. Egyirányú vektorok szöge 0 , ellenkező irányúaké π .

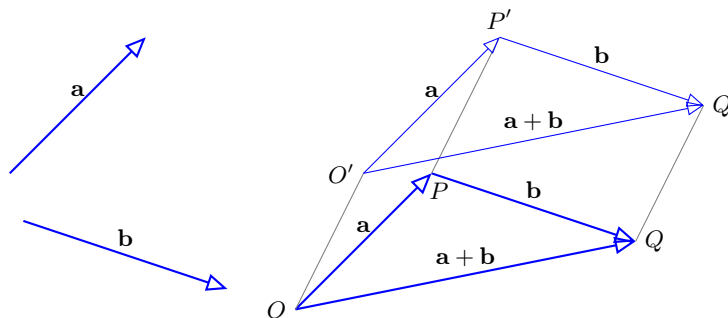
Vektorműveletek a 2- és 3-dimenziós térben A vektorműveletek – az az összeadás és a számmal való szorzás – definíciója természetes módon adódik, ha a vektorok legtipikusabb alkalmazásaira gondolunk. Például magától értetődő, hogy két elmozdulás összegén az elmozgatások egymás után való elvégzését, egy eltolás kétszeresén egy azonos irányú, de kétszer olyan hosszú eltolást értsünk. Vektorok összegének definiálására az ún. háromszögmódszert használjuk:

1.1. DEFINÍCIÓ: KÉT VEKTOR ÖSSZEGE – HÁROMSZÖGMÓDSZER. Legyen adva két vektor, $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$. Vegyünk föl egy tetszőleges O pontot. Indítsunk belőle egy $\mathbf{a}$ -val egyenlő $\overrightarrow{OP}$ vektort, ennek végpontjából pedig egy $\mathbf{b}$ -vel egyenlő $\overrightarrow{PQ}$ vektort. Az $\overrightarrow{OQ}$ vektort az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok összegének nevezzük és $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ -vel jelöljük (ld. 1.7. ábra)

Könnyen belátható, hogy az eredmény független az O pont megválasztásától, tehát vektorok összeadásának művelete definiálható e módszerrel (a bizonyítás leolvasható az 1.8. ábráról).



1.7. ábra. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektor összege



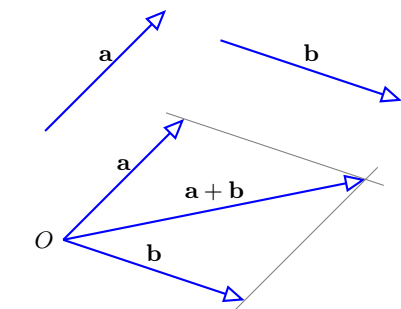
1.8. ábra. Az ábráról leolvasható annak bizonyítása, hogy az összeg vektor független az O pont megválasztásától, ugyanis az $\overrightarrow{OQ}$ és az $\overrightarrow{O'Q'}$ vektorok egyenlőek.

Egy másik módszert is ismertetünk két nem kollineáris vektor összegének megszerkesztésére:

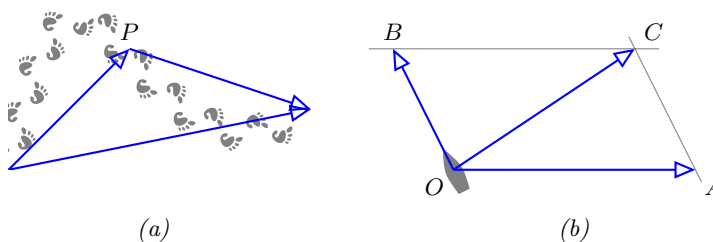
1.2. ÁLLÍTÁS: PARALLELOGRAMMA-MÓDSZER. A közös kezdőpontból indított $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok összege megkapható úgy, hogy egy olyan paralelogrammát szerkesztünk, melynek két szomszédos oldala $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$, ekkor az összeg a közös kezdőpontból indított, és a paralelogramma szemközti csúcsába futó vektor. Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem kollineárisak, akkor összegük pl. megkapható úgy, hogy $\mathbf{a}$ végpontján át egy $\mathbf{b}$ egyenesével, $\mathbf{b}$ végpontján át egy $\mathbf{a}$ egyenesével párhuzamos egyenest húzunk. A közös kezdőpontból e két egyenes metszéspontjába futó vektor lesz az összeg (ld. 1.9. ábra).

Az alkalmazásokban hol a háromszög-, hol a paralelogramma-módszer tűnik kézenfekvőbbnek (ld. 1.10).

Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ két térbeli vektor, akkor a háromszögmódszerben és a paralelogramma-módszerben is az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ vektorokat reprezentáló irányított szakaszok egy síkba esnek. Általában azt mondjuk, hogy



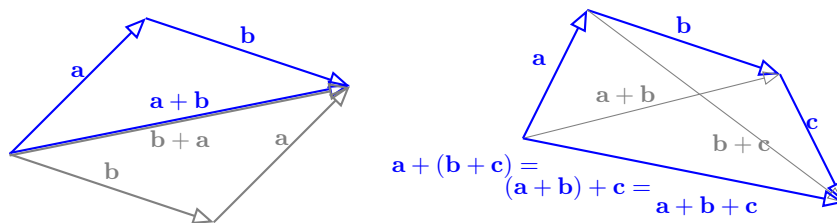
1.9. ábra. Parallelogramma-módszer



1.10. ábra. Az (a) ábrán a lábnyomok O -ból P -be, majd onnan Q -ba vezetnek. Az $\overrightarrow{OP}$ és a $\overrightarrow{PQ}$ elmozdulásvektorok összege $\overrightarrow{OQ}$ (háromszögmódszer). A (b) ábrán a csónak az $\overrightarrow{OB}$ irányba evez, de a folyó $\overrightarrow{OA}$ irányba folyik. A két sebesség eredője, azaz összege $\overrightarrow{OC}$ (parallelogramma módszer).

néhány térbeli vektor egy síkba esik, más szóval *komplanáris*, ha van olyan sík, hogy mindegyik vektort reprezentáló irányított szakasz párhuzamosan betoltható e síkba. Eszerint tehát az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ vektorok mindig komplanárisak.

A vektorösszeadás két fontos tulajdonsága, kommutativitása ($\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$) és asszociativitása ($\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$) könnyen leolvasható az 1.11. ábráról. Az asszociativitás következtében több tag összeadásánál elhagyható a zárójel, például az ábrabeli három vektor összegére $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ írható.



1.11. ábra. A vektorösszeadás kommutativitása és asszociativitása.

Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokat közös kezdőpontból indítva – a háromszögmódszerrel – azonnal látható, hogy csak egyetlen olyan $\mathbf{x}$ vektor létezik, melyre $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{x}$ (ld. 1.12. (a) ábra). Ennek felhasználásával definiálható vektorok különbsége.

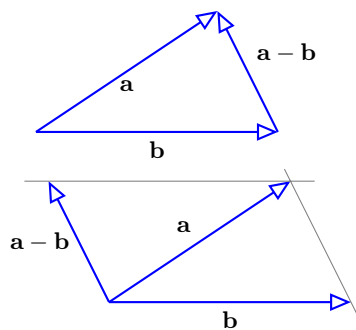
1.3. DEFINÍCIÓ: VEKTOROK KÜLÖNBSÉGE. Adva van az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektor. Azt az egyértelműen létező $\mathbf{x}$ vektort, melyre $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{x}$, az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ különbségének nevezzük és $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ -vel jelöljük.

Könnyen fejben tartható a különbségvektor megszerkesztése akár a háromszög-, akár a parallelogrammamódszerrel (ld. 1.12. ábra), ha arra gondolunk, hogy $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ az a vektor, melyet $\mathbf{b}$ -hez adva $\mathbf{a}$ -t kapunk, azaz

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} + (\mathbf{a} - \mathbf{b}).$$

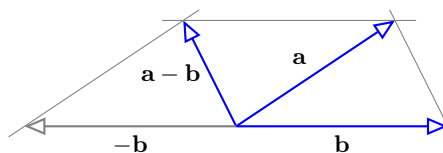
Az 1.13. ábráról az is leolvasható, hogy ha a $\mathbf{b}$ vektorral egyenlő hosszúságú, de ellenkező irányú vektort $-\mathbf{b}$ jelöli, akkor fennáll az $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ összefüggés, és így az is igaz, hogy $\mathbf{b} + (-\mathbf{b}) = \mathbf{0}$.

Érdekes megjegyezni, hogy ha P és Q két tetszőleges pont, akkor az $\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$ vektort akkor is ismerjük, ha az O pontot nem, hisz az a $\overrightarrow{PQ}$ vektor. Sok hasonló jelenség vezetett a *torzor* fogalmához, melyet egy rövid széljegyzetben ismertetünk.



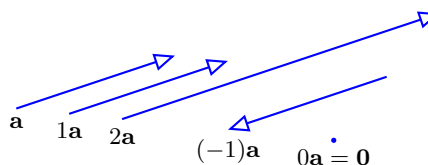
1.12. ábra. A különbségvektor meghatározása háromszög- és parallelogramma-módszerrel.

Torzor: a modern matematika fogalma. Néhány példa, mielőtt definiálnánk: (1) Az energiát a newtoni fizikában nem tudjuk mérni, csak az energiakülönbséget. Ha viszont megállapodunk abban, hogy egy adott rendszernek melyik állapota tartozik a 0

1.13. ábra. Az $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ szemléltetése.

1.4. DEFINÍCIÓ: VEKTOR SZORZÁSA SKALÁRRAL. Legyen k valós szám. Az $\mathbf{a}$ vektor k -szorosán azt a vektort értjük, melynek hossza az $\mathbf{a}$ hosszának $|k|$ -szorosa, iránya

- tetszőleges, ha $k = 0$ vagy $\mathbf{a} = \mathbf{0}$,
- megegyezik $\mathbf{a}$ irányával, ha $k > 0$, és
- ellentétes, ha $k < 0$ (ld. 1.14. ábra).



1.14. ábra. Vektor skalárszorosai

A skalárral való szorzás definíciójából azonnal látszik, hogy minden $\mathbf{a}$ vektorra $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$, $0\mathbf{a} = \mathbf{0}$ és $(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$.

E paragrafus végén összefoglaljuk a vektorműveletek legfontosabb tulajdonságait, melyek segítségével később általánosítani fogjuk a vektor fogalmát. Az eddig nem bizonyított tulajdonságok igazolását az olvasóra hagyjuk.

1.5. TÉTEL: A VEKTORMŰVELETEK TULAJDONSÁGAI. Ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ a 2- vagy 3-dimenziós tér tetszőleges vektorai, $\mathbf{0}$ a zérusvektor és r , s két tetszőleges valós szám, akkor fennállnak az alábbi azonosságok:

- | | |
|---|--|
| (a) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ | (e) $r(s\mathbf{a}) = (rs)\mathbf{a}$ |
| (b) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ | (f) $r(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = r\mathbf{a} + r\mathbf{b}$ |
| (c) $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ | (g) $(r + s)\mathbf{a} = r\mathbf{a} + s\mathbf{a}$ |
| (d) $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ | (h) $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$ és $0\mathbf{a} = \mathbf{0}$ |

Lineáris kombináció Ha vektorokra a skalárral való szorzás és az összeadás műveletét alkalmazzuk, akkor e vektorok egy lineáris kombinációját kapjuk. Pontosabban:

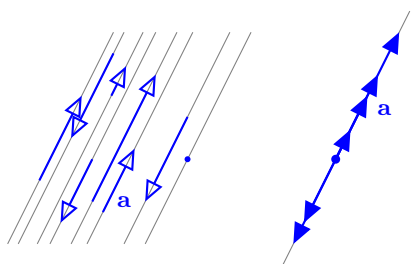
1.6. DEFINÍCIÓ: LINEÁRIS KOMBINÁCIÓ. Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ vektorok *lineáris kombinációján* egy

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \dots + c_k\mathbf{a}_k$$

alakú vektort értünk, ahol $c_1, c_2, \dots, c_k$ valós számok. Azt mondjuk, hogy a $\mathbf{v}$ vektor *előáll* az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ vektorok lineáris kombinációjaként, ha vannak olyan $c_1, c_2, \dots, c_k$ valós számok, hogy $\mathbf{v} = c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \dots + c_k\mathbf{a}_k$.

Ha egy vektort egy skalárral beszorzunk, az előző definíció szerint egy lineáris kombinációját kapjuk, mely vele párhuzamos, azaz kollineáris. Így egy nemzérus vektor összes lineáris kombinációja csupa vele párhuzamos vektor (ld. 1.15. ábrát).

Ennél több is igaz:

1.15. ábra. Egy nemzérus $\mathbf{a}$ vektor, és néhány lineáris kombinációja kétféle reprezentációban.

1.7. TÉTEL: VEKTORRAL PÁRHUZAMOS VEKTOROK. Ha $\mathbf{a}$ nem zérusvektor, akkor bármely vele párhuzamos $\mathbf{v}$ vektor az $\mathbf{a}$ skalárszorosa, azaz van olyan c valós szám, hogy $\mathbf{v} = c\mathbf{a}$, más szóval $\mathbf{v}$ előáll az $\mathbf{a}$ valamely lineáris kombinációjaként. Ez az előállítás egyértelmű.

BIZONYÍTÁS. Ha a két vektor egyirányú, az előállításban szereplő c konstans egyszerűen a $\mathbf{v}$ és $\mathbf{a}$ vektorok abszolút értékének hányadosa, ha ellenkező irányúak, e hányados (-1) -szerese. ■

E tétel következménye, hogy ha $\mathbf{a}$ nem zérusvektor, akkor az $\mathbf{a}$ összes lineáris kombinációjának halmaza és az $\mathbf{a}$ -val párhuzamos vektorok halmaza megegyezik. Másként fogalmazva: egy nemzérus vektor összes lineáris kombinációjának végpontja egy *origón átmenő egyenest* ad.

A háromszögmódszerből jól látszik, hogy tetszőleges két vektor bármely lineáris kombinációja velük komplanáris vektor lesz. Az állítás megfordítása is igaz:

1.8. TÉTEL: KÉT VEKTORRAL EGY SÍKBA ESŐ VEKTOROK. Ha $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ nem párhuzamos vektorok, akkor bármely velük egy síkba eső $\mathbf{v}$ vektor előáll az $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ valamely lineáris kombinációjaként, azaz van olyan v_1 és v_2 konstans, hogy $\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2$. Ez az előállítás egyértelmű.

BIZONYÍTÁS. A bizonyításnak a felbontás létezését biztosító része könnyen leolvasható a ?? ábráról. A $\mathbf{v}$ végpontjából húzzunk az $\mathbf{a}_1$ és az $\mathbf{a}_2$ vektorokkal párhuzamos egyeneseket. Az így létrejött nem elfajuló paralelogramma két oldala az előző tétel szerint $\mathbf{a}_1$, illetve $\mathbf{a}_2$ konstansszorosa, melyek összege a paralelogramma szabály szerint épp $\mathbf{v}$. Előállítottuk tehát $\mathbf{v}$ -t $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ lineáris kombinációjaként. Meg kell még mutatnunk, hogy ez az előállítás egyértelmű. Legyen

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 = w_1\mathbf{a}_1 + w_2\mathbf{a}_2.$$

a $\mathbf{v}$ vektor két előállítása. Ekkor átrendezés után $(v_1 - w_1)\mathbf{a}_1 = (w_2 - v_2)\mathbf{a}_2$. Mivel $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ nem kollineárisak, konstansszorosaik csak akkor egyezhetnek meg, ha mindkettő a zérusvektor. Ugyanakkor $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{a}_2 \neq \mathbf{0}$, ezért az előző egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $(v_1 - w_1) = (w_2 - v_2) = 0$, azaz ha $v_1 = w_1$ és $v_2 = w_2$. Tehát a felbontás egyértelmű. ■

Látható tehát, hogy két nem párhuzamos vektor összes lineáris kombinációjának halmaza megegyezik a két vektorral komplanáris vektorok halmazával, egyszerűbben fogalmazva két nem párhuzamos vektor összes lineáris kombinációjának végpontja *egy origón átmenő síkot* ad.

Abban nincs semmi meglepő, hogy a tér három nem egy síkba eső vektorának bármely lineáris kombinációja térbeli vektor, az állítás megfordítása viszont igen fontos:

1.9. TÉTEL: TÉRBELI VEKTOROK. Ha $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ nem egy síkba eső vektorok, akkor a tér bármely $\mathbf{v}$ vektora előáll az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ valamely lineáris kombinációjaként, azaz van olyan v_1 , v_2 és v_3 konstans, hogy

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + v_3\mathbf{a}_3. \quad (1.1)$$

Ez az előállítás egyértelmű.

BIZONYÍTÁS. A bizonyítás alapötlete az, hogy a $\mathbf{v}$ vektor V végpontján át párhuzamos egyenest húzunk az $\mathbf{a}_3$ vektorral, mely az $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ vektorok síkját egy C pontban metszi. Az $\overrightarrow{OC}$ vektor pedig az előző tétel szerint egyértelműen előáll $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ lineáris kombinációjaként (?? ábra), azaz $\overrightarrow{OC} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2$. Másrészt $\mathbf{v} = \overrightarrow{OV} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CV}$, ahol $\overrightarrow{CV} \parallel \mathbf{a}_3$, így $\overrightarrow{CV} = v_3\mathbf{a}_3$ valamely v_3 valósra. Tehát $\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + v_3\mathbf{a}_3$.

Be kell még látnunk az előállítás egyértelműségét! Tegyük fel, hogy

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{a}_1 + v_2 \mathbf{a}_2 + v_3 \mathbf{a}_3 = w_1 \mathbf{a}_1 + w_2 \mathbf{a}_2 + w_3 \mathbf{a}_3$$

a $\mathbf{v}$ két felbontása. Ekkor $(v_1 - w_1)\mathbf{a}_1 + (v_2 - w_2)\mathbf{a}_2 + (v_3 - w_3)\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$. Ez azt jelenti, hogy ha $v_1 \neq w_1$, akkor $\mathbf{a}_1$ kifejezhető $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ lineáris kombinációjaként:

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{v_2 - w_2}{v_1 - w_1} \mathbf{a}_2 - \frac{v_3 - w_3}{v_1 - w_1} \mathbf{a}_3.$$

Ez ellentmond annak, hogy $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ nem esnek egy síkba. Így tehát $v_1 = w_1$. Hasonlóan kapjuk, hogy $v_2 = w_2$ és $v_3 = w_3$, azaz az (1.1) előállítás egyértelmű. ■

Lineáris függetlenség Az előző két tételből világos, hogy a tér három vektora vagy egy síkba esik, és akkor valamelyik vektor a másik kettő lineáris kombinációja, vagy nem esnek egy síkba, és akkor egyikük sem áll elő a másik kettő lineáris kombinációjaként. Ez esetben viszont a tér minden vektora előáll az ő lineáris kombinációjuként. Látjuk, alapvető fogalom az, hogy egy vektor kifejezhető-e más vektorok lineáris kombinációjaként.

1.10. DEFINÍCIÓ: VEKTOROK FÜGGETLENSÉGE. Azt mondjuk, hogy egy $\mathbf{v}$ vektor *lineárisan független* az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ ($n \geq 1$) vektoroktól (vagy e vektorokból álló vektorrendszerrel), ha $\mathbf{v}$ nem fejezhető ki e vektorok lineáris kombinációjaként. Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ ($n \geq 2$) vektorok *lineárisan függetlenek* (vagy az e vektorokból álló vektorrendszer *lineárisan független*), ha e vektorok egyike sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként. Ha legalább egyikük kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként, azaz legalább egyikük *lineárisan függ* a többitől, akkor e vektorokat *lineárisan összefüggőknek* nevezzük. Az egyetlen vektorból álló vektorrendszert lineárisan függetlennek tekintjük, ha a vektor nem a zérusvektor.

Például egy térbeli vektor, mely nem esik egy adott síkba, független a síkba eső vektorok bármely rendszerétől (?? ábra). Egy kocka egy csúcsból kiinduló élvektorai lineárisan függetlenek (?? ábra). Általában: bármely két nem kollineáris vektor lineárisan független, hasonlóképp, a tér bármely három nem komplanáris, azaz nem egy síkba eső vektora lineárisan független.

Az 1.8. tétel tehát a következőképp fogalmazható át:

1.11. TÉTEL: SÍKBELI VEKTOR FELBONTÁSA. Ha $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ egy sík két lineárisan független vektora, akkor a sík minden $\mathbf{v}$ vektora egyértelműen előáll e vektorok lineáris kombinációjaként, azaz egyértelműen léteznek olyan v_1 és v_2 valós számok, hogy

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{a}_1 + v_2 \mathbf{a}_2.$$

Hasonlóképp az 1.9. tétel így fogalmazható át:

1.12. TÉTEL: TÉRBELI VEKTOR FELBONTÁSA. Ha $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ három lineárisan független térbeli vektor, akkor a tér minden $\mathbf{v}$ vektora egyértelműen előáll e vektorok lineáris kombinációjaként, azaz egyértelműen léteznek olyan v_1, v_2 és v_3 valós számok, hogy

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{a}_1 + v_2 \mathbf{a}_2 + v_3 \mathbf{a}_3.$$

Az 1.3. szakaszban e két tétel lesz alapja a koordinátarendszer bevezetésének.

Speciális lineáris kombinációk A sík és a tér bizonyos konfigurációi jól jellemezhetők lineáris kombinációkkal, ha a kombinációs együtthatókra bizonyos feltételeket kötünk ki.

1.13. PÉLDA: KÉT PONTON ÁTMENŐ EGYENES JELLEMZÉSE. Legyen O , A és B a sík vagy a tér három pontja. Jellemezzük az összes olyan $r\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB}$ lineáris kombinációt, melynek végpontja az A és B ponton átmenő egyenesen van.

MEGOLDÁS. Legyen $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, és $\mathbf{x}$ mutasson az AB egyenes valamely X pontjára, azaz legyen $\mathbf{x} = \overrightarrow{OB} + r\overrightarrow{BA}$ valamilyen r valós számra, tehát

$$\mathbf{x} = \mathbf{b} + r(\mathbf{a} - \mathbf{b}), \text{ azaz } \mathbf{x} = r\mathbf{a} + (1 - r)\mathbf{b}.$$

A fenti gondolatmenet lépésein visszafelé haladva látható, hogy minden valós r számra az $r\mathbf{a} + (1 - r)\mathbf{b}$ vektor végpontja az AB egyenesen van. Fogalmazhatunk úgy is, hogy az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok végpontján átmenő egyenes összes pontját pontosan azok az $r\mathbf{a} + s\mathbf{b}$ alakú lineáris kombinációk adják, amelyeknél $r + s = 1$. ■

1.14. PÉLDA: INTERVALLUM PONTJAINAK JELLEMZÉSE. Legyen O , A és B a sík vagy a tér három pontja. Jellemezzük az A és B pontot összekötő szakasz összes pontját az $\overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OB}$ vektorok lineáris kombinációival!

MEGOLDÁS. Megismételjük az előző feladat megoldását azzal a különbséggel, hogy itt a $\overrightarrow{BX} = r\overrightarrow{BA}$ összefüggés csak 0 és 1 közé eső r értékekre igaz. Tehát

$$\mathbf{x} = r\mathbf{a} + (1 - r)\mathbf{b}, \text{ ahol } 0 \leq r \leq 1.$$

Másként fogalmazva az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok végpontjait összekötő szakasz összes pontját pontosan azok a $r\mathbf{a} + s\mathbf{b}$ alakú lineáris kombinációk adják, amelyekben $r + s = 1$ és $0 \leq r, s \leq 1$. ■

Hasonló összefüggés igaz három vektor esetén is, azaz megmutatható, hogy a nem kollineáris $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok végpontjaira fektetett sík pontjaiba pontosan azok a vektorok mutatnak, melyeket $r\mathbf{a} + s\mathbf{b} + t\mathbf{c}$ alakba írva $r + s + t = 1$. Ha még azt is kikötjük e három számról, hogy legyen $0 \leq r, s, t \leq 1$, akkor az $r\mathbf{a} + s\mathbf{b} + t\mathbf{c}$ alakú vektorok a három vektor végpontja által meghatározott háromszög pontjaiba mutatnak (ld. ??? feladat).

Szemléletesen világos, például a mellékelt 1.9. ábráról leolvasható, de nem bizonyítjuk, hogy két tetszőleges nem kollineáris vektor összes olyan lineáris kombinációja, amelyben az együtthatók 0 és 1 közé esnek, egy paralelogrammát ad. Pontosabban fogalmazva egy $r\mathbf{a} + s\mathbf{b}$ alakú vektor végpontja pontosan akkor tartozik az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által meghatározott (kifeszített) *paralelogrammához*, ha $0 \leq r, s \leq 1$.

Hasonló mondható három, nem egy síkba eső vektorról: egy $r\mathbf{a} + s\mathbf{b} + t\mathbf{c}$ alakú vektor végpontja pontosan akkor tartozik az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ által kifeszített *parallelepipedonhoz*, ha $0 \leq r, s, t \leq 1$ (?? ábra).

1.15. TÉTEL: SZAKASZT $m : n$ ARÁNYBAN OSZTÓ PONT. Ha az $\overline{AB}$ szakaszt a P pont úgy bontja ketté, hogy $|\overline{AP}| : |\overline{PB}| = m : n$, akkor bármely O pontra igaz, hogy

$$\overrightarrow{OP} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}.$$

Speciálisan, az $\overline{AB}$ szakasz felezőpontjába az

$$\frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$

vektor mutat.

BIZONYÍTÁS. Ha $|\overrightarrow{AP}| : |\overrightarrow{PB}| = m : n$, akkor $|\overrightarrow{AB}| : |\overrightarrow{PB}| = (m+n) : n$, amiből $\overrightarrow{BP} = \frac{n}{m+n} \overrightarrow{BA}$. De $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP}$ és $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$, így $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \frac{n}{m+n} (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})$, amiből azonnal következik a bizonyítandó formula. A felezőpontot az $m = n = 1$ esetben kapjuk, és ekkor valóban $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OB}$. ■

Vektorműveletek a 2- és 3-dimenziós térben

- 1° Adva van a síkban két tetszőleges vektor, $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$. Szerkesszük meg a következő vektorokat: (a) $\mathbf{c} = 2\mathbf{a} + \mathbf{b}$, (b) $\mathbf{d} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b}$, (c) $\mathbf{e} = \frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}$, (d) $\mathbf{f} = \frac{2}{5}\mathbf{a} + \frac{3}{5}\mathbf{b}$.
- 2° Legyen $\mathbf{u} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{v} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$. Fejezzük ki az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektor segítségével a következő vektorokat: (a) $2\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$, (b) $3\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$, (c) $3\mathbf{u} - \mathbf{v}$, (d) $2\mathbf{u} - \frac{1}{2}\mathbf{v}$.
- 3° Tekintsük az $ABCD$ négyzetet. Határozzuk meg a következő összegeket! (a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$, (b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$, (c) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, (d) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$, (e) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$, (f) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DB}$, (g) $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$.
- 4° Tekintsük az $ABCD$ négyzetet. Jelölje a BC oldal felezőpontját E , a CD oldal felezőpontját F , a négyzet középpontját O . Fejezzük ki az egymásra merőleges $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ és $\mathbf{d} = \overrightarrow{AD}$ vektorok segítségével az $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{OF}$ vektorokat!
- 5° Tekintsük az $ABCD$ tetraédert! Határozzuk meg az
(a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$,
(b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD}$,
(c) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$
vektorokat.
- 6° Tekintsük a szabályos $ABCDEF$ hatszöget, melynek geometriai középpontját jelölje O . Fejezzük ki az $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ és $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ vektorok segítségével az (a) $\overrightarrow{OC}$, (b) $\overrightarrow{OE}$, (c) $\overrightarrow{OF}$, (d) $\overrightarrow{AC}$, (e) $\overrightarrow{BD}$, (f) $\overrightarrow{BF}$, (g) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}$ vektorokat!

- 7° Adva van n tetszőleges, nem feltétlenül különböző $P_1, P_2, \dots, P_n$ pont a térben. Mivel egyenlő a

$$\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} + \overrightarrow{P_3P_4} + \dots + \overrightarrow{P_{n-1}P_n}$$

és a

$$\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} + \overrightarrow{P_3P_4} + \dots + \overrightarrow{P_{n-1}P_n} + \overrightarrow{P_nP_1}$$

összeg?

- 8° Mutassuk meg, hogy az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok pontosan akkor lehetnek (egy esetleg szakasszá vagy ponttá elfajuló) háromszög oldalvektorai, ha az

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}, \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}, \quad \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}, \quad \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$$

vektorok legalább egyike zérus. Másként fogalmazva: ha a három vektor összege $\mathbf{0}$, vagy valamelyik vektor egyenlő a másik kettő összegével.

- 9° Legyen $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ két tetszőleges vektor. Mutassuk meg, hogy van olyan (esetleg elfajuló) háromszög, melynek oldalvektorai $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ és $3\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

Lineáris kombináció, lineáris függetlenség

Speciális lineáris kombinációk

Alkalmazás: geometriai bizonyítások vektorokkal

1.2. Távolság, szög, orientáció

A címben jelzett három alapfogalomhoz három szorzásműveleten keresztül közelítünk. Mindegyikük igen szokatlan tulajdonságokkal rendelkezik: az egyik eredményül nem vektort, hanem skalárt ad, a másik nem felcserélhető, és kétváltozós (bináris) műveletként csak a 3-dimenziós térben definiálható, a harmadik pedig nem két- hanem háromváltozós művelet.

Skaláris szorzás A fizikában az erő által végzett munka az út hosszának és az erő elmozdulás irányába eső merőleges vetülete hosszának szorzata. Vagyis két vektorjellegű mennyiségből egy skalármennyiséget kapunk eredményül. Ha $\mathbf{F}$ jelöli az erővektort, $\mathbf{s}$ az elmozdulásvektort, $\mathbf{F}_s$ az erőnek az elmozdulás irányába eső merőleges vetületi vektorát és γ az $\mathbf{F}$ és $\mathbf{s}$ vektorok hajlásszögét, akkor a munka értéke $|\mathbf{F}_s||\mathbf{s}| = |\mathbf{F}||\mathbf{s}| \cos \gamma$. Ez vezet a következő definícióhoz:

1.16. DEFINÍCIÓ: KÉT VEKTOR SKALÁRIS SZORZATA. Két vektor *skaláris szorzatán* a vektorok abszolút értékének és az általuk bezárt szög koszinuszának szorzatát értjük. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok skaláris szorzatát $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ jelöli, tehát

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle},$$

ahol a két vektor által bezárt szög $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle}$.

Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ valamelyike zérusvektor, akkor a két vektor szöge, s így annak koszinusza sem határozható meg egyértelműen, a skaláris szorzat viszont ekkor is egyértelmű, éspedig 0, hisz a zérusvektor abszolút értéke 0, és 0 bármivel vett szorzata 0.

Szokás $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ skaláris szorzatát $\mathbf{ab}$ -vel is jelölni, de ezt egy később bevezetendő művelettel (a mátrixszorzással) való összekeverés elkerülése érdekében e könyvben nem fogjuk használni.

1.17. PÉLDA: SKALÁRIS SZORZAT KISZÁMÍTÁSA A DEFINÍCIÓ ALAPJÁN. Mennyi a skaláris szorzata egy 1 és egy 2 egység hosszú, és egymással 60° -os szöget bezáró két vektornak?

MEGOLDÁS. A szorzat $1 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$. ■

1.18. TÉTEL: MIKOR 0 A SKALÁRIS SZORZAT? Két vektor skaláris szorzata pontosan akkor 0, ha a két vektor merőleges egymásra.

BIZONYÍTÁS. ($\Leftarrow$) Ha $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, akkor $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle} = \pi/2$, azaz $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle} = 0$, tehát $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

($\Rightarrow$) Ha $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, azaz $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle} = 0$, akkor $|\mathbf{a}| = 0$, $|\mathbf{b}| = 0$ vagy $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle} = 0$. Ha valamelyik vektor zérusvektor, akkor iránya bármely vektorra merőlegesnek tekinthető. Ha viszont $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, akkor $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle} = 0$, a $\cos$ függvénynek a $[0, \pi]$ intervallumban csak $\pi/2$ -ben van zérushelye, tehát a két vektor merőleges egymásra. ■

1.19. TÉTEL: A SKALÁRIS SZORZÁS MŰVELETI TULAJDONSÁGAI. Ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ tetszőleges térbeli (síkbeli) vektorok és r tetszőleges valós szám, akkor igazak az alábbi összefüggések:

- (a) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ (kommutativitás)
- (b) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ (disztributivitás)
- (c) $r(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (r\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (r\mathbf{b})$
- (d) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} > 0$, ha $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, és $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$, ha $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

A bizonyítást az olvasóra hagyjuk.

Mivel két vektor skaláris szorzata skalár, ezért az asszociativitás (csoportosíthatóság) kérdése föl sem vethető, hisz az $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ szorzatban két különböző szorzásművelet szerepel. Mindezzel együtt $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \neq \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ (ld. az 1.2.2. feladatot).

Hosszúság és szög Egy vektor hossza, és ezzel két pont távolsága, valamint két vektor hajlásszöge kifejezhető a skaláris szorzat segítségével.

Egy tetszőleges $\mathbf{a}$ vektorra $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}||\mathbf{a}| \cos 0 = |\mathbf{a}|^2$, tehát

$$|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}, \text{ azaz } |\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}.$$

E képlet szerint tehát egy *vektor hossza* megegyezik az önmagával vett skaláris szorzat gyökével. Ebből az is adódik, hogy *két pont távolsága* megegyezik az őket összekötő vektor önmagával vett skaláris szorzatának négyzetgyökével.

Két pontot összekötő vektor egyenlő az oda mutató helyvektorok különbségével, így ha a két pontba mutató helyvektor $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$, akkor a pontok távolsága – és ezt fogjuk a vektorok távolságának is tekinteni

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|.$$

Két vektor skaláris szorzatának és a vektorok hosszának ismeretében a *szögük* meghatározható:

$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} \quad (1.2)$$

Pithagorász-tétel A távolságot vagy hosszúságot skaláris szorzattal is ki tudjuk fejezni, így segítségével a rá vonatkozó összefüggések is vizsgálhatók.

1.20. TÉTEL: PITHAGORÁSZ-TÉTEL. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokra pontosan akkor teljesül az

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$$

összefüggés, ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ merőlegesek egymásra.

$$\begin{aligned} \text{BIZONYÍTÁS. } |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} && \text{disztributivitás} \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} && \text{kommutativitás} \\ &\stackrel{?}{=} \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} && ? \\ &= |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2, \end{aligned}$$

Világos, hogy a ?-vel megjelölt egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, azaz ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ merőlegesek egymásra. ■

1.21. PÉLDA: SKALÁRIS SZORZAT KISZÁMÍTÁSA. Számítsuk ki az ábrán látható két vektor skaláris szorzatát (a szomszédos rácsvonalak távolsága 1 egység).

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{a}$ vektor hossza 3, a $\mathbf{b}$ vektor hossza a Pithagorász-tétellel kiszámolható: $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, a vektorok által közbezárt szög koszinusza $\cos \gamma = \frac{4}{5}$, így a skaláris szorzat $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = 12$. ■

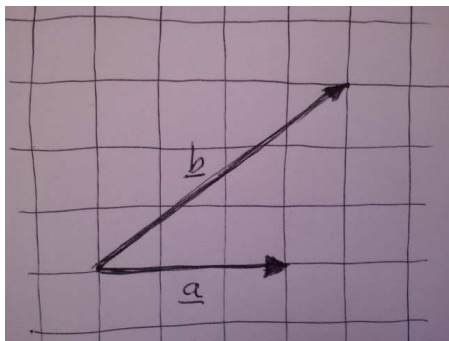
Két fontos egyenlőtlenség Mivel a koszinusz függvény értéke abszolút értékben sosem nagyobb 1-nél, ezért a skaláris szorzat definíciójából azonnal látszik, hogy

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| |\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle}| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|.$$

Ezzel bizonyítottuk a következő tételt:

1.22. TÉTEL: CAUCHY–BUNYAKOVSKIJ–SCHWARZ-EGYENLŐTLENSÉG. Két vektor skaláris szorzatának abszolút értéke sosem nagyobb abszolút értékeik szorzatánál, azaz

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|.$$



1.16. ábra.

A Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség segítségével bizonyítjuk a geometriából jól ismert háromszög-egyenlőtlenséget. Ennek az az értelme, hogy e bizonyítás változtatás nélkül működni fog sokkal általánosabb körülmények között is.

1.23. TÉTEL: HÁROMSZÖG-EGYENLŐTLENSÉG. Bármely két $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorra

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|.$$

BIZONYÍTÁS. Mivel az egyenlőtlenség mindkét oldalán nemnegatív szám áll, ezért vele ekvivalens egyenlőtlenséghez jutunk, ha mindkét oldalt négyzetre emeljük.

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \\ &= |\mathbf{a}|^2 + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + |\mathbf{b}|^2 \quad \text{ld. az 1.20. tétel bizonyítását} \\ &\leq |\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| + |\mathbf{b}|^2 \\ &\leq |\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| + |\mathbf{b}|^2 \\ &= (|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^2. \end{aligned}$$

És ezt akartuk bizonyítani. ■

Egységvektorral való szorzás és a merőleges vetítés Minden olyan vektort, melynek abszolút értéke 1, *egységvektornak* nevezünk.

Ha $\mathbf{a}$ egy tetszőleges nemzérus vektor, akkor $\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ egységvektor, ugyanis abszolút értéke 1:

$$\left| \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \right| = \frac{1}{|\mathbf{a}|} |\mathbf{a}| = 1.$$

1.24. TÉTEL: EGYSÉGVEKTORRAL VALÓ SZORZÁS GEOMETRIAI JELENTÉSE. Ha $\mathbf{e}$ egységvektor, akkor a $\hat{\mathbf{b}} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{b})\mathbf{e}$ vektor a $\mathbf{b}$ vektornak az $\mathbf{e}$ egyenesére való merőleges vetülete. Az $\mathbf{e} \cdot \mathbf{b}$ szorzat $\mathbf{e}$ vetület előjeles hossza, mely pozitív, ha $\hat{\mathbf{b}}$ és $\mathbf{e}$ egyirányúak, és negatív, ha ellenkező irányúak.

BIZONYÍTÁS. Ha $\mathbf{e}$ egységvektor, azaz abszolút értéke 1, akkor $\mathbf{e} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{e}| \cos(\mathbf{e}, \mathbf{b})$, ez pedig a koszinusz függvény definíciója szerint $\mathbf{b}$ merőleges vetületének előjeles hosszát jelenti. E szám $\mathbf{e}$ -szerese pedig egy $\mathbf{e}$ irányú, és ilyen hosszú vektort ad, mely épp $\mathbf{b}$ vetületi vektora. ■

Jelölje a továbbiakban a $\mathbf{b}$ vektornak az $\mathbf{a}$ egyenesére eső merőleges vetületi vektorát $\text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b}$. Eszerint ha $\mathbf{e}$ egységvektor, akkor

$$\text{proj}_{\mathbf{e}} \mathbf{b} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{b})\mathbf{e}.$$

Alapvető feladat egy vektornak egy másikkal párhuzamos és rá merőleges vektorok összegére való felbontása, amit másként *merőleges összetevőkre bontásnak* nevezünk.

1.25. TÉTEL: VEKTOR FELBONTÁSA MERŐLEGES ÖSSZETEVŐKRE. Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ a sík vagy a tér két vektora, és $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{b}$ -nak az $\mathbf{a}$ egyenesére eső merőleges vetülete

$$\text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a}.$$

A $\mathbf{b}$ -nek az $\mathbf{a}$ egyenesére merőleges összetevője

$$\mathbf{b} - \text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \mathbf{b} - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a}.$$

BIZONYÍTÁS. Az első képlet az egységvektorral szorzás geometriai jelentéséről szóló 1.24. tételből következik. Legyen $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ az $\mathbf{a}$ -irányú egységvektor. Ekkor

$$\text{proj}_{\mathbf{e}} \mathbf{b} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{b})\mathbf{e} = \left(\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \cdot \mathbf{b} \right) \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{|\mathbf{a}|^2} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a}.$$

(Az utolsó egyenlőségnél kihasználtuk, hogy $|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$. Mivel $\mathbf{e}$ és $\mathbf{a}$ párhuzamosak, ezért $\text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \text{proj}_{\mathbf{e}} \mathbf{b}$, ami bizonyítja első állításunkat. Az állítás második fele abból következik, hogy a két összetevő összege $\mathbf{b}$. ■

1.26. PÉLDA: MERŐLEGES ÖSSZETEVŐKRE BONTÁS. Bontsuk fel az 1.17. példabeli $\mathbf{b}$ vektort az $\mathbf{a}$ -val párhuzamos és rá merőleges összetevőkre.

MEGOLDÁS. Mivel az 1.17. példa szerint $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 12$, $|\mathbf{a}| = 3$, ezért

$$\text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a} = \frac{12}{9} \mathbf{a} = \frac{4}{3} \mathbf{a},$$

míg az $\mathbf{a}$ -ra merőleges összetevő $\mathbf{b} - \frac{4}{3}\mathbf{a}$ (ld. 1.17. ábra). ■

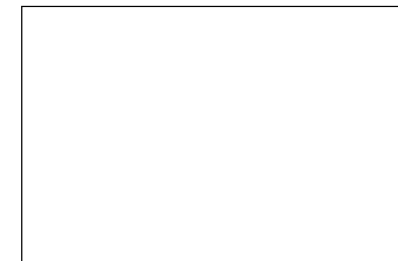
Merőlegesség és orientáció Legyenek $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ egymásra merőleges nemzérus vektorok a síkban. Ekkor $\mathbf{a}$ és $-\mathbf{b}$ is merőlegesek, azaz $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\perp} = (\mathbf{a}, -\mathbf{b})_{\perp} = \pi/2$. Csak az $\mathbf{a}$ ismeretében meg tudjuk-e különböztetni a $\mathbf{b}$ és $-\mathbf{b}$ vektorokat? Hasonló kérdés a térben is fölmerül: ha $\mathbf{c}$ merőleges a nem kollineáris $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok mindegyikére, akkor $-\mathbf{c}$ is. Vajon $\mathbf{c}$ és $-\mathbf{c}$ megkülönböztethető-e egymástól csak $\mathbf{a}$ -hoz és $\mathbf{b}$ -hez való viszonyukat tekintve?

A válaszhoz a sík, illetve tér *irányításának*, más szóval *orientációjának* fogalma vezet. E fogalmat precízen később definiáljuk (ld. ????. szakasz), az alapgondolat viszont egyszerű. A síkban a két független vektorból álló párokat két osztályba sorolhatjuk aszerint, hogy a tenyérről fölfelé fordított jobb vagy bal kezünk első két ujjával szemléltethetőek (???. ábra) (hüvelyk az első, mutató a második vektor). Hasonlóképp: a térben a független vektorokból álló hármasokat két osztályba sorolhatjuk aszerint, hogy jobb vagy bal kezünk első három ujjával szemléltethetőek (???. ábra). Kézenfekvőnek tűnik az első vektornak a hüvelyk, a másodiknak a mutató, a harmadiknak a középső ujjunkat megfeleltetni, de azokban a kultúrákban, ahol a mutató és középső ujjal mutatják a kettőt, ott a mutató-középső-hüvelyk a sorrend (???. ábra). Aszerint, hogy egy vektorpár a síkban, illetve egy vektorhármas a térben melyik osztályba esik, azt mondjuk, hogy *jobbrendszert*, illetve *balrendszert* alkot. A síkban ezt az azal is ki tudjuk fejezni, hogy két független vektor szögét előjellel látjuk el, nevezetesen pozitívval, ha jobbrendszert, és negatívval, ha balrendszert alkotnak. Az így kapott szöget a két vektor *irányított szögének* nevezzük. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ irányított szögét $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle}$ jelöli. Tehát míg $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle} = (\mathbf{b}, \mathbf{a})_{\angle}$, addig $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle} = -(\mathbf{b}, \mathbf{a})_{\angle}$, és ha $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle} = \pi/2$, akkor $(\mathbf{a}, -\mathbf{b})_{\angle} = -\pi/2$. Ez tehát a válasz a paragrafus elején feltett kérdésre.

A tér egy síkjának irányítása

Vektori szorzás A fizikában több olyan jelenség is van, melyben két térbeli vektorhoz keresünk egy mindkettőre merőleges harmadikat. Legismertebb példa a *forogatónyomaték*.

Hasson egy $\mathbf{F}$ erő egy test $\mathbf{P}$ pontjában, és legyen a test rögzítve az O pontjában. A P ponton átmenő, $\mathbf{F}$ irányú egyenesnek az O -tól való távolságát az erő karjának nevezzük. Az $\mathbf{F}$ hatására a test O körül elfordul. Ennek jellemzésére tudnunk kell a forgás tengelyét, a forgás „nagyságát”, és azt, hogy a tengely körüli két forgásirány közül melyikről



1.17. ábra.

van szó. Erre alkalmas lehet egy vektor – ezt nevezzük *forgatónyomatéknak* –, melynek iránya a forgástengellyel párhuzamos, hossza a forgás nagyságát írja le, és a forgástengellyel párhuzamos két vektorirány a két forgásirányhoz tartozik. Hogyan definiálható a forgatónyomaték-vektor, ha tudjuk, hogy abszolút értéke az erőkar hosszának és az erő abszolút értékének szorzata?

Az erő karja $|\vec{OP}| \sin(\vec{OP}, \mathbf{F})_\angle$, így az $\mathbf{M}$ forgatónyomaték abszolút értéke:

$$|\mathbf{M}| = |\mathbf{F}| |\vec{OP}| \sin(\vec{OP}, \mathbf{F})_\angle.$$

A forgás tengelye nyilván merőleges $\mathbf{F}$ -re és $\vec{OP}$ -re is, csak abban kell megegyezni, hogy az $\vec{OP}$, $\mathbf{F}$ és $\mathbf{M}$ vektorok jobb- vagy balrendszert alkotnak. A fizikusok a jobbrendszert választották.

A forgatónyomaték, és több hasonló fizikai fogalom a következő definícióhoz vezet:

1.27. DEFINÍCIÓ: VEKTORI SZORZAT. A 3-dimenziós tér két vektorának *vektori szorzatán* azt a vektort értjük, melynek

- (a) *abszolút értéke* a két vektor abszolút értékének és a közbezárt szög szinuszának szorzata,
- (b) *iránya* merőleges mindkét vektor irányára és – ha a két tényező és a szorzat egyike sem a nullvektor, akkor – az első tényező, a második tényező és a szorzat ebben a sorrendben jobbrendszert alkot.

E definíció bármely két 3-dimenziós vektor vektori szorzatát egyértelműen definiálja, ugyanis minden olyan esetben, amikor nem tudnánk eldönteni, hogy a vektorok jobbrendszert alkotnak-e, a szorzat a nullvektor (gondoljuk meg!).

Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok vektori szorzatát $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ jelöli, amit „a kereszt b”-nek olvasunk. Képletekkel megfogalmazva: $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ egy vektor, melyre

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle,$$

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{b}$, továbbá $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ebben a sorrendben jobbrendszert alkot.

1.28. PÉLDA: VEKTORI SZORZAT MEGHATÁROZÁSA. Tegyük fel, hogy a tér két vektora 3 illetve 5 hosszú, az általuk bezárt szög koszinusza $\frac{4}{5}$, mint az 1.17. példában. Mit tudunk a vektori szorzatról?

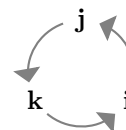
MEGOLDÁS. A vektori szorzat hossza $|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle = 3 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5} = 9$, iránya merőleges mindkét vektorra és $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ebben a sorrendben jobbrendszert alkot (ld. 1.19. ábra). ■

1.29. PÉLDA: $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ VEKTORI SZORZATA. Legyen $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ három, páronként egymásra merőleges, ebben a sorrendben jobbrendszert alkotó egységvektor. Készítsünk művelettáblát vektori szorzataikról!

MEGOLDÁS. Mivel $(\mathbf{i}, \mathbf{i})_\angle = 0$, ezért $|\mathbf{i} \times \mathbf{i}| = 0$, így $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}$. Hasonlóan $\mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$.

Mivel $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = 1$ és $(\mathbf{i}, \mathbf{j})_\angle = 90^\circ$, ezért $|\mathbf{i} \times \mathbf{j}| = 1$, azaz $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$ is egységvektor. Ráadásul $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$ merőleges $\mathbf{i}$ -re és $\mathbf{j}$ -re, és $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ valamint $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$ jobbrendszert alkotnak épp úgy, mint $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$. Ebből következik, hogy $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$. Hasonlóképp $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$ és $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$. Ha $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ jobbrendszert alkot, akkor $\mathbf{j}$, $\mathbf{i}$ és $\mathbf{k}$ balrendszert, így $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$. Mindezeket összefoglalva a következő művelettáblát kapjuk.

$\times$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$
$\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{i}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}$	$\mathbf{0}$



1.18. ábra. AAA

1.19. ábra. AAA

E három vektor közti szorzatok könnyen megjegyezhetők, ha egy szabályos háromszög csúcsaira írjuk őket pozitív körüljárás szerint, mint azt a táblázat melletti ábra mutatja. Ekkor két különböző vektor szorzata a harmadik, ha a két vektor pozitív körüljárás szerint követi egymást. Ha negatív körüljárás szerint követik egymást, a szorzat a harmadik vektor -1 -szerese. ■

1.30. TÉTEL: MIKOR 0 A VEKTORI SZORZAT? Két térbeli vektor vektori szorzata pontosan akkor zérusvektor, ha a két vektor párhuzamos.

BIZONYÍTÁS. Ha $\mathbf{a}$ vagy $\mathbf{b}$ valamelyike zérusvektor, akkor egyrészt a két vektor tekinthető párhuzamosnak, másrészt $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$, az állítás tehát igaz, ezért a továbbiakban feltesszük, hogy a két tényező egyike sem zérusvektor.

($\Leftarrow$) Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ párhuzamosak (más szóval kollineárisak), akkor $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle} = 0$ vagy π , tehát $\sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle} = 0$, így $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|0 = 0$, azaz $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

($\Rightarrow$) Ha $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$, azaz $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle} = 0$, akkor $|\mathbf{a}| = 0$, $|\mathbf{b}| = 0$ vagy $\sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle} = 0$. Az $|\mathbf{a}| = 0$ vagy $|\mathbf{b}| = 0$ eseteket már elintéztük a bizonyítás elején, így marad a $\sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle} = 0$ eset. A szinusz függvénynek a $[0, \pi]$ intervallumban a 0 és a π helyen van zérushelye, tehát a két vektor vagy egyirányú, vagy ellenkező irányú, vagyis párhuzamos. ■

1.31. TÉTEL: VEKTORI SZORZAT ABSZOLÚT ÉRTÉKÉNEK GEOMETRIAI JELENTÉSE. Két vektor vektori szorzatának abszolút értéke a két vektor által kifeszített paralelogramma területének mérőszámával egyenlő.

BIZONYÍTÁS. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma oldalainak hossza $|\mathbf{a}|$ és $|\mathbf{b}|$, az $\mathbf{a}$ oldalhoz tartozó magassága pedig $m = |\mathbf{b}|\sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle}$. A paralelogramma területe $|\mathbf{a}|m = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ (?? ábra). ■

1.32. TÉTEL: VEKTORI SZORZÁS MŰVELETI TULAJDONSÁGAI. Tetszőleges $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorokra, valamint tetszőleges r valós számra igazak az alábbi összefüggések:

- (a) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ (alternáló tulajdonság)
- (b) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$
 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ (disztributivitás)
- (c) $r(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (r\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (r\mathbf{b})$
- (d) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|^2}$

A tétel bizonyítását feladatnak tűzzük ki.

- ▷ E tétel (a) pontja szerint a vektori szorzás *nem kommutatív*!
- ▷ Egy egyszerű példa mutatja, hogy a vektori szorzás nem is asszociatív. Az 1.29. példa eredményét használva könnyen látható, hogy

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j} \neq \mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}),$$

ugyanis $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$, másrészt $\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Parallelepipedon térfogata, és előjeles térfogata Az 1.31. tételben megmutattuk, hogy a vektori szorzat abszolút értéke a két vektor által kifeszített paralelogramma területét adja. Hogy számítható ki a paralelepipedon térfogata?

1.33. PÉLDA: PARALLELEPIPEDON TÉRFOGATA. Határozzuk meg az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát!

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által kifeszített paralelogramma területe $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$, és mivel $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ merőleges a paralelogramma síkjára, ezért a paralelepipedon magassága $\mathbf{c}$ -nek az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ egyenesére eső merőleges vetületi hosszával

egyenlő. Ez az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ irányú egységvektorral való skaláris szorzással számolható. Az egységvektor

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|},$$

a magasság $|\mathbf{e} \cdot \mathbf{c}|$, és így a térfogat (azaz az alapterületszer magasság) értéke

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \left| \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} \cdot \mathbf{c} \right| = |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|.$$

Tehát a paralelepipedon térfogata $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$. ■

A térfogat tehát az $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ skalár abszolút értéke. Kérdés: vajon mit jelent e skalár előjele? Ez pontosan akkor negatív, ha a $\mathbf{c}$ vektor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ egyenesére eső merőleges vetülete és $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ellenkező irányú. Vagyis ha a $\mathbf{c}$ vektor az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ síkjának másik oldalán van, mint az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektor, azaz ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ balrendszert alkot!

Összefoglalva: Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorokból képzett $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ skalár abszolút értéke a három vektor által kifeszített paralelepipedon térfogatával egyenlő, míg előjele a három vektor orientációját adja, nevezetesen pontosan akkor pozitív, ha a három vektor jobbrendszert alkot. Az is következik a fentiekből, hogy a három vektor pontosan akkor esik egy síkba, azaz pontosan akkor lineárisan összefüggők, ha $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$.

Vegyes szorzat Az előző paragrafusban megmutattuk az $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ kifejezés fontosságát. Ez vezet a következő definícióhoz.

1.34. DEFINÍCIÓ: VEGYES SZORZAT. A 3-dimenziós tér három tetszőleges $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorából képzett

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

kifejezést a három vektor *vegyes szorzatának* nevezzük.

- ▷ A vegyes szorzat eredménye skalár.
- ▷ A vegyes szorzatra szokás az **abc** jelölést használni, amit – bár nem okoz félreértést – a későbbi fejezetekben nem fogunk használni.
- ▷ Mivel a skaláris szorzás kommutatív, ezért $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.
- ▷ A paralelepipedon térfogatára ugyanazt az értéket kell kapnunk, bármelyik oldallapot is választjuk alapnak, így e három vektorból a vektorok különböző sorrendjeivel képzett vegyes szorzatok csak előjelében térhetnek el egymástól. Mivel az előjel az orientáció függvénye, ezért – figyelembe véve az előző megjegyzést is – kapjuk, hogy

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

Az ellenkező előjelű szorzatok:

$$(\mathbf{c} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{b}).$$

Ezeket a vegyes szorzatra használt jelöléssel fölírva:

$$\mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab} = -\mathbf{acb} = -\mathbf{cba} = -\mathbf{bac}.$$

1.35. PÉLDA: VEGYES SZORZAT. Határozzuk meg egy egységélű kocka egy csúcsból induló három lapátló-vektorának vegyes szorzatát!

MEGOLDÁS. Jelölje a kocka egyik csúcsából induló három élvektorát $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$. E három vektor ebben a sorrendben alkotson jobbrendszert. Ekkor az előző megjegyzés szerint $\mathbf{ijk} = \mathbf{jki} = \mathbf{kij} = 1$, $\mathbf{kji} = \mathbf{jik} = \mathbf{ikj} = -1$. Mivel a vegyes szorzat egy paralelepipedon térfogatát, vagy annak ellentettjét adja, ezért ha egy szorzatban egy vektor többször is szerepel,

akkor annak értéke 0. Például $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \cdot \mathbf{i} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$. A három lapátló-vektor: $\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{k} + \mathbf{i}$. Ezek vegyes szorzata

$$\begin{aligned} ((\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times (\mathbf{j} + \mathbf{k})) \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{i}) &= \mathbf{ijk} + \mathbf{iji} + \mathbf{ikk} + \mathbf{iki} + \mathbf{jjk} + \mathbf{jjj} + \mathbf{jkk} + \mathbf{jki} \\ &= 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1 \\ &= 2, \end{aligned}$$

tehát a három lapátló-vektor vegyes szorzata 2. ■

Skaláris szorzás

1° Mutassuk meg, hogy $|\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2$ pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ három egymásra páronként merőleges vektor.

2° Igazoljuk, hogy

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \neq \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}).$$

Legyenek $\mathbf{a}$ és $\mathbf{c}$ független vektorok, $\mathbf{b}$ pedig tetszőleges. Ekkor az $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ szorzat párhuzamos a $\mathbf{c}$ vektorral, míg az $\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ szorzat az $\mathbf{a}$ vektorral, tehát $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \neq \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$.

Merőlegesség és orientáció: vektori szorzás

Vektori szorzat

3° Tekintsünk egy egységélű kockát, melynek egyik csúcsát jelölje P . Számítsuk ki a P -ből induló

(a) valamelyik két lapátló-vektor,

(b) egyik lapátló- és a testátló-vektor

skaláris szorzatát, valamint a P -ből induló

(c) valamelyik élvektor és egy vele egy lapon lévő lapátló-vektor,

(d) valamelyik élvektor és a vele nem egy lapon lévő lapátló-vektor

vektori szorzatát.

Jelölje P szomszédait Q , R és S .

(a) Ekkor két lapátló-vektor például a $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}$ és a $\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PS}$ vektorok. Ezek szorzata:

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}) \cdot (\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PS}) &= \\ \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PS} &= \\ \overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PR} &= 1. \end{aligned}$$

Kihasználtuk, hogy merőleges vektorok skaláris szorzata 0.

(b) Hasonlóan kapható meg egy lapátló-vektor és a testátló-vektor $(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PS})$ szorzata:

$$(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}) \cdot (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PS}) = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PR} = 2.$$

(c) A Q , R és S csúcsok olyan sorrendben legyenek megválasztva, hogy $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ és $\overrightarrow{PS}$ ebben a sorrendben jobbrendszert alkosson. Ki fogjuk használni, hogy ekkor $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PS}$. Egy élvektor és egy szomszédos lapátló-vektor vektori szorzata:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} \times (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}) &= \\ \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} &= \\ \mathbf{0} + \overrightarrow{PS} &= \overrightarrow{PS}, \end{aligned}$$

vagyis a szorzat a két vektor lapjára merőleges élvektor.

(d) Legyen a lapvektor a $\overrightarrow{PR}$, a nem szomszédos lapátló-vektor $\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PS}$. Ezek szorzata:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} \times (\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PS}) &= \\ \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PS} &= \overrightarrow{PS} - \overrightarrow{PR}, \end{aligned}$$

ami a lapátló-vektor síkjának másik lapátló-vektora.

4° Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{u}$ merőleges a $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektorokra, akkor merőleges minden lineáris kombinációjukra is.

5° Három lineárisan független vektornak hány sorrendje van? E sorrendek közül hány alkot jobb- és hány balrendszert?

Három különböző dolog (így három vektor is) hatféleképp rakható sorba. Ha az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok jobbrendszert alkotnak, akkor ugyancsak jobbrendszert alkotnak a $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{c}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektorhármak is. A további három esetben, azaz a $\mathbf{c}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}$, valamint a $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$ és az $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{b}$ hármasok esetén balrendszert kapunk. A „bizonyítás” egyelőre a kezünk három ujjáról való leolvasással történik. Később matematikai bizonyítást is adunk, lásd ???.

6° **Szögfelező.** Legyenek $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nemzérus vektorok. Mutassuk meg, hogy a $|\mathbf{b}|\mathbf{a} + |\mathbf{a}|\mathbf{b}$ vektor felezi $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ szögét!

Egyik lehetőség a megoldásra: $\|\mathbf{b}\mathbf{a}\| = \|\mathbf{a}\mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|$, ezért a parallelogramma-módszer egy rombuszra kell alkalmazni. Egy másik lehetőség: az $\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ és $\mathbf{b}/|\mathbf{b}|$ két egységvektor, így összegük szögfelező, mivel a parallelogramma-módszer rombuszt ad. E vektor $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$ -szerese ugyanúgy szögfelező, és épp ez a feladatbeli vektor.

7° **Háromszög szögfelezője.** Az előző feladat eredményét felhasználva mutassuk meg, hogy a háromszög egyik szögének szögfelezője a szemkötti oldalt a két szomszédos oldal hosszának arányában osztja fel.

Projekt: ekvivalencia reláció Egy X halmazon értelmezett *reláción* (pontosabban *bináris reláción*) az X elem-párjainak egy R halmazát értjük. Ha egy (a, b) pár benne van ebben a halmazban, azt mondjuk, hogy a az R relációban van b -vel, és úgy jelöljük, hogy $a R b$. Például, ha X az összes valaha élt ember halmaza, akkor az összes olyan (a, b) emberpár halmaza, ahol a anyja b -nek, egy reláció. Ez a köznyelvből is ismert anya-gyermek reláció. Egy matematikai példa: ha X a valósok halmaza, és R azokból az (a, b) párokból áll, melyekre a kisebb vagy egyenlő, mint b , akkor

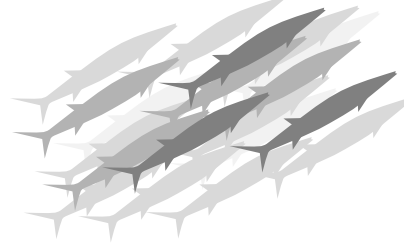
R egy reláció, melyet a valósok rendezési relációjának nevezzünk. E reláció szokásos jele $\leq$, így ha $(a, b) \in R$, akkor az $a \leq b$ jelölést használjuk.

Az X halmazon értelmezett *ekvivalencia reláció* egy olyan reláció, mely az X halmaz elemeinek egy osztályozását írja le. Ez azt jelenti, hogy ha az X halmazt páronként kizáró részhalmazok uniójára bontjuk, azaz megadjuk az X elemeinek egy *osztályozását*, vagy más szóval X egy *particionálását*, akkor létezik egy reláció, melyben az $a, b \in X$ elemek pontosan akkor vannak relációban, ha egy osztályba (partícióba) tartoznak. Az így kapott relációnak van három olyan tulajdonsága, melynek csak az ilyen módon megkapható relációk felelnek meg.

1.36. TÉTEL: EKVIVALENCIA RELÁCIÓ. Az ekvivalencia

Matematikán kívüli hasonlaltal élve: ha az irányított sza-

kasz a hal, a szabad vektor a halraj, melyet mindegyik hal ugyanúgy reprezentál (1.20. ábra).



1.20. ábra. „az irányított szakasz a hal, a vektor egy halraj”

8• Szabad vektor fogalma. Blabla

9• Vektor iránya. Blabla

1.3. Vektorok koordinátás alakban

*René Descartes (Renatus Cartesianus) (1596–1650) francia filozófus és matematikus, a modern filozófia atyja, az analitikus geometria egyik megalkotója. Filozófiáját a pusztá hitre alapozott állításokkal szemben a racionális érvelések útján kívánta fölépíteni (lásd *descartesi kételkedés* és „gondolkodom, tehát vagyok”). Orvostudományt és jogot tanult, végül hadmérnöki képesítést szerzett. Több háborúban is részt vett. 1619-ben egy Magyarországot is érintő hosszú útján egy Ulm melletti parasztházban három álmot látott, melyek megfejtése „egy csodálatos tudományhoz” vezette, ami filozófiája alapjává vált.*

A koordináták bevezetésével egyrészt új algebrai eszközökhöz jutunk a vektorok és a különféle geometriai alakzatok vizsgálatában, másrészt lehetővé válik a vektor fogalmának kiterjesztése. Így jutunk a sokdimenziós terek fogalmához, ami nélkülözhetetlen a közgazdaságtanban, az internetes keresők matematikájában, vagy véges struktúrák fölötti változatában a kódelméletben és a kriptográfiában.

Descartes-féle koordinátarendszer Descartes 1637-ben *La Géométrie* című művében egy szép ötlettel összekapcsolta a geometriát az algebraival. Alapgondolata az volt, hogy a geometria alapelemei (pl. pontok) és a valós számok/számpárok/számhármak között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés hozható létre, így bizonyos geometriai alakzatok algebrai egyenletekkel leírhatóvá és vizsgálhatóvá válnak.

Az 1.11. tétel szerint a sík bármely $\mathbf{v}$ vektora felírható két adott lineárisan független $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_2$ vektor lineáris kombinációjaként, és e felírás egyértelmű. Ha e lineáris kombináció $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2$ alakú, akkor a $\mathbf{v}$ vektorhoz a (v_1, v_2) számpárt rendeljük, amit a $\mathbf{v}$ vektor *koordinátás alakjának* nevezünk, a v_1 és v_2 skalárokat pedig a $\mathbf{v}$ *koordinátáinak* nevezzük. Azt mondjuk, hogy az $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ vektorpár e koordinátázási rendszer – egyszerűbben *koordinátarendszer* – *bázisa*, az $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_2$ vektorok a *bázisvektorok* vagy *alapvektorok*. Tetszőleges vektor koordinátáinak meghatározásához elég a bázisvektorokat ismerni.

1.37. PÉLDA: VEKTOROK KOORDINÁTÁI. Határozzuk meg az ábrán megadott vektorok – az $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_2$ vektorokra, mint bázisra vonatkozó – koordinátáit!

MEGOLDÁS. Legegyszerűbb, ha az összes vektort egyetlen pontból indítjuk. A megoldást a mellékelt ábrán szemléltetjük. ■

A koordinátarendszer a 3-dimenziós térben is hasonló módon építhető fel. Az 1.12. tétel szerint a tér bármely $\mathbf{v}$ vektora felírható három adott lineárisan független $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ és $\mathbf{e}_3$ vektor lineáris kombinációjaként, és e felírás egyértelmű. Ha e lineáris kombináció $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$ alakú, akkor a $\mathbf{v}$ vektorhoz a (v_1, v_2, v_3) számhármast rendeljük, amit a $\mathbf{v}$ vektor *koordinátás alakjának* nevezünk, a v_1 , v_2 és v_3 skalárokat pedig a $\mathbf{v}$ *koordinátáinak* nevezzük, a *bázis* pedig az $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ vektorhármast.

Sőt, a koordinátázás az 1-dimenziós térben is megvalósítható: ha e egy nemnulla vektor (tehát lineárisan független vektorrendszer!), akkor bármely vele párhuzamos $\mathbf{v}$ vektor egyértelműen felírható $\mathbf{v} = v\mathbf{e}$ alakban. E v skalár lesz a $\mathbf{v}$ koordinátás alakja (a zárójel használata itt szükségtelen). Így a $\mathbf{v} \leftrightarrow v$ hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít a vektorok és a skalárok közt.

Ha kijelölünk egy pontot az egyenesen/síkban/térben – ez lesz az origó –, akkor az egyenes/sík/tér pontjai és a helyvektorok végpontjai közti kölcsönösen egyértelmű megfeleltetéssel egyúttal a pontok is koordinátát kapnak.

1.38. PÉLDA: PONTOK KOORDINÁTÁI. Határozzuk meg az ábrán kijelölt pontok – megadott bázisvektorokra és origóra vonatkozó – koordinátáit!

MEGOLDÁS. E feladat megoldása lényegében azonos az előzőével, mint-hogy a kijelölt pontokba mutató helyvektorok megegyeznek az ott megadott vektorokkal. ■

Az origón átmenő és az alapvektorokkal párhuzamos egyeneseket itt is koordinátatengelyeknek nevezzük, az origón átmenő, és 2 tengelyt tartalmazó síkokat pedig *koordinátasíkoknak*. Ezekből is három van.

Könnyen látható, hogy a koordinátatengelyekre eső pontok 3-dimenziós koordinátás alakja $(x, 0, 0)$, $(0, y, 0)$, illetve $(0, 0, z)$ attól függően, hogy melyik tengelyről van szó. A koordinátasíkok pontjainak alakja $(x, y, 0)$, $(x, 0, z)$, illetve $(0, y, z)$. Az origóé $(0, 0, 0)$, míg az alapvektoroké $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$.

Műveletek koordinátás alakban megadott vektorokkal Legyen adva a térben egy koordinátarendszer, és abban két tetszőleges $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektor. E paragrafusban megkeressük a vektorműveletek koordinátás alakját. A kérdés tehát az, hogy hogyan kapható meg $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, $c\mathbf{u}$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ koordinátás alakja.

Mindegyik műveletnél felhasználjuk a vektoroknak a bázisvektorok lineáris kombinációjaként való előállítását. Az adott két vektor összege

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + \mathbf{v} &= (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) \\ &= (u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3) + (v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3) \\ &= (u_1 + v_1)\mathbf{e}_1 + (u_2 + v_2)\mathbf{e}_2 + (u_3 + v_3)\mathbf{e}_3 \\ &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3).\end{aligned}$$

Hasonló képlet adódik a különbségre

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = (u_1, u_2, u_3) - (v_1, v_2, v_3) = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3).$$

A skalárral való szorzás is a koordinátánként való végrahajtás lehetőségét mutatja:

$$\begin{aligned}c\mathbf{u} &= c(u_1, u_2, u_3) = c(u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3) \\ &= cu_1\mathbf{e}_1 + cu_2\mathbf{e}_2 + cu_3\mathbf{e}_3 \\ &= (cu_1, cu_2, cu_3).\end{aligned}$$

Összefoglalva tehát a következő állítást kapjuk:

1.39. ÁLLÍTÁS: VEKTORMŰVELETEK KOORDINÁTÁS ALAKJA. Adva van a térben egy koordinátarendszer, és abban két tetszőleges $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektor, valamint egy tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ valós szám. Ekkor a vektorok összegének, különbségének és skalárszorosának koordinátás alakja rendre

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + \mathbf{v} &= (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3), \\ \mathbf{u} - \mathbf{v} &= (u_1, u_2, u_3) - (v_1, v_2, v_3) = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3), \\ c\mathbf{u} &= c(u_1, u_2, u_3) = (cu_1, cu_2, cu_3).\end{aligned}$$

Az áttekinthetőbb oszlopvektor jelölést használva

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \\ u_3 - v_3 \end{bmatrix}, \quad c \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cu_1 \\ cu_2 \\ cu_3 \end{bmatrix}.$$

A síkbeli vektorokra hasonló állítások igazak, csak két koordinátával. Érdekesebb a helyzet a skaláris szorzással. Kezdjük két síkbeli vektorral.

1.40. PÉLDA: SKALÁRIS SZORZÁS KOORDINÁTARENDSZERBEN. Tekintsünk egy olyan síkbeli koordinátarendszert, ahol az első alapvektor hossza 1, a másodiké 2, és a kettőjük közti szög $\pi/3$. Számítsuk ki az $\mathbf{a} = (1, 1)$ és a $\mathbf{b} = (-5/2, 1)$ vektorok skaláris szorzatát.

MEGOLDÁS. Az alapvektorok hosszát és szögét ismerve ki tudjuk számítani az alapvektorok skaláris szorzatait:

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1, \quad \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 2^2 = 4, \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 1 \cdot 2 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 1.$$

Ezt fölhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \cdot \left(-\frac{5}{2}\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\right) \\ &= -\frac{5}{2}\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \left(1 - \frac{5}{2}\right)\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 \\ &= -\frac{5}{2} - \frac{3}{2} + 4 \\ &= 0,\end{aligned}$$

tehát a két vektor merőleges egymásra.

Érdekesként meghatározzuk e koordináta-rendszerben a skaláris szorzás általános képletét:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2) \cdot (v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2) \\ &= u_1v_1\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + (u_1v_2 + u_2v_1)\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + u_2v_2\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 \\ &= u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + 4u_2v_2.\end{aligned}$$

Ebből látható, hogy a skaláris szorzat koordinátás alakja függ a koordináta-rendszer-től is. ■

A derékszögű koordináta-rendszer A természeti törvények különös fontosságot adnak az egymásra merőleges irányoknak, ezért például igen gyakran érdemes olyan koordináta-rendszert választani, amelyben az alapvektorok merőlegesek, más szóval *ortogonálisak* egymásra. A bázisvektorok szöge mellett azok hosszát is érdemes standardizálni, nevezetesen egységnyi hosszúnak választani, így mindegyik koordináta egyúttal távolságot is jelent. Az egységvektorokból álló ortogonális bázist *ortonormálnak* nevezzük.

Az egységes tárgyalás érdekében a bázisvektorok körüljárását is előírhatjuk: általánosan elterjedt szokás a jobbrendszer választani. Az így konstruált bázis vektorait síkban $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, térben $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$ jelöli.

A két és háromdimenziós térben a skaláris szorzat egyszerű alakot ölt, ha a koordináta-rendszer derékszögű.

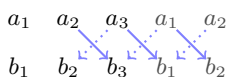
1.41. ÁLLÍTÁS: SKALÁRIS SZORZAT DERÉKSZÖGŰ KOORDINÁTARENDSZERBEN. A síkbeli $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, illetve a térbeli $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektorok skaláris szorzata derékszögű koordináta-rendszerben

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2, \text{ illetve } \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

BIZONYÍTÁS. A síkbeli esetben kihasználjuk, hogy $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1$ és $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}) \cdot (v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}) \\ &= u_1v_1\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + (u_1v_2 + u_2v_1)\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + u_2v_2\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} \\ &= u_1v_1 + u_2v_2\end{aligned}$$

A térbeli eset hasonlóan bizonyítható. ■



1.21. ábra. A vektori szorzat kiszámítása a két vektor koordinátáiból: írjuk a két vektort egymás alá, majd az első két koordinátát másoljuk a vektorok végére, végül az X alakba rakott nyílpároknál a $\searrow$ nyíl végein lévő számok szorzatából vonjuk ki a $\swarrow$ szerinti

1.42. ÁLLÍTÁS: VEKTORI SZORZAT DERÉKSZÖGŰ KOORDINÁTARENDSZERBEN. A térbeli $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektorok vektori szorzata derékszögű koordináta-rendszerben

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

BIZONYÍTÁS. Az alapvektorok egymással való vektori szorzatait már kiszámoltuk az 1.29. példában. Kihasználva, hogy $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$, ..., kapjuk hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \\ &= a_2b_3\mathbf{j} \times \mathbf{k} + a_3b_2\mathbf{k} \times \mathbf{j} + a_3b_1\mathbf{k} \times \mathbf{i} + a_1b_3\mathbf{i} \times \mathbf{k} + a_1b_2\mathbf{i} \times \mathbf{j} + a_2b_1\mathbf{j} \times \mathbf{i} \\ &= a_2b_3\mathbf{i} - a_3b_2\mathbf{i} + a_3b_1\mathbf{j} - a_1b_3\mathbf{j} + a_1b_2\mathbf{k} - a_2b_1\mathbf{k} \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1). \end{aligned}$$

1.43. PÉLDA: PARALLELOGRAMMA TERÜLETE. Mutassuk meg, hogy az (a, b) és a (c, d) vektorok által kifeszített parallelogramma területe

$$|ad - bc|.$$

Mi a jelentése az $ad - bc$ előjelének?

MEGOLDÁS. Két 3-dimenziós vektor által kifeszített parallelogramma területe a vektori szorzatuk abszolút értéke. Ággyazzuk be a megadott két vektort a tér egyik koordinátságjába, tekintsük például az $(a, b, 0)$ és a $(c, d, 0)$ vektorokat. Vektori szorzatuk

$$(a, b, 0) \times (c, d, 0) = (0, 0, ad - bc),$$

ennek abszolút értéke $|ad - bc|$.

Mivel az $(a, b, 0)$, $(c, d, 0)$ és $(0, 0, ad - bc)$ vektorok jobbrendszert alkotnak, ezért $ad - bc$ pontosan akkor pozitív, ha a síkban az (a, b) és a (c, d) vektorok jobbrendszert alkotnak, és $ad - bc$ pontosan akkor negatív, ha az (a, b) és a (c, d) vektorok balrendszert alkotnak (gondoljuk meg!). ■

Az $\mathbb{R}^n$ halmaz Láttuk, hogy 2-dimenziós, illetve 3-dimenziós vektorjellegű mennyiségek leírhatók egy rendezett számpárral, illetve számhármassal. Izgalmas a fordított helyzet, amikor legalább 4, de akár több millió szorosan összefüggő adatból képzett, rendezett szám- n -essel dolgozunk. Vajon értelmes dolog-e e szám- n -eket egy n -dimenziós tér vektorainak, vagy pontjainak tekinteni? És van-e értelme a 2- és 3-dimenziós térben használt fogalmak általánosításának n dimenzióra? A válasz mindegyik kérdésre határozott igen, amit a fizika 4-dimenziós tér-idő fogalma, szám-talan gazdasági, vagy internettel kapcsolatos probléma megoldása fényesen bizonyít.

Egy tetszőleges H halmaz elemeiből képzett rendezett elem- n -esek halmazát H^n -nel jelöljük.

Például ha $H = \{0, 1\}$, akkor

$$H^3 = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\},$$

vagyis H^3 a H elemeiből képzett rendezett elemhármassok halmaza. Eszerint a sík pontjait és vektorait $\mathbb{R}^2$, a térét $\mathbb{R}^3$ elemeivel koordinátáztuk.

A fenti jelölésnek megfelelően $\mathbb{R}^n$ a valós számokból képzett rendezett szám- n -esek halmazát jelöli. Így pl. mondhatjuk azt, hogy az $(1, 3, 0, 9, 5)$ számötös eleme az $\mathbb{R}^5$ halmaznak. Később $\mathbb{R}^n$ elemein vektorműveleteket fogunk bevezetni, és $\mathbb{R}^n$ -ről, mint vektortérrel fogunk beszélni. Hasonlóképp fogjuk $\mathbb{R}^n$ -t geometriai vagy ponttérnek tekinteni, ha elemeire, mint pontokra fogunk gondolni, és köztük geometriai műveleteket fogunk végezni. E sokféleség sosem fog gondot okozni: $\mathbb{R}^n$ szerepét mindig az fogja meghatározni, hogy mit teszünk elemeivel, vagyis a szám- n -esekkel.

Az $\mathbb{R}^n$ megismerésében az *analógia* fonalán haladunk, a 2- és 3-dimenziós tér fogalmait fogjuk átvinni, általánosítani n dimenzióra. Ez az analógia fog segíteni abban, hogy magabiztosan érezzük magunkat n dimenzióban is, akkor is, ha ott „nem látunk olyan jól”, mint 3 dimenzióban. Bevezető példaként az analógiára – képernyővédők kedvenc témáját – egy 4-dimenziós kocka 2-dimenziós vetületét mutatjuk az 1.22. ábrán.

Műveletek $\mathbb{R}^n$ vektoraival ???

1.44. TÉTEL: VEKTORMŰVELETEK TULAJDONSÁGAI. asdf asdf asdf

Távolság és szög $\mathbb{R}^n$ -ben Adva van két adatsor: $x_1, x_2, \dots, x_n$ és $y_1, y_2, \dots, y_n$. Átlagukat jelölje $\bar{x}$, illetve $\bar{y}$, azaz

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}.$$

Az r -rel jelölt ún. *korrelációs együttható* azt méri, hogy a két adatsor közti lineáris kapcsolat milyen erős. Az erre használt képlet a következő:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}.$$

Vajon pontosan mit mér r ? Az eddig tanultak szemléletes, könnyen érthető választ adnak.

Tegyük fel, hogy a két adatsor közt fennáll az $y_i = cx_i + d$ lineáris összefüggés minden $i = 1, 2, \dots, n$ indexre valamely c, d konstansokkal. Ha mindkét adatsorból levonjuk az átlagukat (a két adatsort normáljuk), akkor az így kapott

$$a_i = x_i - \bar{x}, \quad b_i = y_i - \bar{y} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

adatsorokra igaz a $b_i = ca_i$ összefüggés. (Ugyanis $\bar{y} = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^n cx_i + d) = c\bar{x} + d$, amiből $y - \bar{y} = cx_i + d - c\bar{x} - d = c(x_i - \bar{x})$.)

Tehát, az adatsorokat n -dimenziós vektorokba foglalva az $\mathbf{y} = \mathbf{c}\mathbf{x} + d$ lineáris kapcsolat pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{b} = \mathbf{c}\mathbf{a}$, azaz ha a normált vektorok kollineárisak. A korrelációs együttható nem más, mint e két vektor szögének koszinusza, ugyanis

$$\begin{aligned} \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle} &= \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = r. \end{aligned}$$

Valóban, a két vektor szögének koszinusza pontosan akkor 1, ha a vektorok szöge 0, és akkor -1 , ha a szög π . A korreláció tehát -1 és 1 közt változik, és abszolút értéke annál kisebb, minél nagyobb az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok hajlásszöge, azaz minél kevésbé kollineárisak.

Ha $r = 0$, akkor $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ merőlegesek, ekkor lineáris kapcsolat nincs az eredeti két mennyiség közt (más kapcsolat még lehet, nem feltétlenül független a két adatsor egymástól).

Bit: az angol *binary digit* kifejezésből képzett szó, ami magyarul bináris, azaz kettes számrendszerbeli számot jelent. A szoftver (software) szót is megalkotó John W. Tukey ötlete.

Bitvektorok A modern számítógépek memóriájában vagy háttértárolóin az adatok tárolásának legkisebb egysége a bit. Egy bittel két állapot tárolható, melyeket a 0 és 1 számokkal jelölünk, de amelyek több mindent is reprezentálhatnak: hamis/igaz, nem/igen, ki/be, ... A biteket a hardver lehetőségei és a feladat igényei szerint csoportokba, sorozatokba, vektorokba gyűjtik, melyekkel különféle műveletek végezhetők. Ezek attól is függenek, hogy a bitvektorok milyen adatokat kódolnak. E műveletek közül minket azok fognak érdekelni, melyek algebrailag a korábban megismert vektorműveletekre hasonlítanak. Később látni fogjuk, hogy itt többről van szó, mint véletlen hasonlóságról.

A bitvektorok jelölése a számítástechnikában leginkább a biteket jelölő számjegyek egyszerű egymás mellé írásával történik, vagyis pl. 01110101 a $(0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1)$ vektort jelöli. Mi mindkét jelölést használni fogjuk.

Kódvektorok, kódok Az információ tárolásához, továbbításához szükség van kódolásra, gyakran egymás után több különböző kódolási eljárás alkalmazására is. Például ha valaki egy gondolatát leírja egy papírra, majd onnan begépel egy számítógépbe és egy adott formátumban elmenti, egy tömörítő programmal összetömöríti, egy titkosító szoftverrel titkosítja, végül egy biztonságos internetes csatornán továbbküldi valakinek, hat kódolási lépést hajthatott végre.

A kódoláshoz mi a továbbiakban mindig egy rögzített, véges kódábécét használunk, amelynek betűi általában a 0-tól $n - 1$ -ig terjedő egészek lesznek. Az ábécé „betűiből”, azaz elemeiből képzett vektorokat *kódvektoroknak* vagy *kódszavaknak* nevezzük. A bitvektorok is kódvektorok, ahol a kódábécé a kételemű $\{0, 1\}$ halmaz.

A kódvektorok koordinátáinak számát, vagyis a kódvektor dimenzióját a kód *hosszának* nevezzük. Ez természetesen nem analóg fogalom a vektor abszolút értékével.

A személyi szám egy olyan kódvektorra példa, melynek hossza 11, az ábécé pedig a 10-elemű $\{0, 1, \dots, 9\}$ halmaz. Nem minden 11-hosszú decimális kódvektor érvényes személyi szám, vagyis a személyi számok a 11-hosszú kódvektorok halmazának egy részhalmazát alkotják. Az ilyen részhalmazokat nevezzük kódnak.

1.45. DEFINÍCIÓ: KÓD. A *kód* azonos ábécéből képzett azonos hosszúságú kódszavak egy halmaza. *Kódolás* az a folyamat, amikor az üzenet-höz kódszavakat rendelünk, *dekódolás* az ellenkező irányú folyamat.

1.46. PÉLDA: BCD-KÓD. Decimális számok egyik szokásos kódolása a BCD (Binary Coded Decimal), mely a számok kódolására a kettes számrendszerbe való átírás helyett a számjegyenként való kódolást választja. Több változata is van, a legegyszerűbbikben egy-egy számjegynek 4-4 bit felel meg, így a 16 lehetséges 4-hosszú kódszó helyett csak tízet használ: a 0, 1, ..., 9 jegyek kódja rendre 0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111, 1000, 1001. Például az 561 BCD-kódja három kódvektorból áll: 0101 0110 0001. (Kettes számrendszerbeli alakja 1000110001.)

Vektorműveletek $\mathbb{Z}_m^n$ -ben A korábban bevezetett jelölések szerint $\mathbb{Z}_m^n$ a $\mathbb{Z}_m$ -beli n -hosszú vektorokból áll. E vektorok összeadása, skalárral való szorzása és skaláris szorzása a $\mathbb{Z}_m$ -beli műveletekkel az $\mathbb{R}^n$ -beli vektorműveletekhez hasonlóan végezhető el. Ennek következtében a lineáris kombináció, lineáris függetlenség itt is ugyanúgy definiálható és használható.

1.47. PÉLDA: LINEÁRIS KOMBINÁCIÓ $\mathbb{Z}_m^n$ -BEN. Számítsuk ki a $\mathbb{Z}_2^5$ -beli

$$\mathbf{a} = (1, 0, 0, 1, 1, 0), \mathbf{b} = (0, 1, 0, 1, 0, 1) \text{ és } \mathbf{c} = (0, 0, 1, 0, 1, 1)$$

vektorok összes lineáris kombinációját $\mathbb{Z}_2$ -beli együtthatókkal, valamint a $\mathbb{Z}_3^3$ -beli

$$\mathbf{u} = (1, 1, 0) \text{ és } \mathbf{v} = (0, 1, 1)$$

vektorok összes lineáris kombinációját $\mathbb{Z}_3$ -beli együtthatókkal.

1.23. táblázat. Vektorok lineáris kombinációi (a) $\mathbb{Z}_2$ és (b) $\mathbb{Z}_3$ fölött.

$x \ y \ z$	$x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$	$x \ y$	$x\mathbf{u} + y\mathbf{v}$
0 0 0	(0, 0, 0, 0, 0, 0)	0 0	(0, 0, 0)
1 0 0	(1, 0, 0, 1, 1, 0)	1 0	(1, 1, 0)
0 1 0	(0, 1, 0, 1, 0, 1)	2 0	(2, 2, 0)
0 0 1	(0, 0, 1, 0, 1, 1)	0 1	(0, 1, 1)
1 1 0	(1, 1, 0, 0, 1, 1)	1 1	(1, 2, 1)
1 0 1	(1, 0, 1, 1, 0, 1)	2 1	(2, 0, 1)
0 1 1	(0, 1, 1, 1, 1, 0)	0 2	(0, 2, 2)
1 1 1	(1, 1, 1, 0, 0, 0)	1 2	(1, 0, 2)
		2 2	(2, 1, 2)

MEGOLDÁS. A lehetséges $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$ alakú lineáris kombinációk száma 8, hisz $x, y, z \in \mathbb{Z}_2$, vagyis mindegyik együtthatónak 0 vagy 1 az értéke, és ez $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ eshetőség. Az $x = y = z = 0$ eset a zérusvektort adja. Ha x, y és z közül csak egyikük értéke 1, a többi 0, akkor a három adott vektort kapjuk vissza. Azok az esetek maradnak, amikor legalább két vektort kell összeadni. Például $1\mathbf{a} + 1\mathbf{b} + 0\mathbf{c} = (1, 0, 0, 1, 1, 0) + (0, 1, 0, 1, 0, 1) = (1, 1, 0, 0, 1, 1)$. Az összes lineáris kombináció az 1.23. (a) táblázatban látható.

Az $x\mathbf{u} + y\mathbf{v}$ alakú lineáris kombinációk száma 9, mivel $x, y \in \mathbb{Z}_3$, azaz lehetséges értékük 0, 1 vagy 2, ami $3 \cdot 3 = 9$ lehetőséget ad. Példaként egy

lineáris kombináció, a többi az 1.23. (b) táblázatban látható: $2\mathbf{u} + \mathbf{v} = 2(1, 1, 0) + (0, 1, 1) = (2, 2, 0) + (0, 1, 1) = (2, 0, 1)$. ■

E paragrafus további részében a vektorműveletekre két alkalmazást mutatunk.

1.48. PÉLDA: ONE TIME PAD – A TÖKÉLETES TITKOSÍTÁS. Tegyük fel, hogy az üzenet küldése előtt a küldő és a fogadó megegyezett egy titkos kulcsban, mely egy olyan hosszú véletlen bitvektor, mint amilyen az üzenet legfölbjebb lehet. Legyen a kulcs $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_2^m$. Legyen a titkosítandó üzenet $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}_2^m$. A titkosítás egyszerűen annyi, hogy küldő kiszámolja az $\mathbf{u} + \mathbf{k}$ vektort, és azt küldi a fogadónak, aki a titkosított üzenethez maga is hozzáadja a kulcsot, és mivel bármely $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_2^m$ vektorra $\mathbf{x} + \mathbf{x} = \mathbf{0}$, ezért $(\mathbf{u} + \mathbf{k}) + \mathbf{k} = \mathbf{u} + (\mathbf{k} + \mathbf{k}) = \mathbf{u}$, vagyis a fogadó így valóban megfejti az üzenetet. Példaként egy üzenet, egy kulcs és a kettő összege a tömör bitvektor-jelöléssel:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= 010101010000111111111111 \\ \mathbf{k} &= 001011000101101001011010, \text{ ekkor} \\ \mathbf{u} + \mathbf{k} &= 011110010101010110100101\end{aligned}$$

E titkosítás hátránya, hogy a $\mathbf{k}$ kulcs csak egyszer használható fel, mert két különböző $\mathbf{u}_1 + \mathbf{k}$ és $\mathbf{u}_2 + \mathbf{k}$ üzenetet elcsípvé és összeadva az $(\mathbf{u}_1 + \mathbf{k}) + (\mathbf{u}_2 + \mathbf{k}) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ vektorban már nem szerepel $\mathbf{k}$, és ez statisztikai módszerekkel már megfejthető.

A kódelmélet egyik célja, hogy redundáns információ hozzáadásával elérje az elküldött üzenet megérkezését zajos, veszteséges csatornán keresztül is. Ennek két gyakran alkalmazott típusa a hibajelző és a hibajavító kód: az előbbi az átvitel során bekövetkezett bizonyos hibákat jelez a fogadó számára, míg az utóbbi bizonyos hibák kijavítását is lehetővé teszi. Az 1.47. példában előállított lineáris kombinációk hibajelző kódok, egyikük hibajavító is. Az 1.3.1. feladat arra kérdez, hogy milyen hibát jeleznek, illetve javítanak.

Az elektronikus számítógépek adatkezelésének egyik első ötlete az adattárolás vagy továbbítás biztonságosabbá tételére a paritásbit. Ha egy n -hosszú $\mathbf{b}$ bitvektorhoz még egy bitet csatolunk, melynek értéke 1, ha $\mathbf{b}$ -ben páratlan sok bit egyenlő 1-gyel, egyébként 0, akkor olyan $(n+1)$ -hosszú vektort kapunk, melyben páros sok 1-esnek kell lenni. Ha egy bit elromlik, páratlan sok 1-es lesz, tehát ez az $(n+1)$ -edik bit hibajelző. Ezt nevezzük *paritásbitnek*.

1.49. PÉLDA: PARITÁSBIT. Írjuk fel a paritásbitet skaláris szorzatként, és döntsük el, mely vektorokra igaz, hogy minden bitjük a vektor maradék részének paritásbitje.

MEGOLDÁS. A paritásbit $\mathbb{Z}_2$ fölött $\mathbf{1} \cdot \mathbf{b}$ alakba írható, ahol $\mathbf{1}$ a $\mathbf{b}$ -vel azonos hosszúságú és csupa 1-esből álló vektor.

Minden olyan vektor, amelyben páros sok 1-es van, eleget tesz a feladatbeli feltételnek, a többi nem. ■

A paritásbit általánosítása az ún. *ellenőrző összeg*, melyre számtalan példát találunk a mindennapi életben.

A magyar személyi szám a személyre jellemző 10 jegyből, és az azt követő e ellenőrző összegből áll. Az e kiszámítási képlete

$$\mathbb{Z}_{11}\text{-ben számolva: } e = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10) \cdot \mathbf{u},$$

ahol $\mathbf{u}$ a személyi szám első 10 jegye. A személyi szám 8-10-edik jegye úgy van kiválasztva, hogy $e \neq 10$, így az ellenőrző összeg egyjegyű. 2007 előtt egy hasonló képlettel számolták a könyvek ún. ISBN-10 kódjának ellenőrző jegyét, ami ha 10 volt, X-et írtak (római 10-es).

ISBN 978-963-545-398-6



9 789635 453986 >

A termékek EAN-kódja (European Article Number) egy 13-jegyű, a termék azonosítására szolgáló kód, melyhez egy vonalkód is tartozik. A 13-dik jegy az ellenőrző összeg. Ha az EAN kódvektort $\mathbf{v}$ jelöli, akkor fönn kell állni

$$\mathbb{Z}_{10}\text{-ben számolva az } (1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1) \cdot \mathbf{v} = 0$$

összefüggésnek. E képlet az ellenőrző összeg meghatározására is használható. 2007 óta a könyvek ISBN-száma (ISBN-13) megegyezik EAN-kódjával (1.24. ábra).

1.50. PÉLDA: ELLENŐRZŐ ÖSSZEG. Csak az ellenőrző összeget nézve érvényes személyi szám-e a 26012310018, és érvényes EAN-kód-e a 9998887776665?

MEGOLDÁS. Ez a személyi szám érvényes, mert

$$\begin{aligned} & (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10) \cdot (2, 6, 0, 1, 2, 3, 1, 0, 0, 1) = \\ & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 9 \cdot 0 + 10 \cdot 1 \bmod 11 = \\ & 63 \bmod 11 = 8. \end{aligned}$$

Ez az EAN-kód nem érvényes, mert

$$\begin{aligned} & (1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1) \cdot (9, 9, 9, 8, 8, 8, 7, 7, 7, 6, 6, 6, 5) = \\ & (9 + 3 \cdot 9 + 9 + 3 \cdot 8 + 8 + 3 \cdot 8 + 7 + 3 \cdot 7 + 7 + 3 \cdot 6 + 6 + 3 \cdot 6 + 5) \bmod 10 = \\ & 183 \bmod 10 = 3 \neq 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

1[▲] Az 1.23. (a) táblázatban egy 8 bináris kódszóból, a radék részének paritásbitje.

(b) táblázatban egy 9 kódszóból álló ternér kód kód-szavai vannak felsorolva.

2[•] Mely vektorokra igaz, hogy minden bitjük a vektor ma-

Minden olyan vektor, amelyben páros sok 1-es van, eleget tesz a feladatbeli feltételnek, a többi nem.

1.4. Egyenes és sík vektoregyenletei

A sík és tér pontjainak és vektorainak koordinátáit használva lehetővé válik geometriai alakzatok algebrai vizsgálata, vagy algebrai problémák jobb megértése geometriai szemléltetéssel.

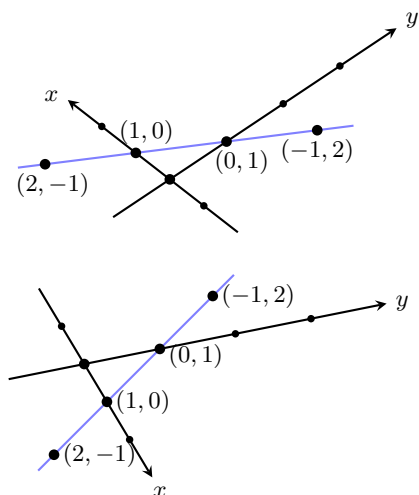
Alakzatok és egyenletek

1.51. PÉLDA: AZ $x + y = 1$ EGYENLET. Egy tetszőleges síkbeli koordinátarendszerben ábrázoljunk néhány pontot, melynek koordinátái kielégítik az $x + y = 1$ egyenletet. Fogalmazzunk meg sejtést az egyenlet összes megoldásának megfelelő pontok halmazáról!

MEGOLDÁS. Az alábbi ábrán két különböző koordinátarendszert ábrázolunk, és azokban a fenti egyenletet kielégítő pontok közül néhányat. Ennek alapján azt sejtethetjük, hogy az $x + y = 1$ egyenletet kielégítő pontok egy egyenesen vannak. Ezt az egyenest is berajzoltuk. A sejtést hamarosan bizonyítjuk. ■

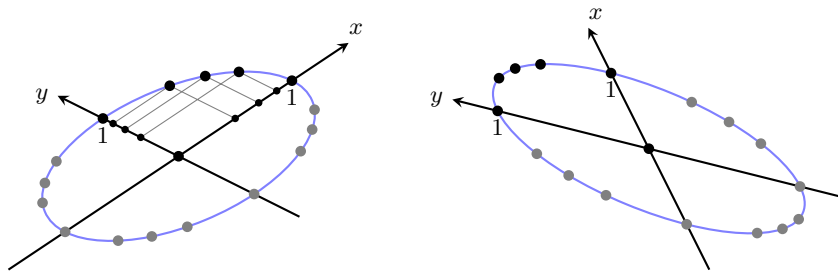
1.52. PÉLDA: AZ $x^2 + y^2 = 1$ EGYENLET. Egy tetszőleges síkbeli koordinátarendszerben ábrázoljunk néhány pontot, melynek koordinátái kielégítik az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletet. Fogalmazzunk meg sejtést az egyenlet összes megoldásának megfelelő pontok halmazáról!

MEGOLDÁS. Az alábbi ábrán néhány koordinátarendszert ábrázoltunk, az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletet kielégítő néhány ponttal. A ??? fejezetben visszatérünk e feladatra, és meg fogjuk mutatni, hogy az egyenletet kielégítő pontok egy ellipszisen vannak.



1.25. ábra. Az $x + y = 1$ egyenletet kielégítő néhány pont két különböző koordinátarendszerben.

A latin eredetű *implicit* szó jelentése *nem kifejtett, rejtett*, ami az összeköt, összekever, körülcsavar jelentésű *implico* (implicō) szó származéka. E szó a matematikában az implicit alak, implicit függvény, stb. kifejezésekben arra utal, hogy valamely fontosnak tekintett mennyiség, változó, stb. nincs kifejezve a képletből. Ugyanennek a szónak a származéka a magába foglal, maga után von jelentésű *implikál* szó is, mely a matematikai logika „ha..., akkor...” szerkezetű műveletével, az *implikációval* is kapcsolatban van.



1.26. ábra. Az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletet kielégítő (x, y) pontok halmaza két koordinátarendszerben.

1.53. DEFINÍCIÓ: ALAKZAT (IMPLICIT) EGYENLETRENDSZERE. Egy geometriai alakzat egy adott koordinátarendszerre vonatkozó (*implicit*) *egyenletrendszerén* olyan egyenletrendszert értünk, melynek egyszerre minden egyenletét kielégítik a térnek az alakzathoz tartozó pontjai, de más pontok nem. Ha az egyenletrendszer egy egyenletből áll, az alakzat *egyenletéről* beszélünk. Az egyenletet *vektoregyenletnek* nevezzük, ha nem a pontok koordinátáira, hanem a pontokba mutató vektorokra írjuk fel. Egy alakzat m egyenletből álló egyenletrendszerének, illetve m vektoregyenletből álló egyenletrendszerének általános alakja

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad \text{illetve} \quad \begin{cases} F_1(\mathbf{r}) = 0 \\ F_2(\mathbf{r}) = 0 \\ \vdots \\ F_m(\mathbf{r}) = 0 \end{cases}$$

ahol $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ a tér egy pontja, és $\mathbf{r}$ az oda mutató vektor.

Középiskolai tanulmányainkban több példát láttunk alakzat egyenletére, például tudjuk, hogy a síkban a koordinátatengelyek szögét felező egyenes egyenlete $y = x$, azaz $x - y = 0$. Ortonormált bázist választva az origó középső egységsugarú kör egyenlete $x^2 + y^2 = 1$. Az előző két egyenlet mindegyikéből *kifejezhető* a két koordináta egy paraméter bevezetésével. Az $y = x$ egyenlet ekvivalens az

$$\begin{aligned}x &= t \\ y &= t\end{aligned}$$

egyenletrendszerrel, míg az $x^2 + y^2 = 1$ egyenlet ekvivalens az

$$\begin{aligned}x &= \cos t \\ y &= \sin t\end{aligned}$$

egyenlettel. Mindkettő átírható vektoralakba is. Használjuk a oszlopvektoros jelölést:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{illetve} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi) \subseteq \mathbb{R}.$$

E két példa vezet a következő általános fogalomhoz.

1.54. DEFINÍCIÓ: ALAKZAT (EXPLICIT) EGYENLETRENDSZERE. Egy geometriai alakzat egy adott koordinátarendszerre vonatkozó (*explicit*) *egyenletrendszerén* olyan egyenletrendszert értünk, melyben az egyenletek bal oldalán a pontok koordinátáit megadó változók, jobb oldalán adott paraméterek függvényei szerepelnek. Általános alakja

$$\begin{aligned}x_1 &= f_1(t_1, t_2, \dots, t_k) \\ x_2 &= f_2(t_1, t_2, \dots, t_k) \\ &\vdots \\ x_n &= f_n(t_1, t_2, \dots, t_k)\end{aligned}$$

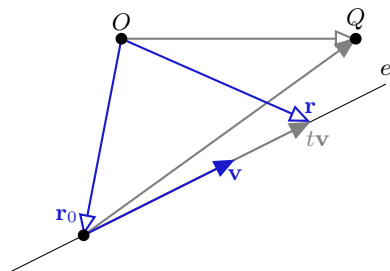
ahol $t_1 \in I_1, t_2 \in I_2, \dots, t_n \in I_n$, és $I_1, \dots, I_n \subseteq \mathbb{R}$. Az ilyen egyenletrendszer egyetlen vektoregyenletté fogható össze:

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}(t_1, t_2, \dots, t_k),$$

ahol $\mathbf{f}$ egy $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény. Az explicit egyenletrendszereket szokás *paraméteres egyenletrendszernek* is nevezni.

A következő paragrafusokban egyenes és sík különböző egyenleteit, egyenletrendszereit fogjuk áttekinteni példákat adva a fenti két általános definícióra.

Síkbeli egyenes egyenletei Tekintsük a sík egy tetszőleges e egyenesét, és jelöljük ki a síkban az O origót. Legyen a nemzérus $\mathbf{v}$ egy tetszőleges, az egyenessel párhuzamos vektor. Az ilyen vektorokat az egyenes *irányvektorának* nevezzük. Mutasson $\mathbf{r}_0$ az egyenes egy tetszőleges, kijelölt pontjába. Világos, hogy az e egyenes bármely pontjába mutató $\mathbf{r}$ vektor előáll $\mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ alakban, ahol t valós szám. Másrészt ha Q a sík egy tetszőleges, nem az e egyenesre eső pontja, akkor az $\overrightarrow{OQ} - \mathbf{r}_0$ vektor nem párhuzamos $\mathbf{v}$ -vel, tehát nem is konstansszoros, azaz $\overrightarrow{OQ} - \mathbf{r}_0 \neq t\mathbf{v}$ semmilyen t -re sem, így $\overrightarrow{OQ}$ nem áll elő $\mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ alakban. Tehát az e tetszőleges pontjába mutató $\mathbf{r}$ vektor felírható $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ alakban, és ez csak e pontjaira igaz.



1.27. ábra. Egyenes explicit vektor-

1.55. ÁLLÍTÁS: SÍKBELI EGYENES EXPLICIT VEKTOREGYENLETE. A sík minden egyenesének van

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} \quad (1.3)$$

alakú vektoregyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy egyenes egyenlete, ahol $\mathbf{v}$ az egyenes egy irányvektora, és $\mathbf{r}_0$ az egyenes egy tetszőleges, de rögzített pontjába mutató vektor.

A síkbeli egyenesre merőleges vektorokat az egyenes *normálvektorainak* nevezzük. Legyen $\mathbf{n}$ egy tetszőleges, a $\mathbf{v}$ -re merőleges vektor, azaz legyen $\mathbf{n}$ az e egy normálvektora. Azt, hogy $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ az e tetszőleges pontjába mutató $\mathbf{r}$ vektorra párhuzamos $\mathbf{v}$ -vel, úgy is kifejezhetjük, hogy $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ merőleges $\mathbf{n}$ -re. A merőlegesség pedig kifejezhető a skaláris szorzattal. Így az egyenes egy implicit vektoregyenletéhez jutunk: $\mathbf{r}$ pontosan akkor mutat az e egy pontjába, ha $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$. Ez az egyenlet átrendezés után $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0$ alakra, majd a $C = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0$ jelölés bevezetésével $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = C$ alakra hozható.

1.56. ÁLLÍTÁS: SÍKBELI EGYENES IMPLICIT VEKTOREGYENLETE. A sík minden egyenesének van

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0, \quad (1.4)$$

és vele ekvivalens

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = C \quad (1.5)$$

alakú vektoregyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy egyenes egyenlete, ahol $\mathbf{n}$ az egyenes egy normálvektora, $\mathbf{r}_0$ az egyenes egy tetszőleges, de rögzített pontjába mutató vektor és C konstans.

Az (1.4) alakú egyenlet könnyen átírható (1.5) alakúvá a $C = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0$ jelöléssel. Az átalakítás fordított irányban is egyszerű, hisz ha $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = C$, akkor találunk olyan $\mathbf{r}_0$ vektort, melyre $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0 = C$. Ez azért igaz, mert ha tetszőleges $\mathbf{n}$ -re nem merőleges $\mathbf{v}$ vektorra $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = D$, akkor $\mathbf{n} \cdot (\frac{C}{D}\mathbf{v}) = C$, így az $\mathbf{r}_0 = \frac{C}{D}\mathbf{v}$ megfelel.

Az $\mathbf{r} = (x, y)$, $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0)$ és $\mathbf{v} = (a, b)$ jelöléseket használva az explicit vektoregyenlet azonnal egyenletrendszerre alakítható.

1.57. ÁLLÍTÁS: SÍKBELI EGYENES EXPLICIT EGYENLETRENDSZERE. A sík minden egyenesének van

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \end{aligned} \quad (1.6)$$

alakú egyenletrendszere, ahol (a, b) az egyenes egy irányvektora, és (x_0, y_0) az egyenes egy tetszőleges rögzített pontja.

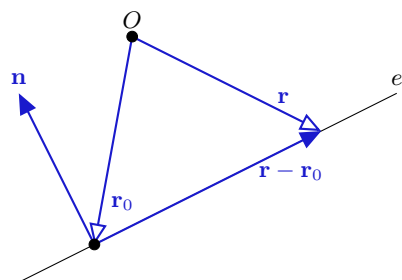
A következőkben megmutatjuk, hogy az explicit egyenletrendszerből a t paraméter kiküszöbölhető, és így egy implicit egyenletet kapunk.

1.58. ÁLLÍTÁS: SÍKBELI EGYENES (IMPLICIT) EGYENLETE. A sík minden egyenesének van

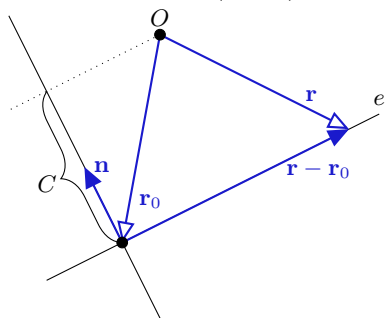
$$Ax + By = C \quad (1.7)$$

alakú egyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy egyenes egyenlete, ahol A és B közül nem mindkettő nulla, és $(-B, A)$ az egyenes egy irányvektora.

A bizonyítás előtt érdemes megjegyezni, hogy az egyenes fenti implicit egyenlete az egyenes $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$ alakú vektoregyenletéből azonnal megkapható, de ezt egyelőre csak *ortonormált* koordináta-rendszerben tudjuk könnyen igazolni. Legyen $(A, B) = (b, -a)$. Ez az egyenes egy normálvektora, hisz merőleges az (a, b) irányvektorra. Továbbá



1.28. ábra. Síkbeli egyenes implicit vektoregyenlete: $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$.



1.29. ábra. Síkbeli egyenes (implicit) vektoregyenlete: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = C$. Ha $\mathbf{n}$ *egységvektor*, akkor az $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = C$ geometriai jelentése az, hogy az egyenes bármely pontjába mutató vektornak az $\mathbf{n}$ egyenesére eső merőleges vetülete C . Ez az ábra is ezt az esetet szemlélteti.

$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (x - x_0, y - y_0)$, ezért a vektoregyenlet

$$(A, B) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0$$

alakú lesz, ami a skaláris szorzást elvégezve az $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ formulát adja. Ha a koordináta-rendszer nem ortonormált, az (A, B) vektor nem szükségképpen normálvektor, és a skaláris szorzás képlete is más, de azért az (1.7) egyenletről mondott állítás igaz. A ?? fejezetben tanultak alapján az egyenes egyenletét a vektoregyenletből majd nem ortonormált koordináta-rendszer esetén is le tudjuk vezetni, most viszont egy olyan bizonyítást adunk, mely az explicit egyenletrendszerre épül.

BIZONYÍTÁS. Ha a vagy b valamelyike 0, akkor a két egyenlet egyike felesleges, például ha $a = 0$, akkor az egyenletrendszer alakja

$$\begin{aligned} x &= x_0 \\ y &= y_0 + bt \end{aligned}$$

ami ekvivalens az $x = x_0$ egyenlettel, hisz az $y = y_0 + bt$ semmi mást nem mond, mint hogy y egy valós szám. Mivel $(a, b) \neq (0, 0)$, ezért csak az az eset marad, amikor a és b egyike sem 0. Ekkor mindkét egyenletből kifejezhető t , és a két értéket egyenlővé téve kapjuk, hogy

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b},$$

azaz

$$bx - ay = bx_0 - ay_0, \text{ vagy } b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0.$$

Legyen a továbbiakban $A = b$ és $B = -a$. Ekkor a fenti egyenlet $Ax + By = Ax_0 + By_0$ lesz. Az egyenlet jobb oldalán lévő konstans C -vel jelölve az egyenes egyenlete $Ax + By = C$ alakot ölt. Másrészt könnyen látható, hogy minden ilyen alakú egyenlet egy egyenes egyenlete, mert ekvivalens egy egyenes paraméteres egyenletrendszerével. Nevezetesen az $Ax + By = C$ egyenlet visszaírható $Ax + By = Ax_0 + By_0$ alakba, hisz az $Ax_0 + By_0 = C$ egyenletben $A \neq 0$ esetén egy tetszőleges y_0 -t választva, egyértelműen kifejezhető x_0 . (A $B \neq 0$ eset analóg.) Ennek alapján felírható az (1.6) egyenletrendszer. ■

1.59. PÉLDA: SÍKBELI EGYENES EGYENLETEI. Írjuk fel annak az egyenesnek összes egyenletét vagy egyenletrendszerét, mely átmegy a $(2, 3)$ és az $(1, 1)$ koordinátájú pontokon.

MEGOLDÁS. Ha egy egyenes átmegy e két ponton, akkor irányvektora a két pontba mutató vektorok különbsége, azaz $\mathbf{v} = (2, 3) - (1, 1) = (1, 2)$. Legyen $\mathbf{r}_0 = (1, 1)$, de az $\mathbf{r}_0 = (2, 3)$ választás is megfelelő.

Az irányvektor segítségével kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Explicit (paraméteres) egyenletrendszer alakban:

$$\begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 1 + 2t. \end{aligned}$$

Az irányvektorból $(A, B) = (2, -1)$, innen az egyenes egyenlete $2x - y = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1$, azaz

$$2x - y = 1.$$

Ortonormált koordináta-rendszerben a

$$(2, -1) \cdot (x - 1, y - 1) = 0$$

egyenletet kapjuk vektoregyenletként, mely kiszámolva az előző egyenletet adja. ■

Síkbeli pont egyenletei Tekintsük a síkbeli (x_0, y_0) pontot. Ennek explicit egyenletrendszer, illetve vektoregyenlete:

$$\begin{aligned} x &= x_0 \\ y &= y_0 \end{aligned} \quad \text{illetve} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

Ez annyira nyilvánvaló, semmitmondó, hogy a gyakorlatban nem is szoktunk pont egyenleteiről beszélni, e könyvbe is csak didaktikai okokból került, ugyanis a matematikai fogalmak megértésében gyakran nagy segítségünkre van a szélső, extrémális esetek megértése, vizsgálata.

Mivel itt az alakzat csak egyetlen pontból áll, nincs szükség paraméterre, így ez az alak egyúttal implicitnek is tekinthető. Ekkor úgy tekintünk ugyanerre az egyenletrendszerre, mint két egyenes egyenletére, melyek normálvektorai $(1, 0)$ illetve $(0, 1)$, és amelyek metszéspontja a keresett pont:

$$\begin{aligned} x &= x_0 \\ y &= y_0 \end{aligned} \quad \text{vagy minden együtthatót kiírva} \quad \begin{aligned} x + 0y &= x_0 \\ 0x + y &= y_0 \end{aligned}$$

Ez adja az ötletet, egy pont implicit egyenletrendszerének tekinthetnénk két egyenletet, melyek egymást az adott pontban metsző egy-egy egyenes egyenletei. Tehát mondhatjuk, hogy a pont implicit egyenletrendszerének általános alakja:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y &= C_1 \\ A_2x + B_2y &= C_2 \end{aligned}$$

Az azonban itt nem igaz, hogy minden ilyen alakú egyenletrendszer egy pont egyenletrendszer, mert két egyenes metszheti egymást egyetlen pontban, de lehet, hogy nincs közös pontjuk, és lehet végtelen sok közös pontjuk is. Épp ennek a kérdésnek a részletes vizsgálata lesz a 2. fejezet témája.

A 3-dimenziós tér síkjainak egyenletei Tudjuk, hogy két lineárisan független $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektor bármely lineáris kombinációja a két vektor által meghatározott síkban van, továbbá hogy e sík bármely vektora előáll a megadott két vektor lineáris kombinációjaként (ld. 1.8. és 1.11. tétel). Ebből azonnal adódik, hogy a sík egy rögzített pontjába mutató $\mathbf{r}_0$ vektor segítségével a sík bármelyik pontjába mutató $\mathbf{r}$ vektor felírható $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ alakban.

1.60. ÁLLÍTÁS: SÍK EXPLICIT VEKTOREGYENLETE. Bármely síknak van

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v} \quad (1.8)$$

alakú vektoregyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy sík egyenlete, ahol $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ a sík két lineárisan független vektora, és $\mathbf{r}_0$ a sík egy tetszőleges, de rögzített pontjába mutató vektor.

Hasonlóan a síkbeli egyeneshez, a térbeli sík egyenletéből is kiküszöbölhető a paraméter a merőlegesség felhasználásával. Az 1.2.4. feladat állítása szerint, ha egy vektor merőleges két tetszőleges vektor mindegyikére, akkor merőleges azok lineáris kombinációjára is. Mivel az $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ merőleges $\mathbf{u}$ -ra és $\mathbf{v}$ -re is, ezért merőleges azok minden lineáris kombinációjára is, azaz az $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ vektorra is. Ez az észrevétel az alapja az alábbi tételnek.

1.61. ÁLLÍTÁS: SÍK IMPLICIT VEKTOREGYENLETE. A háromdimenziós térben minden síknak van

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0, \quad (1.9)$$

és a vele ekvivalens

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = C \quad (1.10)$$

alakú vektoregyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy sík egyenlete, ahol $\mathbf{n}$ a sík egy normálvektora, $\mathbf{r}_0$ a sík egy tetszőleges, de rögzített pontjába mutató vektor és C konstans.

Az állítás igazolása analóg a síkbeli egyenesnél leírtakkal.

Az $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ és $\mathbf{u} = (a_1, b_1, c_1)$ $\mathbf{v} = (a_2, b_2, c_2)$ jelöléseket használva az explicit vektoregyenlet azonnal egyenletrendszerre alakítható.

1.62. ÁLLÍTÁS: SÍK EXPLICIT EGYENLETRENDSZERE. A háromdimenziós tér minden síkjának van

$$\begin{aligned} x &= x_0 + a_1 s + a_2 t \\ y &= y_0 + b_1 s + b_2 t \\ z &= z_0 + c_1 s + c_2 t \end{aligned} \quad (1.11)$$

alakú egyenletrendszer, ahol (a_1, b_1, c_1) és (a_2, b_2, c_2) a sík két lineárisan független vektora, és (x_0, y_0, z_0) a sík egy tetszőleges rögzített pontja.

Az explicit egyenletrendszerből kiküszöbölhető a két paraméter, ha például két egyenletből kifejezzük a paramétereket, és behelyettesítjük a harmadik egyenletbe. Így egy implicit egyenletet kapunk. A számításokat nem részletezzük, az eredmény

$$(b_1 c_2 - b_2 c_1)(x - x_0) + (c_1 a_2 - c_2 a_1)(y - y_0) + (a_1 b_2 - b_1 a_2)(z - z_0) = 0.$$

Az $(A, B, C) = (b_1 c_2 - b_2 c_1, c_1 a_2 - c_2 a_1, a_1 b_2 - a_2 b_1)$ jelöléssel a sík egyenlete $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ alakra hozható, vagy ami vele ekvivalens, $Ax + By + Cz = D$ alakra.

1.63. ÁLLÍTÁS: SÍK IMPLICIT EGYENLETE. A háromdimenziós térben minden síknak van

$$Ax + By + Cz = D \quad (1.12)$$

alakú egyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy sík egyenlete, ha A , B és C legalább egyike nem nulla, és $D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$, ahol (x_0, y_0, z_0) a sík valamely pontja.

A sík fenti egyenlete a sík $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$ alakú vektoregyenletéből is megkapható, de ezt egyelőre csak *ortonormált* koordináta-rendszerben tudjuk könnyen igazolni. Mivel

$$(A, B, C) = (b_1 c_2 - b_2 c_1, c_1 a_2 - c_2 a_1, a_1 b_2 - a_2 b_1), \quad (1.13)$$

ami épp az $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ vektorral egyenlő, ezért (A, B, C) merőleges a sík minden vektorára, vagyis a sík egy normálvektora. Az $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$ egyenletet koordinátákba átírva kapjuk, hogy

$$(A, B, C) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$

1.64. PÉLDA: SÍK EGYENLETEI. Írjuk fel annak a síknak az egyenleteit, mely átmegy a $(0, -1, 2)$, a $(-1, 0, 7)$ és a $(2, 1, 4)$ pontokon.

MEGOLDÁS. A három pontba mutató vektorok különbségei a síkkal párhuzamos vektorok, így azokkal felírható a sík mindegyik egyenlete. Két vektor a lehetséges háromból:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= (2, 1, 4) - (0, -1, 2) = (2, 2, 2), \text{ és} \\ \mathbf{v} &= (-1, 0, 7) - (0, -1, 2) = (-1, 1, 5).\end{aligned}$$

Ezek alapján például az $\mathbf{r}_0 = (0, -1, 2)$ választás mellett a sík explicit vektoregyenlete

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix},$$

explicit egyenletrendszere

$$\begin{aligned}x &= 2s - t \\ y &= -1 + 2s + t \\ z &= 2 + 2s + 5t\end{aligned}$$

Mivel az (1.13) képlet szerint $(A, B, C) = (8, -12, 4)$, ezért a sík implicit egyenlete $8(x - 0) - 12(y - (-1)) + 4(z - 2) = 0$, azaz 4-gyel való osztás és átrendezés után

$$2x - 3y + z = 5.$$

Így ortonormált koordináta-rendszerben a

$$(2, -3, 1) \cdot (x, y, z) = 5, \text{ vagy } (2, -3, 1) \cdot (x, y + 1, z - 2) = 0$$

a sík implicit vektoregyenlet alakja. ■

Térbeli egyenes egyenletei Mindaz, amit a síkbeli egyenes explicit vektoregyenletéről mondtunk a 29. oldalon, lényegében változtatás nélkül megismételhető. Jelöljük ki a térben az origót, és tekintsük azt az e egyenest, melynek irányvektora $\mathbf{v}$, és amely átmegy azon a ponton, melybe az $\mathbf{r}_0$ vektor mutat. Világos, hogy az e egyenes bármely pontjába mutató $\mathbf{r}$ vektor előáll $\mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ alakban, ahol t valós szám, és az e -re nem illeszkedő pontokra ez nem áll. Így igaz a következő állítás:

1.65. ÁLLÍTÁS: TÉRBELI EGYENES EXPLICIT VEKTOREGYENLETE. A háromdimenziós tér minden egyenesének van

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} \tag{1.14}$$

alakú vektoregyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy egyenes egyenlete, ahol $\mathbf{v}$ az egyenes egy irányvektora, és $\mathbf{r}_0$ egy tetszőleges, de rögzített pontjába mutató vektor.

Itt nem tudjuk a paramétert egyetlen vektoregyenletben kiküszöbölni, de az explicit egyenletrendszerré való átírás megy, ha felvesszünk egy koordináta-rendszert, melyben $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ és $\mathbf{v} = (a, b, c)$:

1.66. ÁLLÍTÁS: TÉRBELI EGYENES EXPLICIT EGYENLETRENDSZERE. A tér minden egyenesének van

$$\begin{aligned}x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct\end{aligned} \tag{1.15}$$

alakú egyenletrendszere, ahol (a, b, c) az egyenes egy irányvektora, és (x_0, y_0, z_0) az egyenes egy tetszőleges rögzített pontja.

A fenti explicit (paraméteres) egyenletrendszerből a paraméter kiküszöbölhető. Ha az a , b és c számok valamelyike 0, akkor a neki megfelelő fenti egyenletben már nem szerepel t , akkor nincs is mit tennünk. Ha legalább két egyenletben szerepel t , akkor mindegyikből kifejezve t -t, majd egyenlővé téve őket paraméter nélküli egyenleteket kapunk. Például ha a , b és c egyike sem 0, akkor

$$t = \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

A t -t elhagyva valójában három egyenletet kaptunk:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}, \quad \frac{x - x_0}{a} = \frac{z - z_0}{c}, \quad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Annak az egyenletnek nincs értelme, amelyikben a nevező 0, de a nevezőkkel való bővítés után kapott

$$b(x - x_0) = a(y - y_0) \quad c(x - x_0) = a(z - z_0) \quad c(y - y_0) = b(z - z_0)$$

egyenletek mindegyike korrekt akkor is, ha 0 valamelyik együttható. E három egyenlet három sík egyenlete, melyek metszésvonala az adott egyenes. A három síkból azonban már kettő is meghatározza az egyenest, így két egyenletből álló egyenletrendszerrel is megadható az egyenes. Bizonyítható az alábbi állítás:

1.67. ÁLLÍTÁS: TÉRBELI EGYENES IMPLICIT EGYENLETRENDSZERE.

A tér minden egyenesének van két egyenletből álló egyenletrendszere. A két egyenlet az alábbi három közül bármelyik kettő, amelyik nem $0 = 0$ alakú.

$$\begin{aligned} b(x - x_0) &= a(y - y_0) \\ c(x - x_0) &= a(z - z_0) \\ c(y - y_0) &= b(z - z_0) \end{aligned} \tag{1.16}$$

1.68. PÉLDA: TÉRBELI EGYENES EGYENLETRENDSZEREI. Írjuk fel annak az egyenesnek az explicit és implicit egyenletrendszerét, mely átmegy az $A(1, 3, 4)$ és a $(a) \ B(3, 3, 1)$ $(b) \ B(5, 5, -2)$ ponton.

MEGOLDÁS. (a) A két pontot összekötő vektor $= (2, 0, -3)$. Innen az egyenes explicit egyenletrendszere

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2t \\ y &= 3 \\ z &= 4 - 3t \end{aligned}$$

második egyenlete $y = 3$ egy xz -síkkal párhuzamos sík egyenlete. A másik két egyenlet mindegyikéből kifejezve t -t, majd egyenlővé téve őket, egy másik sík egyenletét kapjuk. Az egyenes ennek a két síknak a metszésvonala. Az első egyenletből $t = \frac{1}{2}(x - 1)$, a harmadikból $t = -\frac{1}{3}(z - 4)$ hogy $3x + 2z = 11$. Így az előző egyeneshez a következő implicit (paraméter nélküli) egyenletrendszer tartozik, mely két sík egyenletéből áll:

$$\begin{aligned} 3x + 2z &= 11 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

(b) A két pontot összekötő vektor itt $= (4, 2, -6)$. Innen az egyenes explicit egyenletrendszere

$$\begin{aligned} x &= 1 + 4t \\ y &= 3 + 2t \\ z &= 4 - 6t \end{aligned}$$

Mindegyik egyenletből kifejezve t -t, és ezeket egyenlővé téve kapjuk, hogy

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{-6}.$$

Ez a következő három sík egyenletét adja:

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{2}, \quad \frac{z-4}{-6} = \frac{x-1}{4}, \quad \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{-6}.$$

Átrendezve

$$\begin{aligned} x - 2y &= -5 \\ 3x &+ 2z = 11 \\ 3y + z &= 13 \end{aligned}$$

E három sík közül bármely kettő meghatározza az adott egyenest, így e három egyenlet közül bármely kettő az egyenes (implicit) egyenletrendszerére.

Térbeli pont egyenletei Csak a teljesség és az analógiák megértése céljából vizsgáljuk meg a tér egy pontjának lehetséges egyenleteit. A térbeli (x_0, y_0, z_0) pont explicit egyenletrendszere, illetve vektoregyenlete:

$$\begin{aligned} x &= x_0 \\ y &= y_0 \\ z &= z_0 \end{aligned} \quad \text{illetve} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}.$$

Az explicit egyenletrendszert implicit alaknak is tekinthetjük, ekkor három – a koordinátasíkokkal párhuzamos – sík egyenletét látjuk, melyek egyetlen közös pontban metszik egymást.

$$\begin{aligned} x &= x_0 & x + 0y + 0z &= x_0 \\ y &= y_0 & 0x + y + 0z &= y_0 \\ z &= z_0 & 0x + 0y + z &= z_0 \end{aligned} \quad \text{vagy minden együtthatót kiírva}$$

A síkbeli esethez hasonlóan egy pont implicit egyenletrendszerének tekinthetnénk három egyenletet, melyek egymást az adott pontban metsző egy-egy sík egyenletei. Tehát mondhatjuk, hogy a pont implicit egyenletrendszerének általános alakja:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z &= D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z &= D_2 \\ A_3x + B_3y + C_3z &= D_3 \end{aligned}$$

Itt is óvatosságnak kell lennünk, mert nem minden ilyen alakú egyenletrendszer egy pont egyenletrendszere. Például három sík metszheti egymást egy egyenesben, de párhuzamos síkok esetén az is előfordulhat, hogy nincs közös pontjuk. E kérdés vizsgálatára visszatérünk a 2. fejezetben.

Egyenletek $\mathbb{R}^n$ -ben Az egyenes és a sík explicit vektoregyenlete $\mathbb{R}^n$ -ben is ugyanolyan alakú, mint $\mathbb{R}^3$ -ben, azaz az egyenes explicit vektoregyenlete $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$, a síké $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ alakú.

1.69. PÉLDA: EGYENES ÉS SÍK EXPLICIT VEKTOREGYENLETE. Írjuk fel az $A(1, 1, 1, 1)$, $B(2, 3, 2, 4)$ pontokon átmenő egyenes, és az A , B és $C(3, 2, 1, 0)$ pontokon átmenő sík explicit vektoregyenletét!

MEGOLDÁS. Az $\overrightarrow{AB} = (1, 2, 1, 3)$ és az $\overrightarrow{AC} = (2, 1, 0, -1)$ vektorok segítségével azonnal fölírható az egyenes és a sík egyenlete is:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \text{illetve} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

A síkbeli egyenes és a térbeli sík vektoregyenlete $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = c$ alakú. E két esetben ez az egyenlet tehát az n -dimenziós tér ($n = 2, 3$) egy $n - 1$ -dimenziós alakzatának egyenlete. A későbbiekben látni fogjuk, hogy ez általában is igaz, de e pillanatban még a dimenzió fogalmát sem definiáltuk, ezért egyelőre csak nevet adunk ennek az alakzatnak. Az $\mathbb{R}^n$ térben az $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = c$ egyenletet kielégítő $\mathbf{r}$ vektorok végpontjainak halmazát *hipersíknak* nevezzük. Koordinátás alakban

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = c,$$

ahol $\mathbf{n} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\mathbf{r} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

1.70. PÉLDA: HIPERSÍK EGYENLETE. Mutassuk meg, hogy az

$$x + 2y + 3z + 6w = 12$$

egyenletű hipersík bármely két pontját összekötő vektor merőleges az $(1, 2, 3, 6)$ vektorra, azaz vele való skaláris szorzata 0.

MEGOLDÁS. Ha az (x_1, y_1, z_1, w_1) és az (x_2, y_2, z_2, w_2) pontok a megadott hipersíkon vannak, akkor

$$x_1 + 2y_1 + 3z_1 + 6w_1 = 12$$

$$x_2 + 2y_2 + 3z_2 + 6w_2 = 12$$

Ha a két egyenletet kivonjuk egymásból, akkor az

$$(x_1 - x_2) + 2(y_1 - y_2) + 3(z_1 - z_2) + 6(w_1 - w_2) = 0$$

egyenlethez jutunk, amely skalárszorzat alakban

$$(1, 2, 3, 6) \cdot (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2, w_1 - w_2) = 0,$$

ami épp azt jelenti, hogy a két pontot összekötő vektor merőleges az $(1, 2, 3, 6)$ vektorra. ■

A következő táblázat összefoglalja geometriai alakzatoknak a továbbiak szempontjából legfontosabb egyenleteit. Az $\mathbb{R}^n$ -beli egyenletek közül többet még nem ismerünk, ezeket három kérdőjel jelzi, viszont arra bíztatjuk az Olvasót, hogy az analógia fonalán haladva fogalmazza meg sejtéseit.

		Implicit vektoregyenlet	Explicit egyenlet(rendszer)
Síkban	egyenes	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$	$Ax + By = C$
	pont	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$	$A_1x + B_1y = C_1$ $A_2x + B_2y = C_2$
Térben	sík	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$	$Ax + By + Cz = D$
	egyenes	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$	$A_1x + B_1y + C_1z = D_1$ $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$
	pont	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$	$A_1x + B_1y + C_1z = D_1$ $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$ $A_3x + B_3y + C_3z = D_3$
	hipersík	???	$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$
$\mathbb{R}^n$ -ben	sík	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$	???
	egyenes	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$	???
	pont	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$	???

2. fejezet

Lineáris egyenletrendszerek

2.1. Két modell

E szakasz témája a lineáris egyenletrendszerek fogalma és a lineáris egyenletrendszer két geometriai interpretációja: hipersíkok metszetének meghatározása és egy vektor lineáris kombinációként való előállítása. A számítások kényelmes könyvelésére bevezetjük a mátrix fogalmát.

Lineáris egyenlet és egyenletrendszer Az előző fejezet végén láttuk, hogy a síkbeli egyenes egyenletének általános alakja

$$Ax + By = C,$$

ahol A , B és C konstansok. Ennek általánosításaként jutunk a lineáris egyenlet fogalmához.

Lineáris: a *vonalas* jelentésű latin lineáris szóból ered, mely a *lenfonal*, *horgászsinór*, átvitt értelemben *vonat*, *határvonal* jelentésű *linea* (línea) szó származéka. A matematikában *egyenessel kapcsolatba hozható*, illetve *elsőfokú* értelemben szokás használni.

2.1. DEFINÍCIÓ: LINEÁRIS EGYENLET. Az

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \quad (2.1)$$

alakra hozható egyenletet az $x_1, x_2, \dots, x_n$ ismeretlenekben *lineáris egyenletnek* nevezzük, ahol $a_1, a_2, \dots$ és a_n , valamint b konstansok. Az $a_1, a_2, \dots$ és a_n konstansokat az egyenlet *együtthatóinak* b -t az egyenlet *konstans tagjának* nevezzük.

2.2. PÉLDA: LINEÁRIS EGYENLET. Az alábbi egyenletek lineárisak:

$$x - 2y = 1, \quad \frac{1}{2}x_1 - \sqrt{2}x_2 + (5 - \pi)x_3 = 0, \quad a \cos 0.87 - 0.15c = 0.23.$$

Az utolsó egyenletben $a \cos 0.87$ szerepel óvatosságból, mert $\cos 0.87a$ félreérthető. Vagy a tényezők átrendezésével, vagy zárójellezéssel egyértelművé tehető: $a \cos 0.87 = (\cos 0.87)a$, de $\cos(0.87a)$ mást jelent, és nem lineáris.

A következő egyenletek nem lineárisak az x , y és z ismeretlenekben:

$$xz - y = 0, \quad x + 2y = 3^z, \quad x \sin z + y \cos z + y = z^2,$$

viszont mindegyikük lineáris az x és y ismeretlenekben, hisz ekkor z paraméterré válik, melynek bármely értéke mellett lineárisak az egyenletek.

2.3. PÉLDA: LINEÁRIS EGYENLET AZONOS ÁTALAKÍTÁSA. Az

$$x = y, \quad x = 3 - y + 2z$$

egyenletek az x , y és z ismeretlenekben lineárisak, mert azonos átalakítással a definícióbeli alakra hozhatók:

$$x - y + 0z = 0, \quad x + y - 2z = 3.$$

Másrészt az

$$\frac{x}{z} + \frac{y}{z} + 2 = 0$$

nem lineáris, mert a z -vel való beszorzás nem azonos átalakítás, tehát a lineáris $x + y + 2z = 0$ egyenlettel nem ekvivalens.

Lineáris egyenletek egy halmazát *lineáris egyenletrendszernek* nevezzük. Az egyenletrendszer ismeretlenek mindazok az ismeretlenek, amelyek legalább egy egyenletben szerepelnek. Ha egy ismeretlen egy egyenletben nem szerepel, akkor úgy tekintjük, hogy 0 az együtthatója. A világos áttekinthetőség kedvéért az egyenletrendszereket úgy írjuk fel, hogy az ismeretlenek mindegyik egyenletben ugyanabban a sorrendben szerepeljenek. Egy egyenletrendszer egy egyenletből is állhat.

2.4. PÉLDA: LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK. Lineáris egyenletrendszerek például a következők:

$$\begin{array}{rclcl} 3x - y = 2 & x_1 & = 3 & & \\ -x + 2y = 6 & x_2 & = 1 & 2x - 3y + z - w = 6. & \\ x + y = 6 & x_3 & = 4 & & \end{array}$$

Elképzelhető, hogy egy egyenletrendszer átalakítása közben olyan egyenletet kapunk, melyben minden együttható 0, azaz amely $0 = b$ alakú. Az is lehet, hogy egy egyenletrendszerben egyes konstans együtthatók paraméterek, azaz pontos értéküket (még) nem ismerjük. Ilyenkor tudnunk kell, mely változók az ismeretlenek, melyek a paraméterek. Így tehát az x , y ismeretlenekben lineáris egyenletrendszerek a következők is:

$$\begin{array}{rclcl} ax + y = 2a & 3x - y = 2 & x + y = 1 & & \\ x - \frac{1}{a}y = 0 & -x + 2y = 6 & 0 = 0 & 0 = 2. & \end{array}$$

Paraméterek használatával az összes adott számú egyenletből álló és adott számú ismeretlent tartalmazó egyenletrendszer általános alakja felírható. Például az összes 3-ismeretlenes, 3 egyenletből álló egyenletrendszer a következő alakú:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Például az előző három egyenletrendszer ekvivalens. A harmadik egyenletrendszer megoldása azonnal leolvasható: $x = 2$, $y = 1$. A második egyenletrendszer is könnyen megoldható, csak vissza kell helyettesíteni a második egyenlet szerinti $y = 1$ értéket az első egyenletbe, amiből kapjuk, hogy $x = 2$. Az első egyenletrendszer megoldásához átalakíthatjuk vele ekvivalens – a második vagy a harmadik egyenletrendszerhez hasonlóan egyszerű alakra. Ez a módszer lesz a következő szakasz témája.

2.9. TÉTEL: EKVIVALENS ÁTALAKÍTÁSOK. Az alábbi transzformációk minden egyenletrendszert ekvivalens egyenletrendszerbe visznek át:

1. két egyenlet felcserélése;
2. egy egyenlet nem nulla számmal való szorzása;
3. egy egyenlet konstansszorosának egy másikhoz adása.

Ezen kívül

4. egy $0 = 0$ alakú egyenlet elhagyása

is ekvivalens átalakítás, de ez eggyel csökkenti az egyenletek számát.

BIZONYÍTÁS. Az első kettő és a negyedik átalakításra nyilvánvaló, hogy nem változtatja meg a megoldások halmazát (a negyedik átalakítással kapcsolatban lásd a 2.1.18. feladatot). Nézzük a harmadik átalakítást, legyen c egy tetszőleges konstans. Egy megoldást az egyenletrendszerbe helyettesítve, majd az i -edik c -szeresét hozzáadva egy másik egyenlet-hez, például a j -edikhez, könnyen látható, hogy a régi egyenletrendszer minden megoldása az újnak is megoldása. Ezután az új egyenletrendszer i -edik egyenletének $-c$ -szeresét hozzáadjuk a j -edikhez. Így visszkapjuk a régi egyenletrendszert, tehát az előző gondolatmenet szerint az új egyenletrendszer minden megoldása a régiek is megoldása. Vagyis a két megoldáshalmaz megegyezik. Tehát ez az átalakítás is ekvivalens. ■

Mátrixok Az egyenletrendszer megoldásában az azonos átalakítások során a műveleteket csak az egyenletrendszer együtthatóival és konstans tagjaival végezzük, az ismeretlenek másolgatása felesleges, ezért az együtthatókat és a konstans tagokat egy táblázatba gyűjtjük – megőrizve az egyenletrendszerbeli egymáshoz való helyzetüket –, és az egyenletrendszer megoldásainak lépéseit csak ezen hajtjuk végre. Az ilyen speciális számtáblázatokat *mátrixoknak* nevezzük, ezekkel később külön fejezetben foglalkozunk. A mátrixba írt számokat a *mátrix elemeinek* nevezzük.

A mátrix méretének jellemzéséhez mindig előbb a sorok, majd az oszlopok számát adjuk meg, tehát egy $m \times n$ -es mátrixnak m sora és n oszlopa van. Egy ilyen mátrix általános alakja:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

A mátrix *főátlójába* azok az elemek tartoznak, amelyek ugyanannyi-adik sorban vannak, mint ahányadik oszlopban, azaz a például a fenti mátrixban a főátló elemei $a_{11}, a_{22}, \dots$.

A vektorokat is szokás *mátrix jelöléssel*, *mátrix alakban*, azaz egy 1-soros vagy 1-oszlopos mátrixszal leírni – ahogy azt az első fejezetben mi is tettük. Az $n \times 1$ -es mátrixot *oszlopvektornak*, az $1 \times n$ -es mátrixot *sorvektornak* is szokás nevezni. Annak a kérdésnek az eldöntése, hogy egy n -dimenziós vektort sor- vagy oszlopvektorral reprezentáljunk, döntés (szokás, ízlés) kérdése. Manapság jobban el van terjedve a vektorok oszlopvektoros jelölése, ezért e könyvben alapértelmezésként mi is ezt a jelölést fogjuk használni. Kivételt csak a kódelméleti alkalmazásokról szóló részek jelentenek, ott a sorvektoros jelölés terjedt el. Így tehát az

Mátrix: a latin mater (māter) (*anya, szülőanya, forrás*) szó származéka a matrix (mātrix), melynek jelentése az európai nyelvekben a következő változásokon ment át: *anyaállat, vemhes állat, anyaméh, bezárt hely, ahonnan valami kifejlődik, bezárt, körülzárt dolgok sokasága, tömbje*. Jelentése az élettanban méh, a geológiában finomszemcsés kő, melybe fossziliák, kristályok, drágakövek vannak zárva, az anatómiában a körmöt, fogat kialakító szövet.

$(1, 2, 3)$ vektornak megfelelő sorvektor és oszlopvektor alakja

$$[1 \quad 2 \quad 3], \text{ illetve } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

Vektorok magyar irodai és általános iskolában használt jelölése – a tizedes vessző használata miatt – pontosvesszőt tesz a vektor koordinátái közé elválasztójelként. Vegyük észre, hogy vektorok sorvektorral való megadásánál írásjelet nem használunk, csak szóköz-zel választjuk el a koordinátákat!

amelyek közül, ha mást nem mondunk, az utóbbit fogjuk a vektor mátrixos jelöléseként használni.

Egyenletrendszer mátrixa és bővített mátrixa Az egyenletrendszer *mátrixa* vagy *együtthatómátrixa* az egyenletek együtthatóit, míg *bővített* vagy *kibővített* mátrixa az egyenletek együtthatóit és konstans tagjait tartalmazza. Az áttekinthetőség érdekében a bővített mátrixban gyakran egy függőleges vonallal választjuk el az együtthatókat a konstans tagoktól. A 2.5. definícióbeli általános alakhoz tartozó együttható-, illetve bővített mátrixok:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & | & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & | & b_m \end{bmatrix}$$

A gyakorlatban igen nagy méretű egyenletrendszereket, s ezzel ugyancsak nagy méretű mátrixokat is kezelni kell. A feladatok egy részében azonban a hatalmas méretű mátrixok elemeinek nagy része 0. Az ilyen mátrixokat *ritka mátrixoknak* nevezzük. Szokás az ilyen együtthatómátrixú egyenletrendszereket is ritkának nevezni. A nem ritka mátrixokat *sűrűnek* nevezik. Először a kisebb méretű sűrű mátrixokra hatékony módszerekkel ismerkedünk meg.

2.10. PÉLDA: EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSÁNAK KÖVETÉSE A BŐVÍTETT MÁTRIXON. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert!

$$2x + 3y + 2z = 7$$

$$x + y + z = 3$$

$$2x + 2y + 3z = 6$$

MEGOLDÁS. Két lehetséges megoldást mutatunk. A (2.3) középső és jobb oldali egyenletrendszernél látott háromszög, illetve átlós alakra hozás lesz a célunk.

Először írjuk fel az egyenletrendszer bővített mátrixát!

$$\begin{array}{l} 2x + 3y + 2z = 7 \\ x + y + z = 3 \\ 2x + 2y + 3z = 6 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & | & 7 \\ 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 2 & 2 & 3 & | & 6 \end{bmatrix}$$

Kicseréljük az első és a második egyenletet:

Kicseréljük az első és a második sort:

$$\begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ 2x + 3y + 2z = 7 \\ 2x + 2y + 3z = 6 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 2 & 3 & 2 & | & 7 \\ 2 & 2 & 3 & | & 6 \end{bmatrix}$$

Az első egyenlet 2-szeresét kivonjuk a második, majd a harmadik egyenletből. Mondhatjuk azt is, hogy az első egyenlet -2 -szeresét hozzáadjuk a második majd a harmadik egyenlethez.

$$\begin{aligned}x + y + z &= 3 \\ y &= 1 \\ z &= 0\end{aligned}$$

Az első sor kétszeresét kivonjuk a második és harmadik sorból, vagy másként fogalmazva az első sor -2 -szeresét hozzáadjuk a második majd a harmadik sorhoz.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Az egyenletrendszerről látjuk, hogy már tudjuk y és z értékét. Ezért ezeket az első egyenletbe helyettesítve megkapjuk x értékét is, nevezetesen $x + y + z = 3$, azaz $y = 1$ és $z = 0$ behelyettesítése után: $x + 1 + 0 = 3$, vagyis $x = 2$. De a visszahelyettesítés helyett folytathatjuk az ekvivalens átalakítások sorozatát is:

Kivonjuk a második, majd a harmadik egyenletet az elsőből:

$$\begin{aligned}x &= 2 \\ y &= 1 \\ z &= 0\end{aligned}$$

Kivonjuk a második, majd a harmadik sort az elsőből:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Így olyan alakra hoztuk az egyenletrendszert, illetve a bővített mátrixot, amiből azonnal leolvasható a megoldás: $(x, y, z) = (2, 1, 0)$. ■

Sormodell: hipersíkok metszete A lineáris egyenletrendszerek szemléltetésére két geometriai modellt mutatunk, melyek segíteni fognak az általánosabb fogalmak megértésében.

Tekintsük a kétváltozós lineáris $ax + by = c$ egyenletet, ahol a , b és c valós konstansok. Ha a és b legalább egyike nem 0, akkor az egyenletet kielégítő pontok halmaza egy egyenes, vagyis a megoldáshalmaz egy egyenest alkot. (Ha $a = b = c = 0$, akkor az egyenlet alakja $0x + 0y = 0$, azaz $0 = 0$, ami minden (x, y) számpárra fennáll, vagyis az egyenletet kielégítő (x, y) pontok halmaza az egész sík. Ha pedig $a = b = 0$, de $c \neq 0$, akkor az egyenletnek nincs megoldása.)

2.11. PÉLDA: SORMODELL KÉT KÉTISMERETLENES EGYENLETTEL. Tekintsük az

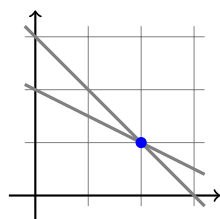
$$\begin{aligned}x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4\end{aligned}$$

egyenletrendszert. Oldjuk meg az egyenletrendszert ekvivalens átalakításokkal, és ábrázoljuk az egyenesek grafikonját minden lépésben.

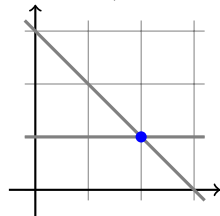
MEGOLDÁS. Két lépésben megoldhatjuk az egyenletrendszert, ha az első egyenletet kivonjuk a másodikból, majd az így kapott egyenletrendszerben a második egyenletet kivonjuk az elsőből, azaz:

$$\begin{aligned}x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4\end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned}x + y &= 3 \\ y &= 1\end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned}x &= 2 \\ y &= 1\end{aligned}$$

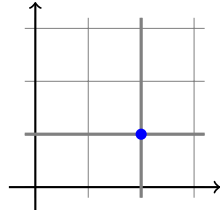
Az egyenletrendszer két egyenlete egy-egy egyenes egyenlete a síkban. Az, hogy az egyenletrendszer megoldható, pontosan azt jelenti, hogy a két egyenesnek van közös pontja, példánkban a $(2, 1)$ pont. A 2.1. ábra a megoldás lépéseit szemlélteti az egyenletek grafikonjával. ■



↓



↓



2.1. ábra. Egyenletrendszer megoldásának szemléltetése



2.12. PÉLDA: HA 0 LESZ A BAL OLDAL. Tekintsük az

$$x + y = 3$$

$$x + y = 2$$

egyenletrendszert. Látható, hogy ez két párhuzamos egyenes egyenlete, melyeknek nincs közös pontjuk, így az egyenletrendszer nem oldható meg. Ha az első egyenletet kivonjuk a másodikból, az ellentmondó $0 = -1$ egyenletet kapjuk, vagyis így is arra jutottunk, hogy az egyenletrendszer nem oldható meg. Az

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + y &= 3 \end{aligned}, \text{ vagy az } \begin{aligned} x + y &= 3 \\ 2x + 2y &= 6 \end{aligned}$$

egyenletrendszerekben az első egyenlettel a második $0 = 0$ alakra hozható, aminek minden számpár megoldása, így elhagyható. Így csak az $x + y = 3$ egyenlet marad. Ennek összes megoldása paraméteres alakba írva például $(x, y) = (3 - t, t)$.

2.13. PÉLDA: SORMODELL: HÁROM HÁROMISMERETLENES EGYENLETTEL. Vizsgáljuk meg, hogy három háromismeretlenes egyenletből álló egyenletrendszer megoldásainak halmaza milyen geometriai alakzatot adhat!

MEGOLDÁS. Ha a három egyenlettel meghatározott három sík általános helyzetű, akkor az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van (ld. 2.3. (a) ábra). Például a 2.10. példában szereplő egyenletrendszernek egyetlen megoldása van: $(x, y, z) = (2, 1, 0)$.

Tekintsük a

$$\begin{aligned} 2x + y + 2z &= 5 \\ x + y + z &= 3 \\ 3x + 2y + 3z &= 8 \end{aligned} \quad (2.4)$$

egyenletrendszert. Ennek egy megoldása $(x, y, z) = (2, 1, 0)$, ugyanakkor a három sík normálvektorai egy síkba esnek, ugyanis

$$(2, 1, 2) + (1, 1, 1) = (3, 2, 3).$$

Mivel mindhárom normálvektorra merőleges például a

$$(2, 1, 2) \times (1, 1, 1) = (-1, 0, 1)$$

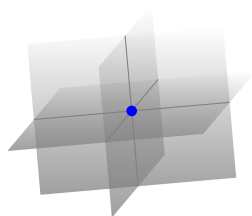
vektor, ezért e vektor párhuzamos mindhárom síkkal. A $(2, 1, 0)$ ponton átmenő, és $(-1, 0, 1)$ irányvektorú egyenes tehát benne van mindhárom síkban (ilyen esetet ábrázol a 2.3. (b) ábra). Az összes megoldást tehát megadja ennek az egyenesnek a paraméteres vektoregyenlete:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

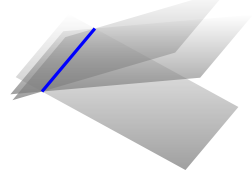
Hamarosan ugyanezt a megoldást ekvivalens átalakításokkal is meg fogjuk tudni határozni.

Hasonló esetet ábrázol a 2.4. (b) ábra, ahol mindhárom sík párhuzamos egy egyenessel, de a síkok egymással nem párhuzamosak, viszont a 2.3. (b) esettel ellentétben az egyenletrendszernek nincs megoldása. Ilyen például a (2.4) kis változtatásával kapott

$$\begin{aligned} 2x + y + 2z &= 5 \\ x + y + z &= 3 \\ 3x + 2y + 3z &= 9 \end{aligned} \quad (2.5)$$



(a) Három általános helyzetű sík: egyetlen megoldás

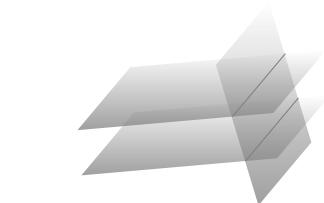


(b) Egy egyenesen átmenő, de nem csupa azonos sík: végtelen sok megoldás, a megoldások egy egyenest alkotnak



(c) Azonos síkok: végtelen sok megoldás, a megoldások egy síkot alkotnak

2.3. ábra. Megoldható egyenletrendszerek



(a) A síkok közül kettő párhuzamos, de nem azonos



(b) Egy egyenessel párhuzamos, de közös egyenest nem tartalmazó három sík

2.4. ábra. Nem megoldható egyenletrendszerek

egyenletrendszer. Vegyük észre, hogy míg a (2.4) egyenletrendszerben a harmadik egyenletből kivonva az első kettőt az elhagyható $0 = 0$ egyenletet kapjuk, addig a (2.5) egyenletrendszerben az ellentmondó $0 = 1$ egyenletre jutunk. Vagyis ennek az egyenletrendszernek nincs megoldása.

Végül tekintsük az

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x + 2y + 2z &= 6 \\ 3x + 3y + 3z &= 9 \end{aligned} \tag{2.6}$$

egyenletrendszert! Látható, hogy a második és a harmadik egyenlet az első konstansszorososa, azaz ugyanannak a síknak az egyenletei, az egyenletrendszer tehát ekvivalens az egyetlen

$$x + y + z = 3$$

egyenletből álló egyenletrendszerrel. Ennek explicit egyenlete egyenletrendszert kapjuk. Az y -nak és z -nek tetszőleges értéket választunk, például legyen $y = s$, $z = t$, akkor $x = 3 - y - z$, azaz $x = 3 - s - t$. Így az összes megoldás: $(x, y, z) = (3 - s - t, s, t)$. Ezt oszlopvektorokkal fölírva kapjuk, hogy a megoldás

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ez a 2.3. (c) ábra szerint eset. A 2.4. (a)-beli eseteknek megfelelő egyenletrendszerek felírását az olvasóra hagyjuk. ■

Az előző példákban a 2- és 3-dimenziós térben szemléltettük a 2-, illetve 3-ismeretlenes egyenletrendszer megoldásait. E geometriai modell lényege a következőképp foglalható össze az n -ismeretlenes esetben:

SORMODELL. Ha egy n -ismeretlenes egyenlet bal oldalán nem minden együttható 0, akkor az egyenletet kielégítő pontok (azaz az egyenlet megoldásai) egy hipersíkot alkotnak $\mathbb{R}^n$ -ben. Ha egy n -ismeretlenes egyenletrendszer m ilyen egyenletből áll, akkor az egyenletrendszer megoldása a nekik megfelelő m hipersík közös része $\mathbb{R}^n$ -ben.

Oszlopmodell: vektor előállítása lineáris kombinációként E modellben az egyenletrendszerre úgy tekintünk, mint egy olyan vektoregyenletre, amelyben egy vektort kell előállítani adott vektorok lineáris kombinációjaként. Például a 2.11. példabeli

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

egyenletrendszer ekvivalens az

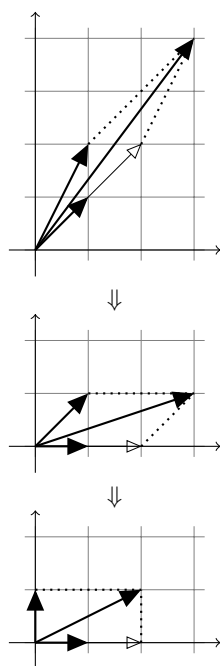
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

vektoregyenlettel. Itt az a feladat, hogy megkeressük az $(1, 1)$ és $(1, 2)$ vektoroknak azt a lineáris kombinációját, amely egyenlő a $(3, 4)$ vektorral.

2.14. PÉLDA: A MEGOLDÁS LÉPÉSEI AZ OSZLOPMODELLBEN. Kövessük végig a fenti egyenletrendszer 2.11. példában adott megoldásának lépéseit e modellben is.

MEGOLDÁS. Az ekvivalens átalakítások lépései:

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x + y &= 3 \\ y &= 1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 1 \end{aligned}$$



2.5. ábra. A megoldás lépései a vektormodellben.

Vektoros alakban:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

E lépéseket szemléltetjük a 2.5. ábrán. ■

OSZLOPMODELL. Általánosan, a 2.5. definícióban megadott (2.2) egyenletrendszer a következő vektoregyenlettel ekvivalens:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} x_2 + \dots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Az egyenletrendszer megoldása tehát ekvivalens egy vektoregyenlet megoldásával, ahol az egyenletrendszer konstans tagjaiból álló vektort kell az együtthatómátrix oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként előállítani.

E modellben egy egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha az együtthatómátrix oszlopvektorainak összes lineáris kombinációjából álló halmazban a konstans tagokból álló vektor is szerepel.

2.15. PÉLDA: EGYENLETRENDSZER MEGOLDHATÓSÁGA AZ OSZLOPMODELLBEN. Vizsgáljuk meg az alábbi két – azonos együtthatómátrixú – egyenletrendszer megoldhatóságát e modellben:

$$\begin{array}{rcl} x + y + 2z = 3 & x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + 4z = 3 & x + 2y + 4z = 3 \\ 3x + 4y + 8z = 9 & 3x + 4y + 8z = 1 \end{array}$$

MEGOLDÁS. Az egyenletrendszerek ekvivalensek a következő vektoregyenletekkel:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Itt a közös együtthatómátrix minden oszlopvektora benne van a

$$2x + y - z = 0$$

egyenletű síkban, (ez könnyen ellenőrizhető a vektorok koordinátáinak a sík egyenletébe való helyettesítésével), és ki is feszítik a síkot, mert a három vektor nem kollineáris. Másrészt a $(3, 3, 9)$ vektor is benne van e síkban, a $(3, 3, 1)$ vektor viszont nem. Tehát az első egyenletrendszer megoldható, a második nem. ■

Mely egyenletek lineáris egyenletek az x , y és z változókkal az alábbiak közül?

- 1 $3x - (\ln 2)y + e^3z = 0.4$
- 2 $xy - yz - zx = 0$
- 3 $a^2x - b^2y = 0$
- 4 $(\sin 1)x + (\cos 1)y - \pi z = 0$
- 5 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$
- 6 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$

Igazoljuk, hogy az alábbi egyenletrendszerek ekvivalensek!

$$7 \cdot \begin{array}{rcl} 2x + 3y = 5 & 2x + y = 3 \\ + y = 1 & x = 2 \end{array}$$

Könnyen látható, hogy mindkét egyenletrendszer egyetlen megoldása: $x = 2$, $y = 1$, tehát a két egyenletrendszer ekvivalens.

$$8 \cdot \begin{array}{rcl} 22x + 3y = 2 & 2x + y = 2 \\ 0x + 0y = 3 & x + y = 7 \end{array}$$

Az első egyenletrendszer nem oldható meg a $0 = 3$ alakú egyenlet miatt, de a második sem, hisz nincs olyan x és y , melyre $x + y = 2$ és $x + y = 7$ lenne, hisz $2 \neq 7$.

Oldjuk meg (fejben számolva) az alábbi lineáris egyenletrendszereket az $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ paraméterválasztás esetén!

9•

$$(2a - b)x + (3a - c)y = 0$$

$$(3b - 2c)x + (b - 2a)y = 0$$

Behelyettesítés után mindkét egyenlet $0 = 0$ alakú, amit tetszőleges x és y kielégít, így az összes (x, y) számpár megoldása az egyenletrendszernek.

10•

$$(b - a)x + (3a - c)y = 1$$

$$(3b - 2c)x + (b - 2a)y = 0$$

$x = 1$, y tetszőleges, azaz az összes $(1, y)$ alakú számpár megoldás.

11•

$$(b - a)x + (3a - c)y = 1$$

$$(3b - 2c)x + (b - 2a)y = 1$$

A második egyenlet behelyettesítés után $0 = 1$ alakú, így az egyenletrendszernek nincs megoldása.

12•

$$(b - a)x + (3a - c)y = 1$$

$$(3b - 2c)x + (c - b)y = 2$$

$x = 1$, $y = 2$, azaz $(x, y) = (1, 2)$ az egyetlen megoldás.

Határozzuk meg valamely lépcsős alakját, majd a redukált lépcsős alakját az alábbi mátrixoknak!

13
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

14
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

15 Csak egész számokkal számolva megoldható-e az az egyenletrendszer, melynek bővített mátrixa a következő:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 \\ 7 & 8 & 3 & 7 \\ 11 & 7 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Igen.

Ekvivalensek-e az alábbi egyenletrendszerek?

16
$$\begin{cases} 3x + 2y - 2z = 1 \\ 2x + 3y - 3z = -1 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 2y - 2z = 0 \\ 3x + 3y - 2z = 3 \\ 5x - 3y + 2z = 5 \end{cases}$$

Igen, mindkettőnek $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ az egyetlen megoldása, azaz megoldáshalmazaik megegyeznek.

17
$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = 3 \\ 5x = -4z = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y - 3z = 3 \\ 5x + 5y + 7z = 3 \end{cases}$$

Igen, mindkettő bővített együtthatómátrixának redukált lépcsős alakja a zérussor nélkül

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.8 & 1.8 \\ 0 & 1 & 2.2 & -1.2 \end{bmatrix}$$

18° Egyenletrendszerek közös megoldása. Tekintsük az azonos ismeretleneket tartalmazó $\mathcal{E}_1$ és $\mathcal{E}_2$ egyenletrendszereket. Legyen ezek megoldáshalmaza $\mathcal{M}_1$, illetve $\mathcal{M}_2$. Mutassuk meg, hogy ha $\mathcal{E}$ az $\mathcal{E}_1$ és $\mathcal{E}_2$ egyenletrendszerek egyesítése, azaz $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$, és $\mathcal{M}$ az $\mathcal{E}$ megoldáshalmaza, akkor $\mathcal{M}$ az $\mathcal{M}_1$ és $\mathcal{M}_2$ közös része, azaz $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$.

Vizsgáljuk meg ezt az állítást az alábbi speciális esetekben:

- (a) $\mathcal{E}_1 = \{x + y = 2\}$, $\mathcal{E}_2 = \{x - y = 0\}$;
- (b) $\mathcal{E}_1 = \{x + y = 2, x - y = 0\}$, $\mathcal{E}_2 = \{x - y = 0\}$;
- (c) $\mathcal{E}_1 = \{x + y = 2, x - y = 0\}$, $\mathcal{E}_2 = \{x - y = 1\}$;
- (d) $\mathcal{E}_1 = \{x + y = 2, x - y = 0\}$, $\mathcal{E}_2 = \{0x + 0y = 0\}$;
- (e) $\mathcal{E}_1$ tetszőleges egyenletrendszer, $\mathcal{E}_2 = \{0 = 0\}$.

2.2. Megoldás kiküszöböléssel

E fejezetben alaposabban megismerjük a lineáris egyenletrendszerek megoldásának klasszikus módszerét, a kiküszöbölést.

Elemi sorműveletek A lineáris egyenletrendszerek egyik megoldási módszerének lényege, hogy ekvivalens átalakításokkal olyan alakra hozzuk az egyenletrendszert, melyből visszahelyettesítések után, vagy azok nélkül azonnal leolvasható az eredmény. Az átalakításokat a bővített mátrixon hajtjuk végre úgy, hogy a nekik megfelelő átalakítások az egyenletrendszeren ekvivalens átalakítások legyenek. A 2.9. tételben felsorolt első három ekvivalens átalakítás nem változtatja meg az egyenletrendszer egyenleteinek számát sem. Az egyenletrendszer bővített mátrixán az ezeknek megfelelő átalakításokat elemi sorműveleteknek nevezzük.

2.16. DEFINÍCIÓ: ELEMİ SORMŰVELETEK. Egy mátrix sorain végzett alábbi műveleteket *elemi sorműveleteknek* nevezzük:

1. *Sorcsere*: két sor cseréje.
2. *Beszorzás*: egy sor beszorzása egy nemnulla számmal.
3. *Hozzáadás*: egy sorhoz egy másik sor konstansszorosának hozzáadása.

Természetesen egy sort el is oszthatunk egy nemnulla c számmal, hisz az az $1/c$ -vel való beszorzással egyenértékű. Hasonlóképp levonhatjuk egy sorból egy másik sor c -szeresét, hisz az a $-c$ -szeresének hozzáadásával ekvivalens.

Az elemi átalakításokra a következő jelöléseket fogjuk használni:

1. $S_i \leftrightarrow S_j$: az i -edik és j -edik sorok cseréje.
2. cS_i : az i -edik sor beszorzása c -vel.
3. $S_i + cS_j$: a j -edik sor c -szeresének az i -edik sorhoz adása.

Az elemi sorműveletek mintájára elemi oszlopműveletek is definiálhatók, de azokat ritkán használjuk. Jelölésükre értelemszerűen az $O_i \leftrightarrow O_j$, cO_i , $O_i + cO_j$ formulákat használjuk.

Lépcsős alak Az eddig megoldott egyenletrendszerekben igyekeztünk átlós, vagy legalább átló alatt kinullázott alakra hozni az egyenletrendszert, mint azt például a 2.10. példában tettük. Ez nem mindig sikerül, mert néha nem kívánt elemek is kinullázódnak, de a következőkben definiált lépcsős alakhoz mindig el tudunk jutni.

2.17. DEFINÍCIÓ: LÉPCSŐS ALAK. Egy mátrix *lépcsős*, vagy *sorlépcsős alakú*, ha kielégíti a következő két feltételt:

1. a csupa 0-ból álló sorok (ha egyáltalán vannak) a mátrix utolsó sorai;
2. bármely két egymás után következő nem-0 sorban az alsó sor elején több 0 van, mint a fölötte lévő sor elején.

A nemnulla sorok első zérustól különböző elemét *főelemnek*, *vezérelemnek* vagy *pivotelemnek* hívjuk. Egy főelem oszlopának *főoszlop* vagy *bázisoszlop* a neve.

2.18. PÉLDA: LÉPCSŐS ALAK. A következő mátrixok lépcsős alakúak:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.19. PÉLDA: A LÉPCSŐS ALAK NEM EGYÉRTELMŰ. Egy mátrix elemi sorműveletekkel több különböző lépcsős alakra is hozható, mint azt az alábbi két átalakítás is mutatja. Az első:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[S_3 - 2S_1]{S_2 - S_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_3 - 2S_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

míg a második:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[S_3 - 2S_1]{S_2 - S_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Gauss-módszer A *Gauss-módszer* vagy más néven *Gauss-kiküszöbölés* vagy *Gauss-elimináció* a lineáris egyenletrendszerek megoldásának egy módszere. Lényege, hogy a lineáris egyenletrendszer bővített mátrixát elemi sorműveletekkel lépcsős alakra hozzuk, és abból visszahelyettesítéssel meghatározzuk a megoldás általános alakját. A Gauss-módszer könnyen algoritmizálható, ha sorban haladunk az oszlopokon. A módszerre láttunk már példát, ilyen volt a 2.10. példa első megoldása. Most lássunk két további példát.

2.20. PÉLDA: GAUSS-MÓDSZER, EGY MEGOLDÁS. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert Gauss-módszerrel:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 0 \\ 2x + 2y + 3z &= 2 \\ x + 3y + 3z &= 4 \\ x + 2y + z &= 5 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. Írjuk fel az egyenletrendszer bővített mátrixát, és oszloponként haladva küszöböljük ki – nullázzuk ki – a főelemek alatti elemeket!

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right] & \xrightarrow[S_4 - S_1]{S_2 - 2S_1, S_3 - S_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array} \right] & \xrightarrow{S_2 \leftrightarrow S_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array} \right] & \xrightarrow{S_4 - \frac{1}{2}S_2} \\ & \xrightarrow{S_4 - \frac{3}{2}S_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 3 \end{array} \right] & \Rightarrow \begin{aligned} x + y + 2z &= 0 \\ 2y + z &= 4 \\ -z &= 2 \end{aligned} \end{aligned}$$

A harmadik egyenletből $z = -2$, ezt a másodikba helyettesítve $y = 3$, ezeket az elsőbe helyettesítve kapjuk, hogy $x = 1$, azaz az egyetlen megoldás $(x, y, z) = (1, 3, -2)$. ■

Mit csinálunk akkor, ha a lépcsős alak szerint kevesebb a főelemek, mint az oszlopok száma? Egyelőre bevezetünk két elnevezést, melyek jelentése hamarosan világos lesz: az egyenletrendszer azon változóit, melyek főelemek oszlopaihoz tartoznak, *kötött változóknak*, míg az összes többi változót *szabad változóknak* nevezzük.

2.21. PÉLDA: GAUSS-MÓDSZER, VÉGTELEN SOK MEGOLDÁS. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert Gauss-módszerrel:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 3x_5 &= 1 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. Írjuk fel az egyenletrendszer bővített mátrixát, és oszloponként haladva küszöböljük ki a főelemek alatti elemeket!

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 3 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow[S_3-3S_1]{S_2-S_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{S_3-2S_2} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_3 + x_4 = -1 \end{array} \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer kötött változói a lépcsős alak főoszlopaihoz tartozó változók, azaz x_1 és x_3 . A szabad változók: x_2, x_4, x_5 . A szabad változóknak tetszőleges értékeket adhatunk, a kötöttek értéke kifejezhető velük. Legyen például a szabad változók értéke $x_2 = s, x_4 = t, x_5 = u$. Ezek behelyettesítése után a fenti egyenletek közül először a másodikból kifejezzük x_3 -at, majd azt behelyettesítjük az elsőbe, ahonnan kifejezzük az x_1 -et, azaz a fenti egyenletekből kifejezzük a kötött változókat:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u \\ x_3 &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \end{aligned}$$

Innen az egyenletrendszer megoldása

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(\frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u, s, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t, t, u \right),$$

vagy mátrixjelöléssel

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Később különösen az utóbbi – vektorok lineáris kombinációjára bontással való – felírás lesz hasznos. ■

Világos, hogy ha a szabad változóknak tetszőleges értéket adhatunk, melyből a kötött változók egyértelműen kifejezhetők, akkor a fenti példában mutatott módszerrel az egyenletrendszer összes megoldását leírtuk. Az ilyen módon megadott megoldást az egyenletrendszer *általános megoldásának*, a konkrét paraméterértékekhez tartozó megoldásokat *partikuláris megoldásnak* nevezzük. Például az előző példabeli egyenletrendszer egy partikuláris megoldása az $s = 0, t = 1, u = 2$ értékekhez tartozó

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-2, 0, -1, 1, 2).$$

Lényeges e megoldási módban, hogy a bővített mátrixot lépcsős alakra tudtuk hozni. Ez vajon mindig sikerül?

2.22. TÉTEL: LÉPCSŐS ALAKRA HOZÁS. Bármely mátrix elemi sorműveletekkel *lépcsős* alakra hozható.

BIZONYÍTÁS. Tekintsünk egy tetszőleges $m \times n$ -es mátrixot. A következő eljárás egyes lépéseiben e mátrixnak le fogjuk takarni egy-egy sorát vagy oszlopát. Az egyszerűség kedvéért a letakarás után keletkezett mátrix sorainak és oszlopainak számát ismét m és n fogja jelölni, a_{ij} pedig a letakarások után maradt mátrix i -edik sorának j -edik elemét.

1. Ha az első oszlopban csak 0 elemek állnak, takarjuk le ezt az oszlopot, és tekintsük a maradék mátrixot. Ha ennek első oszlopában ismét csak 0 elemek vannak, azt is takarjuk le, és ezt addig folytassuk, míg egy olyan oszlopot nem találunk, amelyben van nem 0 elem. Ha ilyen oszlopot nem találunk, az eljárásnak vége, a mátrix lépcsős alakú.
2. Ha az első oszlop első sorában álló elem 0, akkor cseréljük ki e sort egy olyannal, melynek első eleme nem 0. Így olyan mátrixot kaptunk, amelyben $a_{11} \neq 0$.
3. Vegyük az i -edik sort $i = 2$ -től $i = m$ -ig, és ha a sor első eleme $a_{i1} \neq 0$, akkor az első sor $-a_{i1}/a_{11}$ -szeresét adjuk hozzá. Mivel $a_{i1} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{11} = 0$, ezért e lépés után az a_{11} alatti elemek 0-vá válnak.
4. A fenti átalakítás után takarjuk le az első sort és az első oszlopot. Ha ekkor nem marad a mátrixban több sor, vége az eljárásnak, a korábban letakart sorokat feltárva megkaptuk a lépcsős alakot. Egyébként ugorjunk vissza az 1. lépéshez, és folytassuk az eljárást.

Világos, hogy ez az eljárás véges sok lépésben véget ér, melynek eredményeként eljutunk az eredeti mátrix egy lépcsős alakjához. ■

Egy *inhomogén lineáris egyenletrendszerhez tartozó homogén lineáris egyenletrendszer*en azt a homogén egyenletrendszert értjük, melyet az inhomogénből a konstans tagok 0-ra változtatásával kapunk.

2.23. PÉLDA: HOMOGEN LINEÁRIS EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSA. Oldjuk meg a 2.21. példabeli egyenletrendszerhez tartozó homogén lineáris egyenletrendszert.

MEGOLDÁS. Oldjuk tehát meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0 \\x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 &= 0 \\3x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 3x_5 &= 0\end{aligned}$$

A megoldáshoz szükségtelen a bővített mátrixot használni, hisz annak utolsó oszlopa az elemi sorműveletek alatt nem változik. Az együtthatómátrix lépcsős alakja ugyanazokkal a sorműveletekkel megkapható, mint a 2.21. példa megoldásában, azaz

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 3 \end{bmatrix} &\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \\x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0 \\2x_3 + x_4 &= 0\end{aligned}$$

Innen a megoldás is ugyanúgy kapható meg, sőt, ugyanaz a lineáris kombináció szerepel benne, csak a konstans tagok nem szerepelnek:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-2s - \frac{3}{2}t - u, s, -\frac{1}{2}t, t, u),$$

vagy mátrixjelöléssel

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A homogén és inhomogén egyenletrendszerek e példából sejtethető kapcsolatára még visszatérünk. ■

Végül egy alkalmazás:

2.24. PÉLDA: SÍKOK METSZÉSVONALÁNAK MEGHATÁROZÁSA. Határozzuk meg az alábbi két sík metszésvonalának explicit (paraméteres) alakját!

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 3x + 4y &= 2 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. A fenti egyenletekkel megadott két sík metszésvonalának meghatározásához, pontosabban a metszésvonal explicit, paraméteres egyenletrendszerének felírásához egyszerűen meg kell oldani a két egyenletből álló egyenletrendszert:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{S_2 - 3S_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ y - 3z &= -1 \end{aligned}$$

Ebből $z = t$ paraméterválasztással $y = -1 + 3t$ és $x = 2 - 4t$, azaz

$$(x, y, z) = (-4t + 2, 3t - 1, t) = (2, -1, 0) + t(-4, 3, 1),$$

vagy mátrixjelöléssel

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Redukált lépcsős alak A 2.10. példa második megoldási módszerében átlós alakra hoztuk az együtthatómátrixot, azaz nem elégedtünk meg azzal, hogy a főelemek alatt kinulláztunk minden együtthatót, hanem a főelemeket 1-re változtattuk a sor beszorzásával, és a főelemek fölött is kinulláztunk minden elemet, más szóval elimináltunk.

2.25. DEFINÍCIÓ: REDUKÁLT LÉPCSŐS ALAK. Egy mátrix *redukált lépcsős*, vagy *redukált sorlépcsős alakú*, ha kielégíti a következő feltételeket:

1. lépcsős alakú;
2. minden főelem egyenlő 1-gyel;
3. a főelemek oszlopaiban a főelemeken kívül minden elem 0;

A főelemet itt *vezéregyesnek* vagy *vezető egyesnek* is szokás nevezni.

2.26. PÉLDA: REDUKÁLT LÉPCSŐS ALAK. A következő mátrixok redukált lépcsős alakúak:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A 2.19. példában láttuk, hogy a lépcsős alak nem egyértelmű.

2.27. PÉLDA: REDUKÁLT LÉPCSŐS ALAK. Hozzuk redukált lépcsős alakra a 2.19. példában szereplő mátrixot.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[S_3 - 2S_1]{S_2 - S_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}S_2} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_3 + 4S_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1 - 3S_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vajon tudunk-e két különböző redukált lépcsős alakra jutni?

Gauss – Jordan-módszer A Gauss – Jordan-módszer, más néven Gauss – Jordan-kiküszöbölés vagy Gauss – Jordan-elimináció a lineáris egyenletrendszerek egy megoldási módszere. Lényege, hogy a lineáris egyenletrendszer bővített mátrixát elemi sorműveletekkel redukált lépcsős alakra hozzuk. Ebből az alakból azonnal leolvasható a megoldás. Adjunk új megoldást a Gauss-módszernél bemutatott egyenletrendszerekre.

2.28. PÉLDA: GAUSS – JORDAN-MÓDSZER, EGY MEGOLDÁS. Oldjuk meg a 2.20. példában felírt egyenletrendszert Gauss – Jordan-módszerrel!

MEGOLDÁS. Felírjuk az egyenletrendszer bővített mátrixát, és a 2.20. példában látott módon eljutunk a lépcsős alakhoz, majd folytatjuk:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right] &\Rightarrow \dots \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{\frac{1}{2}S_2 \\ -S_3}]{\substack{\frac{1}{2}S_2 \\ -S_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{S_1-S_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow[\substack{S_2-\frac{1}{2}S_3 \\ S_1-\frac{3}{2}S_3}]{\substack{S_2-\frac{1}{2}S_3 \\ S_1-\frac{3}{2}S_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{array}{lcl} x & = & 1 \\ y & = & 3 \\ z & = & -2 \end{array} \end{aligned}$$

Tehát az egyenletrendszer egyetlen megoldása $(x, y, z) = (1, 3, -2)$. ■

2.29. PÉLDA: GAUSS – JORDAN-MÓDSZER, VÉGTELEN SOK MEGOLDÁS. Oldjuk meg a 2.21. példabeli egyenletrendszert Gauss – Jordan-módszerrel!

MEGOLDÁS. A 2.21. példában eljutottunk egy lépcsős alakig. Az eljárást folytatjuk, míg a redukált lépcsős alakra nem jutunk.

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 3 & 1 \end{array} \right] &\Rightarrow \dots \Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{S_1-S_2 \\ 1/2S_2}]{\substack{1/2S_2 \\ S_1-S_2}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ &\Rightarrow \begin{array}{lcl} x_1 + 2x_2 & + & \frac{3}{2}x_4 + x_5 = \frac{3}{2} \\ & & x_3 + \frac{1}{2}x_4 = -\frac{1}{2} \end{array} \end{aligned}$$

Végezzük el az $x_2 = s$, $x_4 = t$, $x_5 = u$ helyettesítést, az x_1 és x_3 változók azonnal kifejezhetők. Így a megoldás:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(\frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u, s, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t, t, u \right),$$

vagy mátrixjelöléssel

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Természetesen ugyanazt a megoldást kaptuk, mint a 2.21. példában. ■

A redukált lépcsős alak egyértelműsége Fontos következményei vannak a következő tételnek:

2.30. TÉTEL: A REDUKÁLT LÉPCSŐS ALAK EGYÉRTELMŰ. Minden mátrix redukált lépcsős alakra hozható, amely egyértelmű.

BIZONYÍTÁS. Legyen adva egy valós mátrix. Először lépcsős alakra hozzuk (a 2.22. tétel szerint minden mátrix lépcsős alakra hozható). Azután minden sort elosztunk főelemével, a főelemek helyén így vezéregyesek lesznek. Az első vezéregyes az első sorban van, fölötte nincsenek mátrixelemek. Vegyük a második vezéregyest és elimináljuk a fölötte lévő elemet, amennyiben az nem 0. Mivel e vezéregyes előtt csak zérusok vannak, az elimináció nem változtatja meg a mátrix előző oszlopait. Hasonlóképp vegyük sorra a vezéregyeseket, és elimináljuk a fölöttük lévő elemeket. Az eredményül született mátrix redukált lépcsős alakú.

Belátjuk, hogy az elvégzett elemi sorműveletektől függetlenül, e mátrix egyértelmű (e bizonyítás a [rref] cikkben alapul). Tegyük fel indirekt módon, hogy van egy olyan mátrix, mely elemi sorműveletekkel két különböző redukált lépcsős alakra is hozható. Jelölje ezeket $\mathbf{R}$ és $\mathbf{S}$. Mivel mindketten ugyanazzal a mátrixszal ekvivalensek, elemi sorműveletekkel egymásba alakíthatóak, vagyis egymással is ekvivalensek. Válasszuk ki oszlopaik közül azt a balról első oszlopot, melyben különböznek, valamint az összes előtte álló vezéroszlopot. Az így kapott mátrixokat jelölje $\mathbf{R}'$ és $\mathbf{S}'$. Tehát $\mathbf{R}' \neq \mathbf{S}'$, mert különböznek az utolsó oszlopukban. Például, ha

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

akkor

$$\mathbf{R}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{S}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tekintsük az így kapott $\mathbf{R}'$, $\mathbf{S}'$ mátrixokat egy-egy egyenletrendszer bővített együttthatómátrixának. Ezek általános alakja tehát a következő:

$$\mathbf{R}' = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & r_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & r_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & r_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \text{vagy} \quad \mathbf{R}' = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right]$$

és

$$\mathbf{S}' = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & s_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \text{vagy} \quad \mathbf{S}' = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Mivel oszlopok kihagyása nem változtat a sorkvivalencián – hisz elemi sorműveletekben műveletet csak egy oszlopon belül végzünk –, ezért az $\mathbf{R}'$ és $\mathbf{S}'$ mátrixok ekvivalensek, azaz a hozzájuk tartozó két egyenletrendszernek ugyanaz a megoldása. Ez csak úgy lehet, ha vagy minden $i = 1, \dots, k$ indexre $r_i = s_i$, vagy egyik egyenletrendszer sem oldható meg, azaz mindkét esetben azt kaptuk, hogy $\mathbf{R}' = \mathbf{S}'$, ami ellentmondás. Ez az ellentmondás bizonyítja, hogy a kiinduló $\mathbf{R} \neq \mathbf{S}$ feltevés helytelen volt, tehát $\mathbf{R} = \mathbf{S}$. ■

Szimultán egyenletrendszerek Gyakori feladat az alkalmazásokban, hogy sok olyan egyenletrendszert kell megoldani, amelyek csak a konstans tagokban térnek el egymástól. A kiküszöböléses módszerekkel ezek egyszerre is megoldhatók alig több erőforrás felhasználásával, mint ami egyetlen egyenletrendszer megoldásához szükséges.

2.31. DEFINÍCIÓ: SZIMULTÁN EGYENLETRENDSZEREK. Több egyenletrendszer halmazát *szimultán egyenletrendszernek* nevezünk, ha együtthatómátrixaik azonosak.

2.32. PÉLDA: SZIMULTÁN EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSA. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket!

$$\begin{array}{lll} x + y + z = 3 & u + v + w = 3 & r + s + t = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 7 & 2u + 3v + 2w = 7 & 2r + 3s + 2t = 0 \\ 2x + 2y + 3z = 6 & 2u + 2v + 3w = 7 & 2r + 2s + 3t = 1 \end{array}$$

MEGOLDÁS. Mivel e három egyenletrendszer együtthatómátrixa azonos, a bal oldal átalakítását elég egyszer elvégezni, a jobb oldalak átalakítását pedig vele együtt. Ehhez a szimultán egyenletrendszerre a következő bővített mátrixot érdemes képezni:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 7 & 7 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 7 & 1 \end{array} \right]$$

A megoldáshoz használjuk a Gauss–Jordan-módszert:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 7 & 7 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 7 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow[S_3 - 2S_1]{S_2 - 2S_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[S_1 - S_3]{S_1 - S_2} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right], \end{aligned}$$

és ebből leolvasható mindhárom egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ha tudjuk, hogy több egyenletrendszerből álló szimultán egyenletrendszerről van szó, mindegyik egyenletrendszerben használhatjuk ugyanazokat a változókat.

2.33. PÉLDA: SZIMULTÁN EGYENLETRENDSZER BŐVÍTETT MÁTRIXA. Oldjuk meg azt a szimultán egyenletrendszert, melynek bővített mátrixa

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

MEGOLDÁS. A Gauss–Jordan-módszer lépései:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{S_2 - \frac{5}{2}S_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{2S_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{S_1 - S_2} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array} \right] & \xrightarrow{\frac{1}{2}S_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Kötött változók száma, mátrix rangja A redukált lépcsős alak egyértelműségének egy nyilvánvaló, de fontos folyománya az alábbi eredmény:

2.34. KÖVETKEZMÉNY: FŐELEMENK OSZLOPAI. Egy valós mátrix bármely lépcsős alakjában a főelemek ugyanazokban az oszlopokban vannak, tehát ezek száma is független a lépcsős alaktól.

A bizonyítás azonnal adódik abból, hogy bármely lépcsős alak főlemeiből kapjuk a redukált lépcsős alak vezéregyeseit, így bármely lépcsős alak főelemei ugyanott vannak, ahol a vezéregyesek, a redukált lépcsős alak pedig egyértelmű.

Ebből az is következik, hogy bármely valós mátrix esetén

$$\begin{aligned} &\text{bármely lépcsős alak főlemeinek száma} = \\ &\text{bármely lépcsős alak nemzérus sorainak száma} = \\ &\text{a redukált lépcsős alak vezéregyeseinek száma.} \end{aligned}$$

Ez a következő definícióhoz vezet.

2.35. DEFINÍCIÓ: MÁTRIX RANGJA. Egy mátrix valamely lépcsős alakjában a nemnulla sorok számát a mátrix *rangjának* nevezzük. Az $\mathbf{A}$ mátrix rangját $r(\mathbf{A})$ jelöli.

2.36. PÉLDA: MÁTRIX RANGJÁNAK KISZÁMÍTÁSA. Számítsuk ki az alábbi mátrixok rangját!

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

MEGOLDÁS. Az első és második mátrix lépcsős alakú, rangjuk azonnal leolvasható: 1 és 2. A harmadik és negyedik mátrix elemi sorműveletekkel

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \text{ illetve } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

alakra hozható, tehát a rang 4, illetve 2. ■

2.37. ÁLLÍTÁS: KÖTÖTT ÉS SZABAD VÁLTOZÓK SZÁMA. Ha egy n -ismeretlenes egyenletrendszer megoldható, és együtthatómátrixának rangja r , akkor a Gauss- vagy a Gauss–Jordan-módszerrel kapott megoldásában a kötött változók száma r , a szabad változók száma $n - r$.

Fontos megjegyezni, hogy egyelőre csak annyit tudunk bizonyítani, hogy ha az együtthatómátrix és a bővített mátrix rangja r , akkor az egyenletrendszernek *van olyan megoldása*, amelyben a kötött változók száma r , a szabad változóké $n - r$, és egy ilyen megoldás megkapható a Gauss- vagy a Gauss–Jordan-módszerrel. Ez abból következik, hogy a rang megegyezik a főelemek számával, az pedig a kötött változók számával. Mi történik azonban, ha más módszerrel keresünk megoldást, vagy ha például felcseréljük az ismeretlenek sorrendjét? Arról még nem tudunk semmit, hogy a mátrix rangja vajon megváltozik-e, ha fölcseréljük az oszlopait. A változók sorrendjének cseréje viszont oszlopcserét okoz az együtthatómátrixon. A következő fejezetben be fogjuk azt is látni, hogy a kötött és szabad változók száma független a változók sorrendjétől, sőt a megoldás módszerétől is.

2.38. PÉLDA: KÖTÖTT ÉS SZABAD VÁLTOZÓK SZÁMA. Egy lineáris egyenletrendszer bővített együtthatómátrixának egy lépcsős alakja a következő:

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 0.145 & 0.016 & 0.755 & 0.649 & 0.625 & 0.426 & 0.859 & 0.040 \\ 0.000 & 0.901 & 0.015 & 0.397 & 0.076 & 0.690 & 0.007 & 0.755 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.969 & 0.085 & 0.889 & 0.304 & 0.296 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.368 & 0.027 & 0.497 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{array} \right].$$

Látható, hogy a mátrix rangja és így kötött változóinak száma 4, az egyenletrendszer ismeretleneinek száma 7, a szabad változók száma 3.

Kiküszöbölés $\mathbb{Z}_p$ -ben* Ha p prím, akkor a modulo p maradékosztályok közti műveletek rendelkeznek minden olyan tulajdonsággal, melyet a kiküszöbölés során a valós számok körében használtunk. Ennek következtében a Gauss- és Gauss–Jordan-módszerek minden további nélkül használhatók $\mathbb{Z}_p$ fölötti egyenletrendszerekre is. (Lásd még a ?? . oldalon az algebrai tesztől írtakat.)

2.39. PÉLDA: EGYENLETRENDSZER $\mathbb{Z}_2$ FÖLÖTT. 4-bites kódszavakat küldünk, bitjeit jelölje a, b, c és d . Hibajavító kódot készítünk úgy, hogy minden kódszó végére három paritásbitet teszünk, nevezetesen a $b+c+d$, $a+c+d$ és $a+b+d$ bitet. Az összeadás itt természetesen $\mathbb{Z}_2$ fölött értendő. Például a 0110 kódszó helyett a 0110011 kódszót küldjük. Egy üzenetben az egyik ilyen 7-bites kódszó első 4 bitjét a vevő szerkezet bizonytalanul érzékeli, amit kapunk, az a $(?, ?, ?, ?, 1, 0, 1)$ kódvektor. Mi lehetett az eredeti üzenet, ha az utolsó 3 bit biztosan jó?

MEGOLDÁS. Az a, b, c és d bitek ismeretlenek, csak annyit tudunk, hogy

$$\begin{aligned} b + c + d &= 1 \\ a + \quad c + d &= 0 \\ a + b + \quad d &= 1 \end{aligned}$$

Oldjuk meg ezt az egyenletrendszert Gauss–Jordan kiküszöböléssel $\mathbb{Z}_2$ fölött. Ne felejtsük, hogy $\mathbb{Z}_2$ -ben $1 + 1 = 0$, így $1 = -1$, azaz a kivonás nem különbözik az összeadástól.

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{S_3 + S_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{S_3 + S_2} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{\substack{S_2 + S_3 \\ S_1 + S_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Visszaírva egyenletrendszerre:

$$\begin{aligned} a + \quad c &= 0 \\ b + c &= 1 \\ d &= 0 \end{aligned}$$

Az utolsó egyenletből $d = 0$, a másodikból $b = 1 - c$, azaz $b = 1 + c$ és az elsőből $a = -c$, azaz $a = c$. Eszerint c szabad változó, legyen értéke s , a többi kötött. A megoldás általános alakban $(a, b, c, d) = (s, 1 + s, s, 0)$, azaz $(a, b, c, d) = (0, 1, 0, 0) + s(1, 1, 1, 0)$. Az $s = 0$ és az $s = 1$ értékekhez tartozó megoldások tehát: $(0, 1, 0, 0)$ és $(1, 0, 1, 0)$.

Ha az egyenletrendszert vektoregyenletnek tekintjük, akkor az első megoldás azt mutatja, hogy az együtthatómátrix második oszlopa megegyezik a jobb oldallal (és valóban), a második megoldás pedig azt, hogy az első és a harmadik oszlop összege a jobb oldalt adja.

Megjegyezzük e kódról, melyet $[7, 4, 3]_2$ bináris *Hamming-kódnak* neveznek, hogy a kód 16 szóból áll, bármely szavának bármely 4 bitje egyértelműen meghatározza a maradék hármát. Így ha legföljebb 3 bit megváltozik egy szóban, akkor az kimutatható, és ha csak egy bit változik meg, az kijavítható. ■

2.40. PÉLDA: EGYENLETRENDSZER $\mathbb{Z}_5$ FÖLÖTT. Oldjuk meg az alábbi két egyenletrendszert $\mathbb{Z}_5$ fölött.

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 1 & 2x + 3y &= 1 \\ 3x + 2y &= 4 & 3x + 4y &= 3 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. A számolás megkönnyítésére vagy készítsünk osztási táblát, vagy használjuk a ?? . oldalon található ?? . ábra szorzástábláját.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{3S_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{S_2 - 3S_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

azaz az egyenletrendszer alulhatározott. Itt persze ez nem azt jelenti, hogy végtelen sok megoldás van, hanem azt, hogy legalább egy paraméter végigfut $\mathbb{Z}_5$ összes elemén. Szabad változó az y , legyen $y = s$, így $x = 3 - 4s = 3 + s$, tehát $(x, y) = (3 + s, s)$, azaz a vektorok mátrixjelölésével:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s \in \mathbb{Z}_5$$

Mivel $\mathbb{Z}_5$ -nek öt eleme van, ezért s -nek is ennyi értéke lehet, azaz az első egyenletrendszer összes megoldása $(3, 0)$, $(4, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 4)$. A másik egyenletrendszer megoldása:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{3S_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{S_2 - 3S_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{array} \right],$$

amiből $2y = 4$, azaz $y = 2$, $x + 4 \cdot 2 = 3$, azaz $x = 0$. Tehát a megoldás $(x, y) = (0, 2)$. ■

Bizonyítás

olyan sorművelet, mely azt visszaalakítja.

- 1• **Sorműveletek reverzibilitása.** Mutassuk meg, hogy minden elemi sorművelettel átalakított mátrixhoz van egy

2.3. Kiküszöbölés a gyakorlatban

E szakaszban a Gauss- és Gauss–Jordan-kiküszöbölés gyakorlati alkalmazásaiban fontos kérdéseket vizsgálunk. Mennyi a különböző változatok műveletigénye? Mennyire megbízható a végeredmény, ha ismerjük bemeneti adataink pontosságát? Hogyan csökkenthető a számítások közben fellépő hibák nagysága?

A kiküszöbölés műveletigénye Ahhoz, hogy a lineáris egyenletrendszerek különböző megoldási módszereit össze tudjuk hasonlítani, azt is tudnunk kell, mennyi a műveletigényük. Szokás az algoritmusok műveletigényét *flopban* mérni (flop = floating point operation), ahol 1 flop egy lebegőpontos alapműveletet jelent (+, −, * vagy /). A processzorok sebességét gyakran az egy másodperc alatt elvégzett flopsok számával mérik (itt a flops a floating point operation per second rövidítése). Mivel a szorzás (osztás) processzorideje bizonyos gépeken hosszabb lehet az összeadásénál (kivonásénál), ezért külön fogjuk számolni e műveletek számát.

Ha egy algoritmus műveletigénye a feladat méretének egy polinomja, általában elég a legmagasabb fokú tagot figyelni, ugyanis egy algoritmus műveletigénye csak nagyobb méret esetén kezd érdekes lenni, a méret növekedtével pedig az alacsonyabb fokú tagok részesedése a polinom értékéből elhanyagolható. Precízen fogalmazva ennek oka, hogy tetszőleges k -nál kisebb fokú $p(x)$ polinomra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k + p(n)}{n^k} = 1.$$

2.41. PÉLDA: FLOP ÉS FLOPS. Egy algoritmus műveletigénye n méretű bemenet esetén $n^3 + 1000n$, egy másiké $n^3 - 100n^2$ flop. Milyen gyorsan futnak le e programok egy 10 gigaflops sebességű gépen, ha $n = 10000$?

MEGOLDÁS. $10 \text{ gigaflops} = 10 \cdot 10^9 \text{ flops}$, $n^3 + 1000n = (10^4)^3 + 1000(10^4) = 10^{12} + 10^7$, $n^3 - 100n^2 = (10^4)^3 - 100(10^4)^2 = 10^{12} - 10^{10}$, vagyis a két futási idő $(10^{12} + 10^7)/10^{10} = 100.001$, illetve $(10^{12} - 10^{10})/10^{10} = 99$ másodperc. ■

2.42. TÉTEL: A KIKÜSZÖBÖLÉS MŰVELETIGÉNYE. A Gauss- és a Gauss–Jordan-módszer műveletigénye egy n -ismeretlenes, n egyenletből álló egyenletrendszer esetén egyaránt

$$\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6} \text{ összeadás/kivonás, } \frac{n^3}{3} + n^2 - \frac{n}{3} \text{ szorzás/osztás.}$$

azaz összesen

$$\frac{2}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{7}{6}n \text{ flop,}$$

azaz jó közelítéssel $2n^3/3$ flop.

BIZONYÍTÁS. Először felelevenítünk két elemi összefüggést, amire a bizonyításban szükség van:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

A továbbiakban feltételezzük, hogy a kiküszöbölés során a főátlóba kerülő elemek egyike sem 0. A Gauss-módszernél a főátló alatti elemek eliminálásához $\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n$ összeadás és $\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n$ szorzás szükséges. A visszahelyettesítés $\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$ összeadásból és $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ szorzásból áll.

Ha a Gauss – Jordan-módszernél a főátló alatti elemek kiküszöbölése mellett a főátló elemeit is 1-re változtatjuk, az $\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n$ összeadás mellett $\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$ szorzás szükséges. A főátló feletti elemek eliminálásához $\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$ összeadás és ugyanennyi szorzás kell. A számítások részletezését az olvasóra bízunk. ■

Numerikusan instabil egyenletrendszerek A gyakorlati feladatokban gyakran mérési eredményekkel, így nem pontos adatokkal dolgozunk.

2.43. PÉLDA: INSTABIL EGYENLETRENDSZER. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert!

$$6.73x - 8.97y = 5.61$$

$$4.79x - 6.39y = 3.99$$

Mutassuk meg, hogy az együtthatók 0.01-dal való megváltoztatása a megoldások nagy megváltozását okozhatja, sőt az is elérhető, hogy az egyenletrendszernek ne legyen, vagy épp végtelen sok megoldása legyen!

MEGOLDÁS. Az egyenletrendszer megoldása: $x = 1.5$, $y = 0.5$. Az első egyenletben az x együtthatóját újra mérjük, és másodszorra egy századdal kevesebbnek, 6.72-nek adódik. Oldjuk meg ezt az egyenletrendszert is! Az eredmény meglepő módon nagyon messze van az előzőtől: $x \approx -2.26$, $y \approx -2.32$. Újabb mérés az y együtthatóját -8.96 -nak mutatja. E két együttható egy századdal való megváltozása után a megoldás messze van mindkét előző eredménytől: $x \approx 4.35$, $y \approx 2.64$. Ha végül az első egyenlet konstans tagját is megváltoztatjuk egy századdal 5.62-re, akkor $x \approx 7.21$, $y \approx 4.78$ lesz az eredmény, ha pedig 5.60-ra, akkor – csemegeként – ismét a kerek $x = 1.5$, $y = 0.5$ értékeket kapjuk.

A fenti egyenletrendszeren tovább változtatva az együtthatókat az is elérhető, hogy végtelen sok megoldása legyen:

$$6.72x - 8.96y = 5.60$$

$$4.80x - 6.40y = 4.00$$

ugyanis itt a két egyenlet egymás konstansszorosa. Ha pedig a második egyenlet konstans tagját visszaírjuk 3.99-re, egy ellentmondó egyenletrendszert kapunk. ■

Ilyen megbízhatatlan eredményekkel a gyakorlatban semmit nem lehet kezdeni!

NUMERIKUSAN INSTABIL EGYENLETRENDSZER. Az olyan egyenletrendszert, melyben az együtthatók vagy a konstans tagok kis változása a megoldásban nagy változást okoz, *numerikusan instabilnak* vagy *rosszul kondicionáltnak* nevezzük. Egyébként *numerikusan stabil*, illetve *jól kondicionált* egyenletrendszerről beszélünk.

Világos, hogy a fentiek nem precíz matematikai fogalmak. Később precízen definiálva számmal fogjuk mérni a kondicionáltság fokát, de azt, hogy egy adott egyenletrendszer megoldásai elfogadhatóak-e vagy nem, csak a feladat döntheti el.

A numerikus instabilitás okát szemlélteti a ?? ábra. Kétváltozós egyenletrendszerek esetén, ha a két egyenes grafikonja „közel” van egymáshoz, azaz majdnem egybe esnek, akkor kis változások az egyeneseken messze vihetik a metszéspontot, de párhuzamossá is tehetik a két egyenest.

Ha a gyakorlatban numerikusan instabil egyenletrendszerrel találkozunk, vizsgáljuk meg, hogy az egyenleteink közti „majdnem” lineáris összefüggőség mögött nem valódi lineáris összefüggőség van-e kis mérési hibával.

A lebegőpontos számábrázolás Tudjuk, hogy minden valós szám fölírható tizedestört alakban. Ha a szám racionális, azaz fölírható két egész szám hányadosaként, akkor a tizedes tört alak véges vagy végtelen periodikus. Az irracionális számok tizedes tört alakja mindig végtelen sok számjegyből áll. Véges tizedes tört alakkal – márpedig a számítógépek csak ilyenek kezelésére képesek – a végtelen tizedestörteket csak közelíteni tudjuk. A lebegőpontos számábrázolás alapötlete az, hogy egy tízhatvánnyal való szorzással minden szám „értékes jegyeit” a tizedes ponthoz képest azonos helyre „toljuk” (odalebegtetjük). A számok tudományos vagy exponenciális jelölésének normált alakjában ez a hely az első értékes (nem nulla) szám után van. Például $0.123 = 1.23 \cdot 10^{-1}$, $0.000321 = 3.21 \cdot 10^{-4}$, $123000 = 1.23 \cdot 10^5$, $.321 \cdot 10^4 = 3.21 \cdot 10^3$.

A számrendszer alapja nem csak 10 lehet. Legyen b egy 1-nél nagyobb egész. Megmutatható, hogy minden valós c szám felírható b alapú számrendszerben, azaz

$$\pm a_0 a_1 \dots a_k . a_{k+1} \dots a_n \dots$$

alakban, ahol a_i egész, $a_0 \neq 0$ és $0 \leq a_i \leq b-1$. Ha $b = 2$, akkor a_i lehetséges értékei 0 és 1, ha $b = 10$, akkor a_i csak a 0, 1, ..., 9 jegyek valamelyike lehet. A félreértés elkerülésére a számrendszer alapját a szám után alsó indexbe lehet írni. Pl. 101101_2 egy kettes, míg 101101_3 egy hármas számrendszerbeli számot jelöl. A c szám b alapú fenti felírása azt jelenti, hogy

$$c = \pm \left(a_0 b^k + a_1 b^{k-1} + \dots + a_k b^0 + a_{k+1} \frac{1}{b} + \dots + a_{k+n} \frac{1}{b^n} + \dots \right)$$

Például a kettes számrendszerbeli 1001.101_2 szám értéke

$$1001.101_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 + 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2^3} = 8 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = 9\frac{5}{8} = 9.625.$$

2.44. DEFINÍCIÓ: LEBEGŐPONTOS SZÁMOK. A b alapú, p -jegyű (vagy p értékes jegyű, p pontosságú) *lebegőpontos számok* közé tartozik a 0, valamint a

$$(-1)^s a_0 . a_1 a_2 \dots a_{p-1} \cdot b^e,$$

alakú számok, ahol s értéke 0 vagy 1 aszerint, hogy pozitív vagy negatív számról van szó, $a_0 \neq 0$, $0 \leq a_i \leq b-1$ minden $i = 0, 1, \dots, p-1$ indexre és e egész szám. Egy ilyen alakú szám értéke

$$(-1)^s \left(a_0 + a_1 \frac{1}{b} + a_2 \frac{1}{b^2} + \dots + a_{p-1} \frac{1}{b^{p-1}} \right) \cdot b^e.$$

A reprezentáció teljes leírásához b és p értéke mellett ismernünk kell e maximális és minimális értékét ($e_{\max}$, $e_{\min}$).

2.45. PÉLDA: LEBEGŐPONTOS SZÁMOK ÉRTÉKE. Adjuk meg az alábbi lebegőpontos bináris számok értékét tízes számrendszerben:

$$1.001 \cdot 2^1, \quad 1.11 \cdot 2^3, \quad 1.1 \cdot 2^{-3}.$$

MEGOLDÁS. $1.001_2 \cdot 2^1 = 10.01_2 = 2 + \frac{1}{4} = 2.25$, $1.11_2 \cdot 2^3 = 1110_2 = 14$, $1.1_2 \cdot 2^{-3} = 0.0011_2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16} = 0.1875$. ■

2.46. PÉLDA: LEBEGŐPONTOS SZÁMOK HALMAZA. Mely számok ábrázolhatók a $b = 2$, $p = 3$, $-1 \leq e \leq 1$ paraméterű lebegőpontos számokkal?

MEGOLDÁS. Az adott paraméterű lebegőpontos számok halmaza – kihasználva, hogy a definíció szerint a_0 nem lehet 0, tehát értéke csak 1 lehet – a következő:

$$\left\{ \pm \left(1 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} \right) \cdot 2^e : a_1, a_2 \text{ értéke } 0 \text{ vagy } 1, -1 \leq e \leq 1 \right\} \cup \{0\}.$$

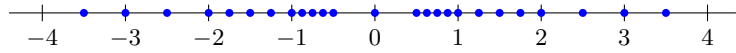
Tehát a halmaz pozitív elemei – jelezve e értékét is:

$$\underbrace{\frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}}_{e=-1}, \underbrace{1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}}_{e=0}, \underbrace{2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}}_{e=1}.$$

E számok tizedestört alakban fölírva:

$$.5, .625, .75, .875, 1, 1.25, 1.5, 1.75, 2, 2.5, 3, 3.5.$$

A számok eloszlását mutatja a 2.6. ábra. ■



2.6. ábra. Lebegőpontos számok $b = 2$, $p = 3$, $-1 \leq e \leq 1$ esetén.

IEEE 754 a lebegőpontos aritmetika nemzetközi szabványa, melynek szám-talan hardver- és szoftverimplementációja van. 1985-ös változata még csak bináris számábrázolást definiált, 2008-as változata már a decimális számábrázolást is. Az IEEE 754-2008 öt alapformátumot ismer: 32, 64 és 128 bites bináris (más néven single, double, quad), valamint 64 és 128 bites decimális (double, quad) ábrázolást. Ezen kívül ábrázolja a -0 -t (pl. a 0 -hoz való balról tartás jelzésére), szubnormális (azaz bizonyos, az alulcsordulás tartományába eső számokat), a két végtelent ($+\infty$, $-\infty$), és két nem-számot (NaN = not a number). A szabvány előírja több aritmetikai művelet, ötféle kerekítési szabály és öt kivétel kezelés megvalósítását (érvénytelen művelet, pl. negatív számból gyökvonás, 0 -val osztás, túlcsordulás, alulcsordulás, nem egzakt eredmény jelzése).

A lebegőpontos és a valós számok között az fl függvény létesít kapcsolatot (fl a floating point kifejezésből). Legyen $x = a_0.a_1a_2 \dots a_{p-1}a_p \dots \cdot 10^e$ egy tetszőleges pozitív valós szám. Az x szám p értékes jegyre való közelítése

$$\text{fl}(x) = \begin{cases} a_0.a_1a_2 \dots a_{p-1} \cdot 10^e & \text{ha } 0 \leq a_p < 5, \\ (a_0.a_1a_2 \dots a_{p-1} + \frac{1}{10^{p-1}}) \cdot 10^e & \text{ha } 5 \leq a_p \leq 9, \end{cases}$$

vagyis ha az a_p 5-nél kisebb, lefelé, egyébként fölfelé kerekítünk. Az $x \mapsto \text{fl}(x)$ leképezést *kerekítésnek* is nevezik. A valósok kerekítési szabálya más, 10-től különböző alap esetén is hasonlóan definiálható. A számítógépek a kerekítésnek más módját is ismerik és használják.

A modern számítógépek nagy részében a processzor az IEEE 754 szabvány szerint kezeli a lebegőpontos számokat (ld. a széljegyzetet).

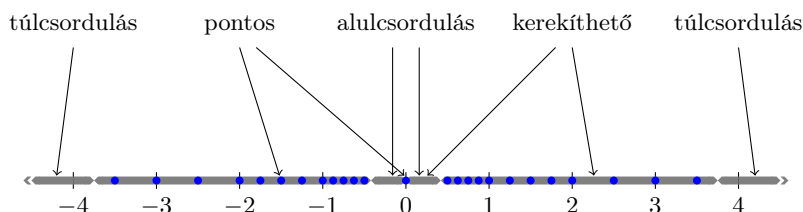
Műveletek lebegőpontos számokkal Jelölje $\circ$ a négy alpművelet valamelyikét, és $\mathcal{F}$ a lebegőpontos számok egy halmazát. A lebegőpontos számok közti műveletek eredménye négy csoportba sorolható:

1. $x \circ y \in \mathcal{F}$, azaz az eredmény *pontos*;
2. $x \circ y$ nem $\mathcal{F}$ -beli, de $\mathcal{F}$ -belire *kerekíthető*;
3. $|x \circ y|$ nagyobb minden $\mathcal{F}$ -belire kerekíthető számnál: ezt nevezzük *túlcsordulásnak*;
4. $|x \circ y|$ kisebb minden $\mathcal{F}$ -belire kerekíthető pozitív számnál: ezt nevezzük *alulcsordulásnak*;

Amikor a számítógép kiírja a számokat tízes számrendszerbeli kerekítést végez, ha viszont kettes számrendszerben számol, az eredményt kettes számrendszerben kerekíti. Erre mutatunk egy leegyszerűsített példát.

2.47. PÉLDA: ALAPMŰVELETEK LEBEGŐPONTOS SZÁMOKKAL. A fenti négy eset mindegyikére keressünk példát a 2.46. példabeli lebegőpontos ábrázolás számaival. Vigyázzunk, itt nem a tízes számrendszerben kell kerekíteni!

MEGOLDÁS. Pontos az eredménye például az $1 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$ vagy az $1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ műveleteknek, kerekíthető az eredménye a $\frac{7}{8} \cdot \frac{3}{4} = \frac{21}{32} = .65625 \approx .625 = \frac{5}{8}$, vagy $\frac{3}{2} : \frac{7}{4} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{7} = \frac{6}{7} \approx .85714 \approx .875 = \frac{7}{8}$. A kerekítéseket úgy végezzük, hogy mindig a legközelebb eső lebegőpontos számra kerekítünk. Túlcsordul például a $\frac{7}{2} + \frac{5}{2} = 6$ és a $-\frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} = -\frac{35}{4}$ művelet, míg alulcsordul a $-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$ művelet. Ez utóbbi 0 -ra kerekíthető e számábrázolásban. ■



2.7. ábra. A kerekíthető, a pontos, az alul- és túlsorduló számhalmazok lebegőpontos számábrázolás esetén $b = 2$, $t = 3$, $-1 \leq e \leq 1$ paraméterek mellett. A 0 pontos érték, az alúlsorduló számok – feladattól függően – kerekíthetők 0-ra.

Szemléltetésül ábrázoljuk az előbbi példa számtartományait:

Mint láttuk, általában

$$\text{fl}(x + y) \neq \text{fl}(x) + \text{fl}(y), \text{ és } \text{fl}(xy) \neq \text{fl}(x) \text{fl}(y).$$

A lebegőpontos aritmetikában több azonosság sem áll fenn, például az asszociativitás, azaz ha x , y és z egy lebegőpontos számábrázolás számai, általában

$$\text{fl}(\text{fl}(x + y) + z) \neq \text{fl}(x + \text{fl}(y + z)).$$

Egy valódi példa látható a széljegyzetben.

```
> a=1; b=c=1.5*10^(-16);
> a+(b+c)=(a+b)+c
ans = 0
```

2.8. programkód. Ha $a = 1$, $b = c = 1.5 \cdot 10^{-16}$, akkor a processzor aritmetika szerint $a + (b + c) \neq (a + b) + c$.

Részleges főelemkiválasztás A következő példákban csak tízes számrendszerbeli aritmetikát használunk. A számításokat úgy kell elvégezni, hogy az adott pontosságnak megfelelően minden részeredményt p értékes jegyre kerekítünk.

2.48. PÉLDA: GAUSS-MÓDSZER LEBEGŐPONTOS SZÁMOKKAL. Oldjuk meg az alábbi – numerikusan stabil – egyenletrendszert pontosan, majd 3 értékes jegy pontossággal számolva.

$$\begin{aligned} 10^{-4}x + y &= 2 \\ x - y &= 0 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. Pontosan számolva

$$\left[\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{S_2 - 10^4 S_1} \left[\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 0 & -1 - 10^4 & -2 \cdot 10^4 \end{array} \right]$$

amiből az eredmény $x = y = \frac{2 \cdot 10^4}{1 + 10^4}$. Igazolható, hogy az egyenletrendszer numerikusan stabil, ami azt jelenti, hogy például 10^{-4} helyébe 0-t helyettesítve, vagyis kicsit változtatva egy együtthatót, a kapott

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

egyenletrendszer megoldása csak kicsit különbözik az előzőtől: $x = y = 2$. Végezzük most el a Gauss-kiküszöbölést 3 értékes jeggel számolva:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{S_2 - 10^4 S_1} \left[\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 0 & -1 - 10^4 & -2 \cdot 10^4 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 0 & -10^4 & -2 \cdot 10^4 \end{array} \right],$$

ahol a közelítésnél a $\text{fl}(-1 - 10^4) = -10^4$ összefüggést használtuk. Az így kapott egyenletrendszernek viszont $x = 0$, $y = 2$ a megoldása, ami nagyon messze van az eredeti egyenletrendszer megoldásától! Most végezzünk egy apró változtatást: először cseréljük fel a két egyenletet!

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 10^{-4} & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{S_2 - 10^{-4} S_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 + 10^{-4} & 2 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right],$$

amelynek megoldása $x = y = 2$, ami nagyon közel van a pontos megoldáshoz! ■

Mi az oka a két megoldás közti különbségnek, és fel tudnánk-e használni minél jobb megoldás megtalálásában?

Mindkét megoldásban az első egyenlet konstansszorosát hozzáadtuk a második egyenlethez, de az első esetben a kisebb, a másodikban az első oszlop nagyobb elemét választottuk főelemnek. Amikor a kisebbet választottuk, akkor az első sort egy kis számmal osztottuk, vagyis reciprokával – egy nagy számmal – szoroztuk, és ezt adtuk a második sorhoz. A nagy számmal való beszorzás következtében a második egyenlet együtthatóit „elnyomták” e nagy számok, nagyon megváltoztatva az egyenletet, aminek következtében a megoldások is nagyon megváltoztak! A $\text{fl}(-1 - 10^4) = -10^4$ kerekítés hatása, vagyis a -1 „eltüntetése”, ekvivalens azzal, mintha az eredeti egyenletrendszer helyett a következőt kéne megoldani:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

És ennek valóban $x = 0$, $y = 2$ a megoldása! Amikor viszont az első oszlop nagyobbik elemét választottuk főelemnek, a sort egy kis számmal kellett beszorozni, és ezt hozzáadni a másik sorhoz, vagyis kerekítéskor az eredeti egyenlet együtthatói megmaradtak, az egyenletrendszer kevésbé torzult. Ennek alapján megfogalmazunk egy fontos szabályt.

RÉSZLEGES FŐELEMKIVÁLASZTÁS (RÉSZLEGES PIVOTÁLÁS). A Gauss-féle kiküszöbölési eljárás során, lebegőpontos adatokkal dolgozva minden oszlopban a szóbajöhető elemek közül – sorcserék segítségével – mindig a legnagyobb abszolút értékűt választjuk főelemnek!

Bizonyos – a gyakorlatban ritkán előforduló – esetekben jobb eredmény kapható a *teljes főelemkiválasztás* módszerével. Ekkor főelemnek az összes még hátralévő elem abszolút értékben legnagyobbikát választjuk. Itt oszlopcserékre is szükség van, és műveletigényesebb is ez az eljárás, ezért ritkán alkalmazzák.

2.49. PÉLDA: RÉSZLEGES FŐELEMKIVÁLASZTÁS. Részleges főelemkiválasztással hozzuk lépcsős alakra az alábbi mátrixot!

$$\begin{bmatrix} 1.8 & 3.0 & 3.0 & 3.7 & 7.5 \\ 3.6 & 3.2 & 3.6 & 6.2 & 7.8 \\ 7.2 & 3.6 & 4.8 & 2.4 & 1.2 \\ 2.4 & 5.4 & 5.2 & 2.6 & 5.2 \end{bmatrix}$$

MEGOLDÁS. Az első oszlop legnagyobb eleme a második sorban van, így az első és a második sor cseréjével kezdünk:

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_3} \begin{bmatrix} \mathbf{7.2} & 3.6 & 4.8 & 2.4 & 1.2 \\ 3.6 & 3.2 & 3.6 & 6.2 & 7.8 \\ 1.8 & 3.0 & 3.0 & 3.7 & 7.5 \\ 2.4 & 5.4 & 5.2 & 2.6 & 5.2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} S_2 - S_1/2 \\ S_3 - S_1/4 \\ S_4 - S_1/3 \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} \mathbf{7.2} & 3.6 & 4.8 & 2.4 & 1.2 \\ 0.0 & 1.4 & 1.2 & 5.0 & 7.2 \\ 0.0 & 2.1 & 1.8 & 3.1 & 7.2 \\ 0.0 & \mathbf{4.2} & 3.6 & 1.8 & 4.8 \end{bmatrix} \\ \\ \xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_3} \begin{bmatrix} \mathbf{7.2} & 3.6 & 4.8 & 2.4 & 1.2 \\ 0.0 & \mathbf{4.2} & 3.6 & 1.8 & 4.8 \\ 0.0 & 2.1 & 1.8 & 3.1 & 7.2 \\ 0.0 & 1.4 & 1.2 & 5.0 & 7.2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} S_3 - S_2/2 \\ S_4 - S_2/3 \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} \mathbf{7.2} & 3.6 & 4.8 & 2.4 & 1.2 \\ 0.0 & \mathbf{4.2} & 3.6 & 1.8 & 4.8 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 2.2 & 4.8 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & \mathbf{4.4} & 5.6 \end{bmatrix} \\ \\ \xrightarrow{S_3 \leftrightarrow S_4} \begin{bmatrix} \mathbf{7.2} & 3.6 & 4.8 & 2.4 & 1.2 \\ 0.0 & \mathbf{4.2} & 3.6 & 1.8 & 4.8 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & \mathbf{4.4} & 5.6 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 2.2 & 4.8 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_4 - S_3/2} \begin{bmatrix} \mathbf{7.2} & 3.6 & 4.8 & 2.4 & 1.2 \\ 0.0 & \mathbf{4.2} & 3.6 & 1.8 & 4.8 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & \mathbf{4.4} & 5.6 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & \mathbf{2.0} \end{bmatrix} \end{array}$$

Skálázás A részleges főelemkiválasztásban mindig az oszlop legnagyobb elemét választottuk. Nem lehet egy elemet nagyobbá tenni, és ezzel az egész módszert elrontani úgy, hogy egy sorát egyszerűen beszorozzuk?

2.50. PÉLDA: SOR SZORZÁSA. A 2.48. példában szorozzuk meg az első egyenletet 10^5 -nel, azaz a kisebb elemből csináljunk nagyot, és ezt az egyenletrendszert is oldjuk meg részleges főelemkiválasztással.

$$\begin{array}{rcl} 10x + 10^5y & = & 2 \cdot 10^5 \\ x - y & = & 0 \end{array}$$

MEGOLDÁS. Egy egyenlet beszorzása egy nemzérus számmal ekvivalens átalakítás, így ennek az egyenletrendszernek is $x = y = \frac{2 \cdot 10^4}{1+10^4}$ a pontos megoldása. Ha 3 értékes jegyre számolunk, és alkalmazzuk a részleges főelemkiválasztás módszerét, akkor ismét rossz eredményt kapunk:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 10 & 10^5 & 2 \cdot 10^5 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{S_2 - 10^5 S_1} \left[\begin{array}{cc|c} 10 & 10^5 & 2 \cdot 10^5 \\ 0 & -1 - 10^4 & -2 \cdot 10^4 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 0 & -10^4 & -2 \cdot 10^4 \end{array} \right],$$

amiből $x = 0$ és $y = 2$. ■

Hasonlóképp zavart okozhat az együtthatómátrix egy oszlopának beszorzása is, ami az egyenletrendszeren például úgy valósítható meg, ha egyik változó mértékegységét megváltoztatjuk. (Ha például a korábban kilométerben meghatározott ismeretlent milliméterben keressük, együtt-hatóját minden egyenletben 10^6 -nal kell osztani.)

Az együtthatók ilyen „egyenletlenségeiből” származó számítási hibák csökkentésére a következő gyakorlati módszer ajánlható:

SKÁLÁZÁS. A következő két skálázási szabály követése a tapasztalatok szerint a gyakorlati feladatok nagy részében nagyon jó eredményt ad a részleges főelemkiválasztással együtt alkalmazva:

- 1. Oszlopok skálázása:** Válasszunk a feladatban szereplő mennyiségeknek természetes mértékegységet, ezzel általában elkerülhetők az együtthatók közti tetemes nagyságrendi különbségek. Ezen kívül nincs szükség az oszlopok elemeinek beszorzására.
- 2. Sorok skálázása:** Az egyenletrendszer $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ bővített mátrixának minden sorát osszuk el az $\mathbf{A}$ együtthatómátrix adott sorbeli legnagyobb abszolút értékű elemével. Így $\mathbf{A}$ minden sorának 1 a legnagyobb eleme.

Nem ismeretes olyan módszer, mely a lebegőpontos ábrázolás korlátai mellett hatékonyan megtalálná a lehető legpontosabb eredményt. Az elmélet és a tapasztalatok alapján sűrű, nem túlzottan nagy méretű egyenletrendszerekre a skálázott főelem kiválasztásos Gauss-módszer ajánlható. A ritka egyenletrendszerekkel a következő szakasz foglalkozik.

Lebegőpontos számok

1° Foglalmazzuk meg a 2-es számrendszerre vonatkozó kerekítési szabályt! Számítsuk ki a 2.47. példa megoldásában szereplő műveleteket a kettes számrendszerben és kerekítsük az eredményeket e szabály szerint.

2° Az alábbi két interaktív programkód kiszámítja a $\sum_{n=1}^{9999} \frac{1}{n^2+n}$ összeget két különböző sorrendben, de a két eredmény különbözik, és csak a második jó. Vajon miért? (Elemi függvénytanból tudjuk, hogy a fenti összeg ún. teleszkópösszeg, mert átalakítás után a szélső tagokat kivéve minden tag kiesik: $\sum_{n=1}^{9999} \frac{1}{n^2+n} =$

$$\sum_{n=1}^{9999} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{10000}.$$

```
> format long
> s1 = 0;
> for n = 1:9999
> s1 = s1 + (1/(n^2+n));
> end
> s1
s1 = 0.9999000000000001
> s2 = 0;
> for n = 9999:-1:1
> s2 = s2 + (1/(n^2+n));
```

```
> end
```

```
> s2
```

```
s2 = 0.9999000000000000
```

2.4. Megoldhatóság és megoldás

Az előzőekben a megoldások megtalálásának módszereit tanulmányoztuk. E szakaszban a megoldhatóság kérdését és a megoldások halmazának legfontosabb tulajdonságait vizsgáljuk. A vizsgálatokban a lineáris egyenletrendszerek mindkét geometriai interpretációja fontos szerepet kap.

Egyenletrendszer megoldhatóságának feltétele Tudjuk, hogy egy lineáris egyenletrendszer pontosan akkor *nem* oldható meg, ha a bővített mátrix lépcsős alakjának van olyan sora, melyben minden elem nulla, kivéve az utolsót. Ez ugyanis egyenletté visszaírva $0 = c$ alakú, ahol $c \neq 0$, és ennek az egyenletnek nincs megoldása. Ez viszont azt jelenti, hogy ilyenkor a bővített mátrix rangja nagyobb az együtthatómátrix rangjánál. E megállapítás azonnali következménye a következő tétel.

2.51. TÉTEL: EGYENLETRENDSZER MEGOLDHATÓSÁGÁNAK MÁTRIX-RANGOS FELTÉTELE. Legyen egy n -ismeretlenes lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixa $\mathbf{A}$, a konstans tagokból álló vektora $\mathbf{b}$.

1. Ez az egyenletrendszer *pontosan akkor oldható meg*, ha az együtthatómátrixának és bővített mátrixának rangja megegyezik, azaz

$$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|\mathbf{b}).$$

2. Ez az egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg *egyértelműen*, ha az együtthatómátrixának és bővített mátrixának rangja megegyezik az ismeretlenek számával, azaz

$$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = n.$$

BIZONYÍTÁS. Az egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha bővített mátrixának lépcsős alakjában nincs olyan sor, melynek csak az utolsó eleme nem 0. Ez épp azt jelenti, hogy $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|\mathbf{b})$.

A második állítás abból következik, hogy az egyenletrendszer akkor oldható meg egyértelműen, ha megoldható, és nincs szabad változója, vagyis az együtthatómátrix rangja megegyezik az ismeretlenek számával. ■

Az előzőekből az is adódik, hogy egy lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor van egynél több megoldása, ha

$$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) < n.$$

(Miért nem lehet $r(\mathbf{A}) > n$?)

Egy valós együtthatós egyenletrendszernek csak úgy lehet egynél több megoldása, ha van szabad változója. Annak viszont minden értékéhez egy-egy másik megoldás tartozik, vagyis ekkor az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van. Így, ha $\mathbf{A}$ valós mátrix, akkor a megoldások száma, a két rang és az ismeretlenek száma közt a következő a kapcsolat:

Feltétel	Megoldások száma
$r(\mathbf{A}) < r(\mathbf{A} \mathbf{b})$	0
$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A} \mathbf{b}) = n$	1
$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A} \mathbf{b}) < n$	∞

Ha az egyenletrendszer homogén lineáris, azaz mindegyik konstans tag 0, akkor az elemi sorműveletek közben a bővített mátrix utolsó oszlopában minden elem 0 marad, így ebben az oszlopban biztosan nem

lesz főelem. Eszerint a homogén lineáris egyenletrendszerek mindig megoldhatók, hisz ekkor a $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ összefüggés mindig fennáll. A megoldhatóság persze e feltétel ellenőrzése nélkül is látszik, hisz az $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ mindig megoldás! Mivel $r(\mathbf{A})$ megegyezik a redukált lépcsős alak főelemeinek számával, ezért $r(\mathbf{A}) \leq m$ és $r(\mathbf{A}) \leq n$ is fennáll, ahol m az egyenletek, n az ismeretlenek száma. Így viszont $m < n$ esetén $r(\mathbf{A}) = n$ nem állhat fenn, tehát a homogén lineáris egyenletrendszernek van az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ vektoron kívül is megoldása. Ezzel bizonyítottuk az alábbi tételt:

2.52. TÉTEL: HOMOGÉN LINEÁRIS EGYENLETRENDSZER MEGOLDHATÓSÁGA. Az $\mathbf{A}$ együtthatómátrixú homogén lineáris egyenletrendszer mindig megoldható, mert a nullvektor – az ún. *triviális megoldás* – mindig megoldás. Pontosán akkor van *nemtriviális*, vagyis a $\mathbf{0}$ -vektortól különböző megoldása is, ha

$$r(\mathbf{A}) < n,$$

ahol n az ismeretlenek – azaz $\mathbf{A}$ oszlopainak – számát jelöli. Speciálisan, az m egyenletből álló homogén lineáris egyenletrendszernek $m < n$ esetén mindig van nemtriviális megoldása.

Valós együtthatós homogén lineáris egyenletrendszerekre az előző táblázat a következő alakot ölti:

Feltétel	Megoldások száma
$r(\mathbf{A}) = n$	1
$r(\mathbf{A}) < n$	∞

2.53. PÉLDA: EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSAINAK SZÁMA. Az a paraméter mely értékei mellett van az alábbi egyenletrendszernek 0, 1, illetve ∞ sok megoldása?

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + ax_3 &= 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 &= a \\ ax_1 + x_2 + x_3 &= a^2 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. Hozzuk az bővített mátrixot lépcsős alakra:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 1 & a^2 \end{array} \right] & \xrightarrow[S_3 - aS_1]{S_2 - S_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-1 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & a^2-a \end{array} \right] \xrightarrow{S_3 + S_2} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & -(a-1)(a+2) & (a+1)(a-1) \end{array} \right] \end{aligned}$$

Látható, hogy $a = 1$ esetén az utolsó két sorban minden elem 0, így az egyenletrendszer az $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ egyenlettel ekvivalens, melynek megoldása: $(x_1, x_2, x_3) = (1-s-t, s, t)$, azaz oszlopvektor alakba írva:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ha $a = -2$, akkor az utolsó sornak megfelelő egyenlet $0 = 3$ alakú, azaz ekkor nincs megoldás. Minden egyéb esetben, azaz ha $a \neq 1$ és $a \neq -2$, akkor egyetlen megoldás van:

$$x_1 = \frac{(a+1)^2}{a+2}, \quad x_2 = \frac{1}{a+2}, \quad x_3 = -\frac{a+1}{a+2}.$$

Feltehető a kérdés: mi értelme az utóbbi tételeknek, ha a rang megállapításához ugyanúgy a lépcsős alakra hozást kell végrehajtani, mint a megoldáshoz? Amikor a rangra vonatkozó állításokat ellenőrizhetnénk egy lineáris egyenletrendszeren, már a megoldást is meghatározhatjuk! Ez valóban igaz, azonban a rang szoros kapcsolatban van a lineáris függetlenséggel, amelyen keresztül mélyebbre jutunk az egyenletrendszerek megoldhatóságának és a megoldáshalmaz struktúrájának megértésében! Például a rang megmondja, hogy az egyenletrendszerben hány független egyenlet van, vagyis hogy hány egyenlet „számít”, a többi akár el is hagyható a megoldás megváltozása nélkül. De a rang adja meg azt is, hogy a megoldások legkevesebb hány vektor lineáris kombinációiként kaphatók meg. Ezeket az állításokat a következőkben részletezzük.

Homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai Tekintsünk egy tetszőleges homogén lineáris egyenletrendszert. Mint a 2.52. tételben láttuk, ez biztosan megoldható, és a megoldások halmazában a nullvektor benne van. Mit mondhatunk a megoldások halmazáról, ha több megoldása is van a homogén egyenletrendszernek?

2.54. ÁLLÍTÁS: MEGOLDÁSOK LINEÁRIS KOMBINÁCIÓJA. Egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak bármely lineáris kombinációja is megoldás.

BIZONYÍTÁS. Elég az állítást két megoldásra bizonyítani. Jelölje $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ az egyenletrendszer együtthatómátrixának oszlopvektorait. Legyen $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ és $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ két tetszőleges megoldás, azaz

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \dots + \mathbf{a}_n x_n = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{a}_1 y_1 + \mathbf{a}_2 y_2 + \dots + \mathbf{a}_n y_n = \mathbf{0},$$

és c, d legyen két tetszőleges skalár. Megmutatjuk, hogy ekkor $c\mathbf{x} + d\mathbf{y}$ is megoldás, ugyanis

$$\begin{aligned} & \mathbf{a}_1(cx_1 + dy_1) + \mathbf{a}_2(cx_2 + dy_2) + \dots + \mathbf{a}_n(cx_n + dy_n) = \\ & (c\mathbf{a}_1 x_1 + d\mathbf{a}_1 y_1) + (c\mathbf{a}_2 x_2 + d\mathbf{a}_2 y_2) + \dots + (c\mathbf{a}_n x_n + d\mathbf{a}_n y_n) = \\ & c(\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \dots + \mathbf{a}_n x_n) + d(\mathbf{a}_1 y_1 + \mathbf{a}_2 y_2 + \dots + \mathbf{a}_n y_n) = \\ & \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

azaz $c\mathbf{x} + d\mathbf{y}$ is megoldás. Ez bizonyítja állításunkat. ■

Altér, nulltér Az, hogy vektorok egy H halmaza olyan, hogy a H -beli vektorokból képzett lineáris kombinációk is mind H -ban vannak, azzal ekvivalens, hogy bármely H -beli vektor skalárszorosa és bármely két H -beli vektor összege is H -beli (ld. a 2.5.1. feladatot). Másként fogalmazva: a vektorok skalárral való szorzása és a vektorok összeadása nem vezet ki H -ból.

Az $\mathbb{R}^n$ tér ilyen típusú részhalmazai igen fontosak. Például a síkban egy origón átmenő egyenes vektorai (az egyenes pontjaiba mutató helyvektorok) ilyenek. Hasonlóképp, a térben bármely origón átmenő sík vagy egyenes vektorai ilyenek. Ez vezet a következő definícióhoz.

2.55. DEFINÍCIÓ: ALTÉR. Az $\mathbb{R}^n$ tér vektorainak olyan részhalmazát, mely zárt a vektorok skalárral való szorzásának és a vektorok összegének műveletére, az $\mathbb{R}^n$ *alterének* nevezzük. Képlettel kifejezve: a $H \subseteq \mathbb{R}^n$ vektorhalmaz $\mathbb{R}^n$ *altere*, ha

1. $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H$ esetén $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in H$,
2. $\mathbf{u} \in H$, és $c \in \mathbb{R}$ esetén $c\mathbf{u} \in H$.

(a)???

???

(b)???

???

2.9. ábra. (a) Egy origón átmenő egyenes és (b) egy origón átmenő sík bármely vektorának konstansszorosa, illetve bármely két vektorának összege (a) az egyenesbe (b) a síkba esik.

Könnyen látható, hogy minden altérnek eleme a zérusvektor, hisz bármely altérbeli vektorral együtt annak 0-szorosa is, vagyis a $\mathbf{0}$ -vektor is eleme az altérnek.

2.56. PÉLDA: ALTÉR. Alteret alkotnak-e az alábbi vektorhalmazok $\mathbb{R}^3$ -ben?

1. $\{(x, y, z) \mid x = y, z = xy\}$,
2. $\{(s + 2t, s - 1, 2s + t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$.

MEGOLDÁS. Az első halmaz nem altér, mert nem elégíti ki a definícióbeli feltételeket. Például az $(1, 1, 1)$ vektor benne van e halmazban, azonban kétszerese nem, mert nem elégíti ki a $z = xy$ egyenlőséget!

A második feladatban szereplő halmazban nincs benne a nullvektor, hisz az $s + 2t = 0$, $s - 1 = 0$, $2s + t = 0$ egyenletrendszernek nincs megoldása, így ez a halmaz sem alkot alteret! ■

Az $\mathbb{R}^n$ térnek nyilván altere saját maga, és a nullvektorból álló vektorhalmaz.

Később meg fogjuk mutatni, hogy $\mathbb{R}^2$ alterei az alábbiak:

1. a zérusvektorból álló egyelemű halmaz,
2. egy origón átmenő egyenes összes vektora,
3. a sík összes vektora.

$\mathbb{R}^3$ alterei:

1. a zérusvektorból álló egyelemű halmaz,
2. egy origón átmenő egyenes összes vektora,
3. egy origón átmenő sík összes vektora,
4. a tér összes vektora.

Mivel egy egyetlen n -ismeretlenes egyenletből álló egyenletrendszer megoldáshalmaza egy $\mathbb{R}^n$ -beli hipersík, ezért az origón átmenő hipersíkok is alterek.

A 2.54. állítás az altér fogalmát használva a következő alakot ölti:

2.57. ÁLLÍTÁS: MEGOLDÁSOK ALTERE. Egy n -változós *homogén* lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza alteret alkot $\mathbb{R}^n$ -ben.

2.58. DEFINÍCIÓ: NULLTÉR. Az $\mathbf{A}$ együtthatómátrixú homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak alterét az $\mathbf{A}$ mátrix *nullterének* nevezzük.

Kifeszített altér A homogén lineáris egyenletrendszer összes megoldását néhány vektor lineáris kombinációjaként állítottuk elő. A megoldások alterét tehát „generálja” vagy geometrikusabb szóhasználattal „kifeszíti” néhány megoldásvektor. Erre utal a következő definíció. Azt, hogy az altér szót a definícióban használhatjuk, a rákövetkező állítás bizonyítja.

2.59. DEFINÍCIÓ: KIFESZÍTETT ALTÉR. A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok összes

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_k \mathbf{v}_k$$

alakú lineáris kombinációját a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorok által *kifeszített altérnek* nevezzük, és $\text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ -val jelöljük. Képletben:

$$\text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k) = \{c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_k \mathbf{v}_k : c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}\}.$$

Valóban, az elnevezés jogos:

2.60. ÁLLÍTÁS: A KIFESZÍTETT ALTÉR ALTÉR. A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok által kifeszített $\text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ vektorhalmaz $\mathbb{R}^n$ egy altere.

BIZONYÍTÁS. Be kell látni, hogy $\text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ bármely vektorának skalárszorosa és bármely két vektorának összege is ide tartozik. Legyen

$$\mathbf{u} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_k \mathbf{v}_k, \quad \text{és} \quad \mathbf{v} = d_1 \mathbf{v}_1 + d_2 \mathbf{v}_2 + \dots + d_k \mathbf{v}_k$$

a $\text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ két tetszőleges vektora, és legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós. Ekkor

$$x\mathbf{u} = (xc_1)\mathbf{v}_1 + (xc_2)\mathbf{v}_2 + \dots + (xc_k)\mathbf{v}_k \in \text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k),$$

és

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (c_1 + d_1)\mathbf{v}_1 + (c_2 + d_2)\mathbf{v}_2 + \dots + (c_k + d_k)\mathbf{v}_k \in \text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k).$$

2.61. PÉLDA: NULLTÉR. Határozzuk meg az

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrix nullterét. Keressünk véges sok olyan vektort, melyek kifeszítik e teret!

MEGOLDÁS. Az adott mátrix a 2.23. példabeli homogén lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixa. A homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza épp a nulltér vektoraiból álló halmaz. A nulltér vektorai tehát

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

alakba írhatók, amiből leolvasható, hogy e teret a megoldásban megadott három vektor kifeszíti. ■

Az altér fogalma kapcsán több elgondolkodtató kérdés is fölmerül:

1. Mitől függ, hogy egy alteret hány vektor feszít ki, és mennyi a lehető legkevesebb vektor, mely kifeszíti?
2. Hogyan kapható meg egy alteret kifeszítő minimális számú vektorhalmaz?
3. Az inhomogén egyenletrendszer megoldásai is alteret alkotnak?

E kérdések megválaszolásához a lineáris függetlenség fogalmának mélyebb megértése segít.

Lineáris függetlenség és összefüggőség Az 1.10. definíció szerint egy legalább kételemű vektorrendszer lineárisan független, ha mindegyik vektor független a többitől, azaz egyik sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként, egyetlen vektor pedig lineárisan független, ha nem a zérusvektor. Ez nehézkes feltétel, hisz mindegyik vektorra külön ellenőrizni kell, ezért egy könnyebben ellenőrizhető, de ekvivalens feltételt keresünk. A háromdimenziós térben láttuk, hogy ha három vektor független, akkor a tér bármely vektora *egyértelműen* előáll lineáris kombinációjuként. Ez igaz a nullvektorra is. A nullvektor egyféleképp biztosan előáll: a három vektor nullákkal vett lineáris kombinációjaként. Ezt nevezzük a nullvektor triviális előállításának. És a fentiek szerint más előállítása nincs is, ha a három vektor lineárisan független. Ez az alapja a következő tételnek:

2.62. TÉTEL: LINEÁRIS FÜGGETLENSÉG. Tetszőleges $\mathbb{R}^n$ -beli $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ vektorrendszerre az alábbi két állítás ekvivalens:

1. V lineárisan független, azaz $k > 1$ esetén egyik vektora sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként, $k = 1$ esetén pedig a vektor nem a zérusvektor.
2. A zérusvektor csak egyféleképp – a triviális módon – áll elő V lineáris kombinációjaként. Másként fogalmazva, a $c_1, c_2, \dots, c_k$ skalárokkal vett lineáris kombináció csak akkor lehet a nullvektor, azaz

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

csak akkor állhat fenn, ha

$$c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0.$$

BIZONYÍTÁS. Először tegyük fel, hogy a vektorrendszer csak egyetlen $\mathbf{v}$ vektorból áll. Ekkor a tétel azt állítja, hogy e vektor pontosan akkor lineárisan független, azaz pontosan akkor nem a nullvektor, ha a $c\mathbf{v} = \mathbf{0}$ csak $c = 0$ esetén állhat fenn. Ez nyilvánvaló, hisz ha $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ és $c \neq 0$, akkor $c\mathbf{v} = \mathbf{0}$ sem állhat fenn. A továbbiakban tegyük fel, hogy a vektorrendszer legalább két vektorból áll.

($\Leftarrow$) Megmutatjuk, hogy ha $c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ csak $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$ esetén állhat fenn, akkor semelyik $\mathbf{v}_i$ vektor sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként ($i = 1, 2, \dots, k$). Tegyük fel indirekt módon, hogy valamelyik vektor – például a $\mathbf{v}_1$ – kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként, azaz

$$\mathbf{v}_1 = d_2 \mathbf{v}_2 + \dots + d_k \mathbf{v}_k,$$

vagyis átrendezés után

$$(-1)\mathbf{v}_1 + d_2 \mathbf{v}_2 + \dots + d_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

Mivel $\mathbf{v}_1$ együtthatója nem 0, ezért feltevésünkkel ellentmondásban előállítottuk a nullvektort olyan lineáris kombinációjaként, melyben nem minden együttható 0. Ez az ellentmondás bizonyítja az állítást.

($\Rightarrow$) Megmutatjuk, hogy ha a vektorrendszer egyik vektora sem áll elő a többi lineáris kombinációjaként, akkor a egyedül csak a csupa zérus együtthatójú lineáris kombinációja lehet zérusvektor. Ismét indirekt módon bizonyítunk: tegyük fel, hogy van olyan – nem csupa 0 együtthatójú – lineáris kombináció, mely a nullvektorral egyenlő, azaz

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0},$$

de valamelyik együttható – például a c_1 – nem 0. Ekkor $\mathbf{v}_1$ kifejezhető a többi vektor lineáris kombinációjaként:

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{c_2}{c_1} \mathbf{v}_2 - \dots - \frac{c_k}{c_1} \mathbf{v}_k,$$

ami bizonyítja az állítást. ■

Egy vektorrendszert *lineárisan összefüggőnek* nevezünk, ha nem független, azaz egyelemű vektorrendszer esetén ha az a vektor a zérusvektor, többelemű vektorrendszer esetén pedig ha van olyan vektora, mely kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként. Az előző tétel szerint ez azzal ekvivalens, hogy a vektorrendszernek van olyan zérusvektort adó lineáris kombinációja, melyben nem mindegyik együttható zérus.

Egy $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ vektorrendszer lineáris függetlenségének eldöntéséhez meg kell oldani az

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

homogén lineáris egyenletrendszert. Ha van nemtriviális megoldása, akkor a vektorrendszer lineárisan összefüggő, egyébként lineárisan független.

2.63. KÖVETKEZMÉNY: HOMOGEN LINEÁRIS EGYENLETRENDSZER ÉS A LINEÁRIS FÜGGETLENSÉG. Az $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_n]$ mátrix oszlopvektorai pontosan akkor lineárisan függetlenek, ha az $[\mathbf{A}|\mathbf{0}]$ mátrixú homogén lineáris egyenletrendszernek a triviálisan kívül nincs más megoldása, azaz ha $\mathbf{A}$ lépcsős alakjában minden oszlopban van főelem.

2.64. PÉLDA: VEKTOROK LINEÁRIS FÜGGETLENSÉGE. Mutassuk meg, hogy a 4-dimenziós $(1, 2, 3, 4)$, $(0, 1, 0, 1)$ és $(1, 1, 1, 0)$ vektorok lineárisan függetlenek.

MEGOLDÁS. A vektorokból képzett mátrix és lépcsős alakja

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ami azt mutatja, hogy a homogén lineáris egyenletrendszernek csak egyetlen megoldása van, azaz az oszlopvektorok lineárisan függetlenek. ■

Az inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldásai Az inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldásai nem alkotnak alteret. Legegyszerűbben ez onnan látszik, hogy a zérusvektor minden altérnek eleme, viszont egyetlen inhomogén egyenletrendszernek sem megoldása! Ugyanakkor az inhomogén lineáris egyenletrendszer és a hozzá tartozó homogén egyenletrendszer megoldásai közt egy igen fontos kapcsolat van.

2.65. TÉTEL: HOMOGEN ÉS INHOMOGEN EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSAI. Az inhomogén lineáris $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ mátrixú egyenletrendszer általános megoldása megkapható úgy, hogy egy partikuláris megoldáshoz hozzáadjuk a hozzá tartozó homogén $[\mathbf{A}|\mathbf{0}]$ mátrixú egyenletrendszer általános megoldását.

inhomogén általános megoldása	=	inhomogén egy partikuláris megoldása	+	homogén általános megoldása
-------------------------------------	---	--	---	-----------------------------------

BIZONYÍTÁS. Legyen $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ az inhomogén egy partikuláris megoldása, és jelölje $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ az $\mathbf{A}$ oszlopvektorait, H a homogén, I az inhomogén egyenletrendszer általános megoldását. Megmutatjuk, hogy $\mathbf{x} + H = I$, ahol a bal oldali összeadást elemenként értjük.

$\mathbf{x} + H \subseteq I$: Meg kell mutatnunk, hogy ha $\mathbf{x}$ -hez adjuk a H egy tetszőleges $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in H$ elemét, az inhomogén egyenletrendszer egy megoldását kapjuk. Valóban, $\mathbf{x}$, illetve $\mathbf{y}$ eleget tesz az

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \dots + \mathbf{a}_n x_n &= \mathbf{b}, \text{ illetve} \\ \mathbf{a}_1 y_1 + \mathbf{a}_2 y_2 + \dots + \mathbf{a}_n y_n &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

egyenletnek. Ebből

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1(x_1 + y_1) + \mathbf{a}_2(x_2 + y_2) + \dots + \mathbf{a}_n(x_n + y_n) &= \\ (\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \dots + \mathbf{a}_n x_n) + (\mathbf{a}_1 y_1 + \mathbf{a}_2 y_2 + \dots + \mathbf{a}_n y_n) &= \\ \mathbf{b} + \mathbf{0} &= \mathbf{b}, \end{aligned}$$

tehát $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ megoldása az inhomogén egyenletrendszernek, azaz $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in I$.

$\mathbf{x} + H \supseteq I$: Meg kell mutatnunk, hogy ha $\mathbf{z}$ az inhomogén egy tetszőleges megoldása, azaz $\mathbf{z} \in I$, akkor található olyan $\mathbf{y} \in H$, hogy $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$. Valóban, az $\mathbf{y} = \mathbf{z} - \mathbf{x}$ megteszi, mert

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1(z_1 - x_1) + \mathbf{a}_2(z_2 - x_2) + \dots + \mathbf{a}_n(z_n - x_n) &= \\ (\mathbf{a}_1 z_1 + \mathbf{a}_2 z_2 + \dots + \mathbf{a}_n z_n) - (\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \dots + \mathbf{a}_n x_n) &= \\ \mathbf{b} - \mathbf{b} &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

azaz $\mathbf{z} - \mathbf{x} \in H$. Ezzel kész a bizonyítás. ■

- (a) Egy térbeli egyenes, rajta egy pont $\mathbf{x}_0$ jelöléssel
 (b) Egy térbeli sík, rajta egy pont $\mathbf{x}_0$ jelöléssel

2.10. ábra. (a) Egy háromismeretlenes inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza, ha az általános megoldás egyparaméteres; (b) Egy háromismeretlenes inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza, ha az általános megoldás kétparaméteres.

E tétel azt jelenti, hogy ugyan az inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak halmaza *nem* *altér*, de egy *eltolásával* megkapható. Az ilyen halmazokat *affin altereknek* nevezzük.

E tételt szemléltetik a 2.21. és a 2.23. példák, valamint a következő:

2.66. PÉLDA: INHOMOGÉN LINEÁRIS EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSAI. Egy négyismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldását számítógéppel próbálom ellenőrizni, de más jön ki. A két eredmény:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Felteszem, a számítógép eredménye jó. De jó-e a saját számításom is?

MEGOLDÁS. Első ránézésre csak annyi látszik, hogy mindkét megoldás egy kétdimenziós *altér* *eltoltja*. Először megvizsgáljuk, hogy a két *altér* – vagyis az egyenletrendszer homogén részére adott két megoldás – egybeesik-e. Elég megmutatni, hogy az egyik *altérben* benne van a másikat generáló két vektor. Ha igen, a két *altér* megegyezik. Ezesetben el kell döntenie, hogy az inhomogén két partikuláris megoldása az *altérnek* ugyanabban az *eltoltjában* van-e. Vagy egyszerűbben, hogy a két partikuláris megoldás különbsége benne van-e az *altérben*. E kérdéseket egyetlen mátrix lépcsős alakra hozásával is megoldhatjuk. Az első két oszlop az első, a második két oszlop a második *altér* generátorait tartalmazza, az ötödik oszlop a két partikuláris megoldás különbsége.

$$\left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Az eredményből látszik, hogy mindkét megoldás azonos. ■

2.5. A megoldások vizsgálata

E szakaszban az egyenletrendszer megoldásainak jobb megértésére együttműködő mátrixához kapcsolódó altereket és a megoldások altereit, valamint ezek kapcsolatát vizsgáljuk.

Sor- és oszloptér Az $\mathbf{A}$ együttműködő mátrixú egyenletrendszerrel $\mathbf{A}$ -nak mind a sor-, mind az oszlopterei sokat mondanak.

Az oszlopmo dell leírásában a 45. oldalon láttuk, hogy az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ mátrixú egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $\mathbf{b}$ előáll az $\mathbf{A}$ oszloptektorainak lineáris kombinációjaként. Másként fogalmazva, az egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $\mathbf{b}$ benne van az $\mathbf{A}$ oszloptektorai által kifeszített *altérben*.

Az $\mathbf{A}$ sorvektorai is érdekes tulajdonsággal rendelkeznek. Egy lineáris egyenletrendszer minden egyenletének bal oldala az együttműködő mátrix egy sorvektorának és a megoldásvektornak a skaláris szorzata. Ha az egyenletrendszer homogén, akkor e skaláris szorzat mindegyike 0, tehát a megoldásvektor merőleges az együttműködő mátrix minden sorvektorára.

2.67. DEFINÍCIÓ: SORTÉR, OSZLOPTÉR. Egy mátrix sorvektorai által kifeszített *alteret* *sortérnek*, az oszloptektorok által kifeszített *alteret* *oszloptérnek* nevezzük.

Az $m \times n$ -es $\mathbf{A}$ mátrix sortere $\mathbb{R}^n$ -nek, oszloptere $\mathbb{R}^m$ -nek *altér*. Az $\mathbf{A}$ sorterét $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ -val, oszlopteret $\mathcal{O}(\mathbf{A})$ -val fogjuk jelölni.

2.68. PÉLDA: KIFESZÍTETT ALTÉR VEKTORAI. Határozzuk meg, hogy a $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 2, -2, 1)$ és $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 1, 1)$ vektorok által kifeszített altérnek eleme-e az $\mathbf{u} = (-1, 2, -3, 6)$ vektor! Ha igen, adjunk meg egy ezt bizonyító lineáris kombinációt is! Mutassuk meg, hogy a $\mathbf{w} = (-1, 2, -3, 4)$ vektor nem eleme az altérnek!

MEGOLDÁS. Olyan x_1, x_2, x_3 valósokat keresünk, melyekkel $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}$ fennáll. Ez egy négy egyenletből álló egyenletrendszerrel ekvivalens, melynek bővített mátrixa a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ és $\mathbf{u}$ vektorokból áll. Az egyenletrendszer bővített mátrixát lépcsős alakra hozva kapjuk, hogy

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

amiből $(x_1, x_2, x_3) = (3, 2, -2)$.

Ha $\mathbf{u}$ helyett $\mathbf{w}$ -vel számolunk, olyan egyenletrendszert kapunk, melynek nincs megoldása, tehát $\mathbf{w}$ valóban nincs benne a megadott altérben. ■

2.69. PÉLDA: VEKTOROKRA MERŐLEGES ALTÉR. Határozzuk meg az összes olyan vektort $\mathbb{R}^4$ -ben, mely merőleges a $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 2)$ és $\mathbf{v}_2 = (-1, 2, -2, 1)$ vektorok mindegyikére!

MEGOLDÁS. Olyan $\mathbf{x}$ vektort keresünk, melyre $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{x} = 0$ és $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{x} = 0$. Ezt koordinátákkal felírva két egyenletet kapunk, melynek együtthatómátrixa és annak egy lépcsős alakja a következő:

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{array} \right],$$

amiből $\mathbf{x} = (-s - 2t, (s - 3t)/2, s, t)$, azaz

$$\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A megoldás tehát két vektor által kifeszített altér összes vektora. ■

Az előző feladatokban a homogén lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixát lépcsős alakra hoztuk. Ebből az alakból azonban több minden leolvasható.

2.70. TÉTEL: ELEMI SORMŰVELETEK HATÁSA A SOR- ÉS OSZLOPVEKTOROKRA. Elemi sorműveletek közben a sortér nem változik, az oszlopvektorok pedig olyan vektorokba transzformálódnak, melyek megőrzik az eredeti lineáris kapcsolatokat.

BIZONYÍTÁS. Megmutatjuk, hogy egy mátrix sortere nem változik az elemi sorműveletek közben. A sorcserére ez nyilvánvaló. Legyenek $\mathbf{A}$ sorvektorai $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ és legyen $\mathbf{u}$ a sortér egy tetszőleges vektora, ami azt jelenti, hogy vannak olyan $c_1, c_2, \dots, c_m$ skalárok, hogy

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_m\mathbf{v}_m.$$

Ha egy sort (mondjuk az elsőt) beszorozzuk egy $d \neq 0$ skalárral, akkor $\mathbf{u}$ az új mátrix sorterében is benne van, melyet a $d\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ vektorok feszítenek ki, hisz

$$\mathbf{u} = \frac{c_1}{d}(d\mathbf{v}_1) + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_m\mathbf{v}_m.$$

Ez azt jelenti, hogy a sortér nem csökken, azaz minden vektor, ami eddig benne volt a sortérben, benne lesz az új mátrix sorterében is. A hozzáadás

műveleténél ugyanezt tapasztaljuk: az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az első sor d -szeresét adjuk a második sorhoz. Ekkor az új sorteret kifeszítő vektorok: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + d\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$. Az $\mathbf{u}$ vektor e térben is benne van, ugyanis egy egyszerű átalakítás után

$$\mathbf{u} = (c_1 - c_2 d)\mathbf{v}_1 + c_2(\mathbf{v}_2 + d\mathbf{v}_1) + \dots + c_m \mathbf{v}_m.$$

Mivel minden sorművelet inverze is egy sorművelet, az inverz sorműveletben sem csökken a sortér, ami csak úgy lehet, ha a sortér az elemi sorműveletek során változatlan marad.

Megmutatjuk, hogy az elemi sorműveletek közben az oszlopvektorok közt nem változnak a lineáris kapcsolatok. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy például $c\mathbf{v}_1 + d\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$. Mivel a skalárral való szorzás és a vektorösszeadás is koordinátánként végezhető, könnyen látható, hogy sorcsere, egy koordináta nemnulla skalárral való szorzása, vagy az i -edik koordináta konstansszorosának a j -edikhez adása után is fenn fog állni a két új vektor közt a fenti összefüggés. Tetszőleges számú vektor lineáris kombinációjára az állítás hasonlóan adódik. ■

2.71. KÖVETKEZMÉNY: MÁTRIX LÉPCSŐS ALAKJÁNAK VEKTORAI.

Legyen $\mathbf{B}$ az $\mathbf{A}$ mátrix egy lépcsős alakja. Ekkor

1. $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ sortere megegyezik,
2. az $\mathbf{A}$ oszlopvektorai között lévő lineáris kapcsolatok azonosak a $\mathbf{B}$ ugyanolyan sorszámú oszlopai közti lineáris kapcsolatokkal,
3. $\mathbf{B}$ nemzérus sorvektorai lineárisan függetlenek,
4. a főelemek oszlopvektorai $\mathbf{A}$ -ban és $\mathbf{B}$ -ben is lineárisan függetlenek.

BIZONYÍTÁS. Az első két állítás közvetlen következménye az előző tételnek.

A harmadik állítás bizonyításához megmutatjuk, hogy egy lépcsős alak egy nemzérus sorvektora nem fejezhető ki a többi sorvektor lineáris kombinációjaként. Tekintsük a lépcsős alak k -edik sorvektorát. Főeleme legyen a j -edik oszlopban. E főelem nem állítható elő a k -nál nagyobb indexű sorok lineáris kombinációjával, mert azokban a j -edik koordináta 0. A k -nál kisebb indexű sorvektorok pedig nem szerepelhetnek a lineáris kombinációban, mivel a legkisebb indexű vektor főelemét a többi vektor nem eliminálhatja, pedig a k -edik sorban azon a helyen 0 áll.

Annak bizonyítása, hogy a főelemek oszlopai $\mathbf{B}$ -ben lineárisan függetlenek, ugyanúgy megy, mint a sorvektorok esetén. Innen pedig az előző tétellel adódik, hogy az ilyen indexű oszlopok $\mathbf{A}$ -ban is lineárisan függetlenek. ■

Fontos megjegyezni, hogy míg a lépcsős alak sortere megegyezik az eredeti mátrix sortérével, addig az oszloptér az elemi sorműveletek alatt megváltozik, tehát a mátrix és lépcsős alakjának oszloptere különbözik!

Bázis Az elemi sorműveleteket alkalmazva, egy mátrix sortérében és oszloptérében is találtunk olyan lineárisan független vektorokat, melyek kifeszítik az adott teret. Azt már az 1.9. tételben megmutattuk, hogy a háromdimenziós tér tetszőleges három lineárisan független vektorának lineáris kombinációjaként a tér minden vektora előáll. Más szavakkal ez azt jelenti, hogy a tér három lineárisan független vektora kifeszíti a teret. Az ilyen vektorhármassokat, melyeket egy koordinátarendszer alapvektorainak vettünk, bázisnak neveztük. Ezek vezetnek a következő definícióhoz.

2.72. DEFINÍCIÓ: BÁZIS. Az $\mathbb{R}^n$ tér egy *alterének bázisán* vektorok olyan halmazát értjük, mely

1. lineárisan független vektorokból áll és
2. kifeszíti az alteret.

Az $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)$, $\dots$, $\mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$ vektorokból álló halmazt $\mathbb{R}^n$ *standard bázisának* nevezzük.

2.73. PÉLDA: ALTÉR BÁZISÁNAK MEGHATÁROZÁSA. Határozzuk meg az $(1, 1, 0, -2)$, $(2, 3, 3, -2)$, $(1, 2, 3, 0)$ és $(1, 3, 6, 2)$ vektorok által kifeszített altér egy bázisát!

MEGOLDÁS. *Első megoldás:* A megadott vektorokból, mint sorvektorokból képzett mátrix valamely sorlépcsős alakjának nemnulla sorai az altér egy bázisát adják:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A bázis vektorai $(1, 1, 0, -2)$, $(0, 1, 3, 2)$.

Második megoldás: Ha a bázist az adott vektorokból akarjuk kiválasztani, akkor képezzünk egy mátrixot e vektorokból, mint oszlopvektorokból. Lépcsős alakjában a főelemek oszlopai lineárisan független vektorok. A nekik megfelelő oszlopvektorok az eredeti mátrixban az oszloptér bázisát alkotják (ld. a 2.70. tételt és a 2.71. következmény 4. pontjának állítását).

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tehát az adott négy vektor közül az első kettő, azaz az $(1, 1, 0, -2)$ és $(2, 3, 3, -2)$ vektorok bázist alkotnak.

Ha a megadott vektorokat más sorrendben írjuk a mátrixba, másik bázist kaphatunk. ■

2.74. PÉLDA: VEKTOR FELÍRÁSA A BÁZISVEKTOROK LINEÁRIS KOMBINÁCIÓJAKÉNT. Az előző feladatban megadott négy vektor mindegyikét fejezzük ki az általuk kifeszített altér bázisvektorainak lineáris kombinációjaként!

MEGOLDÁS. Az előző feladat második megoldásában találtunk egy bázist a megadott vektorok közül. Mivel az oszlopvektorokkal dolgoztunk, a vektorok közti lineáris kapcsolat leolvasható bármelyik lépcsős alakból: legkényelmesebben a *redukált* lépcsős alakból. Folytatjuk tehát az előző példabeli eliminációs lépéseket:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

A redukált lépcsős alakból látjuk, hogy például a harmadik oszlop a második és az első különbsége. Ezek alapján az eredeti vektoroknak a bázisvektorok lineáris kombinációiként való felírása:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ha a megadott vektorokat más sorrendben írjuk a mátrixba, más bázisra juthatunk. Például

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 6 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & -6 & -9 & -3 \\ 0 & -4 & -6 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Eszerint bázisvektoroknak választhatjuk az $(1, 3, 6, 2)$ és az $(1, 1, 0, -2)$ vektorokat is, a többi vektor pedig kifejezhető ezek lineáris kombinációjaként:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Vektor egy bázisra vonatkozó koordinátás alakja A koordinátarendszer bevezetésénél ugyanazt tettük, mint itt az előző példában: minden vektor előállítható egy bázis elemeinek lineáris kombinációjaként, és e vektor koordinátás alakja erre a bázisra vonatkozóan a lineáris kombináció konstansából áll.

Egy altérben több bázist is vizsgálhatunk, és a vektorok koordinátás alakjai különbözhetnek a különböző bázisokban. A félreértések elkerülésére a bázis jelét a koordinátás alak indexében jelöljük, azaz a $\mathbf{v}$ vektor koordinátás alakját az $\mathcal{A}$ bázisban $[\mathbf{v}]_{\mathcal{A}}$ jelöli.

Például az előző példában a (2.7) képletbeli redukált lépcsős alak nemzérus soraiból álló

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix a következőket mondja. A $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0, -2)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 3, 3, -2)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 2, 3, 0)$ és $\mathbf{v}_4 = (1, 3, 6, 2)$ vektorok által kifeszített altérnek $\mathcal{A} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ egy bázisa, és ebben a bázisban e négy vektor koordinátái rendre

$$[\mathbf{v}_1]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, [\mathbf{v}_2]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, [\mathbf{v}_3]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, [\mathbf{v}_4]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Hasonlóképp a (2.8) képletbeli redukált lépcsős alak nemzérus soraiból álló

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

mátrixból kiolvasható, hogy a fenti altérnek $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1\}$ is bázisa, és ebben a bázisban a $\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ koordinátás alakja rendre

$$[\mathbf{v}_4]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, [\mathbf{v}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, [\mathbf{v}_2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}, [\mathbf{v}_3]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Dimenzió és rang Az előzőekben bázist kerestünk egy altérhez. Azt tapasztaltuk, hogy a bázis mindig ugyanannyi vektorból állt. Ez nem véletlen. Egy különösen fontos tétel következik.

2.75. TÉTEL: BÁZIS-TÉTEL. Tekintsük az $\mathbb{R}^n$ vektortér egy tetszőleges alterét. Ennek bármely két bázisa azonos számú vektorból áll.

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy $\mathbb{R}^n$ -nek van olyan $\mathcal{A}$ altere, és annak két olyan bázisa,

$$V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}, \text{ és } W = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_r\},$$

melyek nem ugyanannyi vektorból állnak, azaz például $k < r$. Mivel V bázis $\mathcal{A}$ -ban, ezért a W bázis vektorai is kifejezhetők lineáris kombinációikként, azaz léteznek olyan a_{ij} skalárok, hogy

$$\mathbf{w}_i = a_{i1}\mathbf{v}_1 + a_{i2}\mathbf{v}_2 + \dots + a_{ik}\mathbf{v}_k, \quad (i = 1, \dots, r). \quad (2.9)$$

Mivel a W bázis vektorai lineárisan függetlenek, ezért a

$$c_1 \mathbf{w}_1 + c_2 \mathbf{w}_2 + \dots + c_r \mathbf{w}_r = \mathbf{0} \quad (2.10)$$

egyenlőség csak a $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$ konstansokra áll fenn. A (2.9) egyenlőségeit a (2.10) egyenletbe helyettesítve

$$c_1(a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{12}\mathbf{v}_2 + \dots + a_{1k}\mathbf{v}_k) + c_2(a_{21}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + \dots + a_{2k}\mathbf{v}_k) + \dots + c_r(a_{r1}\mathbf{v}_1 + a_{r2}\mathbf{v}_2 + \dots + a_{rk}\mathbf{v}_k) = \mathbf{0},$$

aminek V vektorai szerinti rendezése után kapjuk, hogy

$$(a_{11}c_1 + a_{21}c_2 + \dots + a_{r1}c_r)\mathbf{v}_1 + (a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + \dots + a_{r2}c_r)\mathbf{v}_2 + \dots + (a_{1k}c_1 + a_{2k}c_2 + \dots + a_{rk}c_r)\mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

Ez azt jelenti, hogy a homogén lineáris

$$\begin{aligned} a_{11}c_1 + a_{21}c_2 + \dots + a_{r1}c_r &= 0 \\ a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + \dots + a_{r2}c_r &= 0 \\ \vdots & \\ a_{1k}c_1 + a_{2k}c_2 + \dots + a_{rk}c_r &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszernek a $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$ az egyetlen megoldása. Ez viszont a 2.52. tétel szerint nem teljesülhet, mivel a fenti homogén egyenletrendszer egyenleteinek száma kisebb ismeretlenjei számánál ($k < r$). Ez az ellentmondás bizonyítja, hogy indirekt feltevésünk helytelen volt, tehát valóban, egy altér bármely két bázisa azonos számú vektorból áll. ■

Ha a háromdimenziós térben tekintünk egy origón átmenő síkot, látjuk, hogy bármely két független vektora kifeszíti. Azaz minden bázisa kételemű. Ha egy origón átmenő egyenest tekintünk, azt minden nem-nulla vektora, mint egyelemű bázisa, kifeszíti. A hétköznapi életben is használt fogalom, a dimenzió, megegyezik a bázis elemszámával. Miután egy altér minden bázisa azonos elemszámú, értelmes a következő definíció:

2.76. DEFINÍCIÓ: DIMENZIÓ. Az $\mathbb{R}^n$ tér egy $\mathcal{A}$ alterének *dimenzióján* egy bázisának elemszámát értjük, és e számot $\dim \mathcal{A}$ -val jelöljük.

Az $\mathbb{R}^n$ altere saját magának, és standard bázisa épp n vektorból áll, így $\dim \mathbb{R}^n = n$. A nullvektorból álló altérben nincsenek független vektorok, így dimenziója 0.

Adott véges sok $\mathbb{R}^n$ -beli vektor által kifeszített altér dimenzióját úgy határozhatjuk meg, hogy meghatározzuk a vektorokból képzett mátrix rangját. Igaz ugyanis a következő állítás:

2.77. ÁLLÍTÁS: DIMENZIÓ = RANG. Egy mátrix rangja, sortérének dimenziója és oszlopterének dimenziója megegyezik. Ebből következőleg $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^T)$.

BIZONYÍTÁS. A mátrix rangja megegyezik lépcsős alakjában lévő nem-zérus sorainak számával. A 2.71. tétel szerint viszont e sorok lineárisan függetlenek és kifeszítik a sorteret, tehát bázist alkotnak, így számuk a sortér dimenzióját adja. Az oszloptérről láttuk, hogy a főelemeknek megfelelő oszlopok az eredeti mátrixban lineárisan függetlenek és kifeszítik az oszlopteret, tehát e tér dimenziója is a mátrix rangjával egyezik meg. Az utolsó állítás abból következik, hogy $\mathbf{A}$ sortere megegyezik $\mathbf{A}^T$ oszlopterével. ■

2.78. DEFINÍCIÓ: VEKTORRENDSZER RANGJA. Egy $\mathbb{R}^n$ -beli vektorokból álló vektorrendszer *rangján* a vektorokból képzett mátrix rangját, vagy ami ezzel egyenlő, az általuk kifeszített altér dimenzióját értjük.

2.79. PÉLDA: DIMENZIÓ KISZÁMÍTÁSA. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix sortérének és nullterének dimenzióját!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{A}$ redukált lépcsős alakja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Innen leolvasható, hogy a mátrix rangja 2, így sortérének dimenziója is 2. A nulltér dimenziója megegyezik az egyenletrendszer megoldásterének dimenziójával, ami megegyezik a szabad változók számával, esetünkben ez 3. Vegyük észre, hogy a sortér és a nulltér dimenziójának összege megegyezik a változók számával, azaz a mátrix oszlopainak számával, jelen példában 5-tel. ■

2.80. TÉTEL: DIMENZIÓTÉTEL. Bármely $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix esetén a sortér dimenziójának és a nulltér dimenziójának összege n . Képlettel:

$$\dim(\mathcal{S}(\mathbf{A})) + \dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) = n.$$

BIZONYÍTÁS. A mátrix sortérének dimenziója megegyezik a mátrix rangjával, azaz az $[\mathbf{A}|\mathbf{0}]$ mátrixú egyenletrendszerben a kötött változók számával, míg a nulltér a szabad változók számával (ld. 3.41). Ezek összege n . ■

Ortogonalis és ortonormált bázis Segíti az alterek vizsgálatát, ha a bázisvektorok páronként merőlegesek egymásra, ekkor ugyanis a különböző bázisvektorok skaláris szorzata 0. További könnyítést jelenthet, ha a bázisvektorok egységvektorok, mert ekkor egy vektor velük vett skaláris szorzata a merőleges vetület hosszát adja.

Páronként merőleges vektorok egy rendszerét *ortogonalis rendszernek* (rövidítése OR) nevezzük. Ortogonalis rendszernek lehetnek 0-vektor tagjai. Páronként merőleges egységvektorok egy rendszerét *ortonormált rendszernek* (rövidítése ONR) nevezzük. Ortonormált rendszerben *nincsenek* 0-vektorok. Egy zérusvektort nem tartalmazó OR vagy egy tetszőleges ONR mindig bázisa az általa kifeszített alternek. Ezt az alter *ortogonalis bázisának* (OB), illetve *ortonormált bázisának* (ONB) nevezzük. Ortogonalis bázisból mindig kaphatunk egy ortonormáltat, ha az OB minden bázisvektorát elosztjuk a hosszával. Ezt a vektor *normálásának* nevezzük.

2.81. TÉTEL: ORTOGONÁLIS VEKTOROK FÜGGETLENSÉGE. Ha a nullvektortól különböző $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ vektorok páronként ortogonálisak, akkor függetlenek is.

BIZONYÍTÁS. Tekintsük a $c_1\mathbf{a}_1 + \dots + c_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ egyenletet. Be kell látnunk, hogy ez csak a $c_1 = \dots = c_k = 0$ esetben áll fenn. Szorozzuk be az egyenlőség mindkét oldalát az $\mathbf{a}_i$ vektorral ($i = 1, 2, \dots, k$). Ekkor a jobb oldal $\mathbf{0}$, a bal oldalon pedig egy tag kivételével mindegyik $\mathbf{0}$ -vektor lesz:

$$(c_1\mathbf{a}_1 + \dots + c_k\mathbf{a}_k) \cdot \mathbf{a}_i = c_i\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i.$$

Mivel $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i \neq 0$, ezért $c_i = 0$, és ez igaz minden i -re. ■

Tudjuk, hogy a háromdimenziós térben bármely $\mathbf{v} = (x, y, z)$ vektor koordinátáira igaz, hogy

$$x = \mathbf{v} \cdot \mathbf{i}, \quad y = \mathbf{v} \cdot \mathbf{j}, \quad z = \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}.$$

Az is igaz, hogy az $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ által kifeszített síknak, azaz az xy -síknak a $\mathbf{v}$ vektorhoz legközelebb fekvő pontja, illetve az oda mutató helyvektor $\hat{\mathbf{v}} = (x, y, 0)$, azaz

$$\hat{\mathbf{v}} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{j})\mathbf{j}$$

Azt is tudjuk, hogy a $\mathbf{v}$ -hez legközelebbi pont épp $\mathbf{v}$ -nek a síkra való merőleges vetülete.

A fenti összefüggések nem tűnnek hasznosaknak, de mint látni fogjuk, tetszőleges ONB esetén igen értékesek.

Először a merőleges vetület és a merőleges összetevő fogalmát definiáljuk. Legyen $\mathcal{A}$ az $\mathbb{R}^n$ egy altér, és $\mathbf{v}$ egy $\mathbb{R}^n$ -beli vektor. Tegyük fel, hogy $\mathbf{v}$ előáll $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}} + \mathbf{v}^\perp$ alakban, ahol $\hat{\mathbf{v}}$ egy $\mathcal{A}$ -beli vektor, $\mathbf{v}^\perp$ pedig merőleges $\mathcal{A}$ minden vektorára. E $\hat{\mathbf{v}}$ vektort a $\mathbf{v}$ vektor $\mathcal{A}$ -ra való *merőleges vetületének*, a $\mathbf{v}^\perp$ vektort pedig $\mathbf{v}$ $\mathcal{A}$ -ra *merőleges összetevőjének* nevezzük.

2.82. TÉTEL: ALTÉR ORTONORMÁLT BÁZISA. Adva van az $\mathbb{R}^n$ térben egy $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k\}$ ortonormált rendszer által kifeszített $\mathcal{A}$ altér, valamint egy $\mathbf{v}$ vektor. Az altér $\mathbf{v}$ -hez legközelebb fekvő $\hat{\mathbf{v}}$ pontja megegyezik $\mathbf{v}$ -nek az altérre eső merőleges vetületével, nevezetesen

$$\hat{\mathbf{v}} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 + \dots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_k)\mathbf{e}_k \quad (2.11)$$

E $\hat{\mathbf{v}}$ vektor megadja a $\mathbf{v}$ vektor merőleges vetületét ($\hat{\mathbf{v}}$) és merőleges összetevő ($\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}$) összegére való felbontását, ahol $\mathbf{v}^\perp = \mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}$. E felbontás egyértelmű.

BIZONYÍTÁS. Először megmutatjuk, hogy a (2.11) képlet szerinti pont van legközelebb $\mathbf{v}$ -hez. $\mathbf{v}$ és $\hat{\mathbf{v}}$ távolságának négyzete

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}})^2 &= \left(\mathbf{v} - \sum_{i=1}^k (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i \right)^2 \\ &= \mathbf{v}^2 - 2 \sum_{i=1}^k (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i)^2 + \sum_{i=1}^k (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i)^2 \\ &= \mathbf{v}^2 - \sum_{i=1}^k (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i)^2. \end{aligned}$$

$\mathbf{v}$ és az altér egy tetszőleges $\mathbf{u}$ vektorának távolságnégyzete:

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 &= \left(\mathbf{v} - \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{e}_i \right)^2 \\ &= \mathbf{v}^2 - 2 \sum_{i=1}^k c_i (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i) + \sum_{i=1}^k c_i^2. \end{aligned}$$

Ha az utóbbiból kivonva az előbbi pozitív értéket kapunk, ez azt jelenti,

hogy valóban $\hat{\mathbf{v}}$ van $\mathbf{v}$ -hez legközelebb:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 - (\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}})^2 \\ &= \left(\mathbf{v}^2 - 2 \sum_{i=1}^k c_i (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i) + \sum_{i=1}^k c_i^2 \right) - \left(\mathbf{v}^2 - \sum_{i=1}^k (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i)^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^k c_i^2 - 2 \sum_{i=1}^k c_i (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i) + \sum_{i=1}^k (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^k (c_i - \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Ebből az összefüggésből az is látszik, hogy az $\mathcal{A}$ altér minden vektora messzebb van $\mathbf{v}$ -től, mint $\hat{\mathbf{v}}$.

Belátjuk még, hogy $\hat{\mathbf{v}}$ a $\mathbf{v}$ -nek az altérbe eső merőleges vetülete. Világos, hogy $\hat{\mathbf{v}}$ az altérbe esik, hisz az altér bázisával fejeztük ki, tehát már csak azt kell megmutatni, hogy $\mathbf{v}^\perp = \mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}$ merőleges a bázisvektorok (és így az altér vektorainak) mindegyikére.

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{e}_j &= \left(\mathbf{v} - \sum_{i=1}^k (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i \right) \cdot \mathbf{e}_j \\ &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_j - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1)(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_j) - \cdots - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_k)(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_j) \\ &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_j - \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_j \\ &= 0, \end{aligned}$$

és ez igaz minden $j = 1, 2, \dots, k$ értékre. Ráadásul azt is látjuk, hogy nem lenne minden együtttható 0, ha $\mathbf{v}^\perp$ nem egyezne meg a $\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}$ vektorral, azaz e felbontás egyértelmű. ■

Megjegyezzük, hogy még nem tudjuk, hogy egy $\mathbf{v}$ vektor mindig felbontható-e egy altérre merőleges összetevő és a vetület összegére, mert a fenti tételben feltételeztük, hogy az altérnek van ortonormált bázisa, de hamarosan bizonyítjuk, hogy ilyen bázis mindig található.

2.83. PÉLDA: EGY PONT SÍKRA VALÓ MERŐLEGES VETÜLETE. Határozzuk meg a $(3, 1, 2)$ pontnak az egymásra merőleges $\mathbf{a} = \frac{1}{7}(2, 3, 6)$ és $\mathbf{b} = \frac{1}{7}(3, -6, 2)$ vektorok által kifeszített síkra való merőleges vetületét!

MEGOLDÁS. Mivel $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ ortonormált bázisa az általuk kifeszített altérnek, ezért a $\mathbf{v} = (3, 1, 2)$ vektornak e síkra eső merőleges vetülete

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}} &= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})\mathbf{a} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{b})\mathbf{b} \\ &= \left((3, 1, 2) \cdot \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7} \right) \right) \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7} \right) + \left((3, 1, 2) \cdot \left(\frac{3}{7}, \frac{-6}{7}, \frac{2}{7} \right) \right) \left(\frac{3}{7}, \frac{-6}{7}, \frac{2}{7} \right) \\ &= 3 \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7} \right) + 1 \left(\frac{3}{7}, \frac{-6}{7}, \frac{2}{7} \right) \\ &= \left(\frac{9}{7}, \frac{3}{7}, \frac{20}{7} \right). \end{aligned}$$

Összehasonlításul: a standard elemi módszer az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ irányvektorú, $(3, 1, 2)$ ponton átmenő egyenes és a sík metszéspontjának meghatározása lenne. ■

Gram–Schmidt-ortogonalizáció Nagy előnyökkel jár, ha egy altérnek nem csak egy bázisát, hanem egy ortogonális bázisát ismerjük. E paragrafusban megmutatjuk, hogy ilyen bázis létezik, és eljárást adunk a megkonstruálására. Ezt az eljárást Gram–Schmidt-ortogonalizációnak nevezzük.

2.84. TÉTEL: GRAM-SCHMIDT-ORTOGONALIZÁCIÓ. Ha $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$ egy független vektorrendszer, akkor létezik olyan ortogonális $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ vektorrendszer, hogy minden $i = 1, 2, \dots, k$ esetén

$$\text{span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_i) = \text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i). \quad (2.12)$$

Az ortogonális $\mathcal{V}$ rendszerből a vektorok normálásával kapott

$$\left\{ \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|}, \frac{\mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_2|}, \dots, \frac{\mathbf{v}_k}{|\mathbf{v}_k|} \right\}$$

rendszer ortonormált.

BIZONYÍTÁS. A $\text{span}(\mathbf{u}_1) = \text{span}(\mathbf{v}_1)$ összefüggés teljesül, ha

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1.$$

A $\text{span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ teljesülése érdekében olyan $\mathbf{v}_2$ vektort kell választani, mely az $\mathbf{u}_1$ és $\mathbf{u}_2$ síkjában van, másrészt $\mathbf{v}_2$ -nek merőlegesnek kell lennie $\mathbf{v}_1$ -re. E feltételeket teljesíti az $\mathbf{u}_2$ -nek a $\mathbf{v}_1$ által kifeszített altérre merőleges összetevője, azaz a

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \left(\mathbf{u}_2 \cdot \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|} \right) \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|} = \mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1$$

vektor. Látható, hogy e vektor nem lehet a 0-vektor, hisz $\mathbf{v}_2 = 0$ esetén $\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{u}_1$ lenne, azaz $\mathbf{u}_1$ és $\mathbf{u}_2$ nem lenne független, ami ellentmond annak, hogy $\mathcal{U}$ független. Az előző képletekből látható, hogy $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ előállítható az $\mathbf{u}_1$ és $\mathbf{u}_2$ lineáris kombinációjaként, és viszont, így $\text{span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ fennáll. Az eljárás hasonlóképp folytatható. Ha már megkonstruáltuk $\mathbf{v}_i$ -t, akkor a 2.82. tétel szerint kiszámoljuk az $\mathbf{u}_{i+1}$ vektornak az $\mathcal{A} = \text{span}(\frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|}, \frac{\mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_2|}, \dots, \frac{\mathbf{v}_i}{|\mathbf{v}_i|})$ altér szerinti merőleges összetevőjét, és ezt választjuk $\mathbf{v}_{i+1}$ -nek, azaz

$$\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{u}_{i+1} - \frac{\mathbf{u}_{i+1} \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{u}_{i+1} \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2} \mathbf{v}_2 - \dots - \frac{\mathbf{u}_{i+1} \cdot \mathbf{v}_i}{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i} \mathbf{v}_i$$

Könnyen látható, hogy $\mathbf{v}_{i+1} \neq \mathbf{0}$, mert ellenkező esetben $\mathcal{U}$ nem volna független, és hogy $\mathbf{v}_{i+1}$ kifejezhető az $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{i+1}$ vektorok lineáris kombinációjaként, és $\mathbf{u}_{i+1}$ kifejezhető az $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{i+1}$ vektorok lineáris kombinációjaként, tehát a tétel kifeszített alterekre vonatkozó állítás is fennáll. ■

2.85. PÉLDA: GRAM-SCHMIDT-ORTOGONALIZÁCIÓ. Keressünk ortonormált bázist az $(1, 1, 1, 1)$, $(3, -1, 3, -1)$, $(6, 2, 2, -2)$ vektorok által kifeszített altérben.

MEGOLDÁS. Először keressünk egy ortogonális bázist:

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 1)$$

$$\mathbf{v}_2 = (3, -1, 3, -1) - \frac{(3, -1, 3, -1) \cdot (1, 1, 1, 1)}{(1, 1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1, 1)} (1, 1, 1, 1) = (2, -2, 2, -2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_3 &= (6, 2, 2, -2) - \frac{(6, 2, 2, -2) \cdot (1, 1, 1, 1)}{(1, 1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1, 1)} (1, 1, 1, 1) \\ &\quad - \frac{(6, 2, 2, -2) \cdot (2, -2, 2, -2)}{(2, -2, 2, -2) \cdot (2, -2, 2, -2)} (2, -2, 2, -2) = (2, 2, -2, -2) \end{aligned}$$

Végül az ortonormált bázis:

$$\left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \right\}$$

Könnyen igazolható, hogy a Gram-Schmidt-ortogonalizáció működik nem független vektorokból álló vektorrendszerre is, annyi változással, hogy $\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ pontosan akkor, ha $\mathbf{u}_i$ nem független a kisebb indexű vektoroktól, azaz $\mathbf{u}_i$ benne van a $\text{span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{i-1})$ altérben.

Elemi bázistranszformáció* Az előző paragrafusban azt láttuk, hogy az elemi sorműveletek eredményeként az eredeti mátrix oszlopainak egy másik bázisban felírt koordinátás alakját kapjuk meg. Ezt a paragrafust arra szánjuk, hogy a vektortér struktúrája felől is megértsük, mi történik akkor, amikor a mátrix egy oszlopában főelemet (pivotelemet) választunk, és oszlopának többi elemét elimináljuk. A folyamat lényege egy kétoszlopos mátrixon is jól szemléltethető. Az egyszerűség kedvéért a két oszlop legyen az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektor, a bázis, melyben e vektorok meg vannak adva, legyen a standard bázis. Tegyük fel, hogy $a_i \neq 0$. Ekkor az a_i pozícióját választva, a kiküszöbölés eredményeként a következőket kapjuk.

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_i & b_i \\ \vdots & \vdots \\ a_m & b_m \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & b_1 - \frac{b_i}{a_i}a_1 \\ 0 & b_2 - \frac{b_i}{a_i}a_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{b_i}{a_i} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & b_m - \frac{b_i}{a_i}a_m \end{bmatrix}$$

Tudjuk, az oszlopok az elemi sorműveletek után az eredeti vektorokat adják egy másik bázisban. Az $\mathbf{a}$ vektor nyilvánvalóan egy olyan bázisban lett felírva, amelyben szerepel az $\mathbf{a}$ vektor is, mégpedig ez az i -edik bázisvektor. Megmutatjuk, hogy mindkét oszlop az

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{i-1}, \mathbf{a}, \mathbf{e}_{i+1}, \dots, \mathbf{e}_m$$

bázisban lett felírva. Az $\mathbf{a}$ vektorra ez nyilván igaz. Nézzük a $\mathbf{b}$ vektort! Fejezzük ki az $\mathbf{e}_i$ vektort az $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + \dots + a_i\mathbf{e}_i + \dots + a_m\mathbf{e}_m$ felírásból:

$$\mathbf{e}_i = -\frac{1}{a_i}a_1\mathbf{e}_1 - \frac{1}{a_i}a_2\mathbf{e}_2 - \dots + \frac{1}{a_i}\mathbf{a} - \dots - \frac{1}{a_i}a_m\mathbf{e}_m.$$

Ezt behelyettesítjük a $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + \dots + b_i\mathbf{e}_i + \dots + b_m\mathbf{e}_m$ kifejezésbe:

$$\mathbf{b} = (b_1 - \frac{b_i}{a_i}a_1)\mathbf{e}_1 + (b_2 - \frac{b_i}{a_i}a_2)\mathbf{e}_2 + \dots + \frac{b_i}{a_i}\mathbf{a} + \dots + (b_m - \frac{b_i}{a_i}a_m)\mathbf{e}_m.$$

Tehát valóban, a $\mathbf{b}$ koordinátás alakja e módosított bázisban épp az, amit az eredeti mátrix eliminálása után kaptunk a második oszlopban. Az imént tárgyalt lépést elemi bázistranszformációnak nevezzük, mert egy másik bázisra való áttérés egy elemi lépésének tekintjük, amikor egyetlen bázisvektort cserélünk ki. A történetek szemléltetésére a mátrixot fejléccel együtt egy táblázatba írjuk, a sorok elé az $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ bázisvektorok, az oszlopok fölé az oszlopvektorok neve kerül.

$$\begin{array}{c|cc} & \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \mathbf{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{e}_i & a_i & b_i \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{e}_m & a_m & b_m \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|cc} & \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{e}_1 & 0 & b_1 - \frac{b_i}{a_i}a_1 \\ \mathbf{e}_2 & 0 & b_2 - \frac{b_i}{a_i}a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a} & 1 & \frac{b_i}{a_i} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{e}_m & 0 & b_m - \frac{b_i}{a_i}a_m \end{array}$$

Összefoglalva és egyúttal általánosabban megfogalmazva a fentieket:

2.86. TÉTEL: ELEMI BÁZISTRANSZFORMÁCIÓ. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{a}$ vektor $E = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m\}$ bázisra vonatkozó i -edik koordinátája $a_i \neq 0$. Ekkor az E által generált $\mathcal{E}$ altérnek az

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{i-1}, \mathbf{a}, \mathbf{e}_{i+1}, \dots, \mathbf{e}_m$$

vektorok is bázisát alkotják. Az $\mathcal{E}$ egy tetszőleges b vektorának koordinátás alakja megkapható e bázisban elemi sorműveletekkel, ha a_i -t választjuk főelemnek.

Az elemi bázistranszformáció alkalmas arra, hogy a bázisok változásán keresztül egy más nézőpontból világítsa meg a redukált lépcsős alakra hozással megoldható feladatokat. Példaként vizsgáljuk meg, mi történik egy egyenletrendszer megoldásakor. Megjegyezzük, hogy itt nincs szükség sorcserére, mert egy oszlopból szabadon választhatunk olyan sort, amelynek fejlécében még az eredeti bázisvektor szerepel.

2.87. PÉLDA: EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSA ELEMI BÁZISTRANSZFORMÁCIÓVAL. Oldjuk meg a 2.20. és a 2.28. példában megoldott egyenletrendszert elemi bázistranszformációval.

MEGOLDÁS. A táblázatokat egybefűzzük, a sorok fejlécein mindig jelezzük az aktuális bázist, az oszlopok fejléceit a jobb érthetőség végett mindig kiírjuk, a kiválasztott főelemeket külön jelöljük:

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{b}$		$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{b}$		$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{b}$		$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{b}$
$\mathbf{e}_1$	1	1	2	0	$\mathbf{a}_1$	1	1	2	0	$\mathbf{a}_1$	1	0	3	-5	$\mathbf{a}_1$	1	0	0	0
$\mathbf{e}_2$	2	2	3	2	$\mathbf{e}_2$	0	0	-1	2	$\mathbf{e}_2$	0	0	-1	2	$\mathbf{e}_2$	0	0	0	0
$\mathbf{e}_3$	1	3	3	4	$\mathbf{e}_3$	0	2	1	4	$\mathbf{e}_3$	0	0	3	-6	$\mathbf{a}_3$	0	0	1	-3
$\mathbf{e}_4$	1	2	1	5	$\mathbf{e}_4$	0	1	-1	5	$\mathbf{a}_2$	0	1	-1	5	$\mathbf{a}_2$	0	1	0	3

A táblázaton kicsit lehet egyszerűsíteni, azt az oszlopot, amelyben már csak egy standard egységvektor van, felesleges kiírni, az oszlopok és a sorok fejléceibe pedig elég csak azt a változót írni, amelyik a bázisba vett oszlopvektorhoz tartozik. Így a következőt kapjuk:

x	y	z	$\mathbf{b}$		y	z	$\mathbf{b}$		z	$\mathbf{b}$		$\mathbf{b}$
1	1	2	0	x	1	2	0	x	3	-5	x	1
2	2	3	2		0	-1	2		-1	2		0
1	3	3	4		2	1	4		3	-6	z	-2
1	2	1	5		1	-1	5	y	-1	5	y	3

Az egyenletrendszer megoldása tehát $x = 1$, $y = 3$, $z = -2$. ■

Bizonyítások

1• Mutassuk meg, hogy tetszőleges $H \subseteq \mathbb{R}^n$ vektorhalmazra a következő két állítás ekvivalens:

1. bármely véges sok H -beli vektor bármely lineáris kombinációja H -ban van;
2. bármely H -beli vektor tetszőleges skalárszorosa, és bármely két H -beli vektor összege H -ban van.

2• Mutassuk meg, hogy a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok mindegyikére merőleges vektorok alteret alkotnak $\mathbb{R}^n$ -ben!

3• **Lineáris függetlenség egy szükséges és elégséges feltétele.** A V vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha $\text{span}(V)$ bármely vektora csak egyféleképp áll elő V lineáris kombinációjaként.

2.6. Megoldás iterációval

A Gauss-módszer nagyméretű mátrixon a sok elemi sorművelet közben vétett kerekítési, számbábrázolási hiba folytán néha rossz eredményre vezet. Az itt tárgyalandó iterációs módszerek közben az együtthatómátrixon nem változtatunk, így a számítási hibák sem halmozódnak. Ráadásul e módszerek a ritka mátrixokat sem „rontják el”, mint a Gauss-módszer, mely sok zérust ír fölül.

Iteratív módszerek E szakaszban csak olyan egyenletrendszerekkel foglalkozunk, melyek n -ismeretlenesek és n egyenletből állnak, tehát melyek együtthatómátrixa négyzetes.

Az iteratív módszerek lényege, hogy olyan

$$\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k, \dots$$

vektorsorozatot generálunk, mely az adott egyenletrendszer megoldásvektorához konvergál. Első pillanatra meglepőnek tűnhet egy végtelen sorozat generálásával keresni a megoldást, de mivel számításaink eleve csak véges pontosságúak, gyakran igen kevés lépésben elérhetjük a megkívánt pontosságot. Ráadásul a kerekítési hibák még növelhetik is a konvergencia sebességét.

A kiindulási pont – a matematika több más területén is gyümölcsöző módszer – a fixpontkeresés. Ennek lényegét egy egyváltozós függvény példáján mutatjuk be. Legyen f egy minden valós helyen értelmezett függvény, mely bármely két a és b pontot két olyan pontba visz, melyek távolsága a és b távolságának legfeljebb a fele. Képletben:

$$|f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2}|b - a|, \text{ azaz } \frac{|f(b) - f(a)|}{|b - a|} \leq \frac{1}{2}.$$

Ez azt jelenti, hogy f összes különbségi hányadosa legfeljebb $1/2$. A sokkal általánosabban megfogalmazható Banach-féle fixpont tétel szerint ekkor egyetlen olyan x^* pont létezik, hogy $x^* = f(x^*)$, és ez megkapható úgy, hogy egy tetszőleges x_0 pontból kiindulva képezzük az

$$x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots, x_{k+1} = f(x_k), \dots$$

sorozatot, és vesszük a határértékét. Ekkor

$$x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k.$$

A ?? ábra szemlélteti a fenti állítást. Az $1/2$ -es szorzó kicserélhető tetszőleges 0 és 1 közé eső konstansra.

A Banach fixponttétel könnyen szemléltethető hétköznapi módon: képzeljük el, hogy egy nagyobb gumilapot néhányan körbeállva egy kerek asztal tetején széthúznak az asztal széléig, majd (most jön a leképezés!) visszaengedik eredeti állapotába. Ekkor igaz az, hogy az asztalon pontosan egy olyan pont van, mely fölött a gumilap helyben marad. E pont megkapható, ha kiválasztunk az asztalon egy tetszőleges P_0 pontot, és megnézzük, hogy a kinyújtott gumilap e fölötti pontja összehúzódnáskor hová ugrik, legyen ez a P_1 pont az asztalon. A kinyújtott gumilap P_1 fölötti pontja összehúzódnáskor az P_2 pont fölé ugrik, stb. Az így kapott pontsorozat a fixponthoz konvergál.

Jacobi-iteráció Az előző paragrafusban leírtakat követve megpróbáljuk az egyenletrendszert átrendezni úgy, hogy az $\mathbf{x} = f(\mathbf{x})$ alakú legyen, ahol $\mathbf{x}$ jelöli az ismeretlenek vektorát.

2.88. PÉLDA: JACOBI-ITERÁCIÓ. Oldjuk meg a

$$\begin{aligned} 4x - y &= 2 \\ 2x - 5y &= -8 \end{aligned}$$

egyenletrendszert, majd hozzuk $\mathbf{x} = f(\mathbf{x})$ alakra, és egy tetszőleges $\mathbf{x}_0$ vektorból indulva végezzünk az $\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k)$ formulával iterációt. Számoljunk 3 tizedes pontossággal. Hová tart az így kapott vektorsorozat?

MEGOLDÁS. Az egyenletrendszert kiküszöböléssel megoldva kapjuk, hogy $\mathbf{x} = (1, 2)$ az egyetlen megoldás.

Hozzuk az egyenletrendszert $\mathbf{x} = f(\mathbf{x})$, azaz $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)$ alakra. Erre több lehetőség is adódik. Ezek közül talán az a legkézenfekvőbb, hogy az első egyenletből az x -et, a másodikból y -t kifejezzük:

$$\begin{aligned} x &= \frac{y+2}{4} \\ y &= \frac{2x+8}{5} \end{aligned}$$

Válasszunk egy $\mathbf{x}_0$ vektort tetszőlegesen, legyen pl. $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$, azaz $x = y = 0$. A fenti képletekbe helyettesítve kapjuk, hogy $\mathbf{x}_1 = (\frac{0+2}{4}, \frac{0+8}{5}) = (0.5, 1.6)$. A további értékeket egy táblázatban adjuk meg:

	$\mathbf{x}_0$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$	$\mathbf{x}_5$	$\mathbf{x}_6$	$\mathbf{x}_7$	$\mathbf{x}_8$
x	0	0.5	0.9	0.95	0.99	0.995	0.999	1.000	1.000
y	0	1.6	1.8	1.96	1.98	1.996	1.998	2.000	2.000

E példa esetén tehát a végtelen sorozat konvergensenek mutatkozott, de a kerekítési hiba folytán véges sok lépés után megtalálta a konvergenciapontot. ■

Az általános eset hasonlóan írható le. Tegyük fel, hogy az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

egyenletrendszer egyértelműen megoldható és főátlójának minden eleme különbözik 0-tól. A *Jacobi-iteráció* menete tehát a következő. A k -adik egyenletből fejezzük ki az x_k változót:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1,n-1}x_{n-1} - a_{1n}x_n) \\ x_2 &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - \dots - a_{2,n-1}x_{n-1} - a_{2n}x_n) \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Válasszunk az ismeretlenek $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektorának egy $\mathbf{x}_0$ kezdőértéket, pl. legyen $\mathbf{x}_0 = (0, 0, \dots, 0)$. A (2.13) egyenletrendszer jobb oldalába helyettesítsük be $\mathbf{x}_0$ koordinátáinak értékét, a bal oldal adja $\mathbf{x}_1$ koordinátáit. Ezt a lépést ismételjük meg, generálva az $\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots$ vektorokat addig, míg el nem érjük a megfelelő pontosságot.

Gauss – Seidel-iteráció A Jacobi-iteráció gyorsaságán könnyen javíthatunk, ha a (2.13) egy egyenletének jobb oldalába való behelyettesítés után a bal oldalon kapott változó értékét azonnal fölhasználjuk, nem várunk vele a ciklus végéig. Ezt a módosított algoritmust nevezzük *Gauss – Seidel-iterációnak*.

2.89. PÉLDA: GAUSS – SEIDEL-ITERÁCIÓ. Oldjuk meg a

$$\begin{aligned} 4x - y &= 2 \\ 2x - 5y &= -8 \end{aligned}$$

egyenletrendszert Gauss – Seidel-iterációval.

MEGOLDÁS. Itt is, mint a Jacobi-iterációnál az

$$\begin{aligned} x &= \frac{y+2}{4} \\ y &= \frac{2x+8}{5} \end{aligned}$$

egyenleteket használjuk, de míg a Jacobi-iterációnál $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$ kezdőérték után az $x = \frac{0+2}{4} = \frac{1}{2}$, $y = \frac{0+8}{5} = \frac{8}{5}$ értékek következtek, a Gauss – Seidel-iterációnál a második egyenletben 0 helyett már az első egyenletben kiszámolt $x = \frac{1}{2}$ értéket helyettesítjük, azaz $y = \frac{2\frac{1}{2}+8}{5} = \frac{9}{5}$. A további értékeket egy táblázatban adjuk meg de úgy, hogy jelezzük a kiszámítás sorrendjét:

	$\mathbf{x}_0$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$
x	0	0.5	0.95	0.995	1.000
y	0	1.8	1.98	1.998	2.000

Hasonlítsuk össze az eredményt a Jacobi iterációnál készített táblázattal. ■

Mindkét iteráció a 2-ismeretlenes esetben jól szemléltethető. A ??- és a ??- ábra

Az iterációk konvergenciája A fenti példákból nem látszik, hogy vajon a Jacobi- és a Gauss – Seidel-iterációk mindig konvergálnak-e.

2.90. PÉLDA: DIVERGENS ITERÁCIÓ. Oldjuk meg Jacobi- és Gauss – Seidel-iterációval a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x - y &= 2 \\ 2x - y &= 5 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. Alakítsuk át az egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x &= y + 2 \\ y &= 2x - 5 \end{aligned}$$

Először próbálkozzunk Jacobi-iterációval:

	$\mathbf{x}_0$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$	$\mathbf{x}_5$	$\mathbf{x}_6$	$\mathbf{x}_7$	$\mathbf{x}_8$
x	0	2	-3	1	-9	-1	-21	-5	-45
y	0	-5	-1	-11	-3	-23	-7	-47	-15

Úgy tűnik, nem konvergens a vektorsorozat, mint ahogy nem tűnik annak a Gauss – Seidel-iterációnál sem:

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	
x	0	2	1	-1	-5	-13
y	0	-1	-3	-7	-15	-31

A divergencia leolvasható az iterációkat szemléltető ábrákról is! ■

2.91. DEFINÍCIÓ: SORONKÉNT DOMINÁNS FŐÁTLÓJÚ MÁTRIX. Azt mondjuk, hogy az $n \times n$ -es $\mathbf{A}$ mátrix *soronként (szigorúan) domináns főátlóval rendelkezik*, vagy *soronként (szigorúan) domináns főátlójú*, ha a főátló minden eleme abszolút értékben nagyobb a sorában lévő többi elem abszolút értékeinek összegénél, azaz képletben

$$\begin{aligned} |a_{11}| &> |a_{12}| + \dots + |a_{1,n-1}| + |a_{1n}| \\ |a_{22}| &> |a_{21}| + \dots + |a_{2,n-1}| + |a_{2n}| \\ &\vdots \\ |a_{n-1,n-1}| &> |a_{n-1,1}| + |a_{n-1,2}| + \dots + |a_{n-1,n}| \\ |a_{nn}| &> |a_{n1}| + |a_{n2}| + \dots + |a_{n,n-1}| \end{aligned}$$

Hasonlóan definiálható az oszloponként domináns főátlójú mátrix is.

2.92. PÉLDA: SORONKÉNT DOMINÁNS FŐÁTLÓJÚ MÁTRIXOK. Az alábbi mátrixok soronként domináns főátlójúak:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -10 & 1 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \\ -1 & -2 & 10 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & .25 & .25 & .25 \\ .25 & 1 & .25 & .25 \\ .25 & .25 & 1 & .25 \\ .25 & .25 & .25 & 1 \end{bmatrix}.$$

Az alábbi mátrixok nem soronként domináns főátlójúak, de sorcserékkel azzá tehetők:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & -2 & 10 \\ -10 & 1 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} .25 & .25 & .25 & 1 \\ 1 & .25 & .25 & .25 \\ .25 & .25 & 1 & .25 \\ .25 & 1 & .25 & .25 \end{bmatrix}.$$

Az alábbi egyenletrendszer együtthatómátrixa soronként domináns főátlójú:

$$\begin{aligned} 4x - y &= 11 \\ 2x - 5y &= -17 \end{aligned}$$

2.93. TÉTEL: ELÉGSÉGES FELTÉTEL AZ ITERÁCIÓK KONVERGENCIÁJÁRA. Ha az n egyenletből álló n -ismeretlenes egyenletrendszer együtthatómátrixa soronként domináns főátlójú, akkor bármely indulóvektor esetén a Jacobi- és a Gauss–Seidel-iteráció is konvergens.

E tételt nem bizonyítjuk. Megjegyezzük, hogy a tételbeli feltétel nem szükséges, csak elégséges, azaz olyan egyenletrendszeren is konvergens lehet valamelyik iteráció, melynek nem domináns főátlójú az együtthatómátrixa. Hasonló tétel igaz oszloponként domináns főátlójú együtthatómátrixok esetén is.

A domináns főátlójú mátrixokon a Gauss–Seidel-iteráció sosem lassabb, mint a Jacobi-iteráció, sőt, gyakran érezhetően gyorsabb. Az viszont előfordulhat, hogy a Gauss–Seidel-iteráció divergens, míg a Jacobi-iteráció konvergens (ld. 2.6.2. feladat).

A gyakorlatban ezeknek az iterációknak különböző, hatékonyabb javításait használják. E témában az olvasó figyelmébe ajánljuk a „numerikus módszerek” témában írt könyveket, web-oldalakat.

Jacobi-iteráció

1° Oldjuk meg a

$$4x - y = 8$$

$$2x - 5y = -5$$

egyenletrendszert Jacobi-iterációval! Számoljunk 3, majd 4 értékes jegyre!

Legyen $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$. Az iteráció képletei:

$$x = \frac{y+8}{4}, \quad y = \frac{2x+5}{5}.$$

Az iteráció lépéseinek táblázata 3 értékes jeggyel számolva:

	$\mathbf{x}_0$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$	$\mathbf{x}_5$	$\mathbf{x}_6$
x	0	2	2.25	2.45	2.48	2.50	2.50
y	0	1	1.80	1.90	1.98	1.99	2.00

Az iteráció lépéseinek táblázata 4 értékes jeggyel számolva:

	$\mathbf{x}_0$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$	$\mathbf{x}_5$	$\mathbf{x}_6$	$\mathbf{x}_7$	$\mathbf{x}_8$
x	0	2	2.25	2.45	2.475	2.495	2.498	2.500	2.5
y	0	1	1.80	1.90	1.980	1.990	1.998	1.999	2.0

Vegyes feladatok2° **Jacobi-iteráció konvergál, Gauss–Seidel-iteráció nem.**

Írjunk programot annak az állításnak az ellenőrzésére, hogy a

$$x + z = 0$$

$$-x + 5/6y = 0$$

$$x + 2y - 3z = 1$$

egyenletrendszeren a Jacobi-iteráció konvergál, a Gauss–Seidel-iteráció nem.

3° **Gauss-elimináció domináns főátlójú mátrixon.** Bizonyítsuk be, hogy ha az $\mathbf{A}$ mátrix főátlója soronként domináns, akkor végrehajtható rajta a főelemkiválasztásos Gauss-elimináció sorcsere nélkül!

4° **Az iterációk szemléltetése.** A A városból elindul egy A jelű vonat a B város felé, vele egyidőben a B városból egy B jelű A felé. A B vonat indulásával egyidőben a B vonat orráról elindul egy légy is A felé, de amint találkozik az A vonattal megfordul, és addig repül, míg a B vonattal nem találkozik, amikor ismét megfordul, stb. Mindhármuk sebessége konstans, de a légy sebessége nagyobb mindkét vonaténál.

1. Egy táblázatban megadjuk mindkét vonat távolságát az indulási helyüktől km-ben mérve azokban a pillanatokban, amikor a légy épp a B vonattal találkozik.

	(x_0, y_0)	(x_1, y_1)	(x_2, y_2)	(x_3, y_3)
x : távolság A -tól	0	40	48	49.6
y : távolság B -tól	0	80	96	99.2

Számítsuk ki a táblázat egy-két további oszlopát!

2. Milyen messze van A város B -től, ha a légy sebessége 200 km/h?

3. Most egy másik táblázatban megadjuk annak a vonatnak a távolságát az indulási helyétől, amelyik épp találkozik a léggel:

	y_0	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3
x : távolság A -tól		30		46		49.2	
y : távolság B -tól	0		80		96		99.2

Számítsuk ki a táblázat egy-két további oszlopát!

4. Milyen messze van A város B -től, ha a légy sebessége 200 km/h?

5. Mi köze van e feladatnak a Jacobi- és a Gauss–Seidel-iterációhoz?

A Jacobi-iteráció szerinti módon, a vonatok valamelyikének és a légynek a k -adik találkozásából kiszámítva a $k+1$ -edik találkozáshoz jellemző távolságokat, az $x_{k+1} = ay_k + b$, $y_{k+1} = cy_k + d$ egyenletekre jutunk. Az első táblázat adatait behelyettesítve, és a , b , c és d értékre megoldva az

Projektfeladatok5° **Intervallum aritmetika.**

6° **Lemez hőeloszlásának közelítése.** Képzeljünk el egy lemezt, melynek bizonyos pontokban – mondjuk egy képzetben a lemezre rajzolt rács pontjaiban – ismerjük kezdeti hőeloszlását. Tegyük fel, hogy a lemez határoló éleit állandó hőmérsékleten tartjuk. A feladat: meghatározni, hogy hogyan változik meg a lemez hőeloszlása?
??????????????

A következő példában az elektromos áramköröket, mint folyamatokat vizsgáljuk. Egyszerű fizikai magyarázata van annak, hogy a csomóponti törvény az elektromos áramkörökre is fennáll. Szokás e törvényt Kirchhoff I. törvényének is nevezni. A továbbiakhoz föllevenítjük Kirchhoff törvényeit, és az Ohm-törvényt.

KIRCHHOFF I. TÖRVÉNYE (CSOMÓPONTI TÖRVÉNY). Egy elektromos áramkör bármely elágazási pontjában a befolyó áramok összege megegyezik az onnan elfolyó áramok összegével.

KIRCHHOFF II. TÖRVÉNYE (HUROKTÖRVÉNY). Bármely zárt áramhurokban a hurok valamely irányítására nézve előjeles részfeszültségek összege zérus.

OHM-TÖRVÉNY. Valamely vezetőben az elektromos áram erőssége (I) egyenesen arányos a vezeték két vége közti elektromos potenciálkülönbséggel (U), azaz e két mennyiség hányadosa konstans. Ez az anyagra jellemző ellenállás. Képletben:

$$R = \frac{U}{I}.$$

Kémiai reakciók egyensúlyi egyenlete Egy zárt rendszerben végbemennő kémiai reakciók során a rendszerben lévő kémiai alkotóelemek mennyisége nem változik. Így felírható mindig egy olyan egyenlet – ezt nevezzük *reakció egyenletnek*, melynek bal oldalán a reakciók elején jelen lévő vegyületek, jobb oldalán az eredményül kapott vegyületek szerepelnek olyan együtthatókkal megszorozva, melyek a vegyületek mennyiségét fejezik ki.

2.94. PÉLDA: REAKCIÓ EGYENLET. A hidrogén-peroxid (H_2O_2) bomlelkony anyag, mely vízre (H_2O) és oxigénre (O_2) bomlik. Keressük meg azokat a legkisebb x_1 , x_2 és x_3 pozitív egész számokat, melyek leírják a reakcióban résztvevő vegyületek mennyiségét, azaz keressük a $x_1\text{H}_2\text{O}_2 = x_2\text{H}_2\text{O} + x_3\text{O}_2$ egyenletben szereplő ismeretlenek legkisebb pozitív egész megoldásait.

MEGOLDÁS. A hidrogén (H) és oxigén (O) atomok mennyisége a reakció egyenlet mindkét oldalán megegyezik, ami két egyenletet ad:

$$\begin{aligned} \text{H} : \quad 2x_1 &= 2x_2 \\ \text{O} : \quad 2x_2 &= x_2 + 2x_3 \end{aligned}$$

Egy oldalra rendezzük a változókat:

$$\begin{aligned} \text{H} : \quad 2x_1 - 2x_2 &= 0 \\ \text{O} : \quad x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned} \tag{2.14}$$

majd megoldjuk e homogén lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Így $x_3 = s$ választással a megoldás $x_2 = 2s$, $x_1 = 2s$, azaz $(x_1, x_2, x_3) = (2s, 2s, s)$. A legkisebb pozitív egész megoldást $s = 1$ adja: $2\text{H}_2\text{O}_2 = 2\text{H}_2\text{O} + \text{O}_2$. ■

Egy kémiai reakció egyenletének az anyagmennyiségre vonatkozó megmaradási elv mellett az elektromos töltés megmaradását is ki kell fejeznie. Ha a reakcióegyenletben töltések is szerepelnek, ezekre is fölírható egy egyenlet.

A fenti egyenletrendszer együtthatómátrixához hasonlóan szokás kémiai reakció(k) *formulamátrixát* vagy *atommátrixát* megkonstruálni. Ebben a sorok a kémiai elemeknek, illetve egy sor a töltéseknek, az oszlopok a vegyületeknek felelnek meg. Pl. az előző egyenletben szereplő vegyületekhez tartozó formulamátrix:

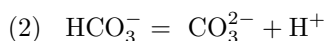
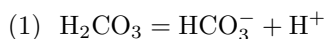
$$\begin{array}{cccc} & \text{H}_2\text{O}_2 & \text{H}_2\text{O} & \text{O}_2 \\ \text{H} & 2 & 2 & 0 \\ \text{O} & 2 & 1 & 2 \end{array}$$

Ha több reakció is lezajlik egy folyamatban, az összes a folyamatban szereplő vegyületre fölírható egy atommátrix. Ennek rangja hozzásegít a folyamatban játszódó független reakciók számának meghatározásához (?? oldal). A formulamátrix arra is alkalmas, hogy segítségével reakció egyenleteket írjunk fel.

Ha már ismerjük egy folyamatban lejátszódó reakciókat, a köztük lévő lineáris kapcsolatot a *szttöchiometriai mátrix* segítségével írhatjuk le. Ennek minden oszlopa egy reakcióhoz, minden sora egy, a reakciókban szereplő valamelyik vegyülethez tartozik. Az i -edik sorban, j -edik oszlopban álló szám a 0-ra rendezett j -edik reakció egyenletben az i -edik vegyület mennyisége. A szokás az, hogy az egyenlet bal oldalán szereplő együtthatókat szorozzuk -1 -gyel.

Sztöchiometria: a kémiai reakciók során tapasztalható tömeg- és térfogatviszonyok törvényszerűségeivel foglalkozik (az alapanyag és mérték jelentésű görög sztoicheiön és metron szavakból).

2.95. PÉLDA: FORMULAMÁTRIX, SZTÖCHIOMETRIAI MÁTRIX. A szén-sav disszociációját két egyenlet írja le.



Írjuk fel e reakció formula mátrixát és sztöchiometriai mátrixát! Határozzuk meg mindkettő rangját!

MEGOLDÁS. A formulamátrix

$$\begin{array}{ccccc} & \text{H}_2\text{CO}_3 & \text{HCO}_3^- & \text{H}^+ & \text{CO}_3^{2-} \\ \text{H} : & 2 & 1 & 1 & 0 \\ \text{C} : & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \text{O} : & 3 & 3 & 0 & 3 \\ q : & 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}$$

Ennek utolsó sora a töltések számát mutatja, melyet q -val jelöltünk. Redukált lépcsős alakja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

tehát a rangja 2. A sztöchiometriai mátrix a fejlécekkel:

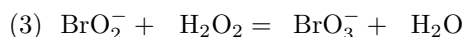
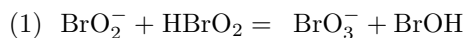
$$\begin{array}{cc} (1) & (2) \\ \text{H}_2\text{CO}_3 & -1 & 0 \\ \text{HCO}_3^- & 1 & -1 \\ \text{H}^+ & 1 & 1 \\ \text{CO}_3^{2-} & 0 & 1 \end{array} \quad \text{redukált lépcsős alakja} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rangja ennek is 2. ■

2.96. PÉLDA: BRUTTÓ REAKCIÓ. Egy több reakcióból álló folyamatban az alábbi bruttó reakciót mérték:



E reakcióban a következő elemi reakciók mehetnek végbe:



Melyik elemi reakciónak hányszor kell végbemennie a bruttó reakcióban?

MEGOLDÁS. Írjuk fel az elemi reakciók sztöchiometriai mátrixát először fejlécekkel, majd anélkül. Jelölje $\mathbf{A}$ a mátrixot:

	(1)	(2)	(3)	(4)	
BrO_2^-	-1	-1	-1	0	$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$
H^+	0	-1	0	0	
Br_2	0	0	0	1	
BrO_3^-	1	0	1	0	
H_2O	0	0	1	0	
HBrO_2	-1	1	0	0	
BrOH	1	0	0	-2	
H_2O_2	0	0	-1	1	

Majd írjuk fel a bruttó reakcióra ugyanezeket. Az oszlopmátrixot, mint vektort jelölje $\mathbf{b}$:

	bruttó	
BrO_2^-	-5	$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
H^+	-2	
Br_2	1	
BrO_3^-	3	
H_2O	1	
HBrO_2	0	
BrOH	0	
H_2O_2	0	

A feladat tehát az, hogy állítsuk elő ez utóbbi oszlopvektort az előbbi mátrix oszlopainak lineáris kombinációjaként! Ez pontosan azt jelenti, hogy oldjuk meg az $\mathbf{A}$ együtthatójú és $\mathbf{b}$ jobb oldalú egyenletrendszert. A bővített mátrix redukált lépcsős alakja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

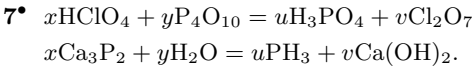
ahonnan a megoldás $(2, 2, 1, 1)$, azaz $2\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 = \mathbf{b}$. A feladat nyelvén: az első és második reakció kétszer, a harmadik és negyedik reakció egyszer hajtódik végre a bruttó reakció során. ■

E paragrafus anyaga részben a [?potagy, ?CRS] művekre épül, amelyekben további ismeretek és feladatok találhatóak.

Kifestő

Véges lineáris ??

Kémiai reakció egyenletek



$(x, y, u, v) = (12, 1, 4, 6).$
 $(x, y, u, v) = (1, 6, 3, 2).$
????????????????
Az egyszerűség kedvéért jelöljön $X_1, X_2, \dots$ különböző ké-
miai vegyületeket, $Z_1, Z_1, \dots$ reakcióegyenleteket. Például
tekintsük a következő képzeletbeli rendszert:

$Z_1 : \quad 2x_1 - 2x_2 \quad = \quad 0$
 $Z_2 : \quad \quad \quad x_2 - 2x_3 = 0Z_3 : x_2 - 2x_3 = 0$

????????????

3. fejezet

Mátrixok

Az előző fejezetben a mátrixokat csak egyszerű jelölésnek tekintettük, mely az egyenletrendszer együtthatóinak tárolására, és az egyenletrendszer megoldása közbeni számítások egyszerűsítésére való. E fejezetben először a számok közti műveleteket kiterjesztjük számtáblázatokra, majd ezeket átültetjük mátrixokra, és megvizsgáljuk algebrai tulajdonságaikat. E műveletek segítségével újra vizsgáljuk az egyenletrendszerek megoldhatóságának és a megoldások kiszámításának kérdését. Végül megvizsgálunk több érdekes alkalmazást.

3.1. Bevezetés: műveletek táblázatokkal

A valós számok közti műveletek természetes módon kiterjeszthetők táblázatok közti műveletekre.

Táblázatok Táblázatokkal nap, mint nap találkozunk. Fogalmát nem fogjuk precízen definiálni. Számszerű adatok áttekinthető összefoglalására való. Használatuk kikerülhetetlen a legegyszerűbb gazdasági adatok kezelésében, így minden irodai szoftvercsomag tartalmaz táblázatkezelőt, de a gazdaságtudományi, mérnöki vagy természettudományos közleményekben is nélkülözhetetlen eszköz.

E fejezetben olyan táblázatokkal fogunk foglalkozni, melyekben a téglalap alakban, sorokba és oszlopokba elrendezett számok minden sora előtt, és minden oszlopa fölött van egy *fejléc*, melyben az adott sor, illetve oszlop adatait jellemző valamely információ áll. A mátrixra tehát úgy is tekinthetünk, mint amelyet egy olyan absztrakció során kapunk a táblázatból, melyben azt megfosztjuk fejléceitől, az adatokból pedig csak a számokat őrizzük meg, azok jelentésétől, mértékegységétől eltekintünk.

Táblázatok összeadása A kerti asztalon 3 alma van. Ráesik a fárol még 2 alma. Az almák számának meghatározásához az összeadás műveletét használjuk. Az asztalon vendégséghez megterítve két gyümölcskosár van, bennük zöld és piros alma és szőlő. Számukat két táblázatban foglalhatjuk össze. Miután az egyik kosár tartalmát a másikba öntöttük, a gyümölcsök számát könnyen kiszámoljuk a két táblázatból. Például:

	zöld (db)	piros (db)		zöld (db)	piros (db)		zöld (db)	piros (db)
			+			=		
alma	3	2		alma	2		alma	5
szőlő	2	1		szőlő	0		szőlő	2

Azonos méretű, azonos fejlécű táblázatok összeadásának egy lehetséges módja az, ha az azonos pozícióiban lévő elemek összeadásával képezzük az összeget.

Táblázat szorzása számmal Az asztalon 2 alma van. Ha számukat megháromszorozzuk, összeszorozunk egy mértékegység nélküli számot (3) egy mértékegységgel rendelkezővel (2 darab). Ezt megtehetjük egy kosár egész tartalmával is:

3 ·			=		
	zöld (db)	piros (db)		zöld (db)	piros (db)
	alma	3	2	alma	9
	szőlő	2	1	szőlő	6

Táblázatok szorzása Egy adag (e példában a továbbiakban mindig 10 dkg) alma energiatartalma 30 kcal. Mennyi 5 adag energiatartalma. A választ ismét szorzással kapjuk meg, de most mindkét mennyiség mértékegységgel is rendelkezik:

$$5 \text{ adag} \cdot 30 \frac{\text{kcal}}{\text{adag}} = 150 \text{ kcal}.$$

Több gyümölcsből (alma, banán, narancs) többféle (A, B, C) gyümölcssalátát készítünk, és a szénhidrát- és energiatartalmukat szeretnénk összehasonlítani. Két táblázatot készítünk, egyikbe a gyümölcssaláták összetételét, a másikba az összetevők szénhidrát- és energiatartalmát írjuk. Mindkét táblázatban a sorokba kerülnek azok a tételek, melyek összetételét/összetevőit részletezzük, az oszlopokba pedig az összetevők.

	Alma (adag)	Banán (adag)	Narancs (adag)		Szénhidrát (g/adag)	Energia (kcal/adag)
A	5	1	4	Alma	7	30
B	4	4	2	Banán	24	105
C	4	2	4	Narancs	8	40

Első pillanatban furcsának tűnő számításokat kell végeznünk, ha meg akarjuk tudni az A saláta energiatartalmát:

$$5 \text{ adag} \cdot 30 \frac{\text{kcal}}{\text{adag}} + 1 \text{ adag} \cdot 105 \frac{\text{kcal}}{\text{adag}} + 4 \text{ adag} \cdot 40 \frac{\text{kcal}}{\text{adag}} = 415 \text{ kcal},$$

vagyis az első táblázat egy sorának és a második táblázat egy oszlopának kellett a skaláris szorzatát venni. Végezzük el e számításokat mindhárom gyümölcssaláta szénhidrát és energiatartalmára is, és az eredményt ismét egy olyan táblázatba tegyük, melynek soraiba a részletezendő tételek (A, B, C saláta), oszlopaiba a tartalmi összetevők (szénhidrát-, energiatartalom) kerüljenek.

	Szénhidrát (g)	Energia (kcal)
A	91	415
B	140	620
C	108	490

Az áttekinthetőség kedvéért a két összeszorozandó mátrixot és az eredményt úgy helyezzük el, hogy az elvégzett műveletek jobban követhetőek legyenek. Az A saláta energiatartalmát kiemeljük:

	Szénhidrát (g/adag)	Energia (kcal/adag)
Alma	7	30
Banán	24	105
Narancs	8	40

	Alma (adag)	Banán (adag)	Narancs (adag)
A	5	1	4
B	4	4	2
C	4	2	4

	Szénhidrát (g)	Energia (kcal)
A	91	415
B	140	620
C	108	490

Érdeemes megfigyelni, hogy ha csak az A és C gyümölcssalátákra vagyunk kíváncsiak, elég az első táblázat és a végeredmény második sorát elhagyni, hasonlóképp ha csak az energiatartalmat figyeljük, elég a második táblázat és a végeredmény második oszlopát megtartani. Az is látszik, hogy az első táblázat oszlopainak és a második táblázat sorainak száma megegyezik. Általában az igaz, hogy (a fejleceket nem számolva) egy $m \times n$ -es táblázat csak olyan $p \times k$ -as táblázattal szorozható össze, ahol $p = n$, és az eredmény $m \times k$ -as lesz.

Lineáris helyettesítés A lineáris algebra alapvető fogalmai megfogalmazhatóak a lineáris helyettesítés nyelvén.

3.1. DEFINÍCIÓ: LINEÁRIS HELYETTESÍTÉS. Lineáris helyettesítésről akkor beszélünk, ha változók egy halmazát más változók konstansszorosainak összegeként állítjuk elő, azaz változókat más változók lineáris kifejezéseivel helyettesítünk.

Például

$$\begin{aligned} u &= x + y + z & r &= 0.25p - 0.12q \\ h &= f + g, & v &= -9y + 2z \quad \text{és} \quad s = -0.45p + 2.11q \\ w &= & 3z & \quad t = -0.39q \end{aligned}$$

három lineáris helyettesítés. Tekintsük a következő két lineáris helyettesítést:

$$\begin{aligned} a &= 5x + y + 4z & x &= 7s + 30k \\ b &= 4x + 4y + 2z & \text{és} \quad y &= 24s + 105k \\ c &= 4x + 2y + 4z & z &= 8s + 40k \end{aligned} \quad (3.1)$$

Egy néhány sor erejéig a lineáris helyettesítést is táblázatokkal írjuk le. Az előző két lineáris helyettesítés táblázatba foglalva:

$$\begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline a & 5 & 1 & 4 \\ b & 4 & 4 & 2 \\ c & 4 & 2 & 4 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} & s & k \\ \hline x & 7 & 30 \\ y & 24 & 105 \\ z & 8 & 40 \end{array} \quad (3.2)$$

3.2. PÉLDA: LINEÁRIS HELYETTESÍTÉSEK KOMPOZÍCIÓJA. Tekintsük a (3.1)-ben megadott két lineáris helyettesítést! Az első majd a második helyettesítés egymás után való elvégzése – más szóval *kompozíciója* – milyen helyettesítéssel egyenértékű, és az lineáris-e?

MEGOLDÁS. Az $a = 5x + y + 4z$ kifejezésben helyettesítsük x , y és z helyébe a második lineáris helyettesítés szerinti kifejezéseket, azaz

$$a = 5x + y + 4z = 5(7s + 30k) + (24s + 105k) + 4(8s + 40k) = 91s + 415k.$$

Emeljük ki pl. k együtthatójának kiszámítását:

$$5 \cdot 30 + 1 \cdot 105 + 4 \cdot 40 = 415.$$

Mint látjuk ez az első helyettesítés táblázata első sorának és második táblázat második oszlopának skaláris szorzata. Hasonló módon b és c is kifejezhető s és k segítségével, így kapjuk, hogy a két lineáris helyettesítés egymásutánja ekvivalens a

$$a = 91s + 415k$$

$$b = 140s + 620k$$

$$c = 108s + 490k$$

helyettesítéssel. Ez lineáris, hisz a számolás közben lineáris kifejezéseket csak konstanssal szoroztunk, és ezeket adtuk össze. Ennek a helyettesítésnek a táblázata

	s	k
a	91	415
b	140	620
c	108	490

vagyis azt kaptuk, hogy a lineáris helyettesítések kompozíciójának táblázataik szorzata felel meg. ■

- 1• Anti, Bori, Cili almát, banánt és citromot vesz a piacon, a hipermarketben vagy a csarnokban. Ha csak az ár számít, melyikük hol vásároljon?

	alma (kg)	banán (kg)	citrom (kg)
Anti	2	2	1
Bori	3	2	0.5
Cili	2	1	1

	csarnok (Ft)	hipermarket (Ft)	piac (Ft)
alma	180	100	130
banán	390	420	360
citrom	210	210	230

A két táblázat szorzata:

	csarnok	hipermarket	piac
Anti	1350	1250	1210
Bori	1425	1245	1225
Cili	960	830	850

Tehát Antinak és Borinak a piacon, Cilinek a hipermarketben érdemes vásárolnia.

- 2• Egy $f(x, y)$ kifejezésben elvégezzük az

$$x = 2a + b$$

$$y = 3a + b$$

helyettesítést, majd az így kapott $f(2a + b, 3a + b)$ kifejezésben az

$$a = -3s + t$$

$$b = 4s - t$$

helyettesítést. Számítsuk ki a két helyettesítés kompozícióját a helyettesítések végrehajtásával, és a nekik megfelelő táblázatok szorzásával is, azaz írjuk fel azt a helyettesítést, mely e két helyettesítés kompozíciójával ekvivalens!

A két helyettesítést elvégezve:

$$x = 2a + b = 2(-3s + t) + (4s - t) = -2s + t,$$

$$y = 3a + b = 3(-3s + t) + (4s - t) = -5s + 2t.$$

A két helyettesítés kompozíciója a két helyettesítés táblázatának szorzatával megkapható:

$$\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline x & 2 & 1 \\ y & 3 & 1 \end{array} \times \begin{array}{c|cc} & s & t \\ \hline a & -3 & 1 \\ b & 4 & -1 \end{array} = \begin{array}{c|cc} & s & t \\ \hline x & -2 & 1 \\ y & -5 & 2 \end{array}$$

- 3• Tegyük fel, hogy egy kifejezésben elvégezzük a következő helyettesítést:

$$x = 2a + b + 6c$$

$$y = 4a + b + 7c$$

$$z = 3a + b + 6c$$

majd azt követően a következő helyettesítést:

$$a = -s + u$$

$$b = -3s - 6t + 10u$$

$$c = s + t - 2u$$

Hogyan számíthatjuk ki a két helyettesítés kompozícióját? Írjuk fel azt a helyettesítést, mely e két helyettesítés kompozíciójával ekvivalens!

A két helyettesítés kompozíciója a két helyettesítés táblázatának szorzatával megkapható. E szorzatból az olvasható le, hogy a kompozícióval kapott helyettesítés: $x = s$, $y = t$, $z = u$. Ez azt jelenti, hogy a két helyettesítés valamilyen értelemben egymás inverze.

3.2. Mátrixműveletek

A mátrixműveletek definiálása a táblázatok műveletei alapján magától értetődő.

Alapfogalmak, jelölések Az eddigiek alapján megfogalmazhatjuk: az m sorba és n oszlopba rendezett mn darab szám rendszerét $m \times n$ -típusú mátrixnak nevezzük. A mátrixban szereplő számokat a mátrix elemeinek nevezzük. E megfogalmazás még mindig nem tekinthető precíz definíciónak, mert nincs tisztázva, mik is azok a számok, amik egy mátrix elemei lehetnek. Egyelőre tekintsük úgy, hogy mindig egy algebrailag jól definiálható számhalmaz elemeit írhatjuk egy mátrixba, ennek megfelelően fogunk egész elemű, racionális elemű vagy valós elemű, illetve az egész számok, a racionálisok, a valósok fölött definiált mátrixról beszélni. Később ezt is tágítani fogjuk, pl. vizsgálni fogunk számértéket adó függvényekből álló mátrixokat.

A matematikában elterjedt az a szokás, hogy a mátrixot jelölő nagy betűvel azonos kis betűk jelölik a mátrix elemeit, tehát $\mathbf{A}$ elemei $a_{11}, a_{12}, \dots$. Az $m \times n$ -típusú

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

mátrixra szokás még a tömörebb

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n} \text{ vagy egyszerűen az } \mathbf{A} = [a_{ij}]$$

jelölést használni.

Mindig az első index jelöli a sor, a második az oszlop számát, tehát a_{23} a 2-dik sor 3-adik oszlop kereszteződésében álló elemet jelöli. Időnként, a félreérthetőség elkerülésére a_{ij} helyett $a_{i,j}$ -t írunk (pl. $a_{n,n-1}$). Általában $\mathbf{a}_j$ jelöli az $\mathbf{A}$ mátrix j -edik oszlopvektorát, ha csak oszlopvektorokkal dolgozunk. Ha sor- és oszlopvektorok is együtt szerepelnek, az i -edik sorvektort $\mathbf{a}_{i*}$, a j -edik oszlopvektort $\mathbf{a}_{*j}$ jelöli összhangban az elemek indexelésével. Ehhez hasonló jelölést használnak a mátrix alapú nyelvek is (ld. a széljegyzetet). Az $\mathbf{A}$ mátrix i -edik sorára az $(\mathbf{A})_{i*}$, j -edik oszlopára az $(\mathbf{A})_{*j}$, elemére az $(\mathbf{A})_{ij}$ jelölés is használatos.

3.3. PÉLDA: MÁTRIXOK ÉS ELEMEIK. Legyen

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 6 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Ekkor

$$c_{23} = 7, \quad \mathbf{c}_2 = \mathbf{c}_{*2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_{3*} = [6 \quad 8 \quad 9],$$

3.4. DEFINÍCIÓ: MÁTRIXOK EGYENLŐSÉGE. Két mátrixot akkor tekintünk egyenlőnek, ha azonos típusúak, és az azonos indexű elemek egyenlőek.

Például az

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & x \end{bmatrix}$$

A programnyelvekben – ellentétben a matematikával – a kisbetűvel/nagybetűvel való jelölésnek nincs a mátrixot az elemétől való megkülönböztető szerepe. A legtöbb magasszintű nyelvben az $\mathbf{A}$ -val jelölt mátrix (informatikai szóhasználatnál *tömb*) i -edik sorának j -edik elemét $\mathbf{A}[i, j]$ vagy $\mathbf{A}(i, j)$ jelöli. Az alacsonyabb szintű C-típusú nyelvekben nincs 2-dimenziós tömb, a mátrixot egy olyan 1-dimenziós tömb reprezentálja, melynek minden eleme 1-dimenziós tömb, így $\mathbf{A}[i]$ az i -edik sort, $\mathbf{A}[i][j]$ az i -edik sor j -edik elemét jelöli. A mátrix alapú nyelvekben egy mátrix egy sorvektora vagy oszlopvektora könnyen kiemelhető, pl. az $\mathbf{A}$ mátrix 2. sorát az $\mathbf{A}(2, :)$, 3. oszlopát a $\mathbf{A}(:, 3)$ kóddal érhetjük el.

```

> a = [1 2 3
>      4 5 7]
a =
     1     2     3
     4     5     7

> b = [1 2; 3 4]
b =
     1     2
     3     4

> diag([1, 2, 3])
ans =
     1     0     0
     0     2     0
     0     0     3

> a(2,3)
ans = 7
> a(2,:)
ans =
     4     5     7

> a(:,3)
ans =
     3
     7

> v = [1 2 3]
v =
     1     2     3

> w = [1; 2; 3]
w =
     1
     2
     3

> size(v)
ans =
     1     3

> size(w)
ans =
     3     1

```

3.1. programkód. Mátrix megadása, elemeinek, sorainak és oszlopainak és azok számának lekérdezése mátrix alapú nyelvekben.

egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $x = 4$. Fontos felidézni, hogy minden vektornak megfeleltethetünk egy sor- vagy oszlopvektor alakba írt mátrixot, azok azonban nem egyenlők egymással. Például

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

mert nem azonos típusúak, így el kell dönteni, hogy e két mátrix közül melyik reprezentálja a $(1, 2, 3)$ vektort. Mint említettük, a modern matematika legtöbb területén alapértelmezésben az oszlopvektorokat rendeljük a vektorokhoz. E könyvben mi is így teszünk, kivéve a kódelméleti alkalmazásokat, ahol a kódvektoroknak sorvektorokat feleltetünk meg.

Egy mátrix *négyzetes*, ha sorainak és oszlopainak száma megegyezik. Az $\mathbf{A}$ mátrix főátlójának elemei $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots$. Ez nem csak négyzetes mátrixra értelmezhető. Az olyan négyzetes mátrixot, melynek főátlón kívüli elemei mind nullák, *diagonális mátrixnak* nevezzük. Az ilyen mátrixok egyszerű megadására a `diag` függvényt használjuk, melynek argumentumába a főátló elemei vannak felsorolva. Például

$$\text{diag}(1, 2, 3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Gyakran fogunk azonos típusú mátrixokkal dolgozni. Rendszerint az is fontos, hogy a mátrixok elemei ugyanabból az algebrai struktúrából valók legyenek. Pl. vizsgálhatjuk a 3×2 -es valós mátrixok vagy a 4×4 -es egész elemű mátrixok halmazát.

3.5. DEFINÍCIÓ: ADOTT TÍPUSÚ MÁTRIXOK TERE. Legyen S egy tetszőleges halmaz (általában S egy algebrai struktúra, pl. $S = \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \dots$). Az S elemeiből képzett összes $m \times n$ -es mátrixok halmazát jelölje

$$S^{m \times n}.$$

Azt mondjuk, hogy $S^{m \times n}$ az S fölötti $m \times n$ típusú *mátrixok tere*.

Például az $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix eleme az $\mathbb{N}^{2 \times 2}, \mathbb{Z}^{2 \times 2}, \mathbb{Q}^{2 \times 2}, \mathbb{R}^{2 \times 2}$ terek mindegyikének.

Elemenkénti mátrixműveletek Több olyan mátrixműveletet ismerünk, melyben a számok közt már értelmezett műveletet úgy általánosítjuk mátrixokra, hogy azt a mátrix vagy mátrixok minden elemén végrehajtjuk. Ilyen pl. a mátrixok összeadása és skalárral való szorzása.

3.6. DEFINÍCIÓ: MÁTRIXOK ÖSSZEGE, KÜLÖNBSÉGE. Az $m \times n$ -es típusú $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ és $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ mátrixok összegén azt az ugyancsak $m \times n$ -es típusú, és $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ -vel jelölt mátrixot értjük, melynek i -edik sorában a j -edik elem $a_{ij} + b_{ij}$, ahol $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$. Képletben:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij}] + [b_{ij}] := [a_{ij} + b_{ij}].$$

Hasonlóan definiálható $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ különbsége is, azaz $\mathbf{A} - \mathbf{B} := [a_{ij} - b_{ij}]$.

3.7. PÉLDA: MÁTRIXOK ÖSSZEGE, KÜLÖNBSÉGE. Ellenőrizzük az alábbi műveleteket!

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3.8. DEFINÍCIÓ: ZÉRUSMÁTRIX. A csupa nullából álló mátrixokat zérusmátrixoknak nevezzük. Az $m \times n$ -es zérusmátrixot $\mathbf{O}_{m \times n}$, míg az $n \times n$ -es négyzetes zérusmátrixot $\mathbf{O}_n$ jelöli.

Tetszőleges $\mathbf{A}$ mátrixhoz egy azonos típusú zérusmátrixot adva $\mathbf{A}$ -t kapunk, azaz $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{O} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$.

3.9. DEFINÍCIÓ: MÁTRIX SZORZÁSA SKALÁRRAL. Az $m \times n$ -es típusú $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ mátrix c számmal képzett szorzatán azt az ugyancsak $m \times n$ -es típusú, és $c\mathbf{A}$ -val jelölt mátrixot értjük, melyre

$$c\mathbf{A} = c[a_{ij}] := [ca_{ij}].$$

Az $\mathbf{A}$ mátrix *ellentettjének* azt a $-\mathbf{A}$ -val jelölt mátrixot nevezzük, melyre $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{O}$. Könnyen megmutatható, hogy ilyen mátrix csak egy van, nevezetesen $-\mathbf{A} = (-1)\mathbf{A}$.

Azonos méretű mátrixokon még számtalan elemenkénti művelet definiálható, ezek azonban az alkalmazásokban és a matematikán belül is lényegesen ritkábban fordulnak elő, ezért nem definiáljuk őket és nem vezetünk be rájuk jelölést. Érdekességgé mutatunk egy példát egy ilyen műveletre.

3.10. PÉLDA: ELEMENKÉNTI MÁTRIXMŰVELET A DIGITÁLIS KÉPFELDOLGOZÁSBAN. Az egészelemű $\mathbf{A}_{m \times n}$ mátrix reprezentáljon egy $m \times n$ képpontból álló szürkeárnyaltos képet. Minden mátrixelem egy képpont árnyalatát adja meg a $\{0, 1, \dots, k\}$ tartományból, ahol 0 a fekete, k a fehér színnek felel meg. A háttér fehér, azaz képpontjaihoz a maximális k érték van rendelve és más fehér képpont a képen nincs. Legyen $\mathbf{B}_{m \times n}$ egy tetszőleges másik kép azonos módon reprezentált mátrixa. Konstruáljuk meg azt a $\odot$ jellel jelölt műveletet, amellyel az elemenkénti

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{B} := [a_{ij} \odot b_{ij}]$$

mátrixművelet az $\mathbf{A}$ kép háttérébe másolja a $\mathbf{B}$ képet. Képletben:

$$a_{ij} \odot b_{ij} = \begin{cases} b_{ij}, & \text{ha } a_{ij} = k, \\ a_{ij}, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A megoldásban használhatjuk a $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ függvényt, mely egy x számhoz annak alsó egész részét rendeli.

MEGOLDÁS. Ha a a $[0, k]$ intervallumba eső szám, akkor $0 \leq a/k \leq 1$, így a/k egész része 0 vagy 1. Részletezve $\lfloor a/k \rfloor$ pontosan akkor 1, ha $a = k$, egyébként 0. Másrészt $1 - \lfloor a/k \rfloor$ pontosan akkor 0, ha $a = k$, egyébként 1. Ezt kihasználva könnyen definiálható a kívánt művelet:

$$a \odot b = \left\lfloor \frac{a}{k} \right\rfloor b + \left(1 - \left\lfloor \frac{a}{k} \right\rfloor\right) a.$$

Így e művelettel elemenként definiált $\mathbf{A} \odot \mathbf{B}$ művelet a kívánt eredményt adja. Két 32×24 -es mátrixszal szemléltetjük e műveletet a margón, azonban a mátrixokat az általuk mutatott képpel helyettesítve. ■



Mátrixok lineáris kombinációi A vektorokhoz hasonlóan, a skalárral való szorzás és az összeadás művelete lehetővé teszi, hogy mátrixokra is definiáljuk a *lineáris kombináció*, a *lineáris függetlenség* és a *kifeszített altér* fogalmát. A vektorokra korábban adott definíciók kis változtatással kimondhatók, ha a vektorok helyébe azonos típusú mátrixokat helyettesítünk, ezért ezt az olvasóra bizzuk, de gyakorlásként mutatunk két egyszerű példát.

3.11. PÉLDA: MÁTRIXOK LINEÁRIS KOMBINÁCIÓJA. Számítsuk ki az alábbi két mátrix megadott lineáris kombinációját!

$$2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A mátrixalapú nyelvekben mátrixok közötti elemenkénti művelet definiálható a műveleti jel elé tett ponttal. Így az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixok elemenkénti szorzata a $\mathbf{A} \cdot * \mathbf{B}$ paranccsal kapható meg. Eszerint az $\mathbf{A} \cdot + \mathbf{B}$ és $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ kódok ekvivalensek.

MEGOLDÁS. Először a skalárral való szorzásokat végezzük el:

$$2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad -3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 6 \\ 3 & 0 \end{bmatrix},$$

majd az összeadást:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 6 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 7 & 8 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

A műveletek természetesen elemenként is elvégezhetők, pl. a második sor első eleme így is megkapható: $2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) = 7$. ■

3.1.2. PÉLDA: MÁTRIXOK ÁLTAL KIFESZÍTETT ALTÉR. Jellemezzük az $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ térnek azt az alterét, melyet az alább megadott **A**, **B** és **C** mátrixok feszítenek ki! Másként fogalmazva: milyen összefüggések állnak fenn azon 2×2 -es valós mátrixok elemei között, melyek az alábbi mátrixok lineáris kombinációiként állnak elő?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

MEGOLDÁS. E mátrixok összes lineáris kombinációja

$$a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C} = \begin{bmatrix} a+b+c & a+c \\ a & b+c \end{bmatrix}$$

alakú. Ha egy tetszőleges $\begin{bmatrix} u & v \\ w & z \end{bmatrix}$ mátrixról el akarjuk dönteni, hogy a fenti alakú-e, azaz fönnáll-e valamely a, b, c ismeretlenekre az

$$\begin{bmatrix} a+b+c & a+c \\ a & b+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & v \\ w & z \end{bmatrix}$$

egyenlőség, akkor meg kell oldani a mátrixok négy elemére vonatkozó négy egyenletből álló 3-ismeretlenes egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} a+b+c &= u \\ a &+ c = v \\ a &= w \\ b+c &= z \end{aligned}$$

Ha ennek van megoldása, akkor létezik a megfelelő lineáris kombináció, tehát az adott $\begin{bmatrix} u & v \\ w & z \end{bmatrix}$ mátrix a kifeszített térbe esik. Ennek az egyenletrendszernek a bővített mátrixát fölírva, majd elemi sorműveletekkel megoldva a következőt kapjuk:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & u \\ 1 & 0 & 1 & v \\ 1 & 0 & 0 & w \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & w \\ 0 & 1 & 1 & u-w \\ 0 & 0 & 1 & v-w \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & w \\ 0 & 1 & 1 & u-w \\ 0 & 0 & 1 & v-w \\ 0 & 0 & 0 & w+z-u \end{array} \right].$$

A lépcsős alakból leolvasható, hogy ez az egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $w+z-u=0$. Például az $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix ebbe az altérbe esik. A fenti egyenletrendszer megoldásával az is megkapható, hogy mik a lineáris kombináció együtthatói. Azt kapjuk, hogy $a=3$, $b=1$ és $c=1$. ■

Mátrix transzponáltja A mátrixalkalmazásokban gyakran nincs olyan természetes elv, amely alapján el lehetne dönteni, hogy mely mennyiségeket rendeljünk a sorokhoz, melyeket az oszlopokhoz. Ugyanakkor a számítások közben ez korántsem mindegy, ezért szükség lehet a következő egyszerű műveletre:

3.13. DEFINÍCIÓ: MÁTRIX TRANSZPONÁLTJA. Az $m \times n$ -es $\mathbf{A}$ mátrix transzponáltján azt az $\mathbf{A}^T$ -vel jelölt $n \times m$ -es mátrixot értjük, amelyet az $\mathbf{A}$ sorainak és oszlopainak felcserélésével kapunk. Azaz

$$\mathbf{A}^T = [a_{ij}]^T := [a_{ji}].$$

3.14. PÉLDA: MÁTRIX TRANSZPONÁLTJA. Az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix}$$

mátrixok transzponáltjai

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^T = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Mátrixszorzás A táblázatok szorzásánál látott szabályt követjük a következő definícióban:

3.15. DEFINÍCIÓ: MÁTRIXOK SZORZÁSA. Egy $m \times t$ -s $\mathbf{A}$ és egy $t \times n$ -es $\mathbf{B}$ mátrix szorzatán azt az $\mathbf{AB}$ -vel jelölt $m \times n$ -es $\mathbf{C}$ mátrixot értjük, amelynek i -edik sorában és j -edik oszlopában álló eleme

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj} + \dots + a_{it}b_{tj}.$$

A definícióbeli összefüggés több módon is kifejezhető. Szummával fölírva:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^t a_{ik}b_{kj},$$

de mondhatjuk azt is, hogy c_{ij} az $\mathbf{A}$ mátrix i -edik sorának és a $\mathbf{B}$ mátrix j -edik oszlopának skaláris szorzata, azaz

$$c_{ij} = \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{b}_{*j}.$$

Fontos kiemelni, hogy egy $m \times s$ -es $\mathbf{A}$ és egy $t \times n$ -es $\mathbf{B}$ mátrix csak akkor szorozható össze, ha $s = t$, és ekkor a szorzat $m \times n$ típusú.

Nyilvánvaló, hogy a szorzás sorrendje fontos. Lehet, hogy az $\mathbf{AB}$ szorzás elvégezhető, de a $\mathbf{BA}$ nem, és lehet, hogy elvégezhető, de különböző eredményt kapunk.

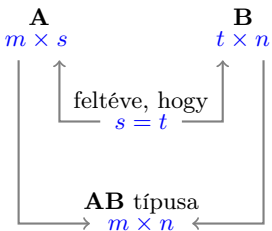
3.16. PÉLDA: MÁTRIXOK SZORZÁSA. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Döntsük el, hogy fennállnak-e az $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, $\mathbf{BC} = \mathbf{CB}$, $\mathbf{CD} = \mathbf{DC}$ és $\mathbf{DE} = \mathbf{ED}$ egyenlőségek.

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{it} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{tj} \end{bmatrix} = c_{ij}$$



MEGOLDÁS. A méretek alapján a $\mathbf{BC}$ szorzat nincs értelmezve, a többi:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 9 & 8 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}, \mathbf{CB} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{CD} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}, \mathbf{DC} = \begin{bmatrix} 12 & 12 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \mathbf{DE} = \mathbf{ED} = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

Összefoglalva: $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$, mert különböző típusúak, $\mathbf{BC} \neq \mathbf{CB}$, mert az egyik oldal nincs értelmezve, $\mathbf{CD} \neq \mathbf{DC}$, bár mindkét oldal értelmezve van és azonos típusú. Az előzőekkel ellentétben viszont fennáll a $\mathbf{DE} = \mathbf{ED}$ egyenlőség. Azaz vannak felcserélhető mátrixok, de a mátrixszorzás nem felcserélhető művelet, tehát nem kommutatív! ■

Mivel a mátrixszorzás nem felcserélhető, ha szükséges, az „ $\mathbf{A}$ -t balról szorozzuk $\mathbf{B}$ -vel”, vagy az „ $\mathbf{A}$ -t jobbról szorozzuk $\mathbf{B}$ -vel” kifejezésekkel teszünk különbséget a $\mathbf{BA}$ és az $\mathbf{AB}$ szorzatok közt.

Fontosak azok a mátrixszorzatok, amelyekben az egyik mátrixnak csak egy sora vagy oszlopa van, tehát sor- vagy oszlopvektor. Egy $1 \times m$ -es mátrixot, azaz egy sorvektort jobbról, egy $n \times 1$ -es mátrixot, azaz egy oszlopvektort balról lehet beszorozni egy $m \times n$ -es mátrixszal. Például

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Skaláris szorzat és diadikus szorzat mátrixszorzatos alakja Két oszlopvektor nem szorozható össze, ha 1-nél nagyobb dimenziósak. Viszont az egyikük transzponálása után a szorzás elvégezhető.

Legyen $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ két $\mathbb{R}^n$ -beli vektor. Az $\mathbf{a}^T \mathbf{b}$ szorzat a két vektor skaláris szorzatát adja, azaz

$$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b},$$

ugyanis

$$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

Ha a második vektort transzponáljuk, a két vektor lehet különböző dimenziós is.

3.17. DEFINÍCIÓ: DIADIKUS SZORZAT. Legyen $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Az $\mathbf{uv}^T$ szorzatot a két vektor *diadikus szorzatának*, röviden *diádnak* nevezzük. E szorzat egy $m \times n$ -es mátrix:

$$\mathbf{uv}^T = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & \dots & u_1 v_n \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & \dots & u_2 v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_m v_1 & u_m v_2 & \dots & u_m v_n \end{bmatrix}.$$

Két vektor diadikus szorzatát $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ jelöli.

3.18. PÉLDA: SKALÁRIS ÉS DIADIKUS SZORZAT. Legyen $\mathbf{u} = (1, 0, 2)$, $\mathbf{v} = (3, 2, 1)$. Írjuk fel mátrixszorzatos alakba skaláris és diadikus szorzatokat, és számítsuk ki!

MEGOLDÁS.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 5,$$

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = \mathbf{u} \mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Lineáris egyenletrendszer mátrixszorzatos alakja A mátrixszorzást felhasználva a lineáris egyenletrendszerek egyszerű alakba írhatók.

LINEÁRIS EGYENLETRENDSZER MÁTRIXSZORZATOS ALAKJA. Ha $\mathbf{A}$ jelöli egy egyenletrendszer együtthatómátrixát, illetve $\mathbf{b}$ a konstans tagok és $\mathbf{x}$ az ismeretlenek oszlopvektorát, azaz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \text{és} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

akkor az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

egyenletrendszer

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

alakba írható.

3.19. PÉLDA: EGYENLETRENDSZER MÁTRIXSZORZATOS ALAKJA.

Könnyen ellenőrizhető a mátrixszorzás elvégzésével, hogy a

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5, & ax &= u & x + 2y &= 1 \\ & & by &= v & \text{és} & y &= 1 \\ & & cz &= w & & 0 &= 1 \end{aligned}$$

egyenletrendszerek mátrixszorzatos alakjai rendre:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 5, \quad \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A szimultán egyenletrendszerek (ld. 55. oldal) ugyanígy fölírhatóak mátrixszorzatos alakba.

3.20. PÉLDA: SZIMULTÁN EGYENLETRENDSZER MÁTRIXSZORZATOS ALAKJA.

Írjuk az alábbi két egyenletrendszert egyetlen mátrixszorzatos alakba!

$$\begin{aligned} 2x_{11} + 3x_{21} &= 7 & 2x_{12} + 3x_{22} &= 9 \\ 3x_{11} - 4x_{21} &= 2 & 3x_{12} - 4x_{22} &= 5 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. A két egyenletrendszer mátrixszorzatos alakjai külön-külön

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Ezek egyetlen mátrixszorzattá olvashatók:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Általánosan a szimultán egyenletrendszerek $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ alakba írhatóak, ahol $\mathbf{X}$ az ismeretlenekből, $\mathbf{B}$ a jobb oldalakból alkotott mátrix. ■

Lineáris helyettesítés mátrixszorzatos alakja Az egyenletrendszer mátrixszorzatos alakjához hasonló a lineáris helyettesítés mátrixszorzatos alakja.

LINEÁRIS HELYETTESÍTÉS MÁTRIXSZORZATOS ALAKJA. Az $x_1, x_2, \dots, x_n$ változók lineáris kifejezéseinek az $y_1, y_2, \dots, y_m$ változók helyébe való helyettesítését általánosan leíró

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{aligned}$$

képletek mátrixszorzatos alakja

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ax},$$

ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \quad \text{és} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{A}$ mátrixot nevezzük a *lineáris helyettesítés mátrixának*.

Például az

$$\begin{aligned} x &= 3a + 2b + 4c \\ y &= a - 3b + 2c \\ z &= 2a - b + 2c \end{aligned}$$

helyettesítés mátrixszorzatos alakja

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Szorzás vektorral Egy $m \times n$ -es mátrix vektorral kétféleképp szorozható: jobbról egy $n \times 1$ -es oszlopvektorral, balról egy $1 \times m$ -es sorvektorral.

Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer oszlopmodelljéből láttuk, hogy az egyenletrendszer bal oldala az $\mathbf{A}$ oszlopvektorainak az $\mathbf{x}$ koordinátáival vett lineáris kombinációja. Ez mátrixszorzással is könnyen ellenőrizhető. Hasonló állítás igaz a balról szorzásra is.

3.21. ÁLLÍTÁS: MÁTRIXSZORZÁS ÉS LINEÁRIS KOMBINÁCIÓ. Legyen $\mathbf{A} m \times n$ -es mátrix, $\mathbf{x} n$ -dimenziós, $\mathbf{y} m$ -dimenziós vektor. Ekkor az $\mathbf{Ax}$ szorzat az $\mathbf{A}$ oszlopvektorainak

$$\mathbf{a}_{*1}x_1 + \mathbf{a}_{*2}x_2 + \cdots + \mathbf{a}_{*n}x_n$$

lineáris kombinációját, míg az $\mathbf{y}^T \mathbf{A}$ szorzat az $\mathbf{A}$ sorvektorainak

$$\mathbf{a}_{1*}y_1 + \mathbf{a}_{2*}y_2 + \cdots + \mathbf{a}_{m*}y_m$$

lineáris kombinációját adja.

Szorzás standard egységvektorral Könnyen igazolhatók azok az összefüggések, melyeket a standard egységvektorokkal való szorzással kapunk. Jelölje $\mathbf{e}_i = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$ azt a vektort, melynek i -edik koordinátája 1, a többi 0.

3.22. ÁLLÍTÁS: MÁTRIX ELEMINEK, SOR- ÉS OSZLOPVEKTORAINAK ELŐÁLLÍTÁSA MÁTRIXSZORZÁSSAL. Legyen $\mathbf{A}$ egy $m \times n$ -es mátrix, $\mathbf{e}_i m$ -dimenziós, $\mathbf{e}_j n$ -dimenziós standard egységvektor. Ekkor

$$\mathbf{e}_i^T \mathbf{A} = \mathbf{a}_{i*} \quad \text{és} \quad \mathbf{A} \mathbf{e}_j = \mathbf{a}_{*j},$$

továbbá

$$\mathbf{e}_i^T (\mathbf{A} \mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}_i^T \mathbf{A}) \mathbf{e}_j = a_{ij}.$$

Az $\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i^T$ diád egy olyan mátrix, melynek (i, j) -indexű eleme 1, az összes többi 0:

$$\mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_j = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Egységmátrix, elemi mátrixok Egy adott $\mathbf{B}$ mátrixhoz találhatunk olyan $\mathbf{A}$ -t, hogy az 1-gyel való szorzáshoz hasonlóan $\mathbf{AB} = \mathbf{B}$ legyen. Például

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

esetén

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Az azonban már nem igaz, hogy $\mathbf{A}$ -t bármely 2×2 -es $\mathbf{B}$ mátrixszal szorozva $\mathbf{B}$ lesz az eredmény. Ilyen mátrix is létezik, némi próbálkozás után bárki rátalálhat.

3.23. DEFINÍCIÓ: EGYSÉGMÁTRIX. Az $n \times n$ -es

$$\mathbf{I}_n := \text{diag}(1, 1, \dots, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixot *egységmátrixnak* nevezzük.

Az egységmátrix elnevezés onnan származik, hogy tetszőleges $m \times n$ -es $\mathbf{A}$ mátrixra igaz, hogy

$$\mathbf{I}_m \mathbf{A}_{m \times n} = \mathbf{A}_{m \times n} \mathbf{I}_n = \mathbf{A}_{m \times n},$$

Az *egységmátrix* jelölésére használt $\mathbf{I}$ betű az angol *identity matrix* elnevezés első betűjéből származik. Az *azonosság* vagy *identitás* jelentésű *identity* szó az $\mathbf{IA} = \mathbf{A}$ összefüggésre utal (az $x \mapsto x$ függvényt ugyanezen okból hívjuk identikus függvénynek). Ráadásul az $\mathbf{I}$ betű hasonlít legjobban az 1-es számra.

azaz e mátrix hasonló tulajdonsággal rendelkezik, mint a számok közt az egy.

Az egységmátrixszal már találkoztunk: a Gauss–Jordan-módszernél egy n -ismeretlenes, n egyenletből álló egyértelműen megoldható egyenletrendszer együtthatómátrixa az elemi sorműveletek során egységmátrixszá transzformálódik!

Az egységmátrixon végrehajtott elemi sorműveletek olyan mátrixokat eredményeznek, melyek kapcsolatot létesítenek az elemi sorműveletek és a mátrixokkal való szorzás között. E mátrixoknak külön nevet adunk.

3.24. DEFINÍCIÓ: ELEMI MÁTRIXOK. Az $\mathbf{I}_n$ egységmátrixon végrehajtott egyetlen elemi sorművelettel kapott mátrixot *elemi mátrixnak* nevezzük.

3.25. PÉLDA: ELEMI MÁTRIXOK. Az alábbi mátrixok elemi mátrixok:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ezt igazolja, hogy mindegyikük $\mathbf{I}_4$ -ből származik rendre a következő elemi sorműveletekkel: $S_1 \leftrightarrow S_4$, $5S_2$, $S_1 + 2S_3$, $1S_1$. Az utolsó mátrix az egységmátrix, amely maga is elemi mátrix, mert például egy sorának 1-gyel való szorzásával megkapható.

3.26. PÉLDA: MÁTRIX BALRÓL SZORZÁSA ELEMI MÁTRIXSZAL. Az előbbi példa mátrixaival szorozzunk meg egy tetszőleges 4-soros mátrixot balról. Mit tapasztalunk?

MEGOLDÁS. Legyen $\mathbf{A}$ egy 4- sorból, és az egyszerűség kedvéért csak 2 oszlopból álló mátrix. Végezzük el a fenti mátrixokkal való balról szorzást:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{41} & a_{42} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix},$$

azaz a szorzás eredményeként fölcserélődött $\mathbf{A}$ első és negyedik sora. A következő szorzás eredménye

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 5a_{21} & 5a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix},$$

azaz az $\mathbf{A}$ második sora be lett szorozva 5-tel. Végül

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + 2a_{31} & a_{12} + 2a_{32} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix},$$

azaz az $\mathbf{A}$ a szorzás eredményeként az $\mathbf{A}$ első sorához hozzá lett adva harmadik sorának kétszerese. ■

E példa eredménye kimondható tételként, melynek bizonyítása általánosan is úgy történik, mint az előző példában, ezért elhagyjuk:

3.27. TÉTEL: ELEMI SORMŰVELETEK MÁTRIXSZORZÁSSAL. Legyen $\mathbf{E}$ az az elemi mátrix, melyet $\mathbf{I}_m$ -ből egy elemi sorművelettel kapunk. Ha ugyanezt a sorműveletet egy tetszőleges $m \times n$ -es $\mathbf{A}$ mátrixra alkalmazzuk, akkor eredményül az $\mathbf{EA}$ mátrixot kapjuk.

Az elemi sorműveletek mátrixszorzással való elvégzésének nincs számítási praktikuma, annak célja az elemi sorműveletek – s ezzel az egyenletrendszerek megoldásának – algebraizálása.

A báziscsere mátrixszorzatos alakja A 78. oldalon a vektor bázisra vonatkozó koordinátás alakjáról szóló paragrafusban láttuk, hogy e koordinátás alak hogy határozható meg. Kérdés, hogy egy *vektornak* egy altér két különböző bázisára vonatkozó koordinátás alakja közt mi a kapcsolat.

3.28. PÉLDA: ÁTTÉRÉS A STANDARD BÁZISRA. Az $\mathbb{R}^3$ térnek $B = \{(1, 1, 1), (2, 3, 4), (6, 6, 7)\}$ egy bázisa. Az e bázisban megadott $[\mathbf{v}]_B$ vektornak írjuk fel a koordinátás alakját a standard bázisban egyetlen mátrixszorzással. Számítsuk ki konkrétan a $[\mathbf{v}]_B = (2, 3, -1)$ vektor standard koordinátás alakját.

MEGOLDÁS. $[\mathbf{v}]_B = (2, 3, -1)$ azt jelenti, hogy

$$\mathbf{v} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix},$$

ami mátrixszorzatos alakban

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Legyen $[\mathbf{v}]_B = (x, y, z)$. Ekkor

$$\mathbf{v} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Analóg képlet érvényes akkor is, ha két tetszőleges bázis közti áttérést számolunk. ■

3.29. PÉLDA: BÁZISCSERE. Legyen $B = \{(1, 1, 1), (2, 3, 4), (6, 6, 7)\}$ és $C = \{(1, 2, 3), (0, 2, 3), (3, 5, 8)\}$ az $\mathbb{R}^3$ két bázisa. Vektorok B bázisban megadott $[\mathbf{v}]_B$ koordinátás alakjához keressük a C bázisbeli $[\mathbf{v}]_C$ alakját. Hogyan számoljunk?

MEGOLDÁS. Egyik lehetőség, hogy meghatározzuk $\mathbf{v}$ standard bázisbeli koordinátás alakját az előző feladat mintájára, majd az így kapott koordinátás alakból a C bázisra vonatkozó alakot a 78. oldalon leírtak szerint.

A másik lehetőség egyszerűbb, és hatékonyabb, ha több vektor koordinátás alakját kell meghatározni. A B bázis vektorainak a $[\mathbf{v}]_B$ koordinátáival vett lineáris kombinációja megadja a $\mathbf{v}$ vektort, így ha meghatározzuk a B bázis vektorainak C bázisbeli alakját, ezek lineáris kombinációja a $\mathbf{v}$ vektor C -beli alakját, azaz a $[\mathbf{v}]_C$ alakot adja.

A B bázis egy vektorának C -beli koordinátás alakjához egy egyenletrendszert kell megoldani, a B összes vektorának felírásához tehát egy szimultán egyenletrendszert:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 6 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 7 & 3 & 3 & 8 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

Tehát a C bázis a B koordinátarendszerben:

$$C = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_B, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}_B, \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}_B \right\}.$$

Az ezekből képzett lineáris kombinációk mátrixszorzással is előállíthatók. Így egy $\mathbf{v}$ vektor B -beli koordinátás alakjának C bázisba való átírását a

$$[\mathbf{v}]_C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} [\mathbf{v}]_B$$

képlet adja. Ha e mátrixot $\mathbf{A}_{C \leftarrow B}$ jelöli, akkor az előző képlet a

$$[\mathbf{v}]_C = \mathbf{A}_{C \leftarrow B} [\mathbf{v}]_B$$

alakot ölti. ■

E példa a következő definícióhoz és állításhoz vezet:

3.30. DEFINÍCIÓ: ÁTTÉRÉS MÁTRIXA. Legyen $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ és $C = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n\}$ az $\mathbf{R}^n$ két bázisa. Írjuk fel B vektorait a C bázisban, és e vektorokból képezzünk mátrixot. Ezt nevezzük a B bázisról a C -re való áttérés mátrixának. Ha szükséges, a mátrix indexébe írjuk a két bázist $C \leftarrow B$ alakban. Tehát az áttérés mátrixa

$$\mathbf{A}_{C \leftarrow B} = [[\mathbf{b}_1]_C \mid [\mathbf{b}_2]_C \mid \cdots \mid [\mathbf{b}_n]_C]$$

3.31. ÁLLÍTÁS: KOORDINÁTÁK VÁLTOZÁSA A BÁZIS CSERÉJÉNÉL. Ha B és C az $\mathbf{R}^n$ két bázisa és $\mathbf{A}_{C \leftarrow B}$ az áttérés mátrixa, akkor bármely $\mathbf{v}$ vektor B -, illetve C -beli koordinátás alakja közt fennáll a

$$[\mathbf{v}]_C = \mathbf{A}_{C \leftarrow B} [\mathbf{v}]_B$$

összefüggés.

Bázisfelbontás* A 2.71. tétel második pontjának az előző feladatban is szemléltetett egyenes következménye, a következő állítás.

3.32. ÁLLÍTÁS: BÁZISFELBONTÁS. Jelölje egy $m \times n$ -es $\mathbf{A}$ mátrix redukált lépcsős alakjának nemzérus soraiból álló $r \times n$ -es részmatrixát $\mathbf{R}$, az $\mathbf{R}$ főoszlopainak megfelelő $\mathbf{A}$ -beli oszlopok alkotta $m \times r$ -es részmatrixot $\mathbf{B}$, ahol $r = r \mathbf{A}$. Ekkor az $\mathbf{R}$ mátrix j -edik oszlopa megegyezik az $\mathbf{A}$ mátrix j -edik oszlopának a $\mathbf{B}$ oszlopai alkotta bázisban felírt koordinátás alakjával. Képletben ez azt jelenti, hogy

$$\mathbf{A}_{*j} = \mathbf{B} \mathbf{R}_{*j}, \quad \text{azaz} \quad \mathbf{A} = \mathbf{B} \mathbf{R}.$$

Egy mátrix fenti $\mathbf{A} = \mathbf{B} \mathbf{R}$ alakú felbontását *bázisfelbontásnak* nevezzük.

3.33. PÉLDA: BÁZISFELBONTÁS. Határozzuk meg az alábbi mátrix bázisfelbontását, és magyarázzuk meg a két mátrix oszlopainak jelentését!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 7 & 0 & -11 \end{bmatrix}.$$

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{A}$ mátrix redukált lépcsős alakja:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 7 & 0 & -11 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

E mátrix első két sora alkotja az $\mathbf{R}$ mátrixot, az $\mathbf{A}$ mátrix első és harmadik oszlopa a $\mathbf{B}$ mátrixot, így a felbontás

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 7 & 0 & -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{R}.$$

Ellenőrizzük, hogy az $\mathbf{R}$ oszlopai az $\mathbf{A}$ oszlopvektorainak koordinátás alakjai a $\mathbf{B}$ oszlopai alkotta bázisban, azaz

$$[\mathbf{v}]_E = \mathbf{B} [\mathbf{v}]_B,$$

ahol az E indexszel a standard, B -vel a $\mathbf{B}$ mátrix oszlopai alkotta bázisbeli koordinátás alakját jelöltük ugyanannak a vektornak. Például

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \text{azaz} \quad [\mathbf{a}_4]_E = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{a}_4]_B = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

ahol $\mathbf{a}_4$ az $\mathbf{A}$ negyedik oszlopvektora. ■

Mátrixműveletek $\mathbb{Z}_m$ -ben* A mátrixműveletek

3.3. Blokkmátrixok

Műveletek blokkmátrixokkal A lineáris egyenletrendszerek bővített mátrixát tekinthetjük úgy, mint amelyet két mátrixból rakunk össze. De fordítva, mondhatjuk, hogy a bővített mátrixot két részmatrixra bontjuk.

Ha egy mátrixot a rajta végighaladó vízszintes és függőleges vonalak részmatrixokra bontunk, azt mondjuk, hogy e mátrix a részmatrixokból – más néven blokkokból – alkotott *blokkmátrix*, más néven *hipermátrix*.

Például egy 6-ismeretlenes, 5 egyenletből álló egyenletrendszer $\mathbf{B}$ bővített mátrixa lehet a következő, melynek blokkjait (részmatrixait) a mátrixokéhoz hasonló indexeléssel meg is jelöljük:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} & \mathbf{B}_{13} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} & \mathbf{B}_{23} \end{bmatrix}.$$

E felbontásban $\mathbf{B}_{11} = \mathbf{I}_3$, $\mathbf{B}_{21} = \mathbf{O}_{2 \times 3}$, $\mathbf{B}_{22} = \mathbf{O}_2$.

Egy blokkmátrix sorait és oszlopait szokás a mátrix *blokksorainak* és *blokkoszlopainak* nevezni a közös soroktól és oszlopoktól való megkülönböztetés végett. Pl. a fenti blokkmátrix első blokksorának elemei $\mathbf{B}_{11}$, $\mathbf{B}_{12}$, $\mathbf{B}_{13}$.

A *blokkmátrixokra* a szakirodalomban a *hipermátrix* elnevezés is el van terjedve. Ekkor a blokksorokat hipersoroknak, a blokkoszlopokat hiperoszlopoknak nevezzük. Mi kerüljük e szóhasználatot a hipermátrix másik – többdimenziós tömb értelmű – jelentése miatt.

3.34. ÁLLÍTÁS: MŰVELETEK BLOKKMÁTRIXOKKAL. Blokkmátrixok skalárral való szorzása és két azonos módon particionált blokkmátrix összeadása blokkonként is elvégezhető, azaz

$$c[\mathbf{A}_{ij}] := [c\mathbf{A}_{ij}], \quad [\mathbf{A}_{ij}] + [\mathbf{B}_{ij}] := [\mathbf{A}_{ij} + \mathbf{B}_{ij}].$$

Ha $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{ik}]_{m \times t}$, $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_{kj}]_{t \times n}$ két blokkmátrix, és minden k -ra az $\mathbf{A}_{ik}$ blokk oszlopainak száma megegyezik $\mathbf{B}_{kj}$ sorainak számával, akkor a $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ szorzat kiszámítható a szorzási szabály blokkokra való alkalmazásával is, azaz $\mathbf{C}$ olyan blokkmátrix, melynek i -edik blokksorában és j -edik blokkoszlopában álló blokk

$$\mathbf{C}_{ij} = \sum_{k=1}^t \mathbf{A}_{ik} \mathbf{B}_{kj}.$$

3.35. PÉLDA: MŰVELETEK BLOKKMÁTRIXOKKAL. Végezzük el az $\mathbf{A} + 3\mathbf{C}$ és az $\mathbf{AB}$ műveleteket közös mátrixműveletekkel és blokkmátrixként számolva is, ha

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right], \quad \mathbf{B} = \left[\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 1 & 5 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{array} \right], \quad \mathbf{C} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right].$$

MEGOLDÁS. Számoljunk blokkmátrixként kezelve a mátrixokat:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + 3\mathbf{C} &= \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right] + 3 \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right] + 3 \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 6 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 3 & 6 & 3 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Ellenőrizzük a számítást közönséges mátrixműveletekkel! Ezután tekintjük a blokkmátrixok szorzását!

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] + 3 \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] + 0 \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 6 & 1 & 6 \\ 3 & 9 & 2 & 4 \\ \hline 6 & 6 & 2 & 2 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha ellenőrzésül egyszerű mátrixszorzással is elvégezzük a műveletet! ■

3.36. PÉLDA: 2×2 -ES BLOKKMÁTRIXOK. Legyen $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ két 2×2 -es blokkmátrix, azaz legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix}.$$

Írjuk fel szorzatukat a blokkok szorzatai segítségével.

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{AB}$ szorzat felírható

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{22} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{22} \end{bmatrix}$$

alakban. A $\mathbf{BA}$ hasonlóképp írható fel! Ellenőrizzük, hogy a 3.34. állítás feltétele (minden k -ra az $\mathbf{A}_{ik}$ blokk oszlopainak száma megegyezik $\mathbf{B}_{kj}$ sorainak számával) valóban szükséges, de elégséges is. ■

Vektorokra particionált mátrixok Fontosak azok a blokkmátrixok, amelyekben vagy oszlopvektor vagy sorvektor minden blokk.

Bontsuk fel az $\mathbf{A}_{m \times t}$ mátrixot sorvektoraira, és a $\mathbf{B}_{t \times n}$ mátrixot oszlopvektoraira, azaz tekintsük a következő két blokkmátrixot:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1*} \\ \mathbf{a}_{2*} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m*} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{*1} & \mathbf{b}_{*2} & \dots & \mathbf{b}_{*n} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \\ \boxed{} \\ \boxed{} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{} & \boxed{} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} \end{bmatrix}$$

Ekkor $\mathbf{AB}$ a mátrixszorzás definíciója alapján a következő alakba írható:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1*} \mathbf{b}_{*1} & \mathbf{a}_{1*} \mathbf{b}_{*2} & \dots & \mathbf{a}_{1*} \mathbf{b}_{*n} \\ \mathbf{a}_{2*} \mathbf{b}_{*1} & \mathbf{a}_{2*} \mathbf{b}_{*2} & \dots & \mathbf{a}_{2*} \mathbf{b}_{*n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{m*} \mathbf{b}_{*1} & \mathbf{a}_{m*} \mathbf{b}_{*2} & \dots & \mathbf{a}_{m*} \mathbf{b}_{*n} \end{bmatrix},$$

ahol $\mathbf{a}_{i*} \mathbf{b}_{*j}$ az $\mathbf{A}$ mátrix i -edik sorának és a $\mathbf{B}$ mátrix j -edik oszlopának skaláris szorzata.

A blokkmátrixok szorzási szabálya akkor is alkalmazható, ha csak az egyik mátrixot particionáljuk (a másik mátrixot egyszerűen egyetlen blokkból álló mátrixnak tekintjük). Két eset lehetséges. Az első esetben a szorzatmátrixban „mátrixszor oszlopvektorok” szerepelnek:

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \mathbf{A} \left[\mathbf{b}_{*1} \mid \mathbf{b}_{*2} \mid \dots \mid \mathbf{b}_{*n} \right] = \left[\mathbf{Ab}_{*1} \mid \mathbf{Ab}_{*2} \mid \dots \mid \mathbf{Ab}_{*n} \right]$$

Itt tehát a $\mathbf{C}$ mátrix j -edik oszlopvektora az $\mathbf{A}$ mátrix és a $\mathbf{B}$ j -edik oszlopának szorzata, vagyis $\mathbf{c}_{*j} = \mathbf{Ab}_{*j}$. Sematikusan ábrázolva:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{b}_{*j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{c}_{*j} \end{bmatrix}$$

Ezzel az esettel már találkoztunk a szimultán egyenletrendszerek mátrixszorzatos alakjának fölírásánál (3.20. példa). Ha a fenti sematikus ábra egy szimultán egyenletrendszer mátrixszorzatos alakját reprezentálja, akkor a kékkel kiemelt rész a szimultán egyenletrendszer egyetlen egyenletrendszerének felel meg.

A másik esetben a szorzatmátrixban „sorvektorszor mátrixok” szerepelnek:

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1*} \\ \mathbf{a}_{2*} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m*} \end{bmatrix} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1*} \mathbf{B} \\ \mathbf{a}_{2*} \mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m*} \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

Azaz itt a $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ mátrix i -edik sora az $\mathbf{A}$ mátrix i -edik sorának $\mathbf{B}$ -szerese. Másként írva $\mathbf{c}_{i*} = \mathbf{a}_{i*} \mathbf{B}$, sematikusan ábrázolva:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{a}_{i*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{c}_{i*} \end{bmatrix}$$

A mátrixszorzat egy felbontása megkapható a mátrixok másik particiójából, azaz amikor $\mathbf{A}$ -t oszlopokra, $\mathbf{B}$ -t sorokra bontjuk, vagyis

$$\mathbf{A} = \left[\mathbf{a}_{*1} \mid \mathbf{a}_{*2} \mid \dots \mid \mathbf{a}_{*t} \right], \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{1*} \\ \mathbf{b}_{2*} \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{t*} \end{bmatrix}.$$

Ekkor egyetlen blokkosorból álló mátrixot szorzunk egy blokkoszlopból állóval, vagyis egy skaláris szorzatra emlékeztető összeget kapunk:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{a}_{*1} \mathbf{b}_{1*} + \mathbf{a}_{*2} \mathbf{b}_{2*} + \dots + \mathbf{a}_{*t} \mathbf{b}_{t*}.$$

E felbontásban az $\mathbf{AB}$ mátrixot *diádok összegére* bontottuk! Mátrixok diádok összegére bontása olyan technika, amivel később még találkozunk.

3.37. PÉLDA: SZORZAT ELŐÁLLÍTÁSA DIÁDOK ÖSSZEGEKÉNT. Bontsuk fel a

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

szorzatot diádok összegére. Vajon felbontható-e a szorzat kevesebb diád összegére?

MEGOLDÁS.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Tehát a szorzatot három diád összegére bontottuk, azonban kevesebbre is lehet. Például

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix},$$

azaz a szorzat maga egy diád (egy diád összege). ■

E felbontásnak fontos speciális esete az, amikor $\mathbf{A}$ egyetlen sorból, vagy $\mathbf{B}$ egyetlen oszlopból áll. Tekintsük az előző példában szereplő $\mathbf{A}$ mátrix első sorát! Ekkor a fenti felbontás a következő alakot ölti:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ez azt jelenti, hogy a szorzat, mely egy sorvektor, a $\mathbf{B}$ mátrix sorainak lineáris kombinációja. Hasonlóképp, ha $\mathbf{B}$ csak egyetlen oszlopból áll, a szorzat az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopainak lineáris kombinációja. Például az előző példabeli $\mathbf{B}$ mátrix második oszlopát megtartva a következő felbontást kapjuk:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Összefoglalva:

3.38. ÁLLÍTÁS: A SZORZAT OSZLOPAI ÉS SORAI. Az $\mathbf{AB}$ mátrix minden oszlopa az $\mathbf{A}$ oszlopainak lineáris kombinációja, és minden sora a $\mathbf{B}$ sorainak lineáris kombinációja.

BIZONYÍTÁS. Az $\mathbf{AB}$ mátrix j -edik oszlopa

$$(\mathbf{AB})_{*j} = \mathbf{A}\mathbf{b}_{*j} = \mathbf{a}_{*1}b_{1j} + \mathbf{a}_{*2}b_{2j} + \dots + \mathbf{a}_{*t}b_{tj}$$

az i -edik sora pedig

$$(\mathbf{AB})_{i*} = \mathbf{a}_{i*}\mathbf{B} = a_{i1}\mathbf{b}_{1*} + a_{i2}\mathbf{b}_{2*} + \dots + a_{it}\mathbf{b}_{t*},$$

ami bizonyítja az állítást. ■

Lineáris egyenletrendszer megoldásának blokkmátrix alakja*

3.39. PÉLDA: NULLTÉR BÁZISA. Határozzuk meg az alábbi mátrix nullterének bázisát!

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

MEGOLDÁS. A nulltér, azaz a mátrixhoz tartozó homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak tere könnyen leolvasható a redukált lépcsős alakból.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A szabad változókhoz rendelt paraméterek legyenek $x_3 = t_1$, $x_4 = t_2$, $x_5 = t_3$, amiből $x_1 = -t_1 - 2t_2 - 7t_3$ és $x_2 = -t_1 - t_2 + t_3$. Innen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_3 \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -7 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix},$$

azaz a nullteret három vektor feszíti ki. Vegyük észre, hogy a redukált lépcsős alak blokkszerkezete

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{S} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}$$

és a megoldás

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\mathbf{S} \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \mathbf{t}$$

alakú, ahol $\mathbf{t}$ a paraméterek vektora. Itt csak annyi a kérdés, hogy a nullteret kifeszítő három vektor független-e. Ez jól látszik a három vektorból képzett mátrixon, mivel annak alsó blokkja $\mathbf{I}_3$, ami három független oszlopvektorból áll, és ezek akkor is függetlenek maradnak, ha eléjük további koordinátákat illesztünk. ■

3.40. TÉTEL: A MEGOLDÁS FELÍRÁSA BLOKKMÁTRIXOKKAL. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az r rangú $\mathbf{A}$ mátrix első r oszlopa lineárisan független – ez oszlopkeréssel mindig elérhető. Jelölje $\mathbf{B}_r$ az $\mathbf{A}$ első r oszlopából álló mátrixot, és legyen az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ bővített mátrix redukált lépcsős alakja

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{S} & \mathbf{d}_r \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

ahol $\mathbf{d}_r$ egy r -dimenziós vektor. Ekkor az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldható, és megoldása

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_r \\ \mathbf{0}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{S} \\ \mathbf{I}_s \end{bmatrix} \mathbf{t}_s,$$

ahol s a szabad változók száma, azaz $s = n - r$, és $\mathbf{t}_s$ a szabad paraméterek vektora, ráadásul $\mathbf{A} = \mathbf{B}_r[\mathbf{I}_r|\mathbf{S}]$ és $\mathbf{b} = \mathbf{B}_r\mathbf{d}_r$.

BIZONYÍTÁS. Mivel $[\mathbf{I}_r|\mathbf{S}]$ az $\mathbf{A}$ redukált lépcsős alakja, ezért ennek bármely oszlopa az $\mathbf{A}$ mátrix azonos sorszámú oszlopának koordinátás alakja az $\mathbf{B}_r$ oszlopvektoraiban, mint bázisban felírva. Ez épp azt jelenti, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{B}_r[\mathbf{I}_r|\mathbf{S}]$. Ez az oszloptér bármely oszlopára, így $\mathbf{b}$ -re is igaz, hisz $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ redukált lépcsős alakja szerint az egyenletrendszer megoldható, így $\mathbf{b}$ eleme az oszloptérnek. Eszerint tehát $\mathbf{b} = \mathbf{B}_r\mathbf{d}_r$.

Az, hogy minden megoldás fölírható ilyen alakba, a Gauss–Jordan-módszerből következik. Meg kell még mutatni, hogy a tételben felírt $\mathbf{x}$ vektor valóban megoldás.

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{B}_r [\mathbf{I}_r \quad \mathbf{S}] \left(\begin{bmatrix} \mathbf{d}_r \\ \mathbf{0}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{S} \\ \mathbf{I}_s \end{bmatrix} \mathbf{t}_s \right) \\ &= \mathbf{B}_r (\mathbf{d}_r - \mathbf{S}\mathbf{t}_s + \mathbf{S}\mathbf{t}_s) = \mathbf{B}_r\mathbf{d}_r \\ &= \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Ez bizonyítja az állítást. ■

3.41. TÉTEL: A NULLTÉR BÁZISA. Tegyük fel, hogy az r rangú $\mathbf{A}$ mátrix első r oszlopa lineárisan független – ez oszlopccserékkel mindig elérhető. Legyen az $\mathbf{A}$ mátrix redukált lépcsős alakja

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{S} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}.$$

Ekkor az $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldása

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\mathbf{S} \\ \mathbf{I}_s \end{bmatrix} \mathbf{t}_s,$$

ahol $s = n - r$ a szabad változók száma, és a $\begin{bmatrix} -\mathbf{S} \\ \mathbf{I}_s \end{bmatrix}$ mátrix oszlopvektorai a nulltér bázisát alkotják.

BIZONYÍTÁS. A bizonyítás közvetlen következménye a 3.40. tételnek, csak azt kell belátni, hogy $\begin{bmatrix} -\mathbf{S} \\ \mathbf{I}_s \end{bmatrix}$ oszlopvektorai a nulltér bázisát alkotják. Ez abból következik, hogy egyrészt kifeszítik a nullteret, másrészt lineárisan függetlenek, hisz az alsó blokkban lévő $\mathbf{I}_s$ mátrix oszlopai lineárisan függetlenek. ■

Igaz – hamis Döntsük el, igazak-e az alábbi állítások? Válaszunkat indokoljuk!

1° Ha az $\mathbf{AB}$ és a $\mathbf{BA}$ szorzat is értelmezve van, akkor mindkét szorzat négyzetes.

2° Ha az $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ szorzat elvégezhető, akkor biztosan elvégezhető az $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ szorzat is.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 5,$$

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = \mathbf{u} \mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Mátrixműveletek Az következőkben legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Végezzük el az alábbi műveleteket!

3 $2\mathbf{A} - 3\mathbf{B}^T$

4 $\mathbf{AB} - \mathbf{BA} + \mathbf{AC} - \mathbf{CA}$

5 $(\mathbf{CD} - \mathbf{DC})(\mathbf{ABC})$

6 $\mathbf{A}^2 - \mathbf{C}^2$

7 $(\mathbf{C})_{2*}(\mathbf{D})_{*2}$

8 $(\mathbf{A})_{*1}(\mathbf{B})_{2*}$

9° A fenti jelölések mellett igazak-e a következő egyenlőségek?

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2, \quad (\mathbf{A} + \mathbf{C})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AC} + \mathbf{C}^2.$$

10° A fenti jelölések mellett igazak-e a következő egyenlőségek?

$$(\mathbf{C} + \mathbf{D})(\mathbf{C} - \mathbf{D}) = \mathbf{C}^2 - \mathbf{D}^2, \quad (\mathbf{A} + \mathbf{D})(\mathbf{A} - \mathbf{D}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{D}^2.$$

Számítsuk ki az alábbi vektorok skaláris és diadikus szorzatát! Írjuk fel mindkét műveletet mátrixszorzatos alakban!

11 $\mathbf{a} = (1, 2), \mathbf{b} = (0, 1)$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2, \quad \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a} \mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

12 $\mathbf{u} = (1, 2, 0, 1), \mathbf{v} = (0, 1, 2, 3)$

13 $\mathbf{a} = (1, 2, 0), \mathbf{b} = (0, 1, 2, 3)$

A skaláris szorzat nem végezhető el, a diadikus szorzat

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a} \mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mátrixszorzatos alakok Írjuk fel az alábbi egyenletrendszerek mátrixszorzatos alakját!

14° $x + y = 1$

$$x - z = 2$$

$$z = 3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

15 $3x - 2y + 4z = 5$

16 $2x + z = 1$

$$x - y - w = 2$$

$$y + z + w = 2$$

$$0 = 3$$

Írjuk fel az alábbi lineáris helyettesítések mátrixszorzatos alakját!

17 $u = 2x - 4y$

$$v = x + 2y$$

$$\begin{aligned} 18 \quad x &= 3a - 2b + c \\ y &= 2a - c \\ z &= b + 2c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 19 \quad x &= 3a + b \\ y &= 2a - b \\ z &= b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 20^\bullet \quad x &= 3a - 2b + c \\ y &= 2a - c \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Elemi mátrixok Keressük meg azt az $\mathbf{E}$ mátrixot, mely megoldása az alábbi mátrixegyenletnek!

$$21 \quad \mathbf{E} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ e & f \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$22 \quad \mathbf{E} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 3c & 3d \\ e & f \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$23 \quad \mathbf{E} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c + 2e & d + 2f \\ e & f \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$24 \quad \mathbf{E} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - c & b - d \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Elemi sorműveletekkel, mátrixszorzás nélkül határozzuk meg az alábbi mátrixszorzatok értékét!

$$25 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$26 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

Blokkmátrixok Számítsuk ki az alábbi feladatokban megadott mátrixszorzatokat a kijelölt blokkmátrixokat használva!

$$27 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$28 \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 4 & 5 & 14 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$29 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 3 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 7 \\ 12 & 12 \end{bmatrix}$$

Vegyes feladatok

30[•] A *sudoku* egy olyan logikai játék, melyben egy olyan 9×9 -es mátrixot kell megadni, melynek ismerjük néhány, de nem minden elemét. A feladat a nem ismert elemek meghatározása. A mátrix 9 darab 3×3 -as blokkra van particionálva és eleget tesz annak a feltételnek, hogy minden sorában, minden oszlopában és minden blokkjában az 1-től 9-ig terjedő egészek mindegyike egyszer szerepel. Ez azt jelenti, hogy az egy sorban, egy oszlopban és egy blokkban lévő számok összege mindig 45. Fejezzük ki ezt mátrixműveletekkel, azaz írjunk fel a sudoku tábla $\mathbf{A}$ mátrixát is tartalmazó olyan mátrixegyenleteket, melyeket minden helyesen kitöltött sudoku tábla mátrixa kielégít!

Jelölje $\mathbf{j}$ a csupa 1-esből álló 9-dimenziós vektort, $\mathbf{j}_{456}$ azt, amelynek 4, 5, 6 indexű eleme 1-es, a többi 0. Ekkor a „minden sorösszeg 45” és a „minden oszlopösszeg 45” feltételek ekvivalensek az $\mathbf{A}\mathbf{j} = 45\mathbf{j}$, $\mathbf{j}^T\mathbf{A} = 45\mathbf{j}^T$ egyenletekkel, míg pl. az „első blokkoszlop, második blokkosor metszetében álló blokk elemeinek összege 45” feltételnek a $\mathbf{j}_{456}^T\mathbf{A}\mathbf{j}_{123} = 45$ egyenlet felel meg.

31 Hány eleme van a $\mathbb{Z}_2^{2 \times 2}$ -nek, azaz a kételemű test fölötti 2×2 -es mátrixok terének?

$\mathbb{Z}_2^{2 \times 2}$ -be $2^4 = 16$ mátrix tartozik:

$$\mathbb{Z}_2^{2 \times 2} = \{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \}.$$

3.4. Mátrixműveletek tulajdonságai

Ebben a szakaszban áttekintjük a mátrixműveletek legfontosabb algebrai tulajdonságait. Néhány dologban különböznek a számoknál megismert műveleti tulajdonságoktól.

Az összeadás és a skalárral való szorzás tulajdonságai Mivel a mátrixok összeadása és skalárral való szorzása elemenként végrehajtható műveletek, ezért műveleti tulajdonságaik természetes módon öröklik meg a számok műveleti tulajdonságait. A legfontosabb ilyen tulajdonságokat sorolja föl a következő tétel.

3.42. TÉTEL: ÖSSZEADÁS ÉS SKALÁRRAL SZORZÁS ALGEBRAI TULAJDONSÁGAI. Legyen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ azonos típusú ($m \times n$ -es) mátrix, c és d legyenek skalárok. Ekkor

- | | |
|---|-------------------------------------|
| (a) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ | felcserélhetőség, kommutativitás |
| (b) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ | csoportosíthatóság, asszociativitás |
| (c) $\mathbf{A} + \mathbf{O}_{m \times n} = \mathbf{A}$ | zérusmátrix (zéruselem) létezése |
| (d) $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{O}_{m \times n}$ | ellentett (additív inverz) létezése |
| (e) $c(d\mathbf{A}) = (cd)\mathbf{A}$ | csoportosíthatóság |
| (f) $0\mathbf{A} = \mathbf{O}_{m \times n}$ | |
| (g) $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$ | |
| (h) $-1\mathbf{A} = -\mathbf{A}$ | |
| (i) $(c + d)\mathbf{A} = c\mathbf{A} + d\mathbf{A}$ | disztributivitás |
| (j) $c(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = c\mathbf{A} + c\mathbf{B}$ | disztributivitás |

► A csoportosíthatósági azonosságok következménye, hogy a zárójelek elhagyhatók, így $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ helyett írható $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$, $(cd)\mathbf{A}$ helyett $cd\mathbf{A}$.

► A két létezési állítás tartalma az, hogy *létezik* olyan mátrix, hogy *bármely* vele azonos típusú $\mathbf{A}$ mátrixhoz adva $\mathbf{A}$ lesz az eredmény, illetve minden $\mathbf{A}$ mátrixhoz *létezik* olyan mátrix, mellyel összeadva a zérusmátrixot kapjuk.

BIZONYÍTÁS. Mintaként bebizonyítjuk az (a) állítást.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]^* = [b_{ij} + a_{ij}] = [b_{ij}] + [a_{ij}] = \mathbf{B} + \mathbf{A}.$$

A $*$ -gal jelzett egyenlőségnél használjuk a számok összeadásának kommutativitását.

A többi állítás hasonlóan bizonyítható. ■

A szorzás tulajdonságai A számok szorzásának algebrai tulajdonságai már nem vihetők át olyan könnyen a mátrixműveletekre, mint az összeadáséi. Sőt, nem is teljesülnek mind, pl. a 3.16. példában láttuk, hogy a mátrixszorzás *nem kommutatív*. A következő példák óvatosságra intenek a mátrixkifejezésekkel való számolásokban.

3.43. PÉLDA: EGYSZERŰSÍTÉS MÁTRIXSZAL. A valós számok közt igaz, hogy ha $a \neq 0$ és $ab = ac$, akkor a -val egyszerűsíthetünk, azaz akkor $b = c$. Mátrixoknál az $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ egyszerűsíthetőséghez nem elég, hogy $\mathbf{A}$ ne legyen zérusmátrix! Például

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ de } \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3.44. PÉLDA: NULLOSZTÓ. A valósok közt igaz, hogy ha $ab = 0$, akkor vagy $a = 0$, vagy $b = 0$. Mátrixok közt ilyen következtetés nem vonható le:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

(*Nullosztónak* nevezzük egy algebrai struktúra olyan nemzérus elemeit, melyek szorzata zérus.)

► Megjegyezzük, hogy a $\mathbb{Z}_m$ -ben való számolásnál is hasonlókat tapasztaltunk, ha m összetett. Például $\mathbb{Z}_6$ -ban $2 \cdot 3 = 0$, és bár $3 \cdot 2 = 3 \cdot 4$, $2 \neq 4$.

3.45. TÉTEL: MÁTRIXSZORZÁS ALGEBRAI TULAJDONSÁGAI. Legyen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ olyan, hogy a kijelölt műveletek elvégezhetők legyenek, legyen továbbá c skalár. Ekkor

- | | |
|---|-----------------------------------|
| (a) $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$ | felcserélhetőség, asszociativitás |
| (b) $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ | disztributivitás |
| (c) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$ | disztributivitás |
| (d) $(c\mathbf{A})\mathbf{B} = c(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}(c\mathbf{B})$ | |
| (e) $\mathbf{A}_{m \times n} \mathbf{O}_{n \times t} = \mathbf{O}_{m \times t}$ | szorzás nullmátrixszal |
| (f) $\mathbf{I}_m \mathbf{A}_{m \times n} = \mathbf{A}_{m \times n} \mathbf{I}_n = \mathbf{A}_{m \times n}$ | szorzás egységmátrixszal |

BIZONYÍTÁS. A fenti tulajdonságok közül csak az elsőt és az utolsót bizonyítjuk, a többit feladatként tűzzük ki, mert vagy hasonlóan, vagy még egyszerűbben bizonyíthatóak.

(a) Vizsgáljuk meg először, hogy három tetszőleges mátrix milyen feltételek mellett szorozható össze! Legyen $\mathbf{A}_{m \times s}$, $\mathbf{B}_{u \times v}$ és $\mathbf{C}_{t \times n}$ három tetszőleges mátrix. Az $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ szorzatban $\mathbf{AB}$ csak $s = u$ esetén végezhető el, és a szorzat típusa $m \times v$ lesz. Ez $\mathbf{C}$ -vel csak akkor szorozható, ha $v = t$, és a szorzat $m \times n$ -es. Tehát e szorzat csak akkor van értelmezve, ha $\mathbf{B}$ típusa $s \times t$. Hasonló érveléssel ugyanezt kapjuk az $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ szorzatról is.

Az indexek kezelésének könnyítésére elég lesz a bizonyítást sorvektor alakú $\mathbf{A}$ és oszlopvektor alakú $\mathbf{C}$ mátrixokra elvégezni, ugyanis az $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ szorzat i -edik sorában és j -edik oszlopában álló elem az $\mathbf{AB}$ i -edik sorának, azaz az $\mathbf{a}_{i*}\mathbf{B}$ sorvektornak és $\mathbf{C}$ j -edik oszlopának szorzata, azaz $(\mathbf{a}_{i*}\mathbf{B})\mathbf{c}_{*j}$. Hasonlóképp az $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ szorzat i -edik sorában és j -edik oszlopában álló elem $\mathbf{a}_{i*}(\mathbf{Bc}_{*j})$.

Legyen tehát

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Ekkor a szorzat 1×1 -es. Először számoljuk ki az $\mathbf{AB}$ mátrixot, ami $1 \times m$ -es: $\left[\sum_{k=1}^m a_k b_{k1} \quad \sum_{k=1}^m a_k b_{k2} \quad \dots \quad \sum_{k=1}^m a_k b_{kn} \right]$. Innen számolva $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ -t:

$$\left[\sum_{k=1}^m a_k b_{k1} \quad \sum_{k=1}^m a_k b_{k2} \quad \dots \quad \sum_{k=1}^m a_k b_{kn} \right] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^m a_k b_{kl} c_l.$$

Hasonlóan, először $\mathbf{BC}$ -t fölírva, az $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ mátrixra kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{l=1}^n b_{1l}c_l \\ \sum_{k=1}^m b_{2l}c_l \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n b_{ml}c_l \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^m a_k \left(\sum_{l=1}^n b_{kl}c_l \right) = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_k b_{kl}c_l.$$

Az utolsó lépésben a belső szumma minden tagját beszoroztuk a_k -val, a számok közti összeadás és szorzás közti disztributivitást használva. Vagyis mindkét oldalon olyan összeg áll, amely az összes $a_k b_{kl} c_l$ alakú szorzat összege, csak a tagok csoportosítása más. ■

► Az asszociativitás következménye, hogy a többtényezős mátrixszorzatokat nem kell zárójelezni, hisz bármelyik zárójelezés ugyanazt az eredményt adja. Például

$$\mathbf{ABC} = (\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

Az állítás igaz többtényezős szorzatokra is, vagyis az $\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_k$ szorzat független a végrehajtás sorrendjétől, de a tényezők sorrendje nem változtatható!

► Indukcióval bizonyítható, hogy a (g) -beli összefüggés többtényezős szorzatokra is fennáll, azaz

$$(\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_k)^T = \mathbf{A}_k^T \dots \mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_1^T.$$

► Megjegyezzük, hogy az asszociativitás imént leírt bizonyítása hasonlóan mondható el, ha az $\mathbf{A} = [a_{ik}]$ mátrix nem csak 1 sorból, és a $\mathbf{C} = [c_{lj}]$ mátrix nem csak egy oszlopból áll: ekkor a $\mathbf{D} = \mathbf{ABC}$ szorzat i -edik sorának j -edik elemére azt kapjuk, hogy az az összes $a_{ik} b_{kl} c_{lj}$ alakú szorzatok összege, azaz

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{ik} b_{kl} c_{lj}.$$

Ez, és az ehhez hasonló számtalan hasonló kifejezés vezette Einsteint arra a felismerésre, hogy az indexelt változók szorzatainak összegében a szumma jelek feleslegesek, hisz azokra az indexekre kell összegezni, amelyek legalább kétszer szerepelnek, míg az egyszer szereplőkre nem. Tehát az előző kettős szumma helyett írhatnánk azt is, hogy

$$d_{ij} = a_{ik} b_{kl} c_{lj},$$

hisz a jobb oldalon i és j csak egyszer szerepel, így k -ra és l -re kell összegezni, azt pedig tudjuk, hogy $k = 1, \dots, m$ és $l = 1, \dots, n$. Ezt a jelölésbeli egyszerűsítést *Einstein-konvenciónak* nevezik. Einstein ezt a relativitás általános elméletéről írt híres dolgozatában használta először 1916-ban. A konvenció használata főként a lineáris algebra fizikai alkalmazásaiban terjedt el, mi e könyvben nem fogjuk használni.

Mátrix hatványozása Csak a négyzetes mátrixok szorozhatók meg önmagukkal, hisz ha egy $m \times n$ -es mátrix megszorozható egy $m \times n$ -essel, akkor $m = n$. Ezt figyelembe véve természetes módon definiálható négyzetes mátrixok pozitív egész kitevős hatványa:

$$\mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{A} \mathbf{A} \dots \mathbf{A}}_{k \text{ tényező}}$$

Kicsit elegánsabban – rekurzióval – is definiálhatjuk e fogalmat: $\mathbf{A}^1 := \mathbf{A}$ és $\mathbf{A}^{k+1} := \mathbf{A}^k \mathbf{A}$.

Mivel a mátrixszorzás asszociatív, mindegy, hogy milyen sorrendben végezzük el a hatványozást. Ezzel igazolható a következő két összefüggés is:

3.46. ÁLLÍTÁS: HATVÁNYOZÁS AZONOSSÁGAI. Legyen $\mathbf{A}$ egy négyzetes mátrix! Ekkor

$$(a) \mathbf{A}^k \mathbf{A}^m = \mathbf{A}^{k+m},$$

$$(b) (\mathbf{A}^k)^m = \mathbf{A}^{km}.$$

A latin eredetű *precedencia* szó *előzményt* jelent (lásd még *precedens*). A *precedencia elv* a matematikában fogalmak jelentésének olyan kiterjesztését jelenti, melynek során a korábban megismert tulajdonságok, összefüggések érvényben maradnak.

Ha ki akarjuk terjeszteni a hatványozást 0 kitevőre is, kövessük a precedencia-elvet, azaz olyan értelmet adjunk $\mathbf{A}^0$ -nak, hogy a fenti összefüggések érvényben maradjanak. Például tekintsük az (a) azonosságot $m = 0$ esetén:

$$\mathbf{A}^k \mathbf{A}^0 = \mathbf{A}^{k+0} = \mathbf{A}^k.$$

Ez minden $\mathbf{A}$ mátrix esetén csak az egységmátrixra igaz, tehát

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}_n,$$

ahol n a négyzetes $\mathbf{A}$ mérete.

► A valós számoknál tanult, különböző alapú hatványokra érvényes azonosság itt a kommutativitás hiánya miatt nem érvényes, azaz általában $(\mathbf{AB})^k \neq \mathbf{A}^k \mathbf{B}^k$.

3.47. PÉLDA: MÁTRIX HATVÁNYOZÁSA. Számítsuk ki az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{és a} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixok k -adik hatványait!

MEGOLDÁS. Számoljuk ki $\mathbf{A}$ hatványait!

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

azaz $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}_2$, ebből pedig látjuk, hogy $\mathbf{A}^3 = \mathbf{I}_2 \mathbf{A} = \mathbf{A}$, $\mathbf{A}^4 = \mathbf{A}^3 \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A} = \mathbf{I}_2, \dots$. Tehát általában $\mathbf{A}^{2k} = \mathbf{I}_2$ és $\mathbf{A}^{2k+1} = \mathbf{A}$.

A másik feladatot a hatványozás rekurzív definícióját használva indukcióval kényelmesen meg tudjuk oldani. Először számoljuk ki $\mathbf{A}$ néhány hatványát:

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ebből azt sejtjük, hogy $\mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ha be tudjuk látni ennek az összefüggésnek az öröklődését k -ról $k+1$ -re, akkor kész vagyunk. Más szóval meg kell mutatnunk, hogy ha $\mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, akkor $\mathbf{A}^{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ezt a következő szorzás elvégzése igazolja:

$$\mathbf{A}^{k+1} = \mathbf{A}^k \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Miután mátrixok lineáris kombinációja és négyzetes mátrixok egész kitevős hatványa értelmezve van, ezért négyzetes mátrixokra is definiálhatjuk skalár együtthatós polinom helyettesítési értékét. Legyen

$$p(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

egy skalár együtthatós polinom. A p polinom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ helyen vett helyettesítési értékén a

$$p(\mathbf{X}) = a_k \mathbf{X}^k + \dots + a_2 \mathbf{X}^2 + a_1 \mathbf{X} + a_0 \mathbf{I}_n$$

mátrixot értjük.

3.48. PÉLDA: POLINOM HELYETTESÍTÉSI ÉRTÉKE. Legyen

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & -6 \end{bmatrix}.$$

Mutassuk meg, hogy $p(\mathbf{C}) = \mathbf{O}$, ha $p(x) = x^3 + 2x^2 - 1$.

MEGOLDÁS. A $p(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^3 + 2\mathbf{C}^2 - \mathbf{I}$ műveleteit elvégezve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} p(\mathbf{C}) &= \mathbf{C}^3 + 2\mathbf{C}^2 - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & -14 \\ 8 & 7 & -12 \\ 14 & 12 & -21 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -4 & -4 & 7 \\ -4 & -3 & 6 \\ -7 & -6 & 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A transzponálás tulajdonságai A következő tétel a transzponálás és a többi művelet kapcsolatáról szól:

3.49. TÉTEL: TRANSZPONÁLÁS TULAJDONSÁGAI. $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ legyenek azonos típusú mátrixok, c tetszőleges skalár. Ekkor

- (a) $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$,
- (b) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$,
- (c) $(c\mathbf{A})^T = c\mathbf{A}^T$,
- (d) $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$.

BIZONYÍTÁS. Az első három összefüggés magától értetődő, csak az utolsót bizonyítjuk.

Először megmutatjuk, hogy ha $(\mathbf{AB})^T$ elvégezhető, akkor $\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$ is. Az $m \times t$ típusú $\mathbf{A}$ és a $t \times n$ típusú $\mathbf{B}$ szorzata $m \times n$ -es, transzponáltja $n \times m$ -es, így az $n \times t$ típusú $\mathbf{B}^T$ és a $t \times m$ -es $\mathbf{A}^T$ összeszorozhatók, szorzatuk $n \times m$ -es, így a tételbeli egyenlőség két oldalának típusa azonos.

A tétel azon alapul, hogy két tetszőleges $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vektorra $\mathbf{u}^T \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \mathbf{u}$. Ezt az összefüggést a $*$ -gal jelölt egyenlőségnél fogjuk használni. Az $(\mathbf{AB})^T$ i -edik sorának j -edik eleme

$$((\mathbf{AB})^T)_{ij} = (\mathbf{AB})_{ji} = (\mathbf{A})_{j*} (\mathbf{B})_{*i}.$$

A $\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$ i -edik sorának j -edik eleme

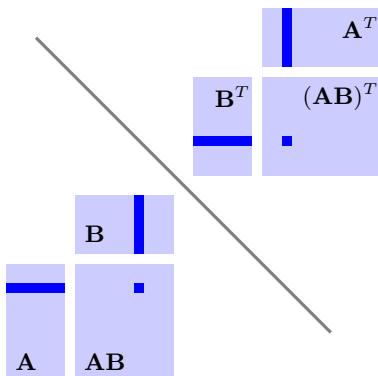
$$(\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T)_{ij} = (\mathbf{B}^T)_{i*} (\mathbf{A}^T)_{*j} \stackrel{*}{=} (\mathbf{A})_{j*} (\mathbf{B})_{*i}.$$

Tehát $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$. ■

► A tétel (b) pontjának indukcióval könnyen bizonyítható következménye, hogy többtagú összeg transzponáltja megegyezik a transzponáltak összegével. A (c) pontot is figyelembe véve kapjuk, hogy mátrixok lineáris kombinációjának transzponáltja megegyezik a mátrixok transzponáltjainak azonos lineáris kombinációjával, azaz

$$(c_1 \mathbf{A}_1 + c_2 \mathbf{A}_2 + \dots + c_k \mathbf{A}_k)^T = c_1 \mathbf{A}_1^T + c_2 \mathbf{A}_2^T + \dots + c_k \mathbf{A}_k^T.$$

► A tétel (d) pontjára „szemléletes igazolás” is adható, ami leolvasható az alábbi ábráról.



3.5. Mátrix inverze

Lehet-e mátrixszal osztani, és ha igen, meg tudjuk-e vele oldani az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer úgy, ahogy az $ax = b$ egyenletet megoldjuk az a -val való osztással?

A számítástechnikában gyakran találkozunk a műveletek *infix* jelölése mellett a *prefix* vagy *lengyel* és a *postfix* vagy *fordított lengyel* jelölésével is. A prefixnél a műveleti jel az argumentumai előtt, a postfixnél után van. Például a $(3+4) \cdot 2$ kifejezést a prefix jelölést használó Lisp nyelvcsalád nyelveiben a

`(* (+ 3 4) 2)`

kód, míg például a postfix jelölést használó PostScript nyelvben a

`3 4 add 2 mul`

kód számítja ki. (A PostScript nyelvvel találkozhatunk a PDF formátumú fájlokban is.) Ugyanez a formula a komputer algebra nyelvek közül a Mapleben prefix módon

`'*('+(3,4),2)`

a Mathematicában

`Times[Plus[3,4],2]`

alakot ölt.

Az inverz Korábbi tanulmányainkban megtanultuk, hogy az összeadás és a szorzás invertálható műveletek, inverzeik a kivonás, illetve az osztás. De mit is jelent ez pontosan, és vajon a mátrixműveletek invertálhatóak-e?

Egy H halmazon értelmezett kétváltozós (más szóval bináris) *művelet* egy $H^2 \rightarrow H$ függvényt értünk, azaz a művelet H -beli elempárokhoz H -beli elemet rendel. Például a valós számok összeadása esetén a függvény valós számpárhoz valós számot rendel, mondjuk a $(3.7, 6.9)$ számpárhoz a 10.6 -ot. Írhatjuk tehát, hogy a '+' jellel egy olyan függvényt jelölünk, melyre

$$+ : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (a, b) \mapsto a + b.$$

A függvényeknél szokásos prefix „ $+(a, b)$ ” jelölés helyett műveleteknél az ún. infix jelölést használjuk, azaz $a + b$ -t írunk (lásd erről még a széljegyzetet).

3.50. DEFINÍCIÓ: INVERTÁLHATÓ MŰVELET. Legyen $\odot$ egy H -n értelmezett kétváltozós művelet. Azt mondjuk, hogy e művelet invertálható a H egy R részhalmazán, ha bármely $a, b, c \in R$ elem esetén az

$$a \odot x = b, \quad y \odot a = c$$

egyenletek mindegyike megoldható, azaz vannak olyan $x, y \in H$ elemek, melyek kielégítik a fenti egyenleteket.

Ha a definícióbeli $\odot$ kommutatív művelet, akkor elég a fenti két egyenlet egyikét tekinteni. Mivel azonban a mátrixszorzás nem kommutatív, mi az általánosabb esetet vizsgáljuk.

Az összeadás invertálható a valós számok halmazán, azaz itt $H = R = \mathbb{R}$, mert minden $a + x = b$ és $y + a = c$ egyenlet megoldható a valósok közt. Ugyanakkor például a valósok szorzása csak a nemnulla számokon invertálható, azaz itt $H = \mathbb{R}$, $R = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, mert az $a \cdot x = b$ és az $y \cdot a = c$ egyenletek $a = 0$ esetén nem oldhatók meg. Látható, hogy ha $H = \mathbb{R}^{m \times n}$ az azonos típusú mátrixok halmaza, akkor az összeadás invertálható ezen a halmazon, és az

$$\mathbf{A} + \mathbf{X} = \mathbf{B}, \quad \mathbf{Y} + \mathbf{A} = \mathbf{C}$$

egyenletek megoldásai $\mathbf{X} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$, illetve $\mathbf{Y} = \mathbf{C} - \mathbf{A}$.

Elemi ismeret, hogy az $a + x = b$ egyenlet megoldásához elég ismerni a *ellentettjét*, és azt adni b -hez, az $ax = b$ egyenlet megoldásához elég ismerni a *reciprokát*, és azzal szorozni b -t. Ez vezet a következő definícióhoz:

3.51. DEFINÍCIÓ: ELEM INVERZE. Legyen $\odot$ egy H -n értelmezett kétváltozós művelet, és tegyük fel, hogy van H -ban egy olyan e elem, hogy minden a elemre $a \odot e = e \odot a = a$. Azt mondjuk, hogy a $\odot$ műveletre nézve a inverze b , ha

$$a \odot b = b \odot a = e.$$

A valósok összeadására nézve az e elem szerepét a 0 , a szorzásra nézve az 1 játssza. Az a inverze az összeadásra nézve – ezt nevezzük *additív inverznek* – a $-a$ szám, míg az a inverze a szorzásra nézve – ezt nevezzük

multiplikatív inverznek vagy *reciproknak* – az $1/a$ vagy a^{-1} szám. Az elemek inverzei segítségével a művelet invertálása könnyen elvégezhető, például az $a+x=b$ megoldása $x=-a+b$, az $ax=b$ megoldása $x=a^{-1}b$.

Eszerint a mátrixok (multiplikatív) inverzén olyan $\mathbf{B}$ mátrixot kell érteni, mely kielégíti az $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$ egyenletet. Azt reméljük, hogy így a szorzás invertálhatóvá válik, és így például az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenlet könnyen megoldható lesz mindkét oldal $\mathbf{B}$ -vel (balról!) való beszorzásával, ugyanis $\mathbf{BAx} = \mathbf{Bb}$, amiből $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$ miatt $\mathbf{x} = \mathbf{Bb}$.

Kérdés még, hogy mátrix inverzét jelölhetjük-e a -1 -edik kitevőre emeléssel? A választ erre is a precedencia elv adja. Ha értelmezhető a negatív kitevőjű hatvány, akkor a 3.46. tétel érvényességét megtartva $\mathbf{A}^{-1}$ olyan mátrix kell hogy legyen, melyre $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}^{-1+1} = \mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$ és ugyanígy $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{1-1} = \mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$.

Végül, minthogy a mátrixok közti műveleteket is a számok közti műveletek táblázatokra való kiterjesztésén keresztül vezettük be, elvárjuk, hogy az 1×1 -es mátrixok inverze essen egybe a számok multiplikatív inverzével, azaz ha $\mathbf{A} = [a]$, akkor $\mathbf{A}^{-1} = [a^{-1}] = [1/a]$ legyen igaz.

E többfelől közelítő bevezetés után a definíció:

3.52. DEFINÍCIÓ: MÁTRIX INVERZE. Legyen $\mathbf{A}$ egy $n \times n$ -es mátrix. Azt mondjuk, hogy $\mathbf{A}$ *invertálható*, ha létezik olyan $\mathbf{B}$ mátrix, melyre

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n.$$

A $\mathbf{B}$ mátrixot $\mathbf{A}$ *inverzének* nevezzük, és $\mathbf{A}^{-1}$ -nel jelöljük. A nem invertálható mátrixot *szingulárisnak* nevezzük.

- Világos, hogy ha $\mathbf{A}$ inverze $\mathbf{B}$, akkor $\mathbf{B}$ inverze $\mathbf{A}$.
- A definícióból nem derül ki, hogy egy mátrixnak lehet-e több inverze, és hogy a mátrix milyen tulajdonsága befolyásolja invertálhatóságát. E kérdésekre hamarosan választ adunk.

3.53. PÉLDA: MÁTRIX INVERZE. Tekintsük az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{és a} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrixokat. Számoljuk ki az $\mathbf{AB}$ és a $\mathbf{BA}$ szorzatokat!

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_2, \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_2.$$

Eszerint $\mathbf{A}$ inverze $\mathbf{B}$, és ugyanakkor $\mathbf{B}$ inverze $\mathbf{A}$.

3.54. PÉLDA: SZINGULÁRIS MÁTRIX. Mutassuk meg, hogy az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrix szinguláris.

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{A}$ mátrix szinguláris, ha nem invertálható, azaz ha nincs olyan $\mathbf{X}$ mátrix, hogy $\mathbf{AX} = \mathbf{XA} = \mathbf{I}_2$. Már az is elég, ha megmutatjuk, hogy az $\mathbf{AX} = \mathbf{I}_2$ sosem állhat fenn! Vegyük észre, hogy $\mathbf{X}$ -nek négy eleme van, így $\mathbf{X}$ meghatározása egy 4-ismeretlenes egyenletrendszerre vezet. Valóban, ha $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} u & v \\ w & z \end{bmatrix}$, akkor az $\mathbf{AX} = \mathbf{I}_2$ egyenlet a következő szimultán egyenletrendszerrel ekvivalens:

$$\begin{aligned} 2u + w &= 1 & 2v + z &= 0 \\ 6u + 3w &= 0 & 6v + 3z &= 1 \end{aligned}$$

Ennek bővített mátrixát elemi sorműveletekkel lépcsős alakra hozzuk

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{array} \right]$$

Ebből látjuk, hogy az egyenletrendszerek legalább egyike nem oldható meg, tehát nincs ilyen $\mathbf{X}$ mátrix, vagyis $\mathbf{A}$ nem invertálható! ■

Egy négyzetes $\mathbf{A}$ mátrixot *nilpotensnek* nevezünk, ha van olyan k pozitív egész, hogy

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{O}.$$

Például az $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix nilpotens, mert $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3.55. PÉLDA: $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ INVERZE NILPOTENS $\mathbf{A}$ ESETÉN. Mutassuk meg, ha $\mathbf{A}$ nilpotens, azaz valamely pozitív k -ra $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$, akkor $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ invertálható, és inverze $\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots + \mathbf{A}^{k-1}$.

MEGOLDÁS. Megmutatjuk, hogy $(\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots + \mathbf{A}^{k-1}) = \mathbf{I}$.

$$\begin{aligned} & (\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots + \mathbf{A}^{k-1}) \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots + \mathbf{A}^{k-1} - \mathbf{A} - \mathbf{A}^2 - \dots - \mathbf{A}^{k-1} - \mathbf{A}^k \\ &= \mathbf{I} - \mathbf{A}^k \\ &= \mathbf{I} \end{aligned}$$

Az $(\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots + \mathbf{A}^{k-1})(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \mathbf{I}$ összefüggés ugyanígy bizonyítható. ■

Elemi mátrixok inverze Minden R elemi sorművelethez van egy olyan R' sorművelet, hogy az R sorművelettel átalakított mátrixot az R' visszaalakítja (ld. 2.2.1. feladat). Nevezzük ezt az R' sorműveletet az R sorművelet inverzének. Könnyen ellenőrizhető, hogy az $S_i \leftrightarrow S_j$ sorművelet inverze önmaga, a cS_i inverze $\frac{1}{c}S_i$, és $S_i + cS_j$ inverze $S_i - cS_j$.

3.56. ÁLLÍTÁS: SORMŰVELET INVERZÉNEK MÁTRIXA. Minden elemi mátrix invertálható, nevezetesen egy sorművelet elemi mátrixának inverze megegyezik a sorművelet inverzének elemi mátrixával.

A bizonyításhoz elég belátni, hogy egy sorművelet és az inverz sorművelet mátrixainak szorzata az egységmátrix. Az általános bizonyítás végiggondolását az Olvasóra hagyjuk, itt csak egy-egy konkrét esetet mutatunk meg, nevezetesen 3×3 -as mátrixokon az $S_2 \leftrightarrow S_3$, a $3S_2$ és az $S_1 + 4S_3$ sorműveletek és inverzeik mátrixának szorzatát:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Az inverz kiszámítása A négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix inverzének kiszámításához meg kell oldani az $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ mátrixegyenletet, ami egyúttal egy szimultán egyenletrendszer is, és az elemi sorműveletekkel megoldható.

Előbb azonban két kérdésre válaszolnunk kell: (1) nem fordulhat-e elő, hogy $\mathbf{A}$ -nak több inverze is van, és (2) nem fordulhat-e elő, hogy az $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ mátrixegyenlet megoldható, de a megoldás nem tesz eleget az $\mathbf{XA} = \mathbf{I}$ mátrixegyenletnek? Négyzetes mátrixok esetén mindkét kérdésre *nem* a válasz, ami azt jelenti, hogy mátrix invertálásához elég az $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ mátrixegyenlet megoldása!

3.57. TÉTEL: AZ INVERZ EGYÉRTELMŰSÉGE. Ha a négyzetes $\mathbf{A}$ mátrixhoz létezik olyan ugyancsak négyzetes $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ mátrix, hogy $\mathbf{AB} = \mathbf{CA} = \mathbf{I}$, akkor $\mathbf{B} = \mathbf{C}$. Ennek következménye, hogy egy mátrixnak legfőljebb csak egy inverze lehet.

BIZONYÍTÁS. $\mathbf{C} = \mathbf{CI} = \mathbf{C}(\mathbf{AB}) = (\mathbf{CA})\mathbf{B} = \mathbf{IB} = \mathbf{B}$, ami igazolja az első állítást. Ha $\mathbf{A}$ -nak $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ is inverze volna, fennállna az $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ és a $\mathbf{CA} = \mathbf{I}$ egyenlőség is, de ekkor $\mathbf{B} = \mathbf{C}$, tehát az inverz egyértelmű. ■

3.58. TÉTEL: AZ INVERZ LÉTEZÉSÉHEZ ELÉG EGY FELTÉTEL. A négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor invertálható, ha létezik olyan $\mathbf{B}$ mátrix, hogy az $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ és a $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$ feltételek egyike teljesül. Másként szólva, a fenti két feltétel bármelyikének teljesülése maga után vonja a másik teljesülését is!

BIZONYÍTÁS. Megmutatjuk, hogy ha a négyzetes $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixok kielégítik az $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ egyenletet, akkor $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$ is fennáll, azaz $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ inverzek.

Tekintsük az $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ mátrixegyenletet. Ezt úgy oldjuk meg, hogy az $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$ mátrixot redukált lépcsős alakra hozzuk. Ha ez $[\mathbf{I}|\mathbf{B}]$ alakú, akkor $\mathbf{B}$ az $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ egyenlet megoldása, ezért $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ fennáll. A redukált lépcsős alakban zérus sor nem keletkezhet, mert a mátrix jobb oldalát az $\mathbf{I}$ mátrixból kaptuk, ami redukált lépcsős alak, s így egyértelmű. Ha elemi sorműveletekkel zérus sort kapnánk a jobb oldali félmátrixban, akkor volna olyan redukált lépcsős alakja is, mely zérus sort tartalmazna, ami ellentmondás. Ha csak a mátrix bal felén kapnánk zérus sort, akkor az $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ egyenletnek nem lenne megoldása, vagyis nem állhatna fenn az $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ egyenlőség sem.

Ezután megmutatjuk, hogy $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$. Ehhez tekintsük a $\mathbf{BY} = \mathbf{I}$ mátrixegyenletet. Ennek megoldásához a $[\mathbf{B}|\mathbf{I}]$ mátrixot kell redukált lépcsős alakra hozni. A előzőekből tudjuk, hogy elemi sorműveletekkel az

$$[\mathbf{A}|\mathbf{I}] \implies [\mathbf{I}|\mathbf{B}]$$

átalakítás megvalósítható. Az átalakítás lépéseinek inverzeit fordított sorrendben elvégezve az

$$[\mathbf{I}|\mathbf{B}] \implies [\mathbf{A}|\mathbf{I}]$$

transzformációt kapjuk. Itt minden lépésben fölcserélve a két részmátrixot a kívánt

$$[\mathbf{B}|\mathbf{I}] \implies [\mathbf{I}|\mathbf{A}]$$

átalakítást kapjuk. Ez azt jelenti, hogy a $\mathbf{BY} = \mathbf{I}$ mátrixegyenletnek, az $\mathbf{Y} = \mathbf{A}$ megoldása, azaz $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$. ■

Összefoglalva:

3.59. KÖVETKEZMÉNY: INVERZ KISZÁMÍTÁSA ELEMI SORMŰVELETEKKEL. A négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix inverze kiszámítható, ha az $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$ mátrixot elemi sorműveletekkel $[\mathbf{I}|\mathbf{B}]$ alakra hozzuk, ekkor $\mathbf{A}$ inverze $\mathbf{B}$ lesz. Ha $\mathbf{A}$ redukált lépcsős alakja nem az $\mathbf{I}$ mátrix, akkor $\mathbf{A}$ nem invertálható.

3.60. PÉLDA: AZ INVERZ KISZÁMÍTÁSA. Számítsuk ki az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{és a} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixok inverzét!

MEGOLDÁS. A kiküszöböléssel oszloponként haladva:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] &\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right] &\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Tehát

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

A $\mathbf{B}$ inverzének kiszámítása hasonló lépésekkel:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] &\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \\ \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right] &\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Tehát

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.61. TÉTEL: 2×2 -ES MÁTRIX INVERZE. Az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mátrix pontosan akkor invertálható, ha $ad - bc \neq 0$, és ekkor

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

BIZONYÍTÁS. Azt, hogy az $\mathbf{A}$ mátrixnak valóban a fenti mátrix az inverze, egyszerű mátrixszorzással ellenőrizhetjük. Azt, hogy az $ad - bc \neq 0$ feltétel az invertálhatóságnak elégséges feltétele, a képlet bizonyítja. A feltétel szükségességének belátásához vegyük észre, hogy $ad - bc = 0$, azaz $ad = bc$ pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{A}$ egyik sora a másik skalárszorosa. Ekkor viszont az egyik sor kinullázható, vagyis az $\mathbf{A}$ mátrix nem alakítható elemi sorműveletekkel az egységmátrixba. ■

Az inverz tulajdonságai

3.62. TÉTEL: AZ INVERZ ALAPTULAJDONSÁGAI. Tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ egyaránt $n \times n$ -es invertálható mátrixok, $c \neq 0$ skalár és k pozitív egész. Ekkor igazak a következők:

- (a) $\mathbf{A}^{-1}$ invertálható, és inverze $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$,
- (b) $c\mathbf{A}$ invertálható, és inverze $\frac{1}{c}\mathbf{A}^{-1}$,
- (c) $\mathbf{AB}$ invertálható, és inverze $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$,
- (d) $\mathbf{A}^k$ invertálható, és inverze $(\mathbf{A}^k)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^k$, definíció szerint ezt értjük $\mathbf{A}^{-k}$ -n,
- (e) $\mathbf{A}^T$ invertálható, és $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$.

BIZONYÍTÁS. Az állítások mindegyikét bizonyítjuk:

(a) $\mathbf{A}^{-1}$ invertálható, ha van olyan $\mathbf{B}$ mátrix, hogy $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$. Ilyen mátrix viszont van, hisz $\mathbf{A}$ invertálható, és inverzére $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$. Eszerint a $\mathbf{B} = \mathbf{A}$ választás megfelel, és $\mathbf{A}^{-1}$ inverze $\mathbf{A}$.

(b) $\mathbf{A} (c\mathbf{A}) (\frac{1}{c}\mathbf{A}^{-1}) = (c \cdot \frac{1}{c})(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{I}$ szorzat bizonyítja az állítást.

(c) Az

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$

szorzat bizonyítja, hogy $\mathbf{A}\mathbf{B}$ invertálható, és inverze $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

(d) Az $(\mathbf{A}^k)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^k$ egyenlőség igaz volta a

$$\underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A} \dots \mathbf{A}}_{k \text{ tényező}} \underbrace{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \dots \mathbf{A}^{-1}}_{k \text{ tényező}} = \underbrace{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \dots \mathbf{A}^{-1}}_{k \text{ tényező}} \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A} \dots \mathbf{A}}_{k \text{ tényező}} = \mathbf{I}$$

felírásból leolvasható, mert a szorzatok közepén lévő két mátrix szorzata mindig $\mathbf{I}$, ami elhagyható, és a lépést k -szor ismételve végül a kívánt eredményt kapjuk:

$$\underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A} \dots \mathbf{A}}_{k \text{ tényező}} \underbrace{(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1})\mathbf{A}^{-1} \dots \mathbf{A}^{-1}}_{k \text{ tényező}} = \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A} \dots \mathbf{A}}_{k-1 \text{ tényező}} \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} \dots \mathbf{A}^{-1}}_{k-1 \text{ tényező}} = \dots = \mathbf{I}.$$

(e) Ha $\mathbf{A}$ invertálható, akkor $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$, és ennek transzponáltját véve az

$$(\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T (\mathbf{A}^{-1})^T = \mathbf{I}^T = \mathbf{I}$$

egyenlőségből leolvasható, hogy $\mathbf{A}^T$ invertálható, és inverze $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$. ■

► A (c) állítás indukcióval általánosítható véges sok mátrix szorzatára: ha az azonos méretű négyzetes $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_m$ mátrixok mindegyike invertálható, akkor szorzatuk is, és

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_m)^{-1} = \mathbf{A}_m^{-1} \dots \mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1^{-1}.$$

► A (c) állításbeli összefüggéshez hasonlóval találkozhatunk a Rubik-kocka forgatása közben is. Jelölje A az egyik oldal derékszöggel való elforgatását, és B egy másik oldalét. E két forgatás egymás után való elvégzésével kapott transzformációt tekintsük a két forgatás szorzatának, legyen tehát ez AB . E transzformációt invertálni akarjuk, azaz vissza akarjuk állítani az eredeti állapotot, azaz azt az $(AB)^{-1}$ transzformációt keressük, melyet AB után elvégezve az identikus (egy kockát sem mozgató) transzformációt kapjuk. Világos, előbb a B transzformáció inverzét kell végrehajtani, majd azután az A inverzét, azaz $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

► Az $\mathbf{A}^{-k}$ (d) pontbeli definíciója is a precedencia elvből következik, például az $\mathbf{A}^m\mathbf{A}^n = \mathbf{A}^{m+n}$ összefüggés kiterjesztése negatív kitevőre az $\mathbf{A}^k\mathbf{A}^{-k} = \mathbf{A}^0$ formulához vezet, amiből azt kapjuk, hogy $\mathbf{A}^{-k} = (\mathbf{A}^k)^{-1}$.

3.63. PÉLDA: INVERZ TULAJDONSÁGAINAK ALKALMAZÁSA.

A 3.60. példa mátrixainak inverzét használva számítsuk ki az alábbi mátrixok inverzét!

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 6 & 9 & 12 \\ 9 & 12 & 18 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}^2, \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

MEGOLDÁS. A feladatban megadott mátrixok kifejezhetők a 3.60. példában megadott $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixokkal. A három invertálandó mátrix: $3\mathbf{A}$, $\mathbf{B}^2$, $2\mathbf{A}^T$. Ezek inverzei az előző tétel szerint rendre $\frac{1}{3}\mathbf{A}^{-1}$, $(\mathbf{B}^{-1})^2$, $\frac{1}{2}(\mathbf{B}^{-1})^T$. Tehát a három inverz:

$$\begin{aligned} (3\mathbf{A})^{-1} &= \frac{1}{3}\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \\ (\mathbf{B}^2)^{-1} &= (\mathbf{B}^{-1})^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \end{bmatrix} \\ (2\mathbf{A}^T)^{-1} &= \frac{1}{2}(\mathbf{B}^{-1})^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Az invertálhatóság és az egyenletrendszerek megoldhatósága A következő tétel a mátrixok invertálhatóságát, az egyenletrendszerek megoldásánál használt elemi sorműveleteket és az egyenletrendszerek megoldhatóságát kapcsolja össze.

3.64. TÉTEL: AZ INVERTÁLHATÓSÁG ÉS AZ EGYENLETRENDSZEREK.

Adva van egy $n \times n$ -es $\mathbf{A}$ mátrix. Az alábbi állítások ekvivalensek:

- (a) $\mathbf{A}$ invertálható;
- (b) az $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ mátrixegyenlet bármely $n \times t$ -es $\mathbf{B}$ mátrixra egyértelműen megoldható;
- (c) az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer bármely n dimenziós $\mathbf{b}$ vektorra egyértelműen megoldható;
- (d) a homogén lineáris $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek a triviális $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ az egyetlen megoldása;
- (e) $\mathbf{A}$ redukált lépcsős alakja $\mathbf{I}$;
- (f) $\mathbf{A}$ előáll elemi mátrixok szorzataként.

BIZONYÍTÁS. Az állítások ekvivalenciáját az $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (e) \Rightarrow (f) \Rightarrow (a)$, implikációk igazolásával bizonyítjuk.

$(a) \Rightarrow (b)$: Legyen tehát $\mathbf{A}$ invertálható és legyen $\mathbf{B}$ egy tetszőleges $n \times t$ méretű mátrix. Ekkor az $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ egyenlet mindkét oldalát $\mathbf{A}^{-1}$ -gyel balról szorozva kapjuk, hogy $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, azaz $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$. Ez azt mutatja, hogy egyrészt a mátrixegyenletnek van megoldása, másrészt hogy más megoldása nincs, mivel így minden megoldás megkapható, és $\mathbf{A}$ inverze egyértelmű.

$(b) \Rightarrow (c)$: Nyilvánvaló a $\mathbf{B} = \mathbf{b}$ választással.

$(c) \Rightarrow (d)$: Nyilvánvaló a $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ választással.

$(d) \Rightarrow (e)$: Egy n -ismeretlenes, n egyenletből álló homogén lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg egyértelműen, ha együttműködő mátrixának redukált lépcsős alakja $\mathbf{I}_n$.

$(e) \Rightarrow (f)$: Ha $\mathbf{A}$ redukált lépcsős alakja $\mathbf{I}_n$, akkor létezik elemi sorműveletek olyan sorozata, mely az $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{I}_n$ transzformációt elvégzi. Jelölje az elemi sorműveletekhez tartozó elemi mátrixokat $\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_k$. Ekkor tehát $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_k\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$. Innen $\mathbf{A}$ kifejezhető az $\mathbf{E}_1^{-1}$ -nel, ..., $\mathbf{E}_k^{-1}$ -nel balról való beszorzás után:

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}_k^{-1} \dots \mathbf{E}_2^{-1} \mathbf{E}_1^{-1}.$$

Elemi mátrixok inverze elemi mátrix, tehát $\mathbf{A}$ előáll elemi mátrixok szorzataként.

(f) $\Rightarrow$ (a): Az $\mathbf{A} = \mathbf{E}_k^{-1} \dots \mathbf{E}_2^{-1} \mathbf{E}_1^{-1}$ mátrix minden tényezője invertálható, mivel mindegyik elemi mátrix, így szorzatuk is, és az inverz

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_k.$$

► A tétel sok pontjának ekvivalenciája azt jelenti, hogy közülük bármely kettőre igaz, hogy „az egyik pontosan akkor igaz, ha a másik”. Például „ $\mathbf{A}$ pontosan akkor invertálható, ha az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer minden $\mathbf{b}$ vektorra egyértelműen megoldható”.

► Később megmutatjuk azt is, hogy $\mathbf{A}$ pontosan akkor invertálható, ha az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer minden $\mathbf{b}$ vektorra megoldható. Azaz az egyértelműség a feltételből kihagyható. Másként fogalmazva, ha $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ minden $\mathbf{b}$ vektorra megoldható, akkor a megoldás minden $\mathbf{b}$ -re egyértelmű.

3.65. PÉLDA: EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSA MÁTRIXINVERTÁLÁSSAL. Oldjuk meg az

$$2x + y = 2$$

$$5x + 3y = 3$$

egyenletrendszert mátrixinvertálással.

MEGOLDÁS. Az együtthatómátrix és inverze a 3.61. tétel szerint

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix},$$

így az ismeretlenek (x, y) vektorára

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

3.66. PÉLDA: MÁTRIXEGYENLET MEGOLDÁSA MÁTRIXINVERTÁLÁSSAL. Oldjuk meg az $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ mátrixegyenletet, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{és} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{A}$ mátrix megegyezik az előző feladatbeli mátrixszal, így tudjuk, hogy invertálható, és ismerjük az inverzét. Az $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ mátrixegyenlet megoldása:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 5 \\ 3 & -9 & -8 \end{bmatrix}.$$

► Megjegyezzük, hogy lineáris egyenletrendszert mátrixinvertálással ritkán oldunk meg, mert műveletigénye valamivel nagyobb, mint az egyszerű kiküszöbölésnek.

3.67. PÉLDA: MÁTRIX ELEMI MÁTRIXOK SZORZATÁRA BONTÁSA. Bontsuk fel az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ mátrixot elemi mátrixok szorzatára!

MEGOLDÁS. A 3.64. tétel bizonyításának (e) $\Rightarrow$ (f) lépése szerint ha egy $\mathbf{A}$ mátrixot elemi sorműveletekkel az egységmátrixba lehet transzformálni, akkor az elemi sorműveletek inverzei fordított sorrendben elvégezve az $\mathbf{I}$ -t $\mathbf{A}$ -ba transzformálják. Ez viszont azt jelenti, hogy a hozzájuk tartozó

elemi mátrixok szorzata épp $\mathbf{A}$.

Elemi sorműveletek	Elemi mátrixok	Elemi mátrixok inverzei	
$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ $\Downarrow$	$S_2 - 3S_1$	$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$	$\mathbf{E}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\Downarrow$	$-S_2$	$\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\mathbf{E}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Downarrow$	$S_1 - 2S_2$	$\mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\mathbf{E}_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$			

A fenti átalakítás nyomán tehát $\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A} = \mathbf{I}$, amiből $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1^{-1}\mathbf{E}_2^{-1}\mathbf{E}_3^{-1}$, azaz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

így $\mathbf{A}$ -t három elemi mátrix szorzatára bontottuk. ■

Invertálhatóság, bázis, báziscsere A 3.64. tétel szerint a négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix invertálhatósága azzal ekvivalens, hogy a homogén lineáris $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek a triviális az egyetlen megoldása. Mivel $\mathbf{A}\mathbf{x}$ az $\mathbf{A}$ oszlopvektorainak egy lineáris kombinációja, ezért ez azt jelenti, hogy a nullvektor csak egyféleképp áll elő $\mathbf{A}$ oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként, a triviális módon. Tehát $\mathbf{A}$ oszlopvektorai lineárisan függetlenek! Ez egyúttal azt is jelenti, hogy $\mathbf{A}$ oszlopvektorai bázist alkotnak, és hogy $r\mathbf{A} = n$. Felhasználva a 2.77. tételt, mely szerint a sortér és az oszloptér dimenziója megegyezik a ranggal, a következő tételt kapjuk:

3.68. KÖVETKEZMÉNY: INVERTÁLHATÓSÁG ÉS BÁZIS. Adva van egy valós $n \times n$ -es $\mathbf{A}$ mátrix. Az alábbi állítások ekvivalensek:

- (a) $\mathbf{A}$ invertálható;
- (b) $\mathbf{A}$ oszlopvektorai lineárisan függetlenek;
- (c) $\mathbf{A}$ oszlopvektorai bázist alkotnak $\mathbb{R}^n$ -ben;
- (d) $\mathbf{A}$ sorvektorai lineárisan függetlenek;
- (e) $\mathbf{A}$ sorvektorai bázist alkotnak $\mathbb{R}^n$ -ben;
- (f) $r\mathbf{A} = n$.

Legyen $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ és $C = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n\}$ az $\mathbf{R}^n$ két bázisa, és jelölje $\mathbf{X}_{C \leftarrow B}$ a B -ről C -re, $\mathbf{Y}_{B \leftarrow C}$ a C -ről B -re való áttérés mátrixát. Legyen továbbá $\mathbf{v}$ a tér egy tetszőleges vektora, a B bázisbeli alakja $[\mathbf{v}]_B$. A 3.31. tétel szerint

$$[\mathbf{v}]_C = \mathbf{X}_{C \leftarrow B}[\mathbf{v}]_B, \quad \text{és} \quad [\mathbf{v}]_B = \mathbf{Y}_{B \leftarrow C}[\mathbf{v}]_C.$$

A második egyenletbe helyettesítve az elsőt kapjuk, hogy

$$[\mathbf{v}]_B = \mathbf{Y}_{B \leftarrow C}\mathbf{X}_{C \leftarrow B}[\mathbf{v}]_B,$$

azaz $\mathbf{Y}_{B \leftarrow C}\mathbf{X}_{C \leftarrow B}$ minden vektort önmagába visz, tehát egyenlő az egységmátrixszal, vagyis $\mathbf{Y}_{B \leftarrow C}$ és $\mathbf{X}_{C \leftarrow B}$ inverzei egymásnak.

3.69. TÉTEL: AZ ÁTTÉRÉS MÁTRIXÁNAK INVERZE. Ha $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ és $C = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n\}$ az $\mathbf{R}^n$ két bázisa, akkor a B -ről C -re való áttérés $\mathbf{X}_{C \leftarrow B}$ mátrixa, valamint a C -ről B -re való áttérés $\mathbf{Y}_{B \leftarrow C}$ mátrixa is invertálható, és egymás inverzei, azaz $\mathbf{X}_{C \leftarrow B}^{-1} = \mathbf{Y}_{B \leftarrow C}$ vagy más alakban $\mathbf{X}_{C \leftarrow B}\mathbf{Y}_{B \leftarrow C} = \mathbf{I}_n$.

3.70. PÉLDA: AZ ÁTTÉRÉS MÁTRIXÁNAK INVERZE. Az $\mathbb{R}^3$ egy $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ bázisában felírtuk a standard egységvektorokat:

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_B, \quad \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}_B, \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}_B.$$

Írjuk fel B bázisvektorainak standard bázisbeli koordinátás alakját!

MEGOLDÁS. Jelölje E a standard bázist. Ennek vektorait kifejeztük a B bázis elemeivel, az ezekből képzett mátrix tehát az $E \leftarrow B$ áttérés mátrixa, azaz

$$\mathbf{X}_{E \leftarrow B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ennek inverze a keresett mátrix:

$$\mathbf{Y}_{B \leftarrow E} = \mathbf{X}_{E \leftarrow B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Igaz – hamis

- 1• A négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor invertálható, ha elemi sorműveletekkel megkapható az $\mathbf{I}$ mátrixból.
- 2• Ha elemi sorműveletek $\mathbf{A}$ -t $\mathbf{B}$ -be viszik, akkor az inverz sorműveletek $\mathbf{B}$ -t $\mathbf{A}$ -ba viszik.
- 3• Ha elemi sorműveletek $\mathbf{A}$ -t $\mathbf{B}$ -be viszik, akkor az inverz sorműveletek fordított sorrendben végrehajtva $\mathbf{B}$ -t $\mathbf{A}$ -ba viszik.

Műveleti azonosságok

- 4• Egy algebrai kifejezésben végrehajtjuk az alábbi helyettesítést:

$$u = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

$$v = x_1 - 3x_2 + x_3$$

$$w = 2x_1 - x_2 - 3x_3$$

Írjuk fel e lineáris helyettesítést mátrixszorzatos alakban. Legyen $(u^2 + v^2 + w^2)(2u - v - w)$ az a kifejezés, melyben a helyettesítést elvégezzük. Írjuk fel e kifejezést a helyettesítés előtt és után mátrixműveletek segítségével!

Helyettesítés előtt:

$$\mathbf{u}^T \mathbf{u} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{u}.$$

Az $\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ helyettesítés elvégzése után

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{A} \mathbf{x},$$

ahol

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Számítási feladatok Bontsuk fel a következő mátrixokat elemi mátrixok szorzatára!

5 $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8 $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

9 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

10 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 11 Határozzuk meg az összes olyan 2×2 -es $\mathbf{A}$ mátrixot, melyre $\mathbf{A}^2 = \mathbf{O}$. Másiként fogalmazva határozzuk meg a nullmátrix összes négyzetgyökét!

Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Négyzete a zérusmátrix, azaz

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Innen vagy $a = d = 0$ és c vagy d legalább egyike 0, vagy $a \neq 0$, $c \neq 0$ és $b = -a^2/c$, $d = -a$.

12• Számítsuk ki az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix k -adik hatványait!

A feladat érdekes, mert abban a Fibonacci sorozat elemei bukkannak föl. Ez az $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$ egyenlőségekkel definiált sorozat, melynek első néhány tagja: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... Tekintsük $\mathbf{B}$ néhány hatványát:

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ f_2 & f_3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2 & f_3 \\ f_3 & f_4 \end{bmatrix}.$$

Ennek alapján azt sejtjük, hogy

$$\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{bmatrix}.$$

Az állítás $n = 1, 2, 3$ esetén igaz, és n -ről öröklődik $n+1$ -re, ugyanis

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{n+1} &= \mathbf{A}^n \mathbf{A} = \begin{bmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f_n & f_{n+1} \\ f_{n-1} + f_n & f_n + f_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_n & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_{n+2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

13• Írjuk fel a mátrixszorzás definícióját az Einstein-konvenciót használva.

$\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ Einstein-konvencióval: $c_{ij} = a_{ik}b_{kj}$.

Blokkmátrixok

14• Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{D}$ invertálható mátrixok, akkor a következő ún. blokkdiagonális mátrix invertálható, és inverze

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix}.$$

továbbá tetszőleges, de megfelelő típusú $\mathbf{B}$ mátrix esetén

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix}.$$

15• Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{D}$ négyzetes mátrixok, akkor

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & -\mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{X} & \mathbf{D}^{-1} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix},$$

ahol $\mathbf{X} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1}$, és feltételezzük, hogy minden felírt mátrixinverz létezik.

Az előbbi két feladat valamelyikének felhasználásával számítsuk ki az alábbi mátrixok inverzét!

$$\mathbf{16} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -16 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 28 & -16 & -17 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{17} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 & -4 & -4 \\ -1 & 2 & -7 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -16 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 28 & -16 & -17 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{18} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bizonyítások

19• Bizonyítsuk be, hogy ha $c\mathbf{A} = \mathbf{O}$, akkor vagy $c = 0$, vagy $\mathbf{A} = \mathbf{O}$.

20• Az $S_i \leftrightarrow S_j$ sorművelethez tartozó elemi mátrixot jelölje $\mathbf{E}_{ij}$, a cS_i -hez tartozót $\mathbf{E}_i(c)$ és a $S_i + cS_j$ sorművelethez tartozót $\mathbf{E}_{ij}(c)$. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{E}_{ij}^{-1} = \mathbf{E}_{ij}$, $\mathbf{E}_i(c)^{-1} = \mathbf{E}_i(\frac{1}{c})$ és $\mathbf{E}_{ij}(c)^{-1} = \mathbf{E}_{ij}(-c)$.

21• Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ fölcserélhető $\mathbf{B}$ -vel és $\mathbf{B}$ invertálható, akkor $\mathbf{A}$ fölcserélhető $\mathbf{B}^{-1}$ -gyel is.

A fölcserélhetőségre vonatkozó $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ egyenletet szorozzuk meg mindkét oldalról $\mathbf{B}^{-1}$ -gyel:

$$\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{AB})\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{BA})\mathbf{B}^{-1}.$$

Az asszociativitást használva

$$(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A})(\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1}) = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B})(\mathbf{AB}^{-1}),$$

amiből a $\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{I}$ azonosság fölhasználásával kapjuk, hogy

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{AB}^{-1}.$$

3.6. Műveletek speciális mátrixokkal

A gyakorlatban gyakran találkozunk olyan speciális mátrixokkal, melyekkel a műveletek egyszerűbben végezhetők el, és olyanokkal, melyek mátrixműveletek segítségével definiálhatók.

Diagonális mátrixok A mátrixműveletek definíciói alapján magától értetődő, hogy diagonális mátrixokkal hogyan végezhetők el a mátrixműveletek. Elsősor egyszerű példákat mutatunk.

3.71. PÉLDA: MŰVELETEK DIAGONÁLIS MÁTRIXOKKAL. Legyen $\mathbf{A} = \text{diag}(1, 2, 3)$, $\mathbf{B} = \text{diag}(5, 4, 3)$. Ellenőrizzük az alábbi számításokat, és fogalmazzunk meg általános összefüggéseket diagonális mátrixokkal végzett műveletekről.

$$\begin{aligned}\mathbf{AB} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}^k &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{bmatrix}, \text{ ahol } k \text{ egész szám.}\end{aligned}$$

3.72. TÉTEL: MŰVELETEK DIAGONÁLIS MÁTRIXOKKAL. Legyen $\mathbf{A} = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\mathbf{B} = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n)$, és legyen k egész szám. Ekkor

- (a) $\mathbf{AB} = \text{diag}(a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n)$,
- (b) $\mathbf{A}^k = \text{diag}(a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k)$, speciálisan
- (c) $\mathbf{A}^{-1} = \text{diag}(a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_n^{-1})$.

Permutációs mátrixok és kígyók Könnyen kezelhetők a diagonális mátrixok sorainak permutációjával kapott mátrixok.

3.73. PÉLDA: SOROK PERMUTÁCIÓJA MÁTRIXSZORZÁSSAL. Alkalmazzunk több sorcserét az egységmátrixon. Az így kapott mátrixszal balról való szorzás milyen hatással van a beszorzott mátrixra? Szemléltessük ezt $\mathbf{I}_4$ -en az $S_1 \leftrightarrow S_2$, $S_2 \leftrightarrow S_4$ sorcserékkal.

MEGOLDÁS. Legyen $\mathbf{P}$ az $\mathbf{I}_4$ -ből a fent megadott két sorcserével kapott mátrix, és legyen $\mathbf{A}$ egy tetszőleges $4 \times n$ -es mátrix. Ekkor

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_4 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_2 \leftrightarrow S_4} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{P} \\ \mathbf{PA} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{41} & a_{42} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Azt tapasztaljuk, hogy a $\mathbf{PA}$ az $\mathbf{A}$ -ból a soroknak épp azzal a permutációjával kapható, amely permutációval $\mathbf{I}$ -ből a $\mathbf{P}$ -t kaptuk. ■

3.74. DEFINÍCIÓ: PERMUTÁCIÓS MÁTRIX, KÍGYÓ. A diagonális mátrixok sorainak permutációjával kapott mátrixot *kígyónak* nevezzük, speciálisan az egységmátrixból ugyanígy kapott mátrixot *permutációs mátrixnak* hívjuk.

► Könnyen látható, hogy a permutációs mátrix olyan négyzetes mátrix, melynek minden sorában és minden oszlopában *pontosan* egy 1-es van, az összes többi elem 0. A kígyó olyan négyzetes mátrix, melynek minden sorában és minden oszlopában *legfőljebb* egy nemnulla elem van.

► Minden kígyó megkapható egy diagonális mátrixból oszlop-cserékkel is. Egy diagonális mátrixból akkor is kígyót kapunk, ha a sorok permutációjára mellett az oszlopokat is permutáljuk.

3.75. PÉLDA: KÍGYÓK. Az alábbi mátrixok mindegyike kígyó, az utolsó kettő egyúttal permutációs mátrix is:

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.76. TÉTEL: MŰVELETEK PERMUTÁCIÓS MÁTRIXOKKAL. Bármely két azonos méretű permutációs mátrix szorzata és egy permutációs mátrix bármely egész kitevős hatványa permutációs mátrix. Permutációs mátrix inverze megegyezik a transzponáltjával, azaz ha $\mathbf{P}$ permutációs mátrix, akkor

$$\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T.$$

BIZONYÍTÁS. Legyen $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ két permutációs mátrix. Szorzatuk sorvektorai $\mathbf{a}_{i*}\mathbf{B}$ alakúak, ahol $\mathbf{a}_{i*}$ megegyezik valamelyik standard egységvektorral, pl. $\mathbf{a}_{i*} = \mathbf{e}_k$. Ekkor a szorzatvektornak csak az az eleme 1, amelyik oszlop $\mathbf{e}_k$ -vel megegyezik, és ilyen oszlop pontosan egy van. Tehát a szorzatmátrix minden sorában pontosan egy elem 1, a többi 0. Oszlopokra az állítás hasonlóan bizonyítható. A szorzatra vonatkozó állítás természetes következménye a pozitív egész kitevős hatványokra vonatkozó állítás. A negatív egész kitevőkre is igaz az állítás. Ennek igazolásához elég az inverzre belátni.

Tekintsük a $\mathbf{P}\mathbf{P}^T$ szorzatot. A $(\mathbf{P}\mathbf{P}^T)_{ii}$ elem a $\mathbf{P}_{i*}$ vektornak és a $(\mathbf{P}^T)_{*i} = \mathbf{P}_{i*}$ vektornak a szorzata, vagyis 1, míg

$$(\mathbf{P}\mathbf{P}^T)_{ij} = (\mathbf{P})_{i*}(\mathbf{P}^T)_{*j} = (\mathbf{P})_{i*} \cdot (\mathbf{P})_{j*},$$

azaz a szorzat i -edik sorának j -edik eleme a $\mathbf{P}$ i -edik és j -edik sorvektorának skalárszorzata, ami 0, mivel két különböző sorban az 1-es különböző helyen van. ■

3.77. PÉLDA: PERMUTÁCIÓS MÁTRIX INVERZE. Az alábbi példa szemlélteti a tételben kimondott egyszerű állítást:

$$\mathbf{P}\mathbf{P}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Háromszögmátrixok A Gauss-kiküszöbölés végrehajtásakor az együtthatómátrixot lépcsős alakra transzformáltuk, melyben a főátló alatt mindig csak nullák szerepelnek. Az ilyen mátrixok nem csak a Gauss-kiküszöbölésnél fontosak.

3.78. DEFINÍCIÓ: HÁROMSZÖGMÁTRIX. Azokat a mátrixokat, melyek főátlója alatt csak 0-elemek szerepelnek *felső háromszögmátrixnak*, azokat, melyek főátlója fölött csak 0-elemek vannak *alsó háromszögmátrixnak* nevezzük. Ha egy háromszögmátrix főátlójában csupa 1-es áll, *egység háromszögmátrixról* beszélünk.

A Gauss-kiküszöbölésnél kapott felső háromszögmátrixhoz hasonlóan azok az egyenletrendszerek is megoldhatók csak behelyettesítésekkel, amelyek együtthatómátrixa alsó háromszögmátrix. A különbség kizárólag annyi, hogy ekkor az első egyenlettel kezdjük, és az első változóval. Például az

$$\begin{aligned}x &= 3 \\2x + 3y &= 3 \\2x + y + 2z &= 3\end{aligned}$$

egyenletrendszer első egyenletéből $x = 3$, a másodikba való behelyettesítés után $y = -1$, végül a harmadikba való behelyettesítés után $z = -1$.

3.79. TÉTEL: MŰVELETEK HÁROMSZÖGMÁTRIXOKKAL. Alsó háromszögmátrixok összege, szorzata, és invertálható alsó háromszögmátrix inverze alsó háromszögmátrix. Egy alsó háromszögmátrix pontosan akkor invertálható, ha főátlóbeli elemeinek egyike sem zérus. Analóg tétel igaz a felső háromszögmátrixokra is.

A bizonyítást feladatként az Olvasóra hagyjuk.

Szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrixok Az alkalmazásokban gyakran találkozunk olyan mátrixokkal, melyekben az elemek egyenlők vagy ellentettjei a főátlóra nézve szimmetrikusan elhelyezkedő párjuknak. E tulajdonság a transzponálttal könnyen kifejezhető.

3.80. DEFINÍCIÓ: SZIMMETRIKUS ÉS FERDÉN SZIMMETRIKUS MÁTRIXOK. A négyzetes $\mathbf{A}$ mátrixot *szimmetrikus mátrixnak* nevezzük, ha $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$. A négyzetes $\mathbf{A}$ mátrixot *ferdén szimmetrikus mátrixnak* vagy *ferdeszimmetrikusnak* nevezzük, ha $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$.

3.81. PÉLDA: SZIMMETRIKUS ÉS FERDÉN SZIMMETRIKUS MÁTRIXOK. Az alábbi mátrixok közül az $\mathbf{A}$ szimmetrikus, a $\mathbf{B}$ ferdén szimmetrikus, a $\mathbf{C}$ egyik osztályba sem tartozik.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 9 \\ -9 & 2 & 9 \\ -9 & -9 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ha $\mathbf{A}$ ferdén szimmetrikus, akkor minden elemére $a_{ij} = -a_{ji}$, azaz $i = j$ esetén $a_{ii} = -a_{ii}$. Ez csak $a_{ii} = 0$ esetén áll fenn, azaz a ferdén szimmetrikus mátrixok főátlójában csupa 0 áll.

3.82. ÁLLÍTÁS: MŰVELETEK (FERDÉN) SZIMMETRIKUS MÁTRIXOKKAL. Szimmetrikus mátrixok összege, skalárszorosa, szorzata, inverze szimmetrikus. Hasonlóan ferdén szimmetrikus mátrixok összege, skalárszorosa, szorzata, inverze ferdén szimmetrikus.

Az állítás bizonyítását feladatként az olvasóra hagyjuk.

3.83. TÉTEL: FELBONTÁS SZIMMETRIKUS ÉS FERDÉN SZIMMETRIKUS MÁTRIX ÖSSZEGÉRE. Minden négyzetes mátrix előáll egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus mátrix összegeként, nevezetesen minden $\mathbf{A}$ négyzetes mátrixra

$$\mathbf{A} = \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)}_{\text{szimmetrikus}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)}_{\text{ferdén szimm.}}$$

Az angol nyelvű lineáris algebra tankönyvek különbséget tesznek a felső és az alsó háromszögmátrixú egyenletrendszerek megoldása között. *Forward substitution*, illetve *backward substitution* a neve a behelyettesítésnek ha alsó, illetve ha felső háromszögmátrix az együttható mátrix. Ez arra utal, hogy a változókat előre vagy hátra haladva számoljuk ki. Mi nem fogjuk használni e finom különbségtételt.

BIZONYÍTÁS. Ha egy mátrix szimmetrikus, konstansszoros is, így elég megmutatni, hogy az $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ mátrix szimmetrikus:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}^T + (\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{A} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^T$$

Hasonlóképp $\mathbf{A} - \mathbf{A}^T$ ferdén szimmetrikus, hiszen

$$(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}^T - (\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}^T - \mathbf{A} = -(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)$$

Végül a két mátrix összege valóban $\mathbf{A}$:

$$\frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T) = \frac{1}{2}\mathbf{A} + \frac{1}{2}\mathbf{A}^T + \frac{1}{2}\mathbf{A} - \frac{1}{2}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}.$$

Fontos következményei lesznek az alábbi egyszerű állításnak.

3.84. TÉTEL: $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ ÉS $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$ SZIMMETRIKUS. Az $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ és az $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$ mátrixok tetszőleges $\mathbf{A}$ mátrix esetén szimmetrikusak.

BIZONYÍTÁS. $(\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^T = (\mathbf{A}^T)^T \mathbf{A}^T = \mathbf{A} \mathbf{A}^T$. Az állítás másik fele ugyanígy bizonyítható. ■

Mátrix és diád összegének inverze* Összegmátrix inverzére – a való-sok összegének inverzéhez hasonlóan – nincs egyszerű képlet, de speciális mátrixokra nagyon hasznos eredmények vannak. Ilyen a következő tétel is.

3.85. TÉTEL: SHERMAN – MORRISON-FORMULA. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix invertálható, és $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ két olyan vektor, hogy $1 + \mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} \neq 0$. Ekkor $\mathbf{A} + \mathbf{u} \mathbf{v}^T$ invertálható, és

$$(\mathbf{A} + \mathbf{u} \mathbf{v}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} \mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}}.$$

BIZONYÍTÁS. Elég megmutatni, hogy

$$\left(\mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} \mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}} \right) (\mathbf{A} + \mathbf{u} \mathbf{v}^T) = \mathbf{I},$$

mert ez a formula igazolása mellett azt is bizonyítja, hogy $\mathbf{A} + \mathbf{u} \mathbf{v}^T$ invertálható.

$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} \mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}} \right) (\mathbf{A} + \mathbf{u} \mathbf{v}^T) \\ &= \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} \mathbf{v}^T - \frac{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} \mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}}{1 + \mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}} - \frac{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} \mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} \mathbf{v}^T}{1 + \mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}} \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} \mathbf{v}^T - \frac{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} \mathbf{1} \mathbf{v}^T}{1 + \mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}} - \frac{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} (\mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}) \mathbf{v}^T}{1 + \mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}} \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} \mathbf{v}^T - \frac{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} (1 + \mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}) \mathbf{v}^T}{1 + \mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}} \\ &\stackrel{*}{=} \mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} \mathbf{v}^T - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} \mathbf{v}^T \\ &= \mathbf{I}. \end{aligned}$$

A $*$ -gal jelzett egyenlőségnél azt használtuk ki, hogy 1×1 -es mátrixszal való szorzás egybeesik a skalárral való szorzással, a skalár tényező pedig egy mátrixszorzatban áttehető más helyre, így az adott törtkifejezésben egyszerűsíthettünk vele. ■

A Sherman–Morrison-formula sokhelyütt használható, mi itt egyet emelünk ki: megvizsgáljuk, hogy hogyan változik egy mátrix inverze, ha a mátrixnak csak egyetlen elemén változtatunk.

3.86. PÉLDA: INVERZ VÁLTOZÁSA. Legyen $\mathbf{A}$ invertálható mátrix, és változtassunk meg az a_{ij} elemet $a_{ij} + \varepsilon$ -ra. Fejezzük ki az így kapott mátrix inverzét $\mathbf{A}^{-1}$ segítségével.

MEGOLDÁS. Első lépésként kifejezzük az új mátrixot $\mathbf{A}$ -ból mátrixműveletekkel. Legyen $\mathbf{e}_i$ és $\mathbf{e}_j$ az i -edik és j -edik standard egységvektor. Ekkor a módosított mátrix

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} + \varepsilon \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T.$$

Erre alkalmazható a Sherman–Morrison-formula az $\mathbf{u} = \mathbf{e}_i$ és $\mathbf{v} = \varepsilon \mathbf{e}_j$ választással.

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{-1} &= (\mathbf{A} + \varepsilon \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T)^{-1} \\ &= \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{e}_i (\varepsilon \mathbf{e}_j)^T \mathbf{A}^{-1}}{1 + \varepsilon \mathbf{e}_j^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{e}_i} \\ &= \mathbf{A}^{-1} - \varepsilon \frac{(\mathbf{A}^{-1})_{*i} (\mathbf{A}^{-1})_{j*}}{1 + \varepsilon (\mathbf{A}^{-1})_{ji}} \end{aligned}$$

3.87. PÉLDA: INVERZ VÁLTOZÁSA SZÁMPÉLDÁN. Adva van egy $\mathbf{A}$ mátrix és annak inverze:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2/5 & 3/5 & 0 \\ -2/5 & 7/5 & -8/5 & 3/5 \\ 3/5 & -8/5 & 7/5 & -2/5 \\ 0 & 3/5 & -2/5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Változtassuk meg a_{11} értékét 1-ről 11/10-re. Az így kapott mátrixot jelölje $\mathbf{B}$. Határozzuk meg inverzét!

MEGOLDÁS. Az előző példa alkalmazásával

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{-1} &= \mathbf{A}^{-1} - \frac{1}{10} \frac{(\mathbf{A}^{-1})_{*1} (\mathbf{A}^{-1})_{1*}}{1 + \frac{1}{10} (\mathbf{A}^{-1})_{11}} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -2/5 & 3/5 & 0 \\ -2/5 & 7/5 & -8/5 & 3/5 \\ 3/5 & -8/5 & 7/5 & -2/5 \\ 0 & 3/5 & -2/5 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{10} \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ -2/5 \\ 3/5 \\ 0 \end{bmatrix} [0 \quad -2/5 \quad 3/5 \quad 0]}{1 + \frac{1}{10} \cdot 0} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -2/5 & 3/5 & 0 \\ -2/5 & 7/5 & -8/5 & 3/5 \\ 3/5 & -8/5 & 7/5 & -2/5 \\ 0 & 3/5 & -2/5 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4/25 & -6/25 & 0 \\ 0 & -6/25 & 9/25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -2/5 & 3/5 & 0 \\ -2/5 & 173/125 & -197/125 & 3/5 \\ 3/5 & -197/125 & 341/250 & -2/5 \\ 0 & 3/5 & -2/5 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Tizedestörttekkel számolva:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0 & -0.4 & 0.6 & 0.0 \\ -0.4 & 1.4 & -1.6 & 0.6 \\ 0.6 & -1.6 & 1.4 & -0.4 \\ 0.0 & 0.6 & -0.4 & 0.0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.000 & -0.400 & 0.600 & 0.000 \\ -0.400 & 1.384 & -1.576 & 0.600 \\ 0.600 & -1.576 & 1.364 & -0.400 \\ 0.000 & 0.600 & -0.400 & 0.000 \end{bmatrix}.$$

Gyorsszorzás* Két 2×2 -es mátrix szokásos módon való összeszorzásához 8 szorzásra és 4 összeadásra van szükség. Strassen 1969-ben egy olyan módszert talált, mellyel e mátrixszorzást 7 szorzással is el lehet végezni, igaz azon az áron, hogy az összeadások száma 16-ra nő.

STRASSEN-FORMULÁK. Legyen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ is 2×2 -es. A $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ szorzás elvégezhető a következő formulákkal:

$$\begin{aligned} d_1 &= (a_{11} + a_{22})(b_{11} + b_{22}) & c_{11} &= d_1 + d_4 - d_5 + d_7 \\ d_2 &= (a_{21} + a_{22})b_{11} & c_{21} &= d_2 + d_4 \\ d_3 &= a_{11}(b_{12} - b_{22}) & c_{12} &= d_3 + d_5 \\ d_4 &= a_{22}(-b_{11} + b_{21}) & c_{22} &= d_1 + d_3 - d_2 + d_6 \\ d_5 &= (a_{11} + a_{12})b_{22} \\ d_6 &= (-a_{11} + a_{21})(b_{11} + b_{12}) \\ d_7 &= (a_{12} - a_{22})(b_{21} + b_{22}) \end{aligned}$$

Ha olyan számítógépet használunk, melyen a számok szorzása sokkal több időt igényel, mint az összeadása, akkor már ez is gyorsíthatja a műveletet. A módszer azonban kiterjeszthető tetszőleges méretű négyzetes mátrixokra is, és elegendően nagy n -ekre a műveletek összszáma is csökken. A standard mátrixszorzás műveletigénye $2n^3 - n^2$ (ebből n^3 szorzás és $n^3 - n^2$ összeadás – gondoljunk utána!), a Strassen-formulákkal való szorzásé pedig $n = 2^k$ esetén legföljebb $7 \cdot 7^k - 6 \cdot 4^k$. Ez $n = 2^{10}$ esetén már kevesebb műveletet ad. Az általánosítás lényege, hogy a Strassen-formulák 2×2 -es blokkmátrixokra is használhatók, mert a szorzás kommutativitását nem használják, így ha $M(n)$ jelöli két $n \times n$ -es mátrix összeszorzásához szükséges szorzások, és $S(n)$ a szükséges összeadások számát, akkor $M(2n) \leq 7M(n)$ és $S(2n) \leq 18n^2 + 7S(n)$. Az $M(1) = 1$, $S(1) = 0$ kezdeti feltételeket is használva megmutatható, hogy $M(2^k) \leq 7^k$, $S(2^k) \leq 6(7^k - 4^k)$. E képletekből a felső egészrész jelét használva és a $k = \lceil \log_2 n \rceil$ jelöléssel az műveletek összszáma $a \cdot cn^{\log_2 7} \leq cn^{2.81}$ felső becslést kapjuk, ami a $2n^3 - n^2$ értéknél jobb, függetlenül a c konstans konkrét értékétől. Mivel a két összeszorzandó mátrix mindegyikének mind az n^2 elemét használni kell, ezért a szükséges műveletek számának alsó becslése cn^2 . A $cn^{2.81}$ felső becslés mára $cn^{2.376}$ -ra lett javítva (Coppersmith és Winograd, 1990), de az a sejtés, hogy a kitevő 2-re, de legalább $2 + \varepsilon$ -ra lenyomható, ahol ε tetszőlegesen kis pozitív szám.

A módszer gyengéje numerikus instabilitása, így a gyakorlatban csak bizonyos mátrixokra érdemes használni, például nagyméretű egészelemű mátrixokra tetszőleges pontosságú aritmetika használata esetén.

Döntsük el, igazak-e az alábbi állítások? Válaszunkat indokoljuk!

- 1° Szimmetrikus mátrixok összege és skalárszorosa is szimmetrikus, így szimmetrikus mátrixok tetszőleges lineáris kombinációja is szimmetrikus.
- 2° Ferdén szimmetrikus mátrixok összege és skalárszorosa is ferdén szimmetrikus, így ferdén szimmetrikus mátrixok tetszőleges lineáris kombinációja is ferdén szimmetrikus.
- 3° Számítsuk ki az alábbi mátrixok inverzeit, négyzetét és köbét!

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- 4 Hogyan oldanánk meg a következő egyenletrendszert a lehető legkevesebb lépésben?

$$\begin{aligned} x + 4y + 3z + 5w &= 3 \\ 6x + 3y &= 3 \\ 2x + 3y + 2z &= 3 \\ 2x + 4y + 3z + 5w &= 4 \end{aligned}$$

Az első egyenletet kivonjuk az utolsóból, innen $x = 1$, ezután visszahelyettesítés a második, harmadik, majd az első egyenletbe.

Bizonyítások

- 5• Mutassuk meg, hogy minden permutációs mátrix oszlop-cserével is megkapható az egységmátrixból, és hogy permutációs mátrixszal jobbról való szorzás a beszorított mátrix oszlopain ugyanazt a permutációt hajtja végre, mint amellyel a permutációs mátrix az egységmátrixból megkapható.
- 6• Bizonyítsuk be, hogy bármely két azonos méretű kígyó szorzata és egy kígyó bármely pozitív egész kitevős hatványa kígyó.
- 7• Mutassuk meg, hogy egy $\mathbf{K}$ kígyó pontosan akkor invertálható, ha minden sorában pontosan egy elem nem 0, és ekkor inverze megkapható úgy, hogy minden nemnulla elem helyébe annak reciprokát írjuk, majd az így kapott mátrixot transzponáljuk.
- 8* **Gyorsinvertálás.** Legyen $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$, mindketten 2×2 -es mátrixok. Mutassuk meg, hogy az alábbi eljárással definiált mátrixinvertálás segítségével $n \times n$ -es mátrixokra olyan algoritmus készíthető, melynek műveletigénye legfeljebb $cn^{2.81}$.

$$\begin{aligned} c_1 &= a_{11}^{-1} & b_{12} &= c_3 c_6 \\ c_2 &= a_{21} c_1 & b_{21} &= c_6 c_2 \\ c_3 &= c_1 a_{12} & c_7 &= c_3 b_{21} \\ c_4 &= a_{21} c_3 & b_{11} &= c_1 - c_7 \\ c_5 &= c_4 - a_{22} & b_{22} &= -c_6 \\ c_6 &= c_5^{-1} \end{aligned}$$

3.7. Az LU- és a QR-felbontás

Mátrixok szorzatalakba írásával (faktorizációjával) már találkoztunk, amikor a Gauss – Jordan-kiküszöbölést használva bizonyítottuk, hogy minden invertálható mátrix előáll elemi mátrixok szorzataként. E szakaszban a Gauss-kiküszöböléshez közeli algoritmust és a Gram-Schmidt-ortogonalizációt öntjük mátrixszorzat-alakba. Mindkét felbontás lineáris algebrai feladatok, például lineáris egyenletrendszerek számítógépes megoldásának gyakran használt eszköze.

Kiküszöbölés mátrixszorzással Az elemi sorműveletek helyettesíthetők mátrixszorzással. Ez kihasználható mátrix tényezőkre bontására.

3.88. PÉLDA: GAUSS-KIKÜSZÖBÖLÉS MÁTRIXSZORZÁSSAL. Elemi sorműveletekkel hozzuk az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrixot lépcsős alakra (azaz felső háromszögmátrix alakra), amit jelöljön $\mathbf{U}$. Az elemi sorműveleteket helyettesítsük mátrixokkal való szorzással. Végül állítsuk elő $\mathbf{A}$ -t az így kapott elemi mátrixok szorzataiból kapott $\mathbf{L}$ és az $\mathbf{U}$ mátrix szorzataként.

MEGOLDÁS. Oszloponként haladva végezzük el a Gauss-kiküszöbölést. Minden elemi sorművelet mellett (zárójelben) megadjuk a hozzá tartozó elemi mátrixot:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_2 - 1/2 S_1} \left(\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ \mathbf{E}_1 \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 7/2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_3 - 1/4 S_1} \left(\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1 \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 7/2 & 0 \\ 0 & 7/4 & 7/2 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_3 - 1/2 S_2} \left(\mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ \mathbf{E}_3 \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1 \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 7/2 & 0 \\ 0 & 0 & 7/2 \end{bmatrix} = \mathbf{U}. \end{aligned}$$

Tehát $\mathbf{E}_3 \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1 \mathbf{A} = \mathbf{U}$, amiből az $(\mathbf{E}_3 \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1)^{-1}$ mátrixszal való beszorzás után $\mathbf{A} = (\mathbf{E}_1^{-1} \mathbf{E}_2^{-1} \mathbf{E}_3^{-1}) \mathbf{U}$. Kiszámoljuk az elemi mátrixok inverzeinek szorzatát, azaz az $\mathbf{L} = \mathbf{E}_1^{-1} \mathbf{E}_2^{-1} \mathbf{E}_3^{-1}$ mátrixot. Fölhasználjuk a 125. oldalon mondottakat, miszerint $S_i + cS_j$ mátrixának inverze $S_i - cS_j$ mátrixával egyenlő:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Meglepő módon ezeknek az elemi mátrixoknak a szorzata a főátló alatti számok átmásolásával megkapható. Az eredmény egy alsó egység háromszögmátrix. ■

3.89. DEFINÍCIÓ: LU-FELBONTÁS. Azt mondjuk, hogy a négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix egy $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$ alakú tényezőkre bontása *LU-felbontás* (*LU-faktorizáció* vagy *LU-dekompozíció*), ha $\mathbf{L}$ alsó, $\mathbf{U}$ felső háromszögmátrix.

Az *LU-felbontásban* az *L* és *U* betűk az *alsó* és *felső* jelentésű angol *lower* és *upper* szavak kezdőbetűi.

A 3.88. példában konstruált felbontás LU-felbontás:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 7/2 & 0 \\ 0 & 0 & 7/2 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Az LU-felbontás használata egyenletrendszer megoldására Ha ismerjük az $n \times n$ -es invertálható $\mathbf{A}$ mátrix LU-felbontását, akkor az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer könnyen megoldható. Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldása az $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$, $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ egyenletrendszerek megoldásával ekvivalens. Ha ugyanis $\mathbf{x}$ megoldása $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek, akkor $\mathbf{LUx} = \mathbf{b}$, és $\mathbf{y} = \mathbf{Ux}$ jelöléssel $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$. Másrészt, ha $\mathbf{y}$ megoldása az $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek, és $\mathbf{x}$ az $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ egyenletrendszernek, akkor $\mathbf{y}$ -t behelyettesítve $\mathbf{L(Ux)} = \mathbf{b}$, azaz $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Tömören:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \text{ megoldható} \iff \mathbf{Ly} = \mathbf{b}, \mathbf{Ux} = \mathbf{y} \text{ megoldható.}$$

Mivel $\mathbf{L}$ és $\mathbf{U}$ is háromszögmátrix, ezért az $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$, $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ egyenletrendszerek egyszerű behelyettesítésekkel megoldhatók. A megoldás min-két esetben egyértelmű, mert $\mathbf{L}$ és $\mathbf{U}$ rangja is n .

3.90. PÉLDA: EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSA LU-FELBONTÁSSAL.

Oldjuk meg a következő egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 9 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. Mivel ismerjük az együtthatómátrix LU-felbontását – az épp a (3.4)-beli felbontás –, ezért ezt használjuk, és először megoldjuk az $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ egyenletrendszert:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Ebből $y_1 = 8$, ezt a második egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy $y_2 = 0$, majd ezeket a harmadikba helyettesítve kapjuk, hogy $y_3 = 7$. Ezután megoldjuk az $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ egyenletrendszert, aminek alakja

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 7/2 & 0 \\ 0 & 0 & 7/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Ismét egyszerű behelyettesítésekkel kapjuk, hogy $x_3 = 2$, $x_2 = 0$ és $x_1 = 1$. A megoldás $\mathbf{x} = (1, 0, 2)$. ■

Mátrix invertálása LU-felbontással Mátrix invertálásához elég megoldanunk az $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ egyenletrendszert. Ha $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ egy LU-felbontása $\mathbf{A}$ -nak, akkor az $\mathbf{LUX} = \mathbf{I}$ megoldása a vele ekvivalens két mátrixegyenlet megoldásával megkapható:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{I} \iff \mathbf{LY} = \mathbf{I}, \mathbf{UX} = \mathbf{Y}.$$

E két utóbbi egyenletrendszer viszont megoldható kizárólag helyettesítésekkel is!

3.91. PÉLDA: MÁTRIX INVERTÁLÁSA LU-FELBONTÁSSAL. Invertáljuk a 3.88. példában megadott $\mathbf{A}$ mátrixot!

MEGOLDÁS. Megadtuk az adott mátrix LU-felbontását a (3.4) egyenletben. Ezt használva először megoldjuk az $\mathbf{LY} = \mathbf{I}$ mátrixegyenletet:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Az $\mathbf{L}$ első sorával való szorzásból: $[y_{11} \ y_{12} \ y_{13}] = [1 \ 0 \ 0]$. A második sorral való szorzásból $\frac{1}{2}[y_{11} \ y_{12} \ y_{13}] + [y_{21} \ y_{22} \ y_{23}] = [0 \ 1 \ 0]$. Behelyettesítés után $[y_{21} \ y_{22} \ y_{23}] = [-\frac{1}{2} \ 1 \ 0]$. Végül a harmadik sorral való szorzásból:

$$\frac{1}{4}[y_{11} \ y_{12} \ y_{13}] + \frac{1}{2}[y_{21} \ y_{22} \ y_{23}] + [y_{31} \ y_{32} \ y_{33}] = [0 \ 0 \ 1],$$

amiből behelyettesítés után kifejezve $\mathbf{Y}$ harmadik sorát kapjuk, hogy $[y_{31} \ y_{32} \ y_{33}] = [0 \ -\frac{1}{2} \ 1]$. Azaz

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ezután ugyanígy, egyszerű helyettesítésekkel megoldható az $\mathbf{UX} = \mathbf{Y}$, azaz a

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 7/2 & 0 \\ 0 & 0 & 7/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixegyenlet is, melynek megoldása

$$\mathbf{X} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Az LU-felbontás kiszámítása A 3.88. példában követett eljárás egyszerűen általánosítható tetszőleges méretű négyzetes mátrixra.

3.92. ALGORITMUS: EGY LU-FELBONTÁS ELŐÁLLÍTÁSA. Tegyük fel, hogy az $n \times n$ -es $\mathbf{A}$ mátrix kizárólag csak a hozzáadás elemi sorműveletével felső háromszög alakra hozható, azaz a kiküszöbölés során a főátlóba sosem kerül 0. Ekkor a következő lépésekkel állítsunk elő egy $\mathbf{U}$ és egy $\mathbf{L}$ mátrixot.

1. A Gauss-kiküszöbölést az első oszloppal kezdjük, és az első sor konstansszorosainak kivonásával, azaz az $S_2 - l_{21}S_1$, $S_3 - l_{31}S_1, \dots, S_n - l_{n1}S_1$ sorműveletekkel elimináljuk az első oszlop elemeit (természetesen $l_{k1} = a_{k1}/a_{11}$).
2. Folytassuk az eliminációt a második oszloppal, azaz hajtsuk végre az $S_3 - l_{32}S_2, \dots, S_n - l_{n2}S_2$ sorműveleteket, majd elimináljuk sorban a többi oszlop főátló alatti elemeit is.
3. Az eredményül kapott lépcsős alak lesz $\mathbf{U}$.
4. A kiküszöbölés konstans l_{ij} elemeit írjuk egy mátrix index szerinti helyébe, melynek főátlójába 1-eket, fölé 0-kat írunk. Ez lesz az $\mathbf{L}$ mátrix, azaz

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Ismét végigszámoljuk a 3.88. példabeli mátrix felbontását. Először írjunk le egy egység mátrixot, de a főátló alatti helyeket üresen hagyva, ebből lesz $\mathbf{L}$. Írjuk mellé az $\mathbf{A}$ mátrixot, és amikor elvégzünk egy $S_i - l_{ji}S_j$ sorműveletet rajta, akkor az l_{ji} értéket bejegyezzük az $\mathbf{L}$ mátrix j -edik sorának i -edik oszlopába. Az alábbi számítások bal hasábjában látjuk a fentiek szerinti lépéseket.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4.00 & 1.00 & 2.00 \\ 2.00 & 4.00 & 1.00 \\ 1.00 & 2.00 & 4.00 \end{bmatrix} \\
 \Downarrow & & \Downarrow \\
 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \textcolor{blue}{1/2} & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 7/2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4.00 & 1.00 & 2.00 \\ \textcolor{blue}{0.50} & 3.50 & 0.00 \\ 1.00 & 2.00 & 4.00 \end{bmatrix} \\
 \Downarrow & & \Downarrow \\
 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \textcolor{blue}{1/2} & 1 & 0 \\ \textcolor{blue}{1/4} & & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 7/2 & 0 \\ 0 & 7/4 & 7/2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4.00 & 1.00 & 2.00 \\ \textcolor{blue}{0.50} & 3.50 & 0.00 \\ \textcolor{blue}{0.25} & 1.75 & 3.50 \end{bmatrix} \\
 \Downarrow & & \Downarrow \\
 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \textcolor{blue}{1/2} & 1 & 0 \\ \textcolor{blue}{1/4} & \textcolor{blue}{1/2} & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 7/2 & 0 \\ 0 & 0 & 7/2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4.00 & 1.00 & 2.00 \\ \textcolor{blue}{0.50} & 3.50 & 0.00 \\ \textcolor{blue}{0.25} & \textcolor{blue}{0.50} & 3.50 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Vegyük észre, hogy az $\mathbf{A}$ mátrixon folytatott elemi átalakítások eredménye és az $\mathbf{L}$ már kiszámolt elemei egyetlen mátrixban is „elférnek”, ugyanis $\mathbf{L}$ -ben épp akkor és oda kerül egy elem, amikor és ahova $\mathbf{A}$ -ban 0. Ezt a számítógépprogramok kihasználják, ha igen nagy méretű $\mathbf{A}$ mátrixot kell felbontani, és az $\mathbf{L}$ és $\mathbf{U}$ mátrixot is az $\mathbf{A}$ helyében konstruálják meg. A fenti számítások jobb hasábjában ezt a számítógépes technikát alkalmazzuk. Színes háttérrel jelöljük az $\mathbf{L}$ -beli elemeket. A számítógépes jelleg erősítésére tizedestört alakot használunk.

Igazolnunk kell még, hogy a fenti algoritmus valóban LU-felbontást ad.

3.93. TÉTEL: AZ LU-FELBONTÁS LÉTEZÉSE ÉS EGYÉRTELMŰSÉGE.
Legyen $\mathbf{A}$ invertálható $n \times n$ -es mátrix.

1. Ha létezik $\mathbf{A}$ -nak LU-felbontása, akkor ezek egyike megkapható a 3.92. algoritmussal.
2. Az $\mathbf{A}$ -nak olyan LU-felbontása, melyben $\mathbf{L}$ főátlójában csak 1-esek vannak egyértelmű.

BIZONYÍTÁS. (a) Először belátjuk, hogy a 3.92. algoritmusban megkonstruált $\mathbf{L}$ és $\mathbf{U}$ mátrixok LU-felbontást adnak. Ehhez elég belátni, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$. Az algoritmus szerint $S_i - l_{ij}S_j$ ($i > j$) alakú elemi műveletekkel transzformáljuk $\mathbf{A}$ -t $\mathbf{U}$ -ba. E transzformációk inverze $S_i + l_{ij}S_j$, melynek mátrixát jelölje $\mathbf{L}_{ij}$. Ez felírható $\mathbf{I} + l_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^T$ alakban, azaz

$$\mathbf{L}_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & l_{ij} & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I} + l_{ij} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} [0 \dots 1 \dots 0 \dots 0].$$

Mivel $\mathbf{A} = \mathbf{L}_{21}\mathbf{L}_{31} \dots \mathbf{L}_{n1}\mathbf{L}_{32} \dots \mathbf{L}_{n2} \dots \mathbf{L}_{n-1,n}$, ezért az $\mathbf{L}_{ij} = \mathbf{I} + l_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^T$

helyettesítések után csak azt kell belátni, hogy a (3.5)-beli $\mathbf{L}$ mátrixra

$$\mathbf{L} = (\mathbf{I} + l_{21}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1^T)(\mathbf{I} + l_{31}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1^T) \dots (\mathbf{I} + l_{n1}\mathbf{e}_n\mathbf{e}_1^T) \dots (\mathbf{I} + l_{n-1,n}\mathbf{e}_{n-1}\mathbf{e}_n^T).$$

Azt kell bizonyítanunk, hogy

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} + l_{21}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1^T + l_{31}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1^T + \dots + l_{n1}\mathbf{e}_n\mathbf{e}_1^T + \dots + l_{n-1,n}\mathbf{e}_{n-1}\mathbf{e}_n^T,$$

vagyis elég belátni, hogy a fenti szorzatban a zárójelek felbontása után keletkező

$$(l_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^T)(l_{st}\mathbf{e}_s\mathbf{e}_t^T) = l_{ij}l_{st}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^T\mathbf{e}_s\mathbf{e}_t^T$$

alakú szorzatok mindegyike nullmátrix. Egyrészt $j < i$, $t < s$, másrészt mivel az elimináció oszloponként balról jobbra, oszlopon belül fentről lefelé haladt, ezért vagy $j < t$ vagy $j = t$ és akkor $i < s$. E feltételek esetén viszont $j \neq s$, tehát $\mathbf{e}_j^T\mathbf{e}_s = 0$, vagyis $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^T\mathbf{e}_s\mathbf{e}_t^T = \mathbf{O}$, amit bizonyítani akartunk.

(b) Tegyük fel, hogy létezik $\mathbf{A}$ -nak két LU-felbontása is, azaz $\mathbf{A} = \mathbf{L}_1\mathbf{U}_1 = \mathbf{L}_2\mathbf{U}_2$. Mivel $\mathbf{A}$ invertálható, ezért a ?? tétel szerint $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{L}_2$ és $\mathbf{U}_2$ is. Balról $\mathbf{L}_1$, jobbról $\mathbf{U}_2$ inverzével szorozva kapjuk, hogy

$$\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2^{-1} = \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2.$$

A bal oldalon két felső háromszögmátrix szorzataként egy felső háromszögmátrix van, míg a jobb oldalon két alsó háromszögmátrix szorzata, ami alsó háromszögmátrix (?? feladat). Ráadásul a jobb oldal egység főátlójú (?? feladat). Ez csak akkor állhat fenn, ha $\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2^{-1} = \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2 = \mathbf{I}$, azaz ha $\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2$ és $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2$. ■

PLU-felbontás Világos, hogy az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixnak nincs LU-felbontása, hisz bármely LU-felbontás bal felső elemére $(\mathbf{LU})_{11} = l_{11}u_{11} \neq 0$, ugyanakkor $a_{11} = 0$. Az első és második sorok cseréje után kapott

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixnak hasonló okok miatt ugyancsak nincs LU-felbontása: ez kicsit hosszabb számolással levezethető az $a_{22} = 0$ összefüggésből (ld. 3.7.16. feladat). A második és harmadik sorok felcserélése után viszont már van LU-felbontás. Jelölje $\mathbf{P}$ a fenti sorcserét megvalósító permutációs mátrixot. Ekkor

$$\mathbf{PA} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ami egy LU-felbontás. Így a $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$ alakra jutottunk, amiből a $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$ mátrixszal való szorzás után az $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T\mathbf{LU}$ felbontást kapjuk.

Az LU-felbontást csak négyzetes mátrixokra definiáltuk, az egyenletrendszer megoldásában és a mátrix invertálásában való fontos szerepére és egy unicitástétel kimondhatóságára gondolva. Most több szempontból is általánosabb definíciót adunk, olyat, mely tetszőleges mátrixokra egy egzisztenciátétel kimondását is lehetővé teszi.

3.94. DEFINÍCIÓ: PLU-FELBONTÁS. Egy tetszőleges $m \times n$ -es $\mathbf{A}$ mátrixnak egy permutációs, egy négyzetes alsó háromszög- és egy $m \times n$ -es felső háromszögmátrixra való bontását *PLU-felbontásnak* nevezzük.

A 3.92. algoritmus kis változtatással alkalmassá tehető a felbontás elvégzésére is. A módosított algoritmus ráadásul a négyzetes *szinguláris mátrixokra* is használható lesz.

1. Az elemi sorműveletek közben sorcserékre is szükség lehet, ha a főátlóban 0, de alatta valahol nem 0 áll. Az a sorcseré, ami ilyenkor elvégzendő, elvégezhető a kiküszöbölési eljárás előtt is (ezt az állítást nem igazoljuk). E sorcserékhez tartozó elemi mátrixok szorzata egy $\mathbf{P}$ permutációs mátrix. Így az algoritmust nem az $\mathbf{A}$ -n, hanem $\mathbf{PA}$ -n hajtjuk végre. Eredményül egy

$$\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$$

felbontást kapunk, mely a $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1}$ mátrixszal való beszorzás után a kívánalmaknak megfelelő $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T \mathbf{LU}$ felbontást adja.

2. Ha sorcserékkel sem lehet elérni, hogy a főátlóban ne legyen zérus, akkor az algoritmusban tovább lépünk a következő oszlopra.
3. Nem kell lépcsős alakra hozni $\mathbf{A}$ -t, a felső háromszögmátrixszá való alakítás kevesebbet kér. Ez azt is jelenti, hogy itt a főelemet mindig a főátlóról választjuk, akkor is, ha a lépcsős alakra hozásnál tudnánk fölötte is főelemet választani.
4. A gyakorlatban – a hatékony számítógépprogramok – részleges főelemkiválasztással dolgoznak, így olyankor is alkalmaznak sorcseréket, ha a főátlóban nem zérus van.

3.95. PÉLDA: PLU-FELBONTÁS ELŐÁLLÍTÁSA. Keressük meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix egy PLU-felbontását! Az $\mathbf{A}$ felső háromszög-alakra hozása közben alkalmazzunk részleges főelemkiválasztást! Ügyeljünk arra, hogy főelemet itt csak a főátlóról válasszunk!

MEGOLDÁS. Az egyszerűség kedvéért kis többletmunkát vállalva először csak azért hajtjuk végre a felső háromszög-alakra hozás lépéseit, hogy megállapítsuk, melyik lépésben melyik sorban lesz a pivotelem. Ezután előállítjuk a sorpermutációnak megfelelő $\mathbf{P}$ permutációs mátrixot, és végrehajtjuk az LU-felbontást a $\mathbf{PA}$ mátrixon.

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\begin{matrix} S_1 \leftrightarrow S_2 \\ S_3 - S_1 \\ S_4 - S_1 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} S_3 \leftrightarrow S_4 \\ S_4 - 1/2 S_3 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A két sorcseré alapján a permutációs mátrix:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ezután elvégezve a sorműveleteket a megpermutált sorú $\mathbf{PA}$ mátrixon és a 3.92. algoritmus szerint megkreálva az $\mathbf{L}$ mátrixot kapjuk, hogy

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{P}$ transzponáltja önmaga, így a fenti jelölésekkel $\mathbf{A} = \mathbf{PLU}$ egy PLU-felbontás. ■

3.96. PÉLDA: PLU-FELBONTÁS, AMIKOR AZ LU-FELBONTÁS IS LEHETSÉGES.

Az LU-felbontás a gyakorlatban Az LU-felbontás műveletigénye megegyezik a Gauss-kiküszöbölésével, azaz nagyságrendileg $2n^3/3$ (utóbbiban a kiküszöbölést a jobb oldallal is meg kell csinálni, az LU-felbontásnál viszont az alsó háromszögmátrixhoz tartozó egyenletrendszert is meg kell oldani: mindkettő $n(n-1)/2$ összeadás/kivonás és ugyanennyi szorzás/osztás). Az LU-felbontásnak viszont több olyan előnyös tulajdonsága van, ami miatt használata meghatározó az egyenletrendszerek megoldásában és emellett több más feladatban is. Néhány a legfontosabbak közül:

1. Mivel az egyenletrendszer együtthatómátrixának LU-felbontásához nincs szükség a jobb oldalra, ezért használható olyan esetekben, amikor a jobb oldal még nem ismeretes, vagy több különböző jobb oldallal is dolgozni kell.
2. Az LU-felbontás ismeretében több mátrixokkal kapcsolatos számítás gyorsabban elvégezhető, mint egyébként, pl. a mátrix inverzének, vagy a később tanulandó determinánsának meghatározása.
3. Korábban említettük, hogy az LU-felbontás igen memóriatakarékos, ráadásul vannak olyan speciális mátrixosztályok (pl. a szalagmátrixok), melyekre létezik a kiküszöbölésnél gyorsabb algoritmus az LU-felbontásra.

Az oszloptér ortonormált bázisa A következőkben egy másik faktorizációt mutatunk, mely hatékonyan használható lineáris egyenletrendszerek megoldásakor. A faktorizáció az oszloptér ortonormált bázisára épül.

3.97. PÉLDA: QR-FELBONTÁS. Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

mátrix QR-felbontását. Használhatjuk a 2.85. feladat megoldását!

MEGOLDÁS. Első lépésként határozzuk meg $\mathbf{A}$ oszlopterének egy ortonormált bázisát. Ezt már elvégeztük a 2.85. feladatban. A $\mathbf{Q}$ mátrix oszlopai ennek az ortonormált bázisnak a vektorai lesznek ($\frac{1}{2}$ -et kiemelünk):

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Az $\mathbf{R} = \mathbf{Q}^T \mathbf{A}$ összefüggés alapján

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

3.98. PÉLDA: LEGKISEBB NÉGYZETEK ELVE. Oldjuk meg az

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

egyenletrendszert!

MEGOLDÁS. Az egyenletrendszer nem oldható meg, mint az a bővített mátrix lépcsős alakjából leolvasható:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 6 & 6 & 1 & 3 & 6 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 4 & 0 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \Rightarrow$$

????????????????????

Adjuk meg az alábbi mátrixok egy LU-felbontását!

$$1^\bullet \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$2^\bullet \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 2 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3 \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ 4 & -5 & -5 \\ -3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4/5 & 1 & 0 \\ -3/5 & 7/9 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ 0 & -9/5 & -17/5 \\ 0 & 0 & -23/9 \end{bmatrix}.$$

$$4 \begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3/10 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 10/3 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2/10 \end{bmatrix}$$

$$5 \begin{bmatrix} -1 & -0 & 2 & -2 \\ -0 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -0 & 3 \\ 1 & -0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$6 \begin{bmatrix} 2.0 & 2.0 & -2.0 \\ -0.5 & 0.0 & -1.0 \\ 1.0 & 1.5 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.25 & 1.00 & 0.00 \\ 0.50 & 1.00 & 1.00 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 2.00 & 2.00 & -2.00 \\ 0.00 & 0.50 & -1.50 \\ 0.00 & 0.00 & 3.50 \end{bmatrix}.$$

Az előző feladatokban megkonstruált LU-felbontásokat használva oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket, azaz oldjuk meg előbb az $Ly = b$, majd az $Ux = y$ egyenletrendszereket!

$$7^\bullet \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$y = (0, 3, 4), x = (-1, -1, 2).$$

$$8^\bullet \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 2 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$y = (0, 3, 1), x = (1, -1, 1).$$

$$9 \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ 4 & -5 & -5 \\ -3 & 1 & -4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$y = (3, -17/5, -23/9), x = (1, 0, 1).$$

$$10 \begin{bmatrix} 2.0 & 2.0 & -2.0 \\ -0.5 & 0.0 & -1.0 \\ 1.0 & 1.5 & 1.0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 5.6 \\ -1.0 \\ 4.6 \end{bmatrix}$$

$$y = (5.6, 0.4, 1.4), x = (1.2, 2.0, 0.4).$$

Határozzuk meg az alábbi mátrixok inverzét az LU-felbontásuk ismeretében, azaz oldjuk meg az $LY = I$ és az $UX = Y$ mátrixegyenleteket!

$$11^\bullet A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Az $LY = I$ egyenletből

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/12 & -1/3 & 1 \end{bmatrix},$$

míg az $UX = Y$ egyenlet megoldása, egyúttal A inverze

$$X = \begin{bmatrix} 5/12 & -1/3 & 0 \\ -1/8 & 1/2 & -1/2 \\ -1/24 & -1/6 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

$$12^\bullet \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 2 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/12 & -1/3 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 1/3 & -5/3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1/12 & -1/3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Adjuk meg az alábbi mátrixok egy PLU-felbontását! Alkalmazzunk részleges főelemkiválasztást!

$$13^\bullet \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & -0.5 & 1.0 \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0.5 & -2.0 & 2.0 \\ 0.0 & 2.0 & 2.0 \\ 0.0 & 0.0 & 2.5 \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

14 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 7 & 9 \end{bmatrix}$

$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 & 7 & 9 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 & \frac{5}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{P} =$ **16** Igazoljuk, hogy az

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

15 $\begin{bmatrix} 0.0 & -1.0 & 1.5 \\ 0.5 & -2.0 & 2.0 \\ 0.0 & 2.0 & 2.0 \end{bmatrix}$

mátrixnak nincs LU-felbontása.

4. fejezet

Mátrixok jellemzése

Az előző fejezetben megismerkedtünk a mátrixműveletekkel, azok tulajdonságaival. Ebben a fejezetben a mátrixok különféle jellemzőit vizsgáljuk, melyek segítségével arról a dologról is értékes információhoz juthatunk, melynek leírására mátrixmodellt alkalmazunk.

4.1. Determináns

Egy valós négyzetes mátrix sorvektorai által kifeszített paralelepipedon térfogata jó jellemzője lehet a mátrixnak. Ehhez közel áll a determináns fogalma, mely egy négyzetes mátrixokon értelmezett skalárértékű függvény. E skalár könnyen kiszámolható az elemi sorműveletekkel. A determináns fontos tulajdonságainak egyike, hogy pontosan akkor nulla, ha sorvektorai lineárisan összefüggők.

A determináns a mátrix egy igen fontos, és sokhelyütt használt jellemzője. Fogalmát egy egyszerű és szemléletes fogalom, a paralelepipedon előjeles térfogatának segítségével fogjuk bevezetni.

Parallelogramma előjeles területe A 4.2. példában láttuk, hogy az (a, b) és a (c, d) vektorok által kifeszített parallelogramma területe $|ad - bc|$, és hogy $ad - bc$ pontosan akkor pozitív, ha az (a, b) és a (c, d) vektorok jobbrendszert alkotnak, és pontosan akkor negatív, ha az (a, b) és a (c, d) vektorok balrendszert alkotnak. Ez vezet a következő definícióhoz:

4.1. DEFINÍCIÓ: PARALLELOGRAMMA ELŐJELES (VAGY IRÁNYÍTOTT) TERÜLETE. Két síkbeli vektor által kifeszített parallelogramma *előjeles területén* a területét értjük, ha a két vektor jobbrendszert alkot, és a terület -1 -szeresét, ha a két vektor balrendszert alkot.

Az előzőek szerint az $\mathbf{u} = (a, b)$ és a $\mathbf{v} = (c, d)$ vektorok által kifeszített parallelogramma előjeles területe $ad - bc$. Az előjeles terület tehát egy vektorpárokra értelmezett valós értékű függvény – jelölje most f –, mely eleget tesz a következő tulajdonságoknak.

1. $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -f(\mathbf{v}, \mathbf{u})$. Ez nyilvánvaló, hisz a két vektor sorrendjét megcserélve megváltozik a parallelogramma irányítása.
2. $f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$, ugyanis az elfajuló parallelogramma területe 0.
3. $f(c\mathbf{u}, \mathbf{v}) = cf(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, és $f(\mathbf{u}, c\mathbf{v}) = cf(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, azaz f homogén mindkét változójában. Ez igaz, mert egy parallelogramma egyik oldalának c -szeresére növelése c -szerezi a területét is.

Az $\mathbb{R}^2$ tartományai területének definiálására a matematika több megközelítést is ismer. Kettőt vázolunk. Mindkettő közös kiindulási pontja, hogy az $[a, b] \times [c, d]$ téglalap területe $(b-a)(d-c)$, és mindkét esetben csak a tengelyekkel párhuzamos helyzetű téglalapokat használunk.

Egy síkbeli T halmazhoz vegyünk véges sok közös belső pont nélküli téglalapot, melyek egyesítése lefedi T -t. E fedő téglalaprendszer területe legyen a téglalapok területeinek összege. Azt mondjuk, hogy T külső Jordan-mértéke a tartományt lefedő téglalaprendszerek területeinek infimuma. Hasonlóan, a T -be írt közös belső pont nélküli téglalaprendszerek területeinek szuprémumát T belső Jordan-mértékének nevezzük. T Jordan-mérhető, ha belső és külső Jordan-mértéke megegyezik, és e közös érték T Jordan-mértéke.

A Lebesgue-mérték definiálásához olyan fedő téglalaprendszereket veszünk, melyek megszámlálható (tehát akár végtelen) elemszámúak, és ezekhez a téglalapjaik területösszegét rendeljük. A T halmazt fedő összes téglalaprendszerhez ilyen módon rendelt számok infimumát a T külső mértékének nevezzük és $\lambda^*(T)$ -vel jelöljük. A T -t Lebesgue-mérhetőnek nevezzük, ha bármely síkbeli H halmazra

$$\lambda^*(H) = \lambda^*(H \cap T) + \lambda^*(H \setminus T).$$

Egy Jordan-mérhető T tartomány Lebesgue-mérhető is, és e két mérték ekkor megegyezik. Viszont például az egységnégyzet racionális koordinátájú pontjainak halmaza nem Jordan-mérhető, mert belső mértéke 0, külső mértéke 1, viszont Lebesgue-mérhető, mértéke 0.

4. $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + f(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w})$ és $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + f(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{v})$, azaz f additív mindkét változójában. Az állítás igaz volta leolvasható a ?? ábráról.
5. $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{u} + c\mathbf{v}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{v} + c\mathbf{u})$, azaz az $\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mátrix sorvektorai által kifeszített paralelogramma területe megegyezik a hozzáadás sorművelete után kapott mátrix sorvektoraihoz tartozó területtel.
6. $f(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = 1$, azaz a standard bázis által kifeszített egységnégyzet területe 1.

Az állítások a fenti ábrákkal szemléltetett egyszerű geometriai érvelések mellett az $f((a, b), (c, d)) = ad - bc$ formulával is bizonyíthatóak. E tulajdonságok segítségével általánosítani lehet az előjeles terület fogalmát, és bevezetni az előjeles térfogat fogalmát az n -dimenziós valós tér paralelepipedonjaira.

4.2. PÉLDA: HÁNYSZOROSÁRA NAGYÍT EGY LINEÁRIS LEKÉPEZÉS? Az $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mátrixszal reprezentált lineáris leképezés egy T területű síkidomot mekkora területűbe visz?

MEGOLDÁS. Nem nyilvánvaló, hogy a kérdésre van-e egyáltalán válasz, és nem fordulhat-e elő, hogy a fenti leképezés egyik síkidomot például a 2-szeresébe, másikat a 3-szorosába viszi.

Akár a területmérték Jordan-, akár Lebesgue-féle definícióját tekintjük, elég a kérdést olyan téglalapokra megválaszolni, amelyek oldalai párhuzamosak a tengelyekkel (lásd a széljegyzetet). Legyen egy ilyen téglalap négy csúcsa: (p, q) , $(p+x, q)$, $(p, q+y)$, $(p+x, q+y)$, ahol $x, y > 0$. Tehát a téglalap oldalhossza x és y , területe xy . A csúcsok képe kiszámolható egyetlen mátrixszorzással:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & p+x & p & p+x \\ q & q & q+y & q+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap+bq & ap+ax+bq & ap+bq+by & ap+ax+bq+by \\ cp+dq & cp+cx+dq & cp+dq+dy & cp+cx+dq+dy \end{bmatrix}$$

Innen leolvasható, hogy a téglalap képeként kapott paralelogramma oldalvektorai (ax, cx) és (by, dy) , és így területe

$$|(ax)(dy) - (cx)(by)| = |ad - bc|xy.$$

Eszerint tehát a téglalap képének területe a téglalap területének $|ad - bc|$ -szerese, s így minden területmértékkel rendelkező síkbeli tartomány képének területe az eredeti $|ad - bc|$ -szerese.

Gondoljuk meg, mi a különbség T két képe közt az $ad - bc > 0$, és a $ad - bc < 0$ esetben? ■

Paralelepipedon előjeles térfogata A vegyes szorzat tárgyalásakor láttuk, hogy a valós háromdimenziós térben három vektor vegyes szorzatának abszolút értéke a vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata lesz, előjele pedig aszerint pozitív vagy negatív, hogy a három vektor jobb- vagy balrendszert alkot. A háromdimenziós tér paralelepipedonjaira a paralelogrammához hasonló tulajdonságok igazolhatók.

1. Bármely két argumentum felcserélése megváltoztatja a függvényérték előjelét, pl. $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -f(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{u})$.
2. Ha f bármely két argumentuma megegyezik, a függvényérték 0, pl. $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0$.
3. f homogén mindhárom argumentumában, pl. $f(c\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = cf(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$.

4. f additív mindhárom argumentumában, pl. $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + f(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} + \mathbf{z})$.
5. f bármely argumentumához hozzáadva egy másik konstansszorosát, a függvényérték nem változik, pl. $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = f(\mathbf{u} + c\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$.
6. $f(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) = 1$, azaz az egységkocka térfogata 1.

A háromdimenziós paralelepipedon térfogatát úgy számoltuk ki, hogy két vektor által kifeszített paralelogramma területét szoroztuk a harmadik vektor csúcsának a paralelogramma síkjától való távolságával. Ha pedig a paralelogramma irányítását is figyelembe vettük, e távolság előjeles távolsággá vált, hisz az ott használt skaláris szorzat a sík egyik oldalán pozitív, másik oldalán negatív eredményt ad. Ugyanez az eljárás megismételhető magasabb dimenzióban is. Például, ha a négydimenziós tér egy paralelepipedonjának előjeles térfogatát akarjuk kiszámolni, akkor egy háromdimenziós paralelepipedon térfogatát szorozzuk a negyedik vektor végpontjának a másik három terétől való előjeles távolságával. Ezután bebizonyíthatnánk, hogy az így definiált előjeles térfogat is rendelkezik a korábban felsorolt tulajdonságok négydimenziós megfelelőivel. E helyett egy más, egyszerűbb és szebb utat választunk.

A determináns definíciója A paralelepipedon fogalma helyett – mely nem értelmezhető bármely számtest esetén – egyszerűen csak az azt kifeszítő vektorokat, illetve az azokból képzett mátrixot fogjuk használni. Az előjeles térfogat helyett olyan fogalmat fogunk definiálni, mely speciális esetként ezt is tartalmazza. Ez lesz a determináns. A definícióban csak az előjeles térfogat vizsgálatában megismert függvénytulajdonságokat használjuk, azok közül is csak annyit, amennyi már egyértelműen definiálja azt.

4.3. DEFINÍCIÓ: DETERMINÁNS. A *determináns* a négyzetes mátrixokon értelmezett és $\det$ -tel jelölt olyan skalár értékű függvény, mely eleget tesz az alábbi tulajdonságoknak:

- D1. lineáris a mátrix minden sorára nézve,
- D2. két azonos sort tartalmazó mátrixhoz 0-t,
- D3. az egységmátrixhoz 1-et rendel.

Az $\mathbf{A} = [a_{ij}]_n$ mátrix determinánsát $\det(\mathbf{A})$, $|\mathbf{A}|$ vagy $|a_{ij}|_n$ jelöli.

► Az $n \times n$ -es mátrixok determinánsát szokás *n -edrendű determinánsnak* is nevezni.

► Részletezve az általános jelölést az $\mathbf{A}$ mátrixra és determinánsára:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

E jelölésnek megfelelően a $\det(\mathbf{A})$ determináns sorain, oszlopain, elemein az $\mathbf{A}$ mátrix sorait, oszlopait, elemeit értjük.

► Részletezzük a definíció három feltételét. A determináns lineáris a mátrix minden sorában, tehát bármely c és d skálárra és bármely i -re, ahol $1 \leq i \leq n$

$$c \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{1*} \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_{i*} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{n*} \end{vmatrix} + d \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{1*} \\ \vdots \\ \mathbf{a}''_{i*} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{n*} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{1*} \\ \vdots \\ c\mathbf{a}'_{i*} + d\mathbf{a}''_{i*} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{n*} \end{vmatrix}.$$

Azonos sorok esetén a determináns értéke 0, azaz ha valamely $i \neq j$ esetén $\mathbf{a}_{i*} = \mathbf{a}_{j*} = \mathbf{b}$, akkor

$$\begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{b} \\ \vdots \\ \mathbf{b} \\ \vdots \end{vmatrix} = 0.$$

Végül az egységmátrix determinánsa 1, azaz

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

► Az 1×1 -es $[a]$ mátrix determinánsa $\det([a]) = a$, ugyanis a determináns definíciója szerint $\det([1]) = 1$, és $\det([a]) = \det([a \cdot 1]) = a \det([1]) = a$. Ez a függvény pedig additív is, így a definíció minden feltételét kielégíti. A jelölésbeli zavarok elkerülésére az 1×1 -es $[a]$ mátrix determinánsára csak a $\det([a])$ vagy $\det(a)$ jelölést használjuk, mert $|a|$ az a abszolút értékét jelöli!

► A korábbiak szerint

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

► Láttunk determinánst, például a 2×2 -es mátrixokét. Azt azonban még nem tudjuk, hogy létezik-e minden n -re és egyértelmű-e. A definíció alapján ez bizonyítható. A bizonyítást későbbre hagyjuk, addig feltételezzük, hogy létezik és egyértelmű.

► A determináns tekinthető olyan n -változós függvénynek, melynek n argumentumába a mátrix n sorvektora kerül. Nem okoz félreértést, ha ezt a függvényt is $\det$ jelöli. Ha tehát $\mathbf{A}$ sorvektorai $\mathbf{a}_{1*}, \mathbf{a}_{2*}, \dots, \mathbf{a}_{n*}$, akkor $\det(\mathbf{A})$ megegyezik a $\det(\mathbf{a}_{1*}, \mathbf{a}_{2*}, \dots, \mathbf{a}_{n*})$ függvényértékkel. Például a 3×3 -as egységmátrix determinánsa az alábbi alakokba írható:

$$\det(I_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \det([1 \ 0 \ 0], [0 \ 1 \ 0], [0 \ 0 \ 1]) = \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$$

ahol $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ a standard egység-sorvektorokat jelöli. A determináns fenti definíciója könnyen fölírható e jelöléssel is (ld. 4.1.1. feladat).

A determináns értékének kiszámítása A determináns kiszámításához az elemi sorműveleteket fogjuk használni. Két kérdésre kell válaszolnunk: (1) hogyan változik a determináns értéke elemi sorműveletek közben, (2) mennyi a determinánsa a lépcsős alakra hozott mátrixoknak?

4.4. ÁLLÍTÁS: A DETERMINÁNS EGYIK SORA NULLVEKTOR. Egy determináns értéke 0, ha valamely sorában minden elem 0.

BIZONYÍTÁS. Ha egy determináns egy 0-sorát bármely c számmal beszorozzuk, az 0-sor marad, így a determináns értéke nem változik, másrészt a c -vel való szorzás miatt c -szeresére módosul. Mivel csak a 0 egyezik meg tetszőleges c -re saját c -szeresével, így a determináns értéke csak 0 lehet. ■

4.5. TÉTEL: DETERMINÁNS ÉS AZ ELEMI SORMŰVELETEK. Az elemi sorműveletek eredményeként a determináns értéke az alábbiak szerint változik:

1. *sorcsere* közben előjelet vált;
2. a c skalárral való *beszorzás* után értéke c -szeresére változik;
3. egy sor konstansszorosának egy másikhoz való *hozzáadása* után értéke nem változik.

BIZONYÍTÁS. Az első állítás igazolásához a determináns definíciójának első két pontját használjuk ($D1$, $D2$). Csak az i -edik és j -edik sorokat változtatjuk ($i < j$):

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_{i*} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{j*} \\ \vdots \end{vmatrix} \stackrel{D2}{=} \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_{i*} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{j*} \\ \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_{j*} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{i*} \\ \vdots \end{vmatrix} \stackrel{D1}{=} \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_{i*} + \mathbf{a}_{j*} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{j*} \\ \vdots \end{vmatrix} \\
 & \stackrel{D2}{=} \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_{i*} + \mathbf{a}_{j*} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{j*} \\ \vdots \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_{i*} + \mathbf{a}_{j*} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{i*} + \mathbf{a}_{j*} \\ \vdots \end{vmatrix} \stackrel{D1}{=} \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_{i*} + \mathbf{a}_{j*} \\ \vdots \\ -\mathbf{a}_{i*} \\ \vdots \end{vmatrix} \\
 & \stackrel{D2}{=} \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_{i*} + \mathbf{a}_{j*} \\ \vdots \\ -\mathbf{a}_{i*} \\ \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vdots \\ -\mathbf{a}_{i*} \\ \vdots \\ -\mathbf{a}_{i*} \\ \vdots \end{vmatrix} \stackrel{D1}{=} \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_{j*} \\ \vdots \\ -\mathbf{a}_{i*} \\ \vdots \end{vmatrix} \stackrel{D2}{=} - \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_{j*} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{i*} \\ \vdots \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

A tétel második pontja definíció szerint igaz. Marad a harmadik:

$$\begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_{i*} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{j*} + c\mathbf{a}_{i*} \\ \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_{i*} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{j*} \\ \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_{i*} \\ \vdots \\ c\mathbf{a}_{i*} \\ \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_{i*} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{j*} \\ \vdots \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_{i*} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{i*} \\ \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_{i*} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{j*} \\ \vdots \end{vmatrix}.$$

Az elemi mátrixok egyetlen sorművelettel kaphatók az egység mátrixból, így ezek determinánsa könnyen számolható. Hasonlóan könnyen számolható egy elemi mátrix és egy tetszőleges mátrix szorzatának determinánsa.

4.6. KÖVETKEZMÉNY: ELEMI MÁTRIXOK DETERMINÁNSA.

(a) A hozzáadás sorműveletével kapott elemi mátrix determinánsa 1, a sorcserevel kapotté -1 , egy sor c -vel való sorzásával kapotté c , azaz képlettel

$$\det(\mathbf{E}_{S_i + cS_j}) = 1, \quad \det(\mathbf{E}_{S_i \leftrightarrow S_j}) = -1, \quad \det(\mathbf{E}_{cS_i}) = c.$$

(b) Egy $\mathbf{E}$ elemi mátrix és egy tetszőleges négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix szorzatának determinánsa megegyezik determinánsaik szorzatával, azaz

$$\det(\mathbf{EA}) = \det(\mathbf{E}) \det(\mathbf{A}).$$

BIZONYÍTÁS. Az (a) állítás abból következik, hogy az elemi mátrixok az 1 determinánsú egység mátrixból kaphatók egyetlen sorművelettel. Hasonlóképp adódik (b) abból, hogy az $\mathbf{EA}$ egyetlen sorművelettel kapható $\mathbf{A}$ -ból. ■

Például:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3.$$

4.7. PÉLDA: PERMUTÁCIÓS MÁTRIX DETERMINÁNSA. Mivel a permutációs mátrix csak elemi sorcserékkel megkapható az egység mátrixból, és a sorcsere megváltoztatja a determináns előjelét, ezért permutációs mátrix determinánsa mindig 1 vagy -1 . Például az első determináns két sorcserével, a második három sorcserével kapható meg:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

4.8. TÉTEL: HÁROMSZÖGMÁTRIX DETERMINÁNSA. Az alsó vagy felső háromszögmátrix, s így a diagonális mátrix determinánsa megegyezik a főátlóbeli elemek szorzatával.

BIZONYÍTÁS. Ha egy háromszögmátrix főátlójában van 0, akkor a főelemek száma kevesebb lesz, mint a sorok száma, azaz a mátrixban van egy zérussor, így determinánsának értéke 0. Ha nincs 0-elem a főátlóban, mind az alsó, mind a felső háromszögmátrix csak a hozzáadás sorműveletével – azaz a determináns értékének megváltoztatása nélkül – diagonálissá alakítható a főátlón kívüli elemek kiküszöbölésével, azaz

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ ? & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ? & ? & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & ? & \dots & ? \\ 0 & a_{22} & \dots & ? \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Egy diagonális mátrix determinánsában minden sorból kiemelve a főátlóban szereplő számot kapjuk, hogy

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn},$$

tehát a determináns értéke valóban a főátlóbeli elemek szorzata. ■

4.9. PÉLDA: HÁROMSZÖGMÁTRIX DETERMINÁNSA. Az alábbi determináns értéke egyetlen sorcsere után azonnal leolvasható:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = -72$$

4.10. PÉLDA: DETERMINÁNS KISZÁMÍTÁSA LÉPCSŐS ALAKRA HOZÁSSAL. Számítsuk ki a

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -4 \\ 4 & 5 & -6 \end{vmatrix} \quad \text{és a} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$$

determinánsok értékét lépcsős alakra hozzással.

MEGOLDÁS. Elemi sorműveletekkel kapjuk, hogy

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -4 \\ 4 & 5 & -6 \end{vmatrix} \xrightarrow[S_3 - 2S_1]{S_2 - S_1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{S_2 \leftrightarrow S_3} \begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

A következő determinánsnál sorcsere nélkül eliminálhatók a főátló alatti elemek, ezért a sorműveleteket nem is jelezzük.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 9 & 19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

(Egy érdekes észrevétel: a fenti determinánsban és sorlépcsős alakjában is a Pascal-háromszög számai találhatók.) ■

Mátrixműveletek és determináns Kérdés, hogy milyen kapcsolat van a mátrixműveletek és a determináns között. Fontos megjegyezni, hogy a determinánsfüggvénynek *nincs* a mátrixösszeadásra és a skalárral való szorzásra nézve művelettartó tulajdonsága, azaz általában $\det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \neq \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B})$, és $\det(c\mathbf{A}) \neq c \det(\mathbf{A})$. A determináns definíciója szerint lineáris tulajdonsága csak a sorvektorokra vonatkozóan van.

A skalárral való szorzás esetén viszont itt is mondható valami: mivel egy mátrix c -szeresének determinánsa minden sorából kiemelhető c , ez annyi kiemelést jelent, ahány sora van a mátrixnak. Így tetszőleges $n \times n$ -es $\mathbf{A}$ mátrixra és tetszőleges c skalárra $\det(c\mathbf{A}) = c^n \det(\mathbf{A})$. Ez világos, ha $\mathbb{R}^2$ - vagy $\mathbb{R}^3$ -beli vektorokra gondolunk, hisz például egy parallelogramma előjeles területe 4-szeresére, egy paralelepipedon előjeles térfogata 8-szorosára nő, ha minden élét 2-szeresére növeljük.

A determináns művelettartó a négyzetes mátrixok szorzására nézve. Ezt mondja ki a következő állítás.

4.11. ÁLLÍTÁS: DETERMINÁNSOK SZORZÁSSZABÁLYA. Ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ azonos méretű négyzetes mátrixok, akkor $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$.

BIZONYÍTÁS. Tudjuk, hogy ha $\mathbf{A}$ szinguláris, akkor $\mathbf{AB}$ is, azaz ha $\det(\mathbf{A}) = 0$, akkor $\det(\mathbf{AB})$ is 0, tehát $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$. Ha $\mathbf{A}$ nem szinguláris, akkor felbontható elemi mátrixok szorzatára: $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_k$, így $\mathbf{AB} = \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_k \mathbf{B}$. A 4.6. állítás szerint tetszőleges $\mathbf{E}$ elemi mátrixra $\det(\mathbf{EB}) = \det(\mathbf{E}) \det(\mathbf{B})$. Ezt az összefüggést $\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_k$ -re és $\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_k \mathbf{B}$ -re is használva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B}) &= \det(\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_k) \det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{E}_1) \det(\mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_k) \det(\mathbf{B}) \\ &= \det(\mathbf{E}_1) \det(\mathbf{E}_2) \det(\mathbf{E}_3 \dots \mathbf{E}_k) \det(\mathbf{B}) = \dots = \\ &= \det(\mathbf{E}_1) \det(\mathbf{E}_2) \dots \det(\mathbf{E}_k) \det(\mathbf{B}), \text{ másrészt} \\ \det(\mathbf{AB}) &= \det(\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_k \mathbf{B}) = \det(\mathbf{E}_1) \det(\mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_k \mathbf{B}) \\ &= \det(\mathbf{E}_1) \det(\mathbf{E}_2) \det(\mathbf{E}_3 \dots \mathbf{E}_k \mathbf{B}) = \dots = \\ &= \det(\mathbf{E}_1) \det(\mathbf{E}_2) \dots \det(\mathbf{E}_k) \det(\mathbf{B}), \end{aligned}$$

ami bizonyítja az állítást. Egy másik, nagyon szép bizonyítás található a 4.1.3. feladatban. ■

Mátrix determinánása és transzponáltjának determinánása megegyezik. Ez lehetővé teszi, hogy a determináns kiszámításához nem csak az elemi sor-, de az elemi oszlopműveleteket is használjuk, hisz egy mátrixon végzett oszlopművelet a transzponált sorművelete.

4.12. ÁLLÍTÁS: TRANSZPONÁLT DETERMINÁNS. Mátrix determinánása megegyezik transzponáltjának determinánásával, azaz bármely négyzetes $\mathbf{A}$ mátrixra $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$.

BIZONYÍTÁS. Az $\mathbf{A}$ mátrix redukált lépcsős alakra hozásának mátrixszorzatos alakja legyen $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_k \mathbf{R}$, ahol $\mathbf{E}_i$ elemi mátrix, $\mathbf{R}$ az $\mathbf{A}$ redukált lépcsős alakja. A transzponált determinánása

$$|\mathbf{A}^T| = |\mathbf{R}^T \mathbf{E}_k^T \dots \mathbf{E}_2^T \mathbf{E}_1^T| = |\mathbf{R}^T| |\mathbf{E}_k^T| \dots |\mathbf{E}_2^T| |\mathbf{E}_1^T|.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy minden elemi mátrix determinánása megegyezik transzponáltjának determinánásával (ellenőrizzük!). Mivel $\mathbf{R}$ redukált lépcsős alak, ezért $\mathbf{R} = \mathbf{I}$, vagy $\mathbf{R}$ -nek van egy zérus sora. Ha $\mathbf{R} = \mathbf{I}$, akkor $|\mathbf{R}^T| = |\mathbf{R}| = |\mathbf{I}| = 1$, ha pedig $\mathbf{R}$ -nek van zérus sora, akkor $\mathbf{R}^T$ -nak zérus oszlopa, és egy ilyen mátrix nem alakítható elemi sorműveletekkel egységmátrixszá, tehát determinánása 0. Azaz $|\mathbf{R}| = |\mathbf{R}^T|$ ekkor is fennáll. Ekkor pedig

$$\begin{aligned} |\mathbf{R}^T| |\mathbf{E}_k^T| \dots |\mathbf{E}_2^T| |\mathbf{E}_1^T| &= |\mathbf{R}| |\mathbf{E}_k| \dots |\mathbf{E}_2| |\mathbf{E}_1| = \\ |\mathbf{E}_1| |\mathbf{E}_2| \dots |\mathbf{E}_k| |\mathbf{R}| &= |\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_k \mathbf{R}| = |\mathbf{A}|. \end{aligned}$$

Tehát $|\mathbf{A}^T| = |\mathbf{A}|$. ■

4.13. PÉLDA: DETERMINÁNS KISZÁMÍTÁSA ELEMİ OSZLOPMŰVELETEKKEL. Az alábbi determinánst elemi sor- és oszlopműveletek alkalmazásával 2 lépésben is kiszámíthatjuk:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{S_2 - S_5} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{O_4 - O_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Amikor a determináns értéke 0 Sok kérdésben vízvázlasztó, hogy a determináns értéke zérus-e. A 4.4. állításban láttuk, hogy a determináns 0, ha van két azonos sora, vagy egy zérussora. Most szükséges és elégséges feltételeket adunk.

4.14. TÉTEL: ZÉRUS ÉRTÉKŰ DETERMINÁNS. Legyen $\mathbf{A}$ négyzetes mátrix. A következő állítások ekvivalensek:

1. $\det(\mathbf{A}) = 0$,
2. $\mathbf{A}$ sorvektorai lineárisan összefüggők.
3. $\mathbf{A}$ szinguláris,
4. a homogén lineáris $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása.

BIZONYÍTÁS. A ??? tételben láttuk, hogy négyzetes mátrix sorvektorai pontosan akkor lineárisan összefüggők, ha a mátrix szinguláris, azaz ha a lépcsős alakra hozás során keletkezik egy 0-sor, ez pedig azzal ekvivalens, hogy a determináns értéke 0. Az utolsó állítás ekvivalenciája a mátrix invertálhatóságáról szóló 3.64. tétel közvetlen következménye. ■

4.15. PÉLDA: ZÉRUS ÉRTÉKŰ DETERMINÁNSOK. Az alábbi determinánsok értéke 0, mert soraik lineárisan összefüggők.

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Az első determináns első sora a második és a harmadik összege, a második determináns negyedik sora az első és a harmadik összegének és a másodiknak a különbsége, tehát mindkét determináns értéke 0. (Az ilyen összefüggéseket nem kell „ránézésre észrevenni”, az elemi sorműveletek gyorsan megmutatják.)

Az előző tétel, valamint a 3.64. tétel fontos következménye a determinánsnak az egyenletrendszerek megoldhatóságával való kapcsolatáról szól:

4.16. TÉTEL: EGYENLETRENDSZER MEGOLDHATÓSÁGA ÉS A DETERMINÁNS ZÉRUS VOLTA. Legyen $\mathbf{A}$ négyzetes mátrix. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:

1. $\det \mathbf{A} \neq 0$,
2. az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer egyértelműen megoldható,
3. az $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek csak triviális megoldása van.

A gyakorlatban – például mért adatok esetén – az, hogy egy determináns nulla-e, nehezen dönthető el! Fontos tudni, hogy az, hogy a determináns értéke közel, vagy távol van a nullától, nem jelenti azt, hogy a determináns közel szinguláris, vagy távolról sem az. Például az

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & n \end{vmatrix} = 1, \quad \text{és az} \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2^n}$$

determinánsok közül az első értéke tetszőlegesen nagy n -re is 1, pedig $\frac{1}{n}$ tetszőlegesen közel lehet 0-hoz, és az $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}$ mátrix már szinguláris. A második determináns $\frac{1}{2}\mathbf{I}_n$ determinánsa, ami nem szinguláris, pedig értéke tetszőlegesen közel lehet 0-hoz, igaz, csak elegendően nagy n esetén.

A determináns minden sorában (sorvektorában) lineáris leképezés, ami lehetővé teszi a determináns előállítását determinánsok lineáris kombinációjaként. Két ilyen módszert ismertetünk a következő két paragrafusban. Ezek igen fontosak, gyakran ezek segítségével definiálják a determináns fogalmát.

Kígyók determinánsa A 2×2 -es determináns kiszámítására ismerjük azt a formulát, amely a determináns értékét a determináns elemeinek függvényében írja fel: $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$. Hasonló formulát keresünk tetszőleges n -edrendű determinánsokra. Ehhez a kígyókat használjuk.

Minden kígyó megkapható egy diagonális mátrix sorainak permutációjával, azaz minden $\mathbf{K}$ kígyó felírható $\mathbf{K} = \mathbf{P} \operatorname{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ alakban, ahol $\mathbf{P}$ egy permutációs mátrix (ezt a kígyóhoz tartozó permutációs mátrixnak fogjuk nevezni). Mivel $\mathbf{P}$ determinánsa 1 vagy -1 , ezért $|\mathbf{K}| = a_1 a_2 \dots a_n$ vagy $|\mathbf{K}| = -a_1 a_2 \dots a_n$.

A determinánsok soronkénti linearitását használva érdekes felbontást kapjuk a determinánsnak. Tekintsük példaként az

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

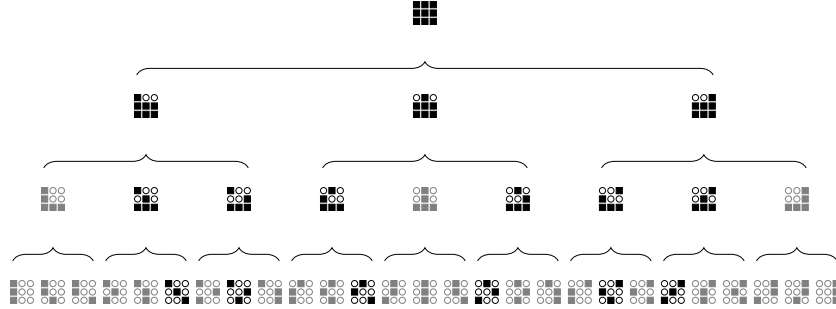
determinánst. Első sorvektorának

$$(a, b, c) = (a, 0, 0) + (0, b, 0) + (0, 0, c)$$

felbontását fölhasználva bontsuk fel a determinánst három determináns összegére:

$$\begin{vmatrix} a+0+0 & 0+b+0 & 0+0+c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Ezután folytassuk e felbontást a második sorvektorral, így már az eredeti determinánst 9 determináns összegére bontottuk. Végül tegyük ugyanezt az utolsó sorral is. Az így kapott 27 determinánst nem írjuk föl, de szemléltetésül egy sematikus ábrán megmutatjuk a felbontás lépéseit. Tömör négyzet jelöli azokat a helyeket, ahol megtartjuk a determináns eredeti elemeit, üres kör azokat, ahová zérust írunk. A 27 determináns mindegyikének minden sorában egy elem az eredeti determinánsból való, a többi zérus. Közöttük azonban csak 6 kígyó van. A többinek van zérus oszlopa, így azok értéke 0, vagyis az eredeti determinánst 6 kígyó összegére bontottuk (a 0 értékű determinánsokat szürke színnel jeleztük).



Hasonló módon bármely n -edrendű determináns fölbomlik n^n olyan determináns összegére, melynek minden sorában egyetlen elem az eredeti determinánsból való, a többi 0, de ezek közül csak azok lesznek kígyók determinánsai, melyek minden oszlopában is van egy elem az eredetiből. (Ezeket nevezzük a mátrixból/determinánsból kiválasztható kígyóknak.) Ezek száma $n!$, mert az első sorból n -féleképp választhatunk egy elemet, a második sorból minden esetben már csak $n-1$ -féleképp, $\dots$, és ez összesen $n(n-1)\dots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$ eset. Igaz tehát a következő állítás:

4.17. ÁLLÍTÁS: DETERMINÁNS, MINT KÍGYÓK DETERMINÁNSAINAK ÖSSZEGE. Minden n -edrendű determináns fölbomlik az összes belőle kiválasztható kígyó determinánsának összegére. Ha az $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{nj_n}$ elemeket tartalmazó kígyóhoz tartozó permutációs mátrix determinánsát $d_{j_1j_2\dots j_n}$ jelöli (ennek értéke $+1$ vagy -1), akkor

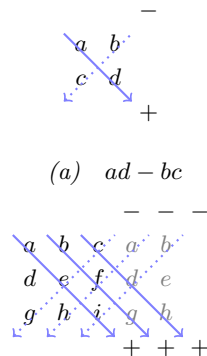
$$|a_{ij}| = \sum d_{j_1j_2\dots j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n},$$

ahol az összegzés végigfut az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz összes lehetséges $\{j_1, j_2, \dots, j_n\}$ permutációján.

Az $n!$ az n növekedtével rendkívül gyorsan nő (pl. $10! = 3628800$), determináns ilyen módon való számítása viszonylag kis rend esetén már számítógéppel sem lehetséges emberi idő alatt. E felbontást a determinánsok tulajdonságainak vizsgálatában használjuk. Számításhoz csak az $n = 2$ és $n = 3$ esetekben használjuk, igaz, azokra gyakran. $n = 2$ esetén az előző állítás szerint

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} = ad - bc,$$

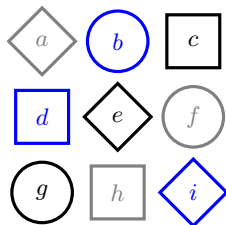
mivel a második determináns egyetlen sorcserével hozható diagonális alak-
 ra. $n = 3$ esetén – felhasználva a fenti ábrát is – kapjuk, hogy



$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f \\ 0 & h & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & f \\ g & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ d & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ = aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg \\ = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg$$

(b) $aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg$

4.1. ábra. Az (a) másod- és a (b) harmadrendű determináns kiszámítása: a főátló irányú szorzatok összegéből vonjuk ki a mellékátló irányú szorzatokat. Harmadrendű esetben kezdetben könnyíthetünk magunknak a determináns első két oszlopának a determináns utáni megismétlésével.



4.2. ábra. A harmadrendű determináns kiszámítására egy – IQ-tesztek típuskérdésére emlékeztető – másik módszer: az egyforma alakúak szorzatának összegéből ki kell vonni az egyforma színűek szorzatait.

E két formula könnyen megjegyezhető egy egyszerű szabállyal, amelyet az $n = 3$ esetben *Sarrus-szabálynak* is neveznek: a főátló irányú szorzatok összegéből vonjuk ki a mellékátló irányú szorzatokat. (Hogy mit értsünk főátló és mellékátló irányú szorzaton, a mellékelt ábrákról megérthető.) Fontos, hogy hasonló szabály $n > 3$ esetén már nem érvényes (ld. a 4.1.5. feladatot).

A determináns 4.17. tételbeli felbontása a determináns értékét a determináns elemeinek függvényeként állítja elő. Ennek sok szép és fontos következménye van. Íme kettő:

► Egy algebrai következmény: a determináns kiszámolásához elég csak az összeadás és szorzás művelete, az osztásra, melyet az elemi sorműveletek során használhatunk, nincs szükség. Eszerint egész számokból álló determináns értéke egész szám.

► Egy függvényanalízis körébe tartozó következmény: a determináns értéke folytonos, sőt differenciálható függvénye elemeinek. Eszerint bármely kis pozitív ε -hoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy ha a determináns bármely eleme legfőbb δ értékkel megváltozik, akkor a determináns értéke legfőbb ε -nyit változik.

Permutációs mátrix determinánsa* Kígyó determinánsának kiszámításában egyetlen bizonytalan pont maradt, a hozzá tartozó permutációs mátrix értékének kiszámítása. Kérdés, nem fordulhat-e elő, hogy páros és páratlan sok sorcserével is eljuthatunk egy permutációs mátrixból az identikusba.

Azt mondjuk, hogy egy permutációs mátrix két sora inverzióban áll, ha az előbb álló sorbeli 1-es hátrébb van, mint a másik sorbeli. Például a

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix inverzióinak száma 4, mert az első-második, első-negyedik, második-negyedik, harmadik-negyedik sorpárok inverzióban vannak.

4.18. TÉTEL: PERMUTÁCIÓS MÁTRIX ELŐJELE. A permutációs mátrix aszerint $+1$ vagy -1 , hogy inverzióban álló sorpárjainak száma páros vagy páratlan.

BIZONYÍTÁS. Elég megmutatni, hogy egy sorcsere mindig megváltoztatja az inverziók számának paritását, vagyis azok száma párosból páratlanra, páratlanból párosra változik. Így ha egy permutációs mátrix inverzióinak száma páros, akkor csak páros sok sorcserével vihető az identikus mátrixba. Hasonlóan, ha az inverziók száma páratlan, akkor csak páratlan sokkal.

Ha a két megcserélendő sor szomszédos, akkor a sorcsere megváltoztatja a két sor viszonyát: ha inverzióban álltak, akkor ezután nem fognak, és fordítva. Az előttük és mögöttük álló sorokhoz való viszonyuk nem változott. Eszerint az inverziók száma eggyel nőtt vagy eggyel csökkent, azaz paritása megváltozott.

Ezután cseréljük ki az i -edik és j -edik sorokat (legyen $i < j$). Az inverziók számának nyomon követése érdekében ezt szomszédos sorok cseréjével valósítjuk meg. Cseréljük ki az i -ediket az $(i+1)$ -edikkel, majd azt az $(i+2)$ -edikkel, ..., míg az eredetileg i -edik sor a j -edik helyére nem kerül. Ehhez $j-i$ sorcsere van szükség. Ezután az eredetileg j -edik sort $j-i-1$ sorcserevel az i -edik helyre visszük. Ez összesen $2(j-i)-1$, azaz páratlan sok sorcsere, ami a paritást valóban ellenkezőjére változtatja. ■

4.19. PÉLDA: INVERZIÓK SZÁMA ÉS A DETERMINÁNS. Mennyi az inverziók száma abban a mátrixban, melynek mellékátlójában egyesek, egyebütt nullák állnak, és mennyi ennek determinánsa?

MEGOLDÁS. E mátrixban bármely két sor inverzióban áll egymással, így ha a sorok száma n , a sorpároké $n(n-1)/2$. Eszerint e mátrix determinánsa $(-1)^{n(n-1)/2}$. ■

Előjeles alddetermináns Az előző paragrafushoz hasonlóan bontsuk az

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

determinánst, az első sorvektorának felbontásával három determináns összegére, de egyúttal emeljük is ki az első sor elemét, majd oszlopcsere-kkel vigyünk az 1-est tartalmazó oszlopot az első oszlop helyére:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= a \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \\ &= a \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ e & d & f \\ h & g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f & d & e \\ i & g & h \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Ha ezt összevetjük a Sarrus-szabályban kapott képlettel, igen érdekes sejtést fogalmazhatunk meg:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg \\ &= a(ei - fh) - b(fg - di) + c(dh - eg) \\ &= a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Mielőtt ezt megtennénk, némi előkészítés következik.

4.20. DEFINÍCIÓ: ELŐJELES ALDDETERMINÁNS. Az n -edrendű $|\mathbf{A}|$ determináns i -edik sorának és j -edik oszlopának elhagyásával kapott $(n-1)$ -edrendű determináns $(-1)^{i+j}$ -szeresét az $|\mathbf{A}|$ determináns a_{ij} eleméhez tartozó *előjeles alddeterminánsának* nevezzük.

4.21. PÉLDA: ELŐJELES ALDDETERMINÁNS. Számítsuk ki az

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

determináns második sor harmadik eleméhez tartozó előjeles alddeterminánsát!

MEGOLDÁS. A determináns második sorát és harmadik oszlopát kiszíneztük

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \mathbf{3} & 4 \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{2} \\ 2 & 2 & \mathbf{2} & 2 \\ 0 & 1 & \mathbf{5} & 4 \end{vmatrix}.$$

Az ezek elhagyása után megmaradó aldetermináns és -1 megfelelő hatványának szorzata, vagyis a kért előjeles aldetermináns

$$(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-2) = 2.$$

4.22. ÁLLÍTÁS: DETERMINÁNS RENDJÉNEK CSÖKKENTÉSE. Tegyük fel, hogy az n -edrendű $|\mathbf{A}|$ determináns a_{ij} elemének sorában vagy oszlopában minden további elem 0. Jelölje A_{ij} az az a_{ij} elemhez tartozó előjeles aldeterminánst. Ekkor

$$|\mathbf{A}| = a_{ij} A_{ij}.$$

BIZONYÍTÁS. Legyen az $|\mathbf{A}|$ determináns i -edik sorában az a_{ij} -n kívül minden elem 0 (hasonlóan tárgyalható, ha a j -edik oszlopban vannak nullák). Cseréljük ki a j -edik oszlopot a $(j-1)$ -edikkel, majd ezt a $(j-2)$ -edikkel $\dots$, addig, míg az $\mathbf{A}_{*j}$ oszlop az első oszlopba nem kerül. Ez $j-1$ oszlopcserét jelent, azaz a determináns értéke $(-1)^{j-1}$ -szeresére változik. Ezután hasonlóképp vigyük az i -edik sort szomszédos sorok cseréjével az első sorba. Ehhez $i-1$ csere szükséges, miközben a determináns értéke $(-1)^{i-1}$ -szeresére változik.

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \mathbf{a_{1j}} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \mathbf{a_{2j}} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{a_{ij}} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \mathbf{a_{nj}} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} \mathbf{a_{1j}} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \mathbf{a_{2j}} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a_{ij}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a_{nj}} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ & = (-1)^{i-1} (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} \mathbf{a_{ij}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{a_{1j}} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \mathbf{a_{2j}} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a_{nj}} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ & \stackrel{*}{=} (-1)^{i+j} a_{ij} \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ a_{1j} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{2j} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ & \stackrel{**}{=} (-1)^{i+j} a_{ij} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ & = a_{ij} A_{ij}. \end{aligned}$$

Az $*$ -os egyenlőségnél kihasználtuk, hogy $i+j-2$ és $i+j$ paritása azonos, tehát -1 kitevőjeként is azonos eredményt adnak, továbbá kiemeltük a_{ij} -t az első sorból. A $**$ -os egyenlőség előtt álló determináns kiszámításához

csak a másodiktól lefelé lévő sorokat kell használni, a végeredményt az első oszlop elemei nem befolyásolják, így az első sor és első oszlop elhagyásával kapott determináns értéke ugyanaz. Végül az így kapott determináns az előjellel együtt épp A_{ij} , és ezzel bizonyítottuk az állítást. ■

4.23. PÉLDA: DETERMINÁNS RENDJÉNEK CSÖKKENTÉSE. A determináns rendjének csökkentésével számítsuk ki az alábbi determináns értékét!

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 8 & 4 \\ 6 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 8 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

MEGOLDÁS. Minden lépésben – esetleg egy apró átalakítás után – találunk egy sort vagy oszlopot, melyben csak egy nemnulla szám áll:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 8 & 4 \\ 6 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 8 & 9 & \boxed{8} & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} &= (-1)^{4+3} \cdot 8 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 8 & 4 \\ 6 & 0 & 7 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\ (S_2 - S_1) &= (-8) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & 0 \\ 6 & 0 & 7 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (-8) \cdot (-1)^{2+3} \cdot 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \boxed{6} & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (-8) \cdot (-5) \cdot (-1)^{2+1} \cdot 6 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (-8) \cdot (-5) \cdot (-6) \cdot (-12) \\ &= 2880. \end{aligned}$$

Determináns kifejtése Ritkán adódik, hogy a determináns rendje az előző (4.22.) állítás segítségével csökkenthető, viszont fölhasználásával a determinánsok egy gyönyörű kifejtési tételét kapjuk. Ezt egyes könyvek *Laplace-féle kifejtési tételnek* nevezik (más könyvek csak ennek egy – a feladatok közt megtalálható – általánosítását hívják így, sok könyv pedig e tételbeli összefüggéssel definiálja a determinánst).

4.24. TÉTEL: DETERMINÁNSOK KIFEJTÉSI TÉTELE. Egy determináns értéke megkapható úgy, hogy egy tetszőleges sorának vagy oszlopának minden elemét beszorozzuk a hozzá tartozó előjeles alldeterminánssal, és e szorzatokat összeadjuk. Képletben, az n -edrendű $|\mathbf{A}|$ determináns értéke i -edik sora szerint kifejtve

$$|\mathbf{A}| = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik},$$

és j -edik oszlopa szerint kifejtve

$$|\mathbf{A}| = \sum_{k=1}^n a_{kj} A_{kj}.$$

BIZONYÍTÁS. Hasonlóan a korábbiakban látottakhoz, az i -edik sorvektor felbontásával a determinánst n olyan determináns összegére bontjuk, amelyek i -edik sorában csak egy elem származik az eredeti determinánsból, a többi 0. Az egyszerűség kedvéért a felbontást csak $n = 3$ és $i = 2$ esetére írjuk fel, de tetszőleges n -re ugyanígy megy. Ezután a 4.22. állítást alkalmazzuk mindegyik új determinánsra:

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \\ &= \sum_{k=1}^3 a_{2k}A_{2k}. \end{aligned}$$

A bizonyítás ugyanígy megy az oszlopokra is, amit példaként az $n = 3$, $j = 3$ esettel szemléltetünk:

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} \\ &= \sum_{k=1}^3 a_{k3}A_{k3}. \end{aligned}$$

4.25. PÉLDA: KIFEJTÉSI TÉTEL. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét a kifejtési tételt használva!

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

MEGOLDÁS. Érdekes a harmadik oszlop szerint kifejtetni, mert ott két 0 is van, így a velük megszorozott aldeterminánsokat le sem kell írni.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1.$$

Determinánsfüggvény létezése és egyértelműsége ???

Cramer-szabály és a mátrix inverze Eddig akár az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldására, akár az $\mathbf{A}$ mátrix inverzének kiszámítására olyan módszert használtunk, mely csak egy algoritmust ad a számításokra, de nem adja meg a kapcsolatot (képletet) az adatok és a kiszámítandók közt. E paragrafusban ezt pótoljuk!

Jelölje $\mathbf{A}_{i,\mathbf{b}}$ azt a mátrixot, melyet akkor kapunk, ha az $\mathbf{A}$ mátrix i -edik oszlopának helyére a $\mathbf{b}$ vektort írjuk. Kifejtve

$$\mathbf{A}_{i,\mathbf{b}} = [\mathbf{a}_{*1} \ \dots \ \mathbf{a}_{*,i-1} \ \mathbf{b} \ \mathbf{a}_{*,i+1} \ \dots \ \mathbf{a}_{*n}].$$

E jelöléssel $\mathbf{I}_{i,\mathbf{x}}$ mátrixon az $[\mathbf{e}_{*1} \ \dots \ \mathbf{e}_{*,i-1} \ \mathbf{x} \ \mathbf{e}_{*,i+1} \ \dots \ \mathbf{e}_{*n}]$ mátrixot értjük.

4.26. TÉTEL: CRAMER-SZABÁLY. Legyen $\mathbf{A}$ egy $n \times n$ -es mátrix. Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg egyértelműen, ha $\det \mathbf{A} \neq 0$. Ekkor a megoldás előáll

$$x_i = \frac{\det \mathbf{A}_{i,\mathbf{b}}}{\det \mathbf{A}}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

alakban.

Gabriel Cramer (1704–1752) genfi születésű svájci matematikus, akinek az algebrai görbékről szóló „Introduction à l’analyse des lignes courbes algébriques” című, 1750-ben publikált munkájában szerepelt a ma Cramer-szabály néven ismert tétel. A szabályt korábban már mások is ismerték.

BIZONYÍTÁS. Az állítás első felét már bizonyítottuk a 4.16. tételben. Ebből felhasználjuk, hogy mivel az egyenletrendszer megoldható, $\det \mathbf{A} \neq 0$. Kihasználva, hogy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, továbbá hogy $\mathbf{Ae}_i = \mathbf{a}_{*i}$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{AI}_{i,\mathbf{x}} &= \mathbf{A}[\mathbf{e}_{*1} \dots \mathbf{e}_{*,i-1} \mathbf{x} \mathbf{e}_{*,i+1} \dots \mathbf{e}_{*n}] \\ &= [\mathbf{Ae}_{*1} \dots \mathbf{Ae}_{*,i-1} \mathbf{Ax} \mathbf{Ae}_{*,i+1} \dots \mathbf{Ae}_{*n}] \\ &= [\mathbf{a}_{*1} \dots \mathbf{a}_{*,i-1} \mathbf{b} \mathbf{a}_{*,i+1} \dots \mathbf{a}_{*n}] \\ &= \mathbf{A}_{i,\mathbf{b}} \end{aligned}$$

Mivel az $\mathbf{I}_{i,\mathbf{x}}$ mátrix i -edik sorának és oszlopának elhagyása után egy identikus mátrix marad, ezért az i -edik sora szerint kifejtve

$$\det \mathbf{I}_{i,\mathbf{x}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & x_1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & x_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_n & \dots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{i+i} x_i = x_i.$$

Így a determinánsok szorzási szabályát is használva $\det(\mathbf{AI}_{i,\mathbf{x}}) = \det \mathbf{A}_{i,\mathbf{b}}$, amiből $x_i \det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}_{i,\mathbf{b}}$, azaz $x_i = \det \mathbf{A}_{i,\mathbf{b}} / \det \mathbf{A}$. ■

4.27. PÉLDA: CRAMER-SZABÁLY. Oldjuk meg az

$$2x + 5y = 4$$

$$5x + 3y = 6$$

egyenletrendszert a Cramer-szabállyal!

MEGOLDÁS. A kiszámolandó determinánsok a $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ jelöléssel:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -19, \quad \mathbf{A}_{1,\mathbf{b}} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -18, \quad \mathbf{A}_{2,\mathbf{b}} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -8.$$

$$\text{Innen } x = \frac{-18}{-19} = \frac{18}{19}, \quad y = \frac{-8}{-19} = \frac{8}{19}. \quad \blacksquare$$

Ha egyenletrendszert meg tudunk oldani, akkor szimultán egyenletrendszert is, és így pl. az $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ megoldásával a mátrix inverzét is ki tudjuk számítani. Az $\mathbf{x}_{ij}$ elem kiszámításához az $\mathbf{Ax}_{*j} = \mathbf{e}_j$ egyenletrendszert kell megoldani. A megoldás i -edik koordinátája az $\mathbf{x}_{ij}$ elem. A Cramer-szabály szerint

$$\mathbf{x}_{ij} = \frac{\det \mathbf{A}_{i,\mathbf{e}_j}}{\det \mathbf{A}}$$

Mivel az $\mathbf{A}_{i,\mathbf{e}_j}$ mátrix i -edik oszlopában csak egy elem nem 0, a kifejtési tétel szerint

$$\det \mathbf{A}_{i,\mathbf{e}_j} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & 1 & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = A_{ji},$$

vagyis e determináns megegyezik az $\mathbf{A}$ egy előjeles aldeterminánsával, tehát

$$\mathbf{x}_{ij} = \frac{\det \mathbf{A}_{i, \mathbf{e}_j}}{\det \mathbf{A}} = \frac{\det \mathbf{A}_{ji}}{\det \mathbf{A}}.$$

Mint látjuk, az $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$ előállításához az $\mathbf{A}$ előjeles aldeterminánsai mátrixának transzponáltjára van szükség. (E mátrixot szokás az $\mathbf{A}$ *adjungáltjának* is nevezni és $\text{adj}(\mathbf{A})$ -val jelölni, de mi nem fogjuk, mivel e szót komplex elemű mátrix konjugált transzponáltjára is használják, és ez félreértésekhez vezethet.) Így kapjuk a következő tételt:

4.28. TÉTEL: MÁTRIX INVERZÉNEK ELEMELI. Tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ egy invertálható mátrix. Ekkor inverzének ij indexű eleme az a_{ji} elemhez tartozó előjeles aldetermináns és a determináns hányadosa, azaz

$$[\mathbf{A}^{-1}]_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det \mathbf{A}}.$$

Így az inverz mátrix az

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} [A_{ij}]^T. \quad (4.1)$$

alakba írható.

Könnyen ellenőrizhető, hogy az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mátrix előjeles aldeterminánsainak transzponáltja

$$\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix},$$

így inverze

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

► A mátrix inverzének e kifejezése azt mutatja, hogy az inverz folytonos függvénye a mátrix minden elemének minden olyan helyen, ahol a determináns nem 0, azaz minden olyan helyen, ahol az inverz egyáltalán létezik.

► Egészelemű mátrix inverze pontosan akkor egészelemű, ha determinánsa 1 vagy -1 . Ez abból adódik, hogy $\det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{A}^{-1}) = \det \mathbf{I} = 1$, tehát ha $|\det \mathbf{A}| \neq 1$, akkor $\det(\mathbf{A}^{-1})$ nem egész szám, tehát $\mathbf{A}^{-1}$ nem lehet egészelemű, ha pedig $|\det \mathbf{A}| = 1$, akkor a (4.1) képlet szerint $\mathbf{A}^{-1}$ minden eleme egész szám.

4.29. PÉLDA: MÁTRIX INVERZE. Számítsuk ki az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{és a} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix inverzét!

MEGOLDÁS. Mivel $\det(\mathbf{A}) = 1$, ezért $\mathbf{A}^{-1}$ megegyezik az előjeles aldeterminánsok mátrixának transzponáltjával. Ennek mind a 16 elemét nem kell kiszámolni, mert felső háromszögmátrix inverze felső háromszögmátrix. Hasonlóan könnyen látható, hogy a főátlóbeli elemekhez tartozó előjeles aldeterminánsok értéke 1. Tehát csak a főátló alatti elemek előjeles aldeterminánsait kell kiszámolni. Példaként egyet mutatunk:

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -2.$$

Hasonlóan kiszámolva a többi is kapjuk, hogy

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A $\mathbf{B}$ mátrixból csak egy nemnulla kigyó választható ki, így determinánsa könnyen számolható: $\det \mathbf{B} = 16$. Az inverz kiszámításához szerencsére itt sem kell sok aldeterminánst számolni, mert nagy részük láthatóan 0 értékű. Vegyük figyelembe a számolásnál azt is, hogy $\mathbf{B}$ szimmetrikus, így egyrészt a szimmetrikusan elhelyezkedő elemek közül csak az egyiket kell kiszámolni, másrészt a szimmetria miatt a végén szükségtelen a transzponálás.

$$\mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 0 & 8 & 0 & -8 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ -8 & 0 & 8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Már ezekből az egyszerű példákból is látszik, hogy mátrix invertálása e módszerrel igen műveletigényes. Valóban, gyakorlati számításokhoz nem használjuk, elméleti okfejtésekben vesszük nagy hasznát.

- 1• Írjuk fel a determináns definícióját mátrixokon értelmezett függvény helyett n -változós függvénnyel.
- 2• Írjuk fel a determináns definícióját oly módon, hogy det egy n -változós, n -dimenziós vektorokon értelmezett skálár értékű függvény legyen.
- 3° Adjunk új bizonyítást a determinánsok szorzásszabályára azt igazolva, hogy az $\mathbf{A} \mapsto \det(\mathbf{AB})/\det(\mathbf{B})$ leképezés eleget tesz a determináns definíciójában kirótt feltételeknek.
- 4 izonyítsuk be az LU-felbontás fölhasználásával a 4.12. tételt (mátrix determinánsa megegyezik transzponáltjának determinánsával).

Az $\mathbf{A}$ előáll $\mathbf{PLU}$ alakban, ahol $\mathbf{P}$ permutációs mátrix, $\mathbf{L}$ alsó, $\mathbf{U}$ felső háromszögmátrix. Az $\mathbf{L}$ és az $\mathbf{U}$ háromszögmátrixok, így determinánsuk megegyezik transzponáltjuk determinánsával, hisz a főátlóbeli elemek helyben maradnak a transzponálás során. A $\mathbf{P}$ permutációs mátrix determinánsa 1 vagy -1 , transzponáltja pedig megegyezik inverzével, így $\det(\mathbf{I}) = \det(\mathbf{PP}^T) = \det(\mathbf{P})\det(\mathbf{P}^T) = 1$, azaz $\mathbf{P}$ és $\mathbf{P}^{-1}$ egyszerre 1 vagy -1 , tehát megegyeznek. Végül $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{PLU}) = \det(\mathbf{P})\det(\mathbf{L})\det(\mathbf{U})$, és $\det(\mathbf{A}^T) = \det((\mathbf{PLU})^T) = \det(\mathbf{U}^T\mathbf{L}^T\mathbf{P}^T) = \det(\mathbf{U})\det(\mathbf{L})\det(\mathbf{P})$ összevetése bizonyítja az állítást.

- 5• A 4-edrendű determinánsok $4! = 24$ kigyó összegére bonthatók. Soroljuk fel őket! (A Sarrus-szabály 4-edrendű determinánsra csak 8 kigyóból állna, nem használható!)
- 6• **Ferde kifejtés.** Vegyük egy determináns egy sorának elemeit, és szorozzuk meg mindegyiket egy másik sor azonos oszlopbeli eleméhez tartozó előjeles aldeterminánsával, majd képezzük ezek összegét. Ez mindig 0. Hasonló állítás igaz a determináns minden oszlopára, azaz az i -edik és u -adik sorra ($i \neq u$) és a j -edik és v -edik oszlopra ($j \neq v$):

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{uk} = 0, \quad \sum_{k=1}^n a_{kj} A_{kv} = 0.$$

Ha az i -edik sor elemeit az u -adik sorhoz tartozó előjeles aldeterminánsokkal szorozzuk, akkor az u -adik sor elemeit nem használjuk, tehát szabadon megváltoztathatjuk. Mással az i -edik sort az u -adik helyére, tehát minden k -ra $a_{ik} = a_{uk}$. Ekkor egyrészt $\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{uk} = \sum_{k=1}^n a_{uk} A_{uk}$, azaz a determináns u -adik sor szerinti kifejtését kaptuk, másrészt e determinánsnak van két azonos sora, tehát determinánsa 0. Az oszlopokra vonatkozó állítás egy transzponálással visszavezethető erre.

- 7• Foglaljuk egyetlen állításba a kifejtési és a ferde kifejtési tételeket!

A két tétel képletei közös képletbe foglalhatók. Sorokra:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{uk} = \begin{cases} \det \mathbf{A}, & \text{ha } i = u, \\ 0, & \text{ha } i \neq u, \end{cases} \quad (4.2)$$

oszlopokra:

$$\sum_{k=1}^n a_{kj} A_{kv} = \begin{cases} \det \mathbf{A}, & \text{ha } j = v, \\ 0, & \text{ha } j \neq v. \end{cases} \quad (4.3)$$

- 8• **Mátrix inverze.** A kifejtési és a ferde kifejtési (ld. az előző és a 4.1.6. feladatokat) segítségével adjunk új bizonyítást a mátrix inverzére vonatkozó $??eq:invadj$) formulára!

A két kifejtési tételből adódik, hogy

$$[a_{ij}][A_{ij}]^T = \det(\mathbf{A})\mathbf{I},$$

ugyanis $[a_{ij}]$ i -edik sorának és $[A_{ij}]^T$ u -adik oszlopának, azaz $[A_{ij}]$ u -adik sorának skaláris szorzata a (4.2) képlet szerint $\det(\mathbf{A})$, ha $i = u$, azaz a szorzat főátlójában, egyebütt pedig 0. Ebből pedig mindkét képlet adódik.

4.2. Lineáris leképezések

Minden $\mathbf{A}$ mátrixhoz tartozik egy $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ leképezés. E leképezések az n -dimenziós térben épp egybeesnek a lineáris kombinációt megtartó leképezésekkel, melyeket lineáris leképezéseknek nevezünk. A lineáris leképezések végtelen dimenziós terek között is értelmezhetők, így ezek a mátrix általánosításának tekinthetők.

Mátrixtranszformáció Mátrixtranszformáción az

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$$

leképezést értjük. Egy $m \times n$ -es $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrixhoz így egy $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ leképezés tartozik, ugyanis ha $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ és $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$, akkor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$.

A mátrixok jelölésére félkövér betűket használunk, a leképezésekre egyszerű dőlt betűket. A továbbiakban azt a konvenciót követjük, hogy egy mátrixhoz tartozó mátrixtranszformációt az azonos, de dőlt betűvel jelöljük, például az $\mathbf{A}$ mátrixhoz tartozó mátrixtranszformációt A jelöli, azaz

$$A : \mathbf{x} \mapsto A(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}.$$

Az A leképezés $\mathbf{x}$ vektoron való hatásának eredményére az $A(\mathbf{x})$ és az $\mathbf{Ax}$ jelölés is használatos.

4.30. PÉLDA: VEKTORI SZORZÁSSAL DEFINIÁLT MÁTRIXTRANSZFORMÁCIÓ. Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ egy adott $\mathbb{R}^3$ -beli vektor. Legyen A az a transzformáció, mely a tér tetszőleges $\mathbf{x}$ vektorához az $\mathbf{a} \times \mathbf{x}$ vektort rendeli. Tehát

$$A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} \times \mathbf{x}.$$

Mutassuk meg, hogy az A függvény egy mátrixtranszformáció, azaz létezik egy olyan $\mathbf{A}$ mátrix, hogy $A(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$.

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{a} \times \mathbf{x}$ vektori szorzat koordinátás alakban:

$$\mathbf{y} = \mathbf{a} \times \mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2x_3 - a_3x_2 \\ a_3x_1 - a_1x_3 \\ a_1x_2 - a_2x_1 \end{bmatrix}.$$

Az eredményből azonnal látszik, hogy e transzformáció mátrixtranszformáció, hisz $\mathbf{y}$ minden koordinátája $\mathbf{x}$ koordinátáinak lineáris kifejezése. A szorzatot $\mathbf{x}$ koordinátái szerint rendezzük, ahonnan azonnal leolvasható a transzformáció mátrixa, és fölírható a transzformáció mátrixszorzatos alakja:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -a_3x_2 + a_2x_3 \\ a_3x_1 - a_1x_3 \\ -a_2x_1 + a_1x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

E feladatra később még többször visszatérünk. ■

Műveletek mátrixtranszformációk között A mátrixtranszformációk $\mathbb{R}^n$ -ből $\mathbb{R}^m$ -be képző függvények, így a köztük lévő műveleteket nem kell definiálni, azokat ismerjük. Az a kérdés, hogy van-e kapcsolat a mátrixműveletek és a mátrixokhoz tartozó transzformációk közti műveletek között! Például ha A és B az $\mathbf{A}$, illetve $\mathbf{B}$ mátrixhoz tartozó transzformáció, azaz $A : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ és $B : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{Bx}$, akkor igaz-e, hogy $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ -hez az $A + B$ tartozik, azaz igaz-e, hogy $(A + B)(\mathbf{x}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{x}$?

4.31. TÉTEL: MÁTRIXTRANSZFORMÁCIÓK MŰVELETEI. Legyen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ három $m \times n$ -es mátrix, legyen A , B és C a hozzájuk tartozó három mátrixtranszformáció és legyen c egy skálár. Ekkor

- 1) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$ pontosan akkor igaz, ha $A + B = C$, és
- 2) $c\mathbf{A} = \mathbf{C}$ pontosan akkor igaz, ha $cA = C$.

Ha $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ és $\mathbf{Z}$ típusa rendre $m \times k$, $k \times n$, illetve $m \times n$, és X , Y és Z a hozzájuk tartozó három mátrixtranszformáció, akkor

- 3) $\mathbf{XY} = \mathbf{Z}$ pontosan akkor igaz, ha $X \circ Y = Z$, azaz mátrixok szorzásának a függvények kompozíciója felel meg.

BIZONYÍTÁS. A bizonyítások a mátrixműveletek tulajdonságaiból következnek. Ott, ahol valamelyik mátrixazonosságot használjuk, az egyenlőség fölé egy M -betűt írunk, ahol pedig a függvények közti műveletek definícióit használjuk, ott egy F -betűt:

- 1) $(A + B)(\mathbf{x}) \stackrel{F}{=} A(\mathbf{x}) + B(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bx} \stackrel{M}{=} (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{x} = \mathbf{Cx} = C(\mathbf{x}).$
- 2) $(cA)(\mathbf{x}) \stackrel{F}{=} cA(\mathbf{x}) = c(\mathbf{Ax}) \stackrel{M}{=} (c\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{Cx} = C(\mathbf{x}).$
- 3) $(X \circ Y)(\mathbf{x}) \stackrel{F}{=} X(Y(\mathbf{x})) = X(\mathbf{Yx}) = \mathbf{X}(\mathbf{Yx}) \stackrel{M}{=} (\mathbf{XY})\mathbf{x} = \mathbf{Zx} = Z(\mathbf{x}).$ ■

Az $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvénynek a $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény inverze, ha minden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ helyen $(f(g(\mathbf{x}))) = \mathbf{x}$ és $(g(f(\mathbf{x}))) = \mathbf{x}$, azaz ha kompozícióik az $f \circ g$ és a $g \circ f$ függvények megegyeznek az identikus leképezéssel.

4.32. ÁLLÍTÁS: INVERZ MÁTRIXTRANSZFORMÁCIÓK. Legyenek A és B az $n \times n$ -es $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixokhoz tartozó mátrixtranszformációk. Ekkor az $\mathbf{A}$ mátrix inverze pontosan akkor a $\mathbf{B}$ mátrix, ha az A leképezés inverze a B leképezés.

BIZONYÍTÁS. A 4.31. tételből tudjuk, hogy $(A \circ B)(\mathbf{x}) = \mathbf{ABx}$ és $(B \circ A)(\mathbf{x}) = \mathbf{BAx}$. Így ha $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$, azaz $\mathbf{A}$ inverze $\mathbf{B}$, akkor $(A \circ B)(\mathbf{x}) = \mathbf{ABx} = \mathbf{Ix} = \mathbf{x}$, és hasonlóan $(B \circ A)(\mathbf{x}) = \mathbf{BAx} = \mathbf{Ix} = \mathbf{x}$, azaz $A \circ B$ és $B \circ A$ az identikus leképezés. Hasonlóképp, ha $A \circ B$ és $B \circ A$ az identikus leképezés, akkor $(\mathbf{AB})\mathbf{x} = (A \circ B)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ és $(\mathbf{BA})\mathbf{x} = (B \circ A)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, így $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$, vagyis $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ egymás inverzei. ■

Mátrixtranszformációk tulajdonságai Ez a paragrafus arra az igen fontos tényre épül, hogy a mátrixtranszformációk megőrzik a lineáris kombinációkat, azaz egy lineáris kombináció transzformáltja a vektorok transzformáltjainak azonos lineáris kombinációjával egyenlő.

4.33. TÉTEL: A LINEÁRIS KOMBINÁCIÓT MEGŐRZŐ $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ LEKÉPEZÉSEK. Legyen $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ egy tetszőleges leképezés. A következő három állítás ekvivalens.

- (a) Létezik egy olyan $m \times n$ -es $\mathbf{A}$ mátrix, hogy az A leképezés megegyezik az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ leképezéssel, azaz A az $\mathbf{A}$ mátrixhoz tartozó mátrixtranszformáció.
- (b) Az A leképezés homogén és additív, azaz tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra és $c \in \mathbb{R}$ skálárakra
 1. $A(c\mathbf{x}) = cA(\mathbf{x})$ (A homogén),
 2. $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y})$ (A additív).
- (c) Az A leképezés megőrzi a lineáris kombinációkat, azaz tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra és $c, d \in \mathbb{R}$ skálárokra $A(c\mathbf{x} + d\mathbf{y}) = cA(\mathbf{x}) + dA(\mathbf{y})$.

BIZONYÍTÁS. $(a) \Rightarrow (b)$: Ha van olyan $\mathbf{A}$ mátrix, hogy minden $\mathbf{x}$ vektorra $\mathbf{Ax} = \mathbf{Ax}$, akkor

$$\begin{aligned} A(c\mathbf{x}) &= \mathbf{A}(c\mathbf{x}) = c\mathbf{Ax} = cA\mathbf{x}, \text{ és} \\ A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{Ay} = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}. \end{aligned}$$

$(b) \Rightarrow (c)$: Ha A homogén és additív, akkor

$$A(c\mathbf{x} + d\mathbf{y}) = A(c\mathbf{x}) + A(d\mathbf{y}) = cA\mathbf{x} + dA\mathbf{y},$$

ahol az első egyenlőségnél az A additivitását, a másodiknál a homogenitását használtuk.

$(c) \Rightarrow (a)$: Tekintsük $\mathbb{R}^n$ standard bázisát és az $A\mathbf{e}_i$ vektorokból képzett $\mathbf{A} = [A\mathbf{e}_1 | A\mathbf{e}_2 | \dots | A\mathbf{e}_n]$ mátrixot, valamint legyen az $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ egy tetszőleges vektor. Ha A olyan leképezés, mely megőrzi a lineáris kombinációkat, akkor

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= A(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n) \\ &= x_1A\mathbf{e}_1 + x_2A\mathbf{e}_2 + \dots + x_nA\mathbf{e}_n \\ &= [A\mathbf{e}_1 \quad A\mathbf{e}_2 \quad \dots \quad A\mathbf{e}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{Ax} \end{aligned}$$

Tehát valóban létezik olyan $\mathbf{A}$ mátrix, hogy $\mathbf{Ax} = \mathbf{Ax}$. Ráadásul ilyen mátrix csak ez az egy van, mert bármely $\mathbf{e}_i$ bázisvektorra és bármely $\mathbf{A}$ mátrixra $A\mathbf{e}_i = \mathbf{A}_{*i}$, tehát az $\mathbf{A}_{*i}$ oszlopvektor csak $A\mathbf{e}_i$ lehet. ■

Megjegyzések:

► A (c) pont csak két vektor lineáris kombinációjáról szól, de ebből indukcióval adódik bármely lineáris kombinációra is az állítás. Ezt a bizonyításban ki is használtuk.

► E tétel (b) és (c) pontja lehetővé teszi a mátrixtranszformáció általánosítását. Ezt tesszük a következő definícióban.

4.34. DEFINÍCIÓ: LINEÁRIS LEKÉPEZÉS. Legyen H_1 és H_2 mindegyike olyan halmaz, melynek elemein értelmezve van egy összeadás és egy „ $\mathbb{R}$ -beli skalárral való szorzás” művelet. Azt mondjuk, hogy egy $A : H_1 \rightarrow H_2$ leképezés *lineáris*, ha homogén és additív, azaz ha tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H_1$ elemekre és $c \in \mathbb{R}$ skalárra

$$\begin{aligned} A(c\mathbf{x}) &= cA(\mathbf{x}), & (\text{homogén}), \text{ és} \\ A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y}), & (\text{additív}). \end{aligned}$$

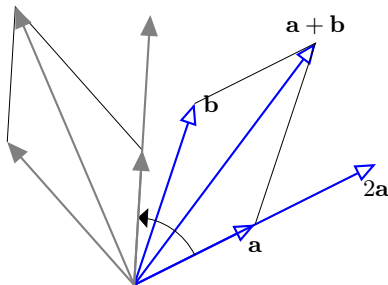
$H_1 = H_2$ esetén a lineáris leképezéseket *lineáris transzformációknak* is nevezzük.

4.35. PÉLDA: A DERIVÁLÁS ÉS INTEGRÁLÁS LINEÁRIS LEKÉPEZÉS. Legyen H_1 az egyváltozós valós, és minden valós helyen differenciálható függvények halmaza, H_2 pedig az egyváltozós valós függvények halmaza. Világos, hogy H_1 és H_2 is olyan halmaz, melynek elemei közt értelmezve van az összeadás és a skalárral való szorzás művelete. A deriválás művelete, azaz a $D : H_1 \rightarrow H_2 : f \mapsto D(f) = f'$ leképezés lineáris, ugyanis minden $c \in \mathbb{R}$ skalárra és tetszőleges $f, g \in H_1$ függvényre

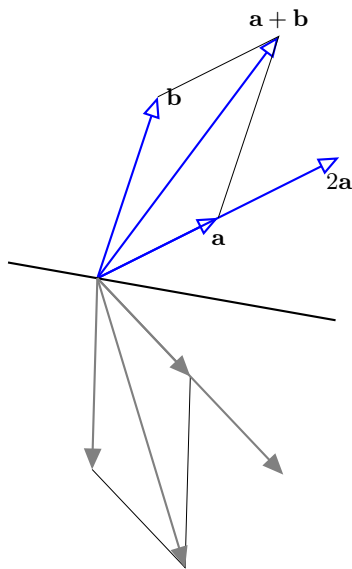
$$D(cf) = (cf)' = cf' = cD(f), \text{ és} \\ D(f+g) = (f+g)' = f' + g' = D(f) + D(g).$$

Hasonló összefüggések állnak fenn az integrálokra is, például legyen H_1 a $[0, 1]$ intervallumon Riemann-integrálható függvények halmaza, és legyen $H_2 = \mathbb{R}$. Ekkor az $f \mapsto \int_0^1 f$ leképezés lineáris, ugyanis tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ skalárra és tetszőleges $f, g \in H_1$ függvényre

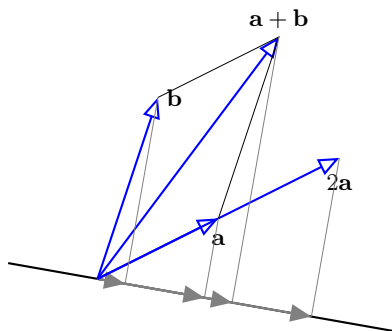
$$\int_0^1 cf = c \int_0^1 f, \text{ és } \int_0^1 (f+g) = \int_0^1 f + \int_0^1 g.$$



4.3. ábra. A pont körüli elforgatás lineáris leképezés



4.4. ábra. Az egyenesre való tükrözés lineáris leképezés



4.5. ábra. Az egyenesre való merőleges vetítés lineáris leképezés

4.36. PÉLDA: SÍKBELI FORGATÁS, TÜKRÖZÉS, VETÍTÉS. Mutassuk meg, hogy a síkbeli vektorok egy rögzített O pont körüli forgatása, egy egyenesre való tükrözése és merőleges vetítése lineáris leképezés.

MEGOLDÁS. A síkbeli vektorok pont körüli forgatása lineáris leképezés. Ugyanis könnyen látható, hogy egy vektor c -szeresének ($c \in \mathbb{R}$) elforgatottja megegyezik a vektor elforgatottjának c -szeresével, valamint hogy két vektor összegének elforgatottja megegyezik a vektorok elforgatottjainak összegével (ld. 4.3. ábra).

Hasonlóan egyszerűen látszik, hogy egy egyenesre való tükrözés egy vektor c -szeresét a vektor tükröképének c -szeresébe viszi, és két vektor összegét a két vektor tükröképének összegébe (ld. 4.4. ábra).

Végezetül ugyanígy megmutatható, hogy egy egyenesre való merőleges vetítés egy vektor c -szeresét a vektor vetületének c -szeresébe viszi, és két vektor összegét a két vektor vetületének összegébe (ld. 4.5. ábra). ■

Lineáris leképezések a síkban és a térben A 4.33. tétel bizonyításában megkonstruáltuk egy lineáris $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ leképezéshez azt a mátrixot, mely ezt a leképezést generálja, nevezetesen bizonyítottuk, hogy minden $\mathbf{x}$ vektorra

$$A\mathbf{x} = [A\mathbf{e}_1 | A\mathbf{e}_2 | \dots | A\mathbf{e}_n] \mathbf{x}.$$

Először vizsgáljunk meg néhány geometriailag leírható $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ és $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezést.

4.37. PÉLDA: A FORGATÁS MÁTRIXA. Írjuk fel a sík vektorait egy pont körül α szöggel elforgató leképezés mátrixát!

MEGOLDÁS. A 4.36. példa szerint a forgatás lineáris leképezés, így van mátrixa, melynek alakja $[A\mathbf{i} | A\mathbf{j}]$, ahol $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ jelöli az $\mathbb{R}^2$ standard bázisának elemeit. E vektorokat szemlélteti a 4.6. ábra.

Az $A\mathbf{i}$ vektor megegyezik $\mathbf{i}$ elforgatottjával, ami könnyen meghatározható, ha az origó körül forgatunk. $A\mathbf{i} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}$. A $\mathbf{j}$ vektor α szöggel való elforgatottja megegyezik az $A\mathbf{i}$ vektor $\pi/2$ szöggel való elforgatottjával, azaz $A\mathbf{j} = \begin{bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix}$. Így az A -hoz tartozó mátrix

$$A = [A\mathbf{i} | A\mathbf{j}] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Tehát bármely $\mathbf{x}$ vektor α szöggel való elforgatottja $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \mathbf{x}$. ■

4.38. PÉLDA: FORGATÁS EGY TETSZŐLEGES PONT KÖRÜL. Határozzuk meg a koordinátáit a $(4, 3)$ pont $(2, 1)$ körül $\pi/3$ radiánnal való elforgatásával kapott pontnak!

MEGOLDÁS. A forgatás középpontját toljuk az origóba, így a $(4, 3)$ pont a $(4, 3) - (2, 1) = (2, 2)$ pontba kerül. E pontot, illetve az oda mutató helyvektort forgassuk el $\pi/3$ radiánnal, azaz 60° -kal. Ez a forgatás mátrixával való beszorzással megkapható:

$$\begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \sqrt{3} \\ 1 + \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

E pontot a $(2, 1)$ vektorral eltoljuk, hogy ne az origó, hanem a $(2, 1)$ pont körüli elforgatottat kapjuk meg:

$$\begin{bmatrix} 1 - \sqrt{3} \\ 1 + \sqrt{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - \sqrt{3} \\ 2 + \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

4.39. PÉLDA: TENGELY KÖRÜLI FORGATÁS A TÉRBEN. Írjuk fel a koordinátatengelyek körüli α szöggel való forgatás mátrixát.

MEGOLDÁS. Tekintsük először a z -tengely körüli forgatást. Ekkor az $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ vektorok úgy transzformálódnak, mint a sík elforgatásánál, míg a $\mathbf{k}$ vektor helyben marad, tehát a bázisvektorok így transzformálódnak:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Így a z -tengely körüli forgatás mátrixa:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hasonlóképp kapjuk az x - és az y -tengely körüli forgatás mátrixát is:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

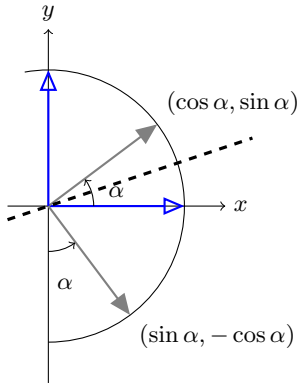
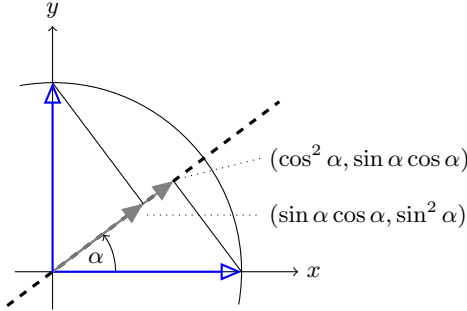
4.40. PÉLDA: A FORGATÁS MÁTRIXÁNAK INVERZE! Határozzuk meg a síkot α szöggel elforgató mátrix inverzét!

MEGOLDÁS. Először megállapítjuk, hogy a forgatás mátrixa invertálható, ugyanis determinánsa nem 0, hiszen $\begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$. Az egyik lehetséges megoldás, hogy egyszerűen a 2×2 -es mátrixok 3.61. tételben leírt invertálási technikáját alkalmazva határozzuk meg az inverzet, mely szerint

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Egy másik megoldás arra épül, hogy a 4.32. állítás szerint két mátrix pontosan akkor inverze egymásnak, ha a hozzájuk tartozó lineáris leképezések is inverzei egymásnak. Az α szöggel való elforgatásnak, mint leképezésnek az inverze nyilvánvalóan a $-\alpha$ szöggel való elforgatás, tehát mátrixaik is egymás inverzei. Eszerint

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

4.7. ábra. Az $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ vektorok egyenesre való tükrösképe4.8. ábra. Az $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ vektorok merőleges vetülete

4.41. PÉLDA: TÜKRÖZÉS MÁTRIXA. Írjuk fel annak a leképezésnek a mátrixát, mely a sík vektorait egy egyenesre tükrözi!

MEGOLDÁS. a 4.36. példa szerint a tükrözés lineáris leképezés. A vektorok tükrösképe csak a tükrözés tengelyének állásától, például az első koordinátatengellyel bezárt szögétől függ. Legyen ez a szög $\alpha/2$. Az $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ vektorok képét könnyen megkapjuk, ha a tükrözés tengelye átmegy az origón.

A mellékelt ábráról leolvasható, hogy $\mathbf{i}$ tükrösképe $A\mathbf{i} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}$, míg a $\mathbf{j}$ vektoré $A\mathbf{j} = \begin{bmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{bmatrix}$. Így a sík vektorait az első tengellyel $\alpha/2$ szöget bezáró egyenesre tükröző leképezés mátrixa $\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix}$. ■

4.42. PÉLDA: MERŐLEGES VETÍTÉS MÁTRIXA. Írjuk fel a sík vektorait egy egyenesre merőlegesen vetítő leképezés mátrixát!

MEGOLDÁS. Két megoldást is adunk.

Első megoldás: a 4.36. példa szerint a merőleges vetítés lineáris leképezés. Az előző példához hasonlóan elég egy origón átmenő egyenest vizsgálni.

A bizonyítás leolvasható a mellékelt ábráról, hisz az ott látható két derékszögű háromszög befogóinak hossza $\cos \alpha$, illetve $\sin \alpha$, és így például a $\cos \alpha$ hosszú szakasz két tengelyvetülete $\cos^2 \alpha$ és $\cos \alpha \sin \alpha$ hosszú, tehát $\mathbf{i}$ képe $\begin{bmatrix} \cos^2 \alpha \\ \cos \alpha \sin \alpha \end{bmatrix}$. Hasonlóan kapjuk $\mathbf{j}$ képét: $\begin{bmatrix} \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha \end{bmatrix}$. Így a vetítés mátrixa:

$$\begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix}$$

Második megoldás: Az 1.25. tétel szerint ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ a sík két vektora, és $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{a}$ -nak a $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ egyenesére eső merőleges vetülete

$$\text{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}} \mathbf{b}.$$

Eszerint $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ vetülete

$$\text{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{i} = \frac{\mathbf{i} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}} \mathbf{b} = \frac{1}{b_1^2 + b_2^2} \begin{bmatrix} b_1^2 \\ b_1 b_2 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \text{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{j} = \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}} \mathbf{b} = \frac{1}{b_1^2 + b_2^2} \begin{bmatrix} b_1 b_2 \\ b_2^2 \end{bmatrix}.$$

E két vektor egymás mellé írásával kapott mátrix

$$\frac{1}{b_1^2 + b_2^2} \begin{bmatrix} b_1^2 & b_1 b_2 \\ b_1 b_2 & b_2^2 \end{bmatrix}.$$

A két eredmény megegyezik, azaz

$$\frac{1}{b_1^2 + b_2^2} \begin{bmatrix} b_1^2 & b_1 b_2 \\ b_1 b_2 & b_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix}.$$

ugyanis ha a $\mathbf{b}$ vektor x -tengellyel bezárt szöge α , akkor $\cos \alpha = b_1 / \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$, és $\sin \alpha = b_2 / \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$. ■

Vetítés $\mathbb{R}^n$ -ben Az előzőekben megkonstruált geometriai leképezések általánosításai közül először a vetítés fogalmát vizsgáljuk.

4.43. PÉLDA: VETÍTÉS EGYENESRE.

4.3. A mátrix sor-, oszlop- és nullterei

A mátrix sortere, oszloptere, nulltere és bal nulltere négy olyan altér, melyek különös fontosságot kapnak egy mátrix jellemzésében. Először ezek kapcsolatát, majd az egyenletrendszerek leírásában való szerepüket tanulmányozzuk.

Egy mátrix elemei Eddig nagyvonalúan bántunk a mátrix elemeivel. Leginkább annyit feltételeztünk róluk, többnyire kimondatlanul, hogy azonos algebrai struktúrából valók, és az összeadás, kivonás és a szorzás elvégezhető köztük. Erre volt szükség például a mátrixösszeadás és szorzás elvégzéséhez. Bizonyos feladatokhoz még osztásra is szükség volt, mint például az invertáláshoz, de használtuk a redukált lépcsős alak megkonstruálásakor is. A példákban eddig leggyakrabban egész vagy racionális számokat használtunk, de közben valósokra is gondolhattunk, esetleg valamely maradékosztály elemeivel számoltunk. Később olyan mátrixokkal is foglalkozunk, amelyek elemei komplex számok, polinomok, trigonometrikus vagy más függvények. . . .

Az algebrai absztrakció lényege, hogy ha egy algebrai struktúrára vonatkozó állítás igazolásához csak bizonyos műveleti tulajdonságokat használunk, akkor az állítás minden olyan struktúrában is igaz lesz, amely rendelkezik e műveleti tulajdonságokkal. Ha pedig azt látjuk, hogy bizonyos tulajdonságok fontos szerepet játszanak, és különböző struktúrákban gyakran előfordulnak, absztrakcióval új fogalmat alkotunk. Így született a racionális, valós, és komplex számok, valamint a prímmel való osztás maradékaival való számolás közös tulajdonságaiból az algebrai test fogalma.

4.44. DEFINÍCIÓ: TEST. Egy legalább kételemű T halmazt *számtestnek*, *testnek* vagy *algebrai testnek* nevezünk, ha

1. értelmessé van T elempárjain egy összeadás és egy szorzás nevű *bináris művelet*,
2. az *összeadás* kommutatív, asszociatív, létezik nullelem és minden elemnek létezik ellentettje (additív inverze),
3. a *szorzás* kommutatív, asszociatív, létezik egységelem és a nullelemtől kívül minden elemnek létezik multiplikatív inverze (reciproka),
4. az összeadás a szorzásra nézve disztributív.

Ha a szorzás csak asszociatív, *gyűrűről* beszélünk, ha kommutatív is, *kommutatív gyűrűről*, ha az asszociativitás mellett van egységeleme is, *egységelemes gyűrűről* beszélünk.

Formalizálva a fenti definíciót, egy test a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- (a) Bármely $a, b \in T$ elemre $a + b \in T$ (T zárt az összeadásra).
- (b) Bármely $a, b \in T$ elemre $a + b = b + a$ (kommutatív).
- (c) Bármely $a, b, c \in T$ elemre $(a + b) + c = a + (b + c)$ (asszociatív).
- (d) Van olyan T -beli elem, jelölje 0 , hogy bármely $a \in T$ -re $0 + a = a$ (zéruselem).
- (e) Bármely $a \in T$ elemhez van olyan $b \in T$, hogy $a + b = 0$ (additív inverz).
- (f) Bármely $a, b \in T$ elemre $ab \in T$ (T zárt az szorzásra).
- (g) Bármely $a, b \in T$ elemre $ab = ba$ (kommutatív).
- (h) Bármely $a, b, c \in T$ elemre $(ab)c = a(bc)$ (asszociatív).
- (i) Van olyan T -beli elem, jelölje 1 , hogy bármely $a \in T$ elemre $1a = a$ (egységelem).
- (j) Bármely $a \in T \setminus \{0\}$ (tehát bármely nem nulla) elemhez van olyan $b \in T$, hogy $ab = 1$ (multiplikatív inverz).

(*k*) Bármely $a, b, c \in \mathbb{T}$ elemre $(a + b)c = ac + bc$ (disztributivitás).

Az összeadás tulajdonságai az (*a*)-(*e*), a szorzáséi az (*f*)-(*j*) pontban vannak, (*k*) a két művelet közös tulajdonsága. Ha elhagyjuk a (*j*) kikötést, a testből egységelemes gyűrűt kapunk, ha az (*i*)-t is kommutatív gyűrűt, ha a (*g*)-t is, gyűrűt kapunk.

Néhány megjegyzés és néhány példa:

- Meg lehet mutatni, hogy a nullelem és az egységelem szükségképpen különböző, tehát jogosan jelöltük őket különböző jellel.
- Minden gyűrű tetszőleges a elemére igaz, hogy $0a = a0 = 0$.
- Testre példa a valós számok $\mathbb{R}$, a racionális számok $\mathbb{Q}$, a komplex számok $\mathbb{C}$, a prím modulusú maradékosztályok $\mathbb{Z}_p$ struktúrája.
- A természetes számok $\mathbb{N}$ halmaza nem test és nem is gyűrű a szokásos műveletekkel, mert nincs minden elemnek ellentettje (a -1 nem természetes szám).
- A $\mathbb{Z}$ egységelemes kommutatív gyűrű, viszont nem test, mert nincs minden nemnulla elemnek multiplikatív inverze (az $1/5$ nem egész).
- A $\mathbb{Z}_m$ egységelemes kommutatív gyűrű, és pontosan akkor test, ha m prím.
- A valós együtthatós polinomok egységelemes kommutatív gyűrűt alkotnak.
- Az $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények egységelemes kommutatív gyűrűt alkotnak. Ugyanígy egységelemes kommutatív gyűrűt alkotnak a $[0, 1]$ intervallumon értelmezett függvények, vagy a $[0, 1]$ intervallumon értelmezett és folytonos függvények. A műveletek minen esetben a függvények szokásos összeadása és szorzása.
- A végtelen sorozatok az elemenkénti összeadás és szorzás műveletére nézve ugyancsak egységelemes kommutatív gyűrűt alkotnak.

A valós számokhoz hasonlóan egy $\mathbb{T}$ test elemeiből képzett rendezett n -esek halmazán, azaz a $\mathbb{T}$ test feletti n -dimenziós vektorok $\mathbb{T}^n$ halmazán bevezethetünk két műveletet, a vektorösszeadás és a $\mathbb{T}$ elemeivel való szorzás műveletét. Az így kapott struktúrára, mint a $\mathbb{T}^n$ vektortérre fogunk hivatkozni. A $\mathbb{T}$ elemeiből képzett $m \times n$ -es mátrixok halmazát $\mathbb{T}^{m \times n}$ jelöli.

4.45. PÉLDA: NÉGYZETES MÁTRIXOK GYŰRŰJE. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbb{T}$ test, akkor $\mathbb{T}^{n \times n}$ elemei, azaz a $\mathbb{T}$ fölötti $n \times n$ -es mátrixok a szokásos mátrixműveletekkel egységelemes gyűrűt alkotnak.

MEGOLDÁS. Az előző fejezetben láttuk, hogy a mátrixok összeadása és szorzása nem vezet ki az $n \times n$ -es mátrixok halmazából, és hogy az összeadás kommutatív, asszociatív, a zérusmátrix nullelemként viselkedik, és minden mátrixnak van ellentettje. Hasonlóan láttuk, hogy a szorzás asszociatív, és van egységelem (az identikus vagy egységmátrix). Végül az összeadás a szorzásra nézve disztributív. Tehát az $n \times n$ -es mátrixok egységelemes gyűrűt alkotnak. Az $n = 1$ esetben magát $\mathbb{T}$ -t kapjuk meg, ami test. Ahhoz, hogy $n > 1$ esetén a struktúra nem test, sőt, nem is kommutatív azt kell belátni, hogy mindig találunk két nem felcserélhető és egy szinguláris mátrixot.

A csupa 1-esből álló mátrix mindig szinguláris, ugyanis van legalább két sora, és bármely sora megegyezik az elsővel, tehát az elemi sorműveletek során biztosan keletkezik legalább egy nullasor.

Az alább összeszorozott két mátrix, melyeknek csak a bal felső 2×2 -es részében van 0-tól különböző elem, sosem felcserélhető, ugyanis egyrészt

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

másrészt

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 1+1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Hozzá kell még tenni, hogy $1 + 1 = 1$ semelyik testben sem áll fenn, ugyanis 1-et kivonva $1 = 0$ -t kapnánk. (Tudjuk, hogy $\mathbb{F}_2$ -ben $1 + 1 = 0$, ahol pedig nem nulla, ott jelölhetjük 2-vel.) ■

1• Példa egy testre. Jelölje $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ az összes $a + b\sqrt{2}$ alakú számok halmazát, ahol a és b racionális számok, azaz $a, b \in \mathbb{Q}$. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ a szokásos összeadás és szorzás műveletekkel testet alkot.

összege és szorzata is $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ -beli. Ezt az

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2},$$

és az

$$(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2},$$

MEGOLDÁS. Mivel $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ elemei egyúttal valós számok is, így a definíció 2-4. azonosságai fennállnak, elég csak az 1.-et igazolni. Ehhez be kell látni, hogy két $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ -beli szám

összefüggések igazolják. ■

4.4. Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér

Egy mátrix jellemzésének különösen hatékony eszköze azoknak az $\mathbf{x}$ vektoroknak a meghatározása, amelyeket a mátrixszal való szorzás egy önmagával párhuzamos vektorba visz, azaz amelyekre $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$.

A sajátérték és a sajátvektor fogalma Az előző paragrafus példái azt mutatják, hogy sok kérdés vezet $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ alakú egyenletre.

4.46. DEFINÍCIÓ: SAJÁTÉRTÉK, SAJÁTVEKTOR. Azt mondjuk, hogy a λ szám az $\mathbf{A}$ mátrix *sajátértéke*, ha létezik olyan nemnulla $\mathbf{x}$ vektor, melyre $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$. Az ilyen $\mathbf{x}$ vektorokat az $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékéhez tartozó *sajátvektorainak* nevezzük.

4.47. PÉLDA: SAJÁTÉRTÉK, SAJÁTVEKTOR. Könnyen ellenőrizhető, hogy az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ mátrixnak a -1 egy sajátértéke, és $(2, 1)$ az egyik hozzátartozó sajátvektora, ugyanis

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \text{azaz} \quad \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

E mátrix egy másik sajátértéke 2, ugyanis

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \text{azaz} \quad \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = (2) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ha $\mathbf{x}$ egy sajátvektor, akkor minden nemnulla konstansszorosa is, ugyanis

$$\mathbf{A}(c\mathbf{x}) = c\mathbf{Ax} = c\lambda\mathbf{x} = \lambda(c\mathbf{x}),$$

azaz $\mathbf{A}(c\mathbf{x}) = \lambda(c\mathbf{x})$. Ennél több is igaz:

4.48. ÁLLÍTÁS: A SAJÁTVEKTOROK ALTEREL. Ha az $\mathbf{A}$ mátrixnak λ egy sajátértéke, akkor a λ -hoz tartozó sajátvektorok a nullvektorral együtt alteret alkotnak, mely megegyezik $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ nullterével.

BIZONYÍTÁS. A nem nullvektor $\mathbf{x}$ pontosan akkor egy λ sajátértékhez tartozó sajátvektor, ha kielégíti az $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ egyenletet, azaz az $\mathbf{Ax} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletet, vagyis ha megoldása a homogén lineáris $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletnek. Ez pedig épp azt jelenti, hogy $\mathbf{x}$ eleme $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ nullterének. ■

4.49. DEFINÍCIÓ: SAJÁTALTÉR. A négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékéhez tartozó sajátvektorai és a nullvektor alkotta alteret a λ sajátértékhez tartozó *sajátaltérnek* nevezzük.

4.50. PÉLDA: SAJÁTALTÉR BÁZISÁNAK MEGHATÁROZÁSA. Adjuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrix 2-höz tartozó sajátaltérének bázisát!

MEGOLDÁS. Először ellenőrizzük, hogy a 2 sajátérték-e! Ehhez meg kell mutatni, hogy az $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása. Hozzuk az együtthatómátrixot redukált lépcsős alakra:

$$\mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mivel $r(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = 1$, ezért az $\mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \mathbf{0}$ egyenletrendszer szabad változóinak száma 2, és megoldása

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -6s - t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tehát a sajátaltér egy bázisa a $(-6, 1, 0)$ és $(-1, 0, 1)$ vektorokból áll. ■

Karakterisztikus polinom Láttuk, hogy az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ egyenletnek pontosan akkor van a zérusvektortól különböző megoldása, ha a homogén lineáris $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása. Ez a 4.14. tétel szerint pontosan akkor igaz, ha

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0. \quad (4.4)$$

Ez tehát azt jelenti, hogy λ pontosan akkor sajátérték, ha kielégíti a (4.4) egyenletet. Ezt az egyenletet az $\mathbf{A}$ mátrix *karakterisztikus egyenletének* nevezzük. Ha $\mathbf{A}$ egy $n \times n$ -es mátrix, akkor az egyenlet bal oldala a determináns kifejtése után egy n -edfokú polinom, melyet *karakterisztikus polinomnak* nevezünk.

4.51. PÉLDA: KARAKTERISZTIKUS POLINOM FELÍRÁSA. Határozzuk meg az alábbi mátrixok karakterisztikus polinomját, majd próbáljunk meg általános érvényű állítást kimondani az eredmény alapján!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & e^3 & \pi \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ c & b & a \end{bmatrix}.$$

MEGOLDÁS. A $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ determinánst kell meghatároznunk:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc \\ &= \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) \\ &= \lambda^2 - \text{trace}(\mathbf{A})\lambda + \det \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Kimondható a következtetés: 2×2 -es mátrixok karakterisztikus polinomját a mátrix nyomával és determinánsával is ki tudjuk fejezni.

A $\mathbf{B}$ mátrix karakterisztikus polinomjának felírásából például leolvasható az, hogy a háromszögmátrixok karakterisztikus polinomjának alakját nem befolyásolják a főátlón kívüli elemek:

$$\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & e^3 & \pi \\ 0 & 1 - \lambda & x \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^3.$$

A $\mathbf{C}$ mátrix karakterisztikus polinomja azt sejteti, hogy minden karakterisztikus egyenlethez könnyen konstruálható mátrix, melynek az a karakterisztikus egyenlete:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ c & b & a - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ b & a - \lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ c & a - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 - a\lambda^2 - b\lambda - c. \end{aligned}$$

Az előző feladat tanulságát külön állításokban is megfogalmazzuk:

4.52. ÁLLÍTÁS: HÁROMSZÖGMÁTRIXOK SAJÁTÉRTÉKEI. Háromszögmátrixok sajátértékei megegyeznek a főátló elemeivel.

BIZONYÍTÁS. Ha $\mathbf{A}$ háromszögmátrix, akkor $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ is, és háromszögmátrix determinánsa megegyezik főátlóbeli elemeinek szorzatával. Eszerint az $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ mátrix karakterisztikus egyenlete

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda) = 0$$

aminek a gyökei a_{ii} ($i = 1, \dots, n$). Így ezek az $\mathbf{A}$ sajátértékei. ■

4.53. ÁLLÍTÁS: DETERMINÁNS, NYOM ÉS A SAJÁTÉRTÉKEK. Ha az n -edrendű $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, akkor

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \\ \text{trace}(\mathbf{A}) &= \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \end{aligned}$$

Ezek az értékek megjelennek a karakterisztikus polinomban: a determináns a konstans tag, a nyom a $(-\lambda)^{n-1}$ együtthatója.

BIZONYÍTÁS. A karakterisztikus polinom gyöktényezőzős alakja:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda)$$

$\lambda = 0$ behelyettesítése után kapjuk, hogy

$$\det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n.$$

Az állítás nyomra vonatkozó részének bizonyítását feladatként tűzzük ki. ■

Mátrix összes sajátértékének és sajátvektorának meghatározása Az előző paragrafusokban leírtak alapján egy mátrix sajátértékeinek és sajátvektorainak meghatározása két lépésben elvégezhető:

1. megoldjuk a $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ karakterisztikus egyenletet, ennek gyökei a sajátértékek,
2. minden λ sajátértékhez meghatározzuk az $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ nullterének egy bázisát, az általa kifeszített altér nemzérus vektorai a λ -hoz tartozó sajátvektorok.

4.54. PÉLDA: AZ ÖSSZES SAJÁTÉRTÉK ÉS SAJÁTVEKTOR MEGHATÁROZÁSA. Határozzuk meg az

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

MEGOLDÁS. Az első lépés a karakterisztikus egyenlet felírása és megoldása. A kiszámítandó determináns háromszögalakú, így értéke a főátlóbeli elemek szorzata:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda(2 - \lambda)^2 \end{aligned}$$

A karakterisztikus egyenlet gyökei, és így az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

Tekintsük először a $\lambda_1 = 0$ esetet. $\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}$ nullterének meghatározásához redukált lépcsős alakra hozzuk az $\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}$ mátrixot:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Ennek megoldása $x_1 = t$, azaz az összes megoldás

$$\begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tehát a $\lambda_1 = 0$ sajátértékhez tartozó sajátaltér az $(1, 0, 0)$ vektor által kifeszített altér.

Tekintsük ezután a $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ esetet. Meghatározzuk az $\mathbf{A} - 2\mathbf{I}$ mátrix nullterét.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

Ennek az (egy egyenletből álló) egyenletrendszernek a megoldása: $x_2 = s$, $x_3 = t$, $x_1 = (s + t)/2$, azaz

$$\begin{bmatrix} (s+t)/2 \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tehát a $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ sajátértékhez tartozó sajátaltér az $(\frac{1}{2}, 1, 0)$ és az $(\frac{1}{2}, 0, 1)$ vektorok által kifeszített altér. ■

Az $n \times n$ -es mátrixok karakterisztikus egyenlete n -edfokú. Egy ilyen egyenlet megoldására $n \leq 4$ esetén van megoldóképlet, ezért ezeket az egyenleteket – például egy komputer algebra program segítségével – meg tudjuk oldani. Egyébként vagy szerencsénk van, és az egyenlet olyan alakú, amilyenhez vannak gyors megoldási lehetőségek, vagy csak közelítő megoldás megtalálására van esély.

4.55. PÉLDA: MAGASABBFOKÚ KARAKTERISZTIKUS EGYENLET. Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

MEGOLDÁS. A karakterisztikus egyenlet:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} &= \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 3 & 3 & 2-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2(2-\lambda) + 24 - 12(1-\lambda) - 4(2-\lambda) \\ &= -(\lambda^3 - 4\lambda^2 - 11\lambda - 6) \end{aligned}$$

E harmadfokú egyenlet megoldására használhatunk számológépet, vagy például a függelékben megtalálható Rolle-féle gyöktételt. Eszerint a karakterisztikus egyenlet $-(\lambda + 1)^2(\lambda - 6) = 0$, így gyökei $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ és $\lambda_3 = 6$.

A $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ esetben

$$\mathbf{A} + \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Ennek megoldása

$$\begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

azaz a -1 sajátértékhez tartozó sajátalteret a $(-1, 1, 0)$ és a $(-1, 0, 1)$ vektorok feszítik ki.

A $\lambda_3 = 6$ esetben

$$\mathbf{A} - 6\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 2 \\ 3 & 3 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 - \frac{2}{3}x_3 = 0 \\ x_2 - \frac{2}{3}x_3 = 0. \end{array}$$

Ennek megoldása a törtek alkalmazását elkerülő $x_3 = 3t$ paraméterválasztással

$$\begin{bmatrix} 2t \\ 2t \\ 3t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Tehát a $\lambda_3 = 6$ sajátértékhez tartozó sajátalteret a $(2, 2, 3)$ vektor feszíti ki. ■

4.56. TÉTEL: KÜLÖNBÖZŐ SAJÁTÉRTÉKEKHEZ TARTOZÓ SAJÁTVEKTOROK. Ha $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ különböző sajátértékei az $n \times n$ -es $\mathbf{A}$ mátrixnak, akkor a hozzájuk tartozó $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ sajátvektorok lineárisan függetlenek.

BIZONYÍTÁS. ??? ■

A karakterisztikus egyenlet komplex gyökei Ha valóselemű mátrixot vizsgálunk, megeshet, hogy a karakterisztikus egyenletnek vannak komplex gyökei. Mivel a valós számok egyúttal komplexek is, a valós elemű mátrixot tekinthetjük komplex eleműnek is, ekkor viszont a karakterisztikus egyenlet komplex gyökeit is sajátértéknek tekinthetjük. Ebben az esetben a komplex sajátértékhez komplex elemű sajátvektor fog tartozni.

4.57. PÉLDA: KOMPLEX SAJÁTÉRTÉKEK ÉS KOMPLEX ELEMŰ SAJÁTVEKTOROK. Határozzuk meg a komplex elemű

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

MEGOLDÁS. A karakterisztikus egyenlet

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \lambda^2 - \lambda + 1.$$

A $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ egyenlet gyökei $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Először vizsgáljuk a $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ sajátértéket:

$$\mathbf{A} - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}i & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x - iy = 0.$$

Ennek az egyenlet(rendszer)nek a megoldása az $y = t$ paraméterválasztással

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} it \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tehát a $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ sajátértékhez tartozó sajátaltér egy bázisa az $(i, 1)$ vektorból áll.

A $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ sajátérték esetén

$$\mathbf{A} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}i & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x + iy = 0.$$

Ennek az egyenlet(rendszer)nek a megoldása az $y = t$ paraméterválasztással

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -it \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tehát a $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ sajátértékhez tartozó sajátalteret a $(-i, 1)$ sajátvektor feszíti ki. ■

A karakterisztikus egyenlet többszörös gyökei: az algebrai és a geometriai multiplicitás

Ha λ a karakterisztikus egyenlet k -szoros gyöke, vagy más szóval λ multiplicitása vagy *algebrai multiplicitása* k , akkor a λ -hoz tartozó sajátaltér dimenziója 1 és k közé esik. Ezt az állítást később bebizonyítjuk. A sajátaltér dimenzióját szokták a λ *geometriai multiplicitásának* nevezni. A 4.54. és a 4.55. példák olyan eseteket mutattak, amikor a sajátértékek algebrai és geometriai multiplicitása azonos, azaz minden sajátaltér épp annyi dimenziós, amennyi a gyök (algebrai) multiplicitása. A következő feladat azt mutatja, hogy a sajátaltér dimenziója kisebb is lehet.

4.58. PÉLDA: GYÖK MULTIPLICITÁSA ÉS A SAJÁTALTÉR DIMENZIÓJA. Az

$$\mathbf{A} = \mathbf{h}410041004$$

mátrixnak a 4 háromszoros algebrai multiplicitású sajátértéke, míg a

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrixnak az 1 és a 2 is kétszeres multiplicitású sajátértéke. Mennyi a geometriai multiplicitásuk?

MEGOLDÁS. Mivel $\mathbf{A}$ háromszögmátrix, ezért karakterisztikus polinomja $(4 - \lambda)^3$, a 4 tehát valóban háromszoros gyök. Mivel

$$\mathbf{A} - 4\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ezért az $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszer az $y = 0, z = 0$ alakot ölti, azaz megoldása

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Eszerint $\mathbf{A}$ sajátaltére 1-dimenziós, melyet az $(1, 0, 0)$ vektor feszít ki. A $\lambda = 4$ sajátérték geometriai multiplicitása 1.

A $\mathbf{B}$ mátrix karakterisztikus polinomja $(1 - \lambda)^2(2 - \lambda)^2$, ennek gyökei valóban 1 és 2, és mindegyiknek kétszeres a multiplicitása. Meghatározzuk sajátaltereiket. $\lambda = 1$ esetén

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Az ehhez tartozó homogén egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tehát az altér dimenziója 2, vagyis a geometriai multiplicitás megegyezik az algebraival. Ha $\lambda = 2$, akkor

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

ahonnan az ehhez tartozó homogén egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tehát az altér dimenziója most 1, vagyis a geometriai multiplicitás kisebb, mint az algebrai. ■

Sajátértékek és a mátrix hatványai

4.59. TÉTEL: MÁTRIX INVERTÁLHATÓSÁGA ÉS A 0 SAJÁTÉRTÉK. Az $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor invertálható, ha a 0 nem sajátértéke.

BIZONYÍTÁS. $\mathbf{A}$ pontosan akkor invertálható, ha $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, de ez ekvivalens azzal, hogy $\det(\mathbf{A} - 0\mathbf{I}) \neq 0$, azaz 0 nem sajátértéke $\mathbf{A}$ -nak. ■

4.60. TÉTEL: MÁTRIX HATVÁNYAINAK SAJÁTÉRTÉKEI ÉS SAJÁTVEKTORAI. Ha λ az $\mathbf{A}$ mátrix egy sajátértéke és $\mathbf{x}$ egy hozzá tartozó sajátvektor, akkor bármely egész n esetén λ^n sajátértéke az $\mathbf{A}^n$ mátrixnak és $\mathbf{x}$ egy hozzá tartozó sajátvektor, amennyiben λ^n és $\mathbf{A}^n$ is értelmezve van.

BIZONYÍTÁS. $n = 0$ esetén $\lambda^0 = 1$ és $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$, és ekkor minden vektor sajátvektor, tehát ekkor az állítás igaz.

Pozitív n -re indukcióval igazoljuk az állítást: $n = 1$ esetén nyilván igaz, $n = 2$ esetén:

$$\mathbf{A}^2 \mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{A} \mathbf{x}) = \mathbf{A}(\lambda \mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{A} \mathbf{x}) = \lambda(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^2 \mathbf{x}.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy ha $n = k - 1$ esetén már igaz az állítás, akkor $n = k$ esetén is:

$$\mathbf{A}^k \mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{k-1} \mathbf{x}) = \mathbf{A}(\lambda^{k-1} \mathbf{x}) = \lambda^{k-1}(\mathbf{A} \mathbf{x}) = \lambda^{k-1}(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^k \mathbf{x}.$$

Ha $\mathbf{A}$ invertálható, akkor

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}, \text{ amiből } \frac{1}{\lambda} \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}, \text{ azaz } \lambda^{-1} \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}.$$

Végül negatív kitevők esetén:

$$\mathbf{A}^k \mathbf{x} = \lambda^k \mathbf{x}, \text{ amiből } \lambda^{-k} \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-k} \mathbf{x}.$$

4.61. TÉTEL: MÁTRIX HATVÁNYAINAK HATÁSA. Tegyük fel, hogy $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ sajátértékei az $n \times n$ -es $\mathbf{A}$ mátrixnak, és hogy $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ a hozzájuk tartozó sajátvektorok. Ha egy n -dimenziós $\mathbf{v}$ vektor előáll e sajátvektorok lineáris kombinációjaként, azaz

$$\mathbf{v} = c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + \dots + c_k \mathbf{x}_k,$$

akkor bármely egész m esetén

$$\mathbf{A}^m \mathbf{v} = c_1 \lambda_1^m \mathbf{x}_1 + c_2 \lambda_2^m \mathbf{x}_2 + \dots + c_k \lambda_k^m \mathbf{x}_k.$$

BIZONYÍTÁS. A bizonyítás magától értetődő, hisz

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^m \mathbf{v} &= \mathbf{A}^m (c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + \dots + c_k \mathbf{x}_k) \\ &= c_1 \mathbf{A}^m \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{A}^m \mathbf{x}_2 + \dots + c_k \mathbf{A}^m \mathbf{x}_k \\ &= c_1 \lambda_1^m \mathbf{x}_1 + c_2 \lambda_2^m \mathbf{x}_2 + \dots + c_k \lambda_k^m \mathbf{x}_k\end{aligned}$$

Lineáris transzformációk sajátértékei A sajátérték, sajátvektor, sajátaltér fogalma természetes módon átvihető lineáris leképezésekre is.

4.62. DEFINÍCIÓ: LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓ SAJÁTÉRTÉKE, SAJÁTVEKTORA. Azt mondjuk, hogy a λ szám az L lineáris transzformáció *sajátértéke*, ha létezik olyan nemnulla $\mathbf{x}$ vektor, melyre $L\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Az ilyen $\mathbf{x}$ vektorokat az L lineáris transzformáció λ sajátértékéhez tartozó *sajátvektorainak* nevezzük.

Ha a lineáris transzformáció $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vagy $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezés, mely valamilyen egyszerű geometriai transzformációt valósít meg, akkor néha a transzformáció mátrixának ismerete nélkül is könnyen meghatározhatjuk a sajátértékeket és sajátvektorokat.

4.63. PÉLDA: LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓ SAJÁTÉRTÉKE, SAJÁTVEKTORA. Adjuk meg – pusztán geometriai szemléletünkre hagyatkozva – az alábbi lineáris leképezések sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátaltérket.

- (a) a sík vektorainak tükrözése egy egyenesre (vagy pontjainak tükrözése egy origón átmenő egyenesre);
- (b) a sík vektorainak merőleges vetítése egy egyenesre (vagy pontjainak merőleges vetítése egy origón átmenő egyenesre);
- (c) a tér vektorainak elforgatása egy egyenes körül a π egész számú többszörösétől különböző szöggel;
- (d) a tér vektorainak merőleges vetítése egy síkra;
- (e) a tér vektorainak tükrözése egy síkra.

MEGOLDÁS. Az előző fejezetben, így a 4.36. példában bizonyítottakhoz hasonlóan látható, hogy mindegyik feladatbeli transzformáció lineáris.

- (a) Egy egyenesre való tükrözés esetén csak az egyenessel párhuzamos és rá merőleges vektorok mennek saját konstansszorosukba, mégpedig az egyenessel párhuzamos vektorok saját magukba, a rá merőlegesek a saját ellentettjükbe. Tehát a transzformációnak az 1 sajátértékhez tartozó sajátaltér a tengellyel párhuzamos vektorokból, a -1 -hez tartozó sajátaltér a rá merőleges vektorokból áll. A pontokra vonatkozó állítás a pontokba mutató helyvektorokkal adódik.
- (b) A sík merőleges vetítése egy egyenesre – hasonlóan az előző esethez – helyben hagyja az egyenessel párhuzamos vektorokat, és a $\mathbf{0}$ -vektorba viszi a rá merőlegeseket. Tehát az 1 sajátértékhez tartozó sajátaltér az egyenessel párhuzamos vektorokból, a 0 -hoz tartozó sajátaltér a rá merőleges vektorokból áll.
- (c) A tér π egész számú többszörösétől különböző szöggel való elforgatása egy egyenes körül a forgástengellyel párhuzamos vektorokat önmagukba viszi, és semelyik másikat sem viszi a saját skalárszorosába, így az egyetlen sajátérték az 1, amelyhez tartozó sajátaltér a forgástengellyel párhuzamos vektorokból áll.
- (d) A tér vektorainak merőleges vetítése egy síkra helyben hagyja a sík összes vektorát, míg a síkra merőleges vektorokat a $\mathbf{0}$ vektorba viszi, tehát a két sajátérték 1 és 0, az 1 sajátértékhez tartozó sajátaltér a sík vektoraiból, a 0 -hoz tartozó sajátaltér a rá merőleges vektorokból áll.
- (e) Az előző kérdéshez hasonlóan adódik, hogy a két sajátérték 1 és -1 , az 1 sajátértékhez tartozó sajátaltér a sík vektoraiból, a -1 -hez tartozó sajátaltér a rá merőleges vektorokból áll. ■

Egy lineáris leképezéshez bázisonként más-más mátrix tartozhat, de a sajátértékeik mégis ugyanazok, hisz ha egy leképezés egy vektort a λ -szorosába viszi, akkor azt λ -szorosába viszi minden bázisban.

Hasonlóság Tudjuk, hogy ha egy L lineáris transzformációnak egy $\mathcal{A}$ bázisban $\mathbf{A}$ a mátrixa, egy $\mathcal{B}$ bázisban $\mathbf{B}$, akkor a két mátrix kapcsolata

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}} \mathbf{A} \mathbf{C}_{\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{B}},$$

ahol $\mathbf{C}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}} = \mathbf{C}_{\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{B}}^{-1}$ az áttérés mátrixa. E tény motiválja a következő definíciót:

4.64. DEFINÍCIÓ: HASONLÓSÁG. Azt mondjuk, hogy az $n \times n$ -es $\mathbf{A}$ mátrix *hasonló* a $\mathbf{B}$ mátrixhoz, ha létezik olyan invertálható $\mathbf{C}$ mátrix, hogy

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{C}. \quad (4.5)$$

Jelölés: $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

► Ha $\mathbf{A}$ hasonló $\mathbf{B}$ -hez, akkor $\mathbf{B}$ is hasonló $\mathbf{A}$ -hoz. Legyen ugyanis $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}^{-1}$. Akkor

$$\mathbf{A} = \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{C}^{-1} = (\mathbf{C}^{-1})^{-1} \mathbf{B} \mathbf{C}^{-1} = \hat{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{B} \hat{\mathbf{C}}.$$

Így tehát mondható az, hogy $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ hasonlóak, mivel a hasonlóság szimmetrikus reláció.

Például $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}$, ugyanis

$$\begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad \left(\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \right).$$

A $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{C}$ összefüggés ekvivalens az $\mathbf{C} \mathbf{B} = \mathbf{A} \mathbf{C}$ összefüggéssel, amit még egyszerűbb lehet ellenőrizni. Példánk esetében

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \quad \left(= \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right).$$

4.65. TÉTEL: HASONLÓ MÁTRIXOK HATÁSA. Két mátrix pontosan akkor hasonló, ha van két olyan bázis, melyekben e két mátrix ugyanannak a lineáris leképezésnek a mátrixa.

BIZONYÍTÁS. Ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ hasonlóak, azaz $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{C}$, akkor $\mathbf{C}$ -t, mint a $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n\}$ bázisról az $\mathcal{E}$ standard bázisra való áttérés mátrixát tekintve azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{C}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{C}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{C}}.$$

Eszerint ha L az $\mathbf{A}$ mátrixhoz tartozó mátrixleképezés, azaz $\mathbf{A}$ az L mátrixa a standard bázisban, akkor $\mathbf{B}$ az L mátrixa a $\mathcal{C}$ bázisban. A fordított állítást a bevezetőben igazoltuk. ■

4.66. TÉTEL: HASONLÓSÁGRA INVARIÁNS TULAJDONSÁGOK. Ha $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, akkor

- (a) $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B})$,
- (b) $\text{nullity}(\mathbf{A}) = \text{nullity}(\mathbf{B})$,
- (c) $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B})$,
- (d) megegyezik $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ karakterisztikus polinomja, így sajátértékei, azok algebrai és geometriai multiplicitásai.

BIZONYÍTÁS. A bizonyítás során föltesszük, hogy valamely invertálható $\mathbf{C}$ mátrixszal $\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{C}$.

- (a) Mivel mátrix rangja megegyezik az oszloptér dimenziójával, az oszloptér pedig megegyezik a mátrixleképezés képterével, ami a két mátrixra azonos, ezért a rangok is megegyeznek.
- (b) Hasonlóan bizonyítható az is, hogy a két mátrix nullitása megegyezik, hisz az a nulltér dimenziója, a nulltér pedig megegyezik a hozzájuk tartozó lineáris leképezés megterével.
- (c) $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}) = \det(\mathbf{C}^{-1})\det(\mathbf{B})\det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{B})$, mivel $\det(\mathbf{C})\det(\mathbf{C}^{-1}) = 1$.
- (d) Ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ hasonlóak, akkor

$$\begin{aligned}\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} &= \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C} - \lambda\mathbf{C}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{C} \\ &= \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{B}\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I}\mathbf{C}) \\ &= \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{C},\end{aligned}$$

azaz $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ és $\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}$ is hasonlóak. Az előző pont szerint hasonló mátrixok determinánsa megegyezik, így $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})$, azaz megegyeznek $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ karakterisztikus polinomjai is. Ez maga után vonja, hogy megegyeznek sajátértékeik, és azok (algebrai) multiplicitásai. A geometriai multiplicitások egyenlőségéhez elég belátni, hogy $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ és $\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}$ nullitása, vagyis nullterük dimenziója azonos, azt viszont hasonló mátrixokra épp e tételben igazoltuk. ■

Mátrixok diagonalizálása Korábban láttuk, hogy egy mátrix hatványainak hatását milyen könnyű a sajátvektorok lineáris kombinációin kiszámítani. Ez akkor lenne igazán hatékony eszköz, ha sajátvektorokból egy bázist tudnánk választani. Ebben a bázisban ugyanis a mátrix – mint azt bizonyítani fogjuk – diagonális alakot ölt.

4.67. DEFINÍCIÓ: DIAGONALIZÁLHATÓSÁG. Az $n \times n$ -es $\mathbf{A}$ mátrix *diagonalizálható*, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz, azaz ha létezik egy olyan diagonális $\mathbf{\Lambda}$ és egy invertálható $\mathbf{C}$ mátrix, hogy

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}.$$

4.68. TÉTEL: DIAGONALIZÁLHATÓSÁG SZÜKSÉGES ÉS ELÉGSÉGES FELTÉTELE. Az $n \times n$ -es $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha van n lineárisan független sajátvektora. Ekkor a diagonális mátrix az $\mathbf{A}$ sajátértékeiből, $\mathbf{C}$ a sajátvektoraiból áll.

BIZONYÍTÁS. Ha $\mathbf{A}$ hasonló egy diagonális mátrixhoz, azaz van olyan $\mathbf{C}$ mátrix, hogy $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ diagonális, akkor $\mathbf{C}$ -vel balról szorozva a $\mathbf{C}\mathbf{\Lambda} = \mathbf{A}\mathbf{C}$ egyenlőséget kapjuk. Ha $\mathbf{C} = [\mathbf{c}_1 \ \mathbf{c}_2 \ \dots \ \mathbf{c}_n]$ és $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, akkor

$$[\mathbf{c}_1 \ \mathbf{c}_2 \ \dots \ \mathbf{c}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = \mathbf{A}[\mathbf{c}_1 \ \mathbf{c}_2 \ \dots \ \mathbf{c}_n], \quad (4.6)$$

és itt a bal oldali mátrix i -edik oszlopa $\lambda_i\mathbf{c}_i$, a jobb oldali mátrixé $\mathbf{A}\mathbf{c}_i$, amik megegyeznek, azaz $\mathbf{A}\mathbf{c}_i = \lambda_i\mathbf{c}_i$, tehát $\mathbf{c}_i$ a λ_i sajátértékhez tartozó sajátvektor. Mivel $\mathbf{C}$ invertálható, ezért oszlopvektorai függetlenek, ami bizonyítja az állításunk egyik felét. Tegyük most fel, hogy van $\mathbf{A}$ -nak n független sajátvektora. Képezzünk a sajátértékekből egy $\mathbf{\Lambda}$ diagonális mátrixot, a sajátvektorokból pedig egy $\mathbf{C}$ mátrixot úgy, hogy a $\mathbf{\Lambda}$ i -edik oszlopába kerülő λ_i sajátértékhez tartozó sajátvektor a $\mathbf{C}$ mátrix i -edik oszlopába kerüljön. Mivel $\lambda_i\mathbf{c}_i = \mathbf{A}\mathbf{c}_i$, ezért fennáll a (4.6) összefüggés, azaz $\mathbf{\Lambda}$ hasonló $\mathbf{A}$ -hoz. ■

4.69. PÉLDA: MÁTRIX DIAGONALIZÁLÁSA. Diagonalizálható-e a 4.54. példabeli

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix?

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait meghatároztuk a 4.54. példában. Mivel $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, a hozzájuk tartozó sajátvektorok $(1, 0, 0)$, $(1/2, 1, 0)$ és $(1/2, 0, 1)$, és ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ezért $\mathbf{A}$ hasonló a $\mathbf{\Lambda}$ diagonális mátrixhoz, ahol

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{és} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ez könnyen igazolható a $\mathbf{C}\mathbf{\Lambda} = \mathbf{A}\mathbf{C}$ összefüggés ellenőrzésével:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ha egy folyamat egy $\mathbf{x}_k$ állapotát a következővel egy lineáris $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k$ kapcsolat fűzi össze, akkor az $\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k \mathbf{x}_0$ összefüggés miatt a folyamatot az $\mathbf{A}$ mátrix hatványai jellemzik. Kérdés lehet például a mátrixhatványok aszimptotikus viselkedése. Ezt vizsgálja a következő feladat.

4.70. PÉLDA: MÁTRIXOK NAGY KITEVŐS HATVÁNYAI. Tekintsük az alábbi két „majdnem egyenlő” mátrixot:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.3 & 1.8 \\ -0.6 & 1.8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -0.3 & 1.8 \\ -0.5 & 1.8 \end{bmatrix}$$

Vizsgáljuk meg hatványaik határértékét, ha a kitevő tart a végtelenhez!

MEGOLDÁS. Mivel $(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{C})^k = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{M}^k\mathbf{C}$, diagonális mátrix hatványai pedig könnyen számolhatók, ezért mindkét mátrixot diagonalizáljuk:

$$\mathbf{\Lambda}_1 = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.0 \\ 0.0 & 0.9 \end{bmatrix} \quad \text{ahol} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0.89443 & 0.83205 \\ 0.44721 & 0.55470 \end{bmatrix},$$

valamint

$$\mathbf{\Lambda}_2 = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.0 \\ 0.0 & 1.2 \end{bmatrix} \quad \text{ahol} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0.94868 & 0.76822 \\ 0.31623 & 0.64018 \end{bmatrix}.$$

Így a k -adik hatvány könnyen számolható:

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{C} \begin{bmatrix} 0.6 & 0.0 \\ 0.0 & 0.9 \end{bmatrix}^k \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C} \begin{bmatrix} 0.6^k & 0.0 \\ 0.0 & 0.9^k \end{bmatrix} \mathbf{C}^{-1}$$

Mivel mindkét sajátérték abszolút értéke kisebb 1-nél, $\mathbf{\Lambda}_1^k \rightarrow \mathbf{O}$ és így $\mathbf{A}^k \rightarrow \mathbf{O}$, ha $k \rightarrow \infty$. A $\mathbf{B}$ mátrix esetén

$$\mathbf{B}^k = \mathbf{D} \begin{bmatrix} 0.3 & 0.0 \\ 0.0 & 1.2 \end{bmatrix}^k \mathbf{D}^{-1} = \mathbf{D} \begin{bmatrix} 0.3^k & 0.0 \\ 0.0 & 1.2^k \end{bmatrix} \mathbf{D}^{-1},$$

ami arra vezet, hogy $\mathbf{\Lambda}_2^k \rightarrow \begin{bmatrix} \infty & \infty \\ \infty & \infty \end{bmatrix}$ és így $\mathbf{B}^k \rightarrow \begin{bmatrix} \infty & \infty \\ \infty & \infty \end{bmatrix}$, ha $k \rightarrow \infty$. ■

Mátrixok függvényei

4.5. Diagonalizálhatóság

Mind bizonyos problémák megértésében, mind a gyakorlati alkalmazásokban fontos lehet, hogy egy lineáris leképezés mátrixát milyen bázisban írjuk fel. Láttuk milyen sokat segít, ha a bázis sajátvektorokból áll, sőt, ha még ortonormált is. Ekkor a mátrix diagonális alakot ölt. Kérdés azonban, milyen mátrixok diagonalizálhatók, és amelyek nem, azokkal mit tudunk kezdeni.

Ortogonalisan és unitéren diagonalizálható mátrixok

Schur-felbontás

Általánosított sajátvektorok és a Jordan-blokk Tekintsük a 4.58. példában szereplő

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrix hatását a standard bázis vektorain:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{e}_1 &= 4\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{A}\mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{A}\mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Átrendezés után kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{e}_1 &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_1 \\ (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

Az $\mathbf{A} - 4\mathbf{I}$ mátrix fenti hatását a következő diagrammal fogjuk szemléltetni:

$$\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{e}_1 \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{e}_2 \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{e}_3$$

Eszerint $\mathbf{e}_1$ sajátvektor, és mint a 4.58. példában láttuk, $\mathbf{A}$ -nak más sajátvektora nincs. Viszont az előző egyenletekből a következő összefüggés adódik:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^2 \mathbf{e}_2 &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^3 \mathbf{e}_3 &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Az ilyen vektorokra külön elnevezést fogunk alkalmazni:

4.71. DEFINÍCIÓ: ÁLTALÁNOSÍTOTT SAJÁTVEKTOR. Az $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektort a négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékéhez tartozó *általánosított sajátvektorának* nevezzük, ha valamilyen k természetes számra $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k \mathbf{x} = \mathbf{0}$. $k = 1$ esetén $\mathbf{x}$ sajátvektor. Az általánosított sajátvektorokból álló $\mathbf{x}_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$) sorozatot *Jordan-láncnak* nevezzük, ha $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1}$ és $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$.

Az előzőekben vizsgált konkrét példában tehát a térnek sajátvektorokból álló bázisa nincs, hisz a sajátaltér csak 1-dimenziós, de általánosított sajátvektorokból álló bázisa van.

4.72. PÉLDA: JORDAN-LÁNC KONSTRUKCIÓJA. Keressünk az alábbi mátrixok minden sajátaltérének minden bázisvektorához egy abban végződő Jordan-láncot:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ és a } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

MEGOLDÁS. A karakterisztikus polinom mindkét mátrix esetén $-\lambda^3 + 12\lambda^2 - 48\lambda + 64 = (4-\lambda)^3$, ezért $\lambda = 4$ háromszoros algebrai multiplicitású sajátérték.

Az $\mathbf{A}$ mátrix esetén a sajátaltér 1-dimenziós, melyet az $\mathbf{x}_1 = (1, -1, 1)$ vektor feszít ki.

Mivel $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^3 = \mathbf{O}$, ezért legföljebb három hosszú sorozatra számíthatunk: olyan $\mathbf{x}_2$ és $\mathbf{x}_3$ vektort keresünk, melyre $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1$ és $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_2$. Ez két egyenletrendszer megoldását jelenti. Elég a megoldások közül egyet kiválasztani:

$$\mathbf{A} - 4\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \text{ egy-egy megoldás: } \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ezek a következő láncot adják:

$$\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{x}_1 = (1, -1, 1) \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{x}_2 = (0, -1, 0) \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{x}_3 = (-1, -2, 0)$$

A $\mathbf{B}$ mátrix esetén a sajátaltér 2-dimenziós, melyet az $\mathbf{x}_1 = (1, 0, 1)$ és az $\mathbf{y}_1(0, 1, 0)$ vektorok feszítenek ki.

Mivel $(\mathbf{B} - 4\mathbf{I})^2 = \mathbf{O}$, ezért legföljebb kettő hosszú láncra számíthatunk: olyan $\mathbf{x}_2$ és $\mathbf{y}_2$ vektort keresünk, melyre $(\mathbf{B} - 4\mathbf{I})\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1$ és $(\mathbf{B} - 4\mathbf{I})\mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_1$. Ezek közül az első megoldható, és megoldásainak egyike $(-1, 0, 0)$, míg a második nem oldható meg. Ez két láncra vezet:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{B}-4\mathbf{I}} \mathbf{x}_1 = (1, 0, 1) &\xleftarrow{\mathbf{B}-4\mathbf{I}} \mathbf{x}_2 = (-1, 0, 0) \\ \mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{B}-4\mathbf{I}} \mathbf{y}_1 = (0, 1, 0) & \end{aligned}$$

Az egyik lánc kettő hosszú, a másik egy hosszú. ■

A bevezetőben mutatott mátrix-típus fontos szerepet játszik a továbbiakban:

4.73. DEFINÍCIÓ: JORDAN-BLOKK. Azt a négyzetes mátrixot, melynek főátlójában azonos λ értékek, fölötte 1-esek, egyebütt 0-k állnak, azaz melynek alakja

$$\mathbf{J}_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Jordan-blokknak nevezzük.

A fentiek mintájára könnyen látható, hogy az ilyen mátrixoknak a standard bázis minden vektora általánosított sajátvektora, tehát kimondható a következő megállapítás: minden Jordan-blokknak van általánosított sajátvektorokból álló bázisa.

4.74. PÉLDA: JORDAN-LÁNC HOZ TARTOZÓ JORDAN-BLOKK. Írjuk fel a 4.72. példában szereplő $\mathbf{A}$ mátrixot az ott konstruált Jordan-lánc vektoraiból álló bázisban!

MEGOLDÁS. Mivel $\mathbf{Ax}_3 = 4\mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_2$, $\mathbf{Ax}_2 = 4\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_1$ és $\mathbf{Ax}_1 = 4\mathbf{x}_1$, ezért az $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ bázisban a leképezés mátrixa

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Ezt az eredményt az áttérés $\mathbf{C} = [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \mathbf{x}_3]$ mátrixával való közvetlen számolással is megkaphatjuk, ha elvégezzük az alábbi mátrixszorzásokat:

$$\mathbf{J} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -1 & -3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

4.75. PÉLDA: JORDAN-LÁNCOK ÉS JORDAN-BLOKKOK KAPCSOLATA.

Tudjuk, hogy az $\mathbf{A}$ mátrixnak két különböző sajátértéke van, $\lambda_1 = 2$ és $\lambda_2 = 4$, valamint hogy a $\mathbf{C}$ mátrix oszlopvektorai az $\mathbf{A}$ egy Jordan-bázisát alkotják, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 5 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rajzoljuk fel a Jordan-láncok diagrammját, és határozzuk meg a $\mathbf{J} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$ mátrixot a szorzások elvégzése nélkül!

MEGOLDÁS. A $\mathbf{C}$ oszlopai Jordan-bázist alkotnak, azaz minden oszlopvektor egy Jordan-lánc eleme. Mivel az $\mathbf{A}$ mátrixnak csak két különböző sajátértéke van, ez azt jelenti, hogy minden oszlopvektort vagy az $\mathbf{A} - 2\mathbf{I}$ vagy az $\mathbf{A} - 4\mathbf{I}$ mátrix vagy a zérusvektorba, vagy egy másik oszlopvektorba visz (előbbi esetben az oszlopvektor sajátvektor, utóbbi esetben csak általánosított sajátvektor). E hatást az $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{C}$ és az $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{C}$ szorzatok kiszámításával könnyen megkaphatjuk:

$$\mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} - 4\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Az első szorzatból látszik, hogy $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})[\mathbf{c}_1 \ \mathbf{c}_2 \ \mathbf{c}_3] = [\mathbf{0} \ \mathbf{c}_1 \ \mathbf{0}]$, míg a másodikból, hogy $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})[\mathbf{c}_4 \ \mathbf{c}_5 \ \mathbf{c}_6 \ \mathbf{c}_7] = [\mathbf{0} \ \mathbf{c}_4 \ \mathbf{c}_5 \ \mathbf{0}]$ (a második szorzatban már nem is kellett volna a $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ vektorokkal szorozni látva az előző szorzás eredményét). Ebből fölrajzolható a diagram:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-2\mathbf{I}} & \mathbf{c}_1 & \xleftarrow{\mathbf{A}-2\mathbf{I}} & \mathbf{c}_2 & & \\ \mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-2\mathbf{I}} & \mathbf{c}_3 & & & & \\ \mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} & \mathbf{c}_4 & \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} & \mathbf{c}_5 & \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} & \mathbf{c}_6 \\ \mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} & \mathbf{c}_7 & & & & \end{array}$$

A diagramból kiolvasható az $\mathbf{A}$ hatása a $\mathbf{c}_i$ vektorokra: $\mathbf{Ac}_1 = 2\mathbf{c}_1$, $\mathbf{Ac}_2 = 2\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_1$, $\mathbf{Ac}_3 = 2\mathbf{c}_3$, $\mathbf{Ac}_4 = 4\mathbf{c}_4$, $\mathbf{Ac}_5 = 4\mathbf{c}_5 + \mathbf{c}_4$, $\mathbf{Ac}_6 = 4\mathbf{c}_6 + \mathbf{c}_5$,

$\mathbf{A}\mathbf{c}_7 = 4\mathbf{c}_7$. Ebből felírható a leképezés mátrixa:

$$\mathbf{J} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} = \left[\begin{array}{cc|ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right]$$

Jordan normálalak Nem hozható minden mátrix diagonális alakra, de egy ahhoz közeli alakra – ahogy azt a 4.75. példa mutatja – igen. Ebben csak közvetlenül a főátló fölött lehetnek nemnulla elemek, és azok is csak 1-esek. Ráadásul az új bázis ismeretében ez az alak jól leírja a mátrixleképezés hatását is.

4.76. TÉTEL: JORDAN NORMÁLALAK. Bármely $\mathbb{C}^{n \times n}$ -beli mátrix hasonló egy Jordan-blokkokból álló blokkdiagonális mátrixhoz. Részletesen megfogalmazva: minden $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrixhoz létezik olyan $\mathbf{C}$ mátrix, hogy a $\mathbf{J} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ mátrix alakja

$$\mathbf{J} = \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{J}_1 & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{J}_2 & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{J}_k \end{array} \right] \quad (4.8)$$

ahol k az $\mathbf{A}$ független sajátvektorainak maximális száma, és $\mathbf{J}_i$ az i -edik sajátvektorhoz tartozó Jordan-blokk.

► A tételbeli (4.8) mátrixot az $\mathbf{A}$ mátrix *Jordan-féle normálalakjának* nevezzük.

► A különböző Jordan-blokkok különböző sajátvektorokhoz tartoznak, de mivel több sajátvektor is tartozhat ugyanahhoz a sajátértékhez, ezért egy sajátérték több Jordan-blokkban is szerepelhet.

BIZONYÍTÁS. Megmutatjuk, hogy ha találunk k független sajátvektort, akkor találunk k Jordan-láncot is, melyek vektorai a tér bázisát adják, és ebben a bázisban a leképezés mátrixa a tételbeli Jordan-alakot ölti.

A mátrix méretére vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk. $n = 1$ esetén az állítás nyilván igaz. Tegyük fel, hogy igaz az állítás minden n -nél kisebb méretű mátrixra.

Legyen λ az $n \times n$ -es $\mathbf{A}$ mátrix egy sajátértéke, és legyen $\mathbf{x}$ egy hozzá tartozó sajátvektor. Az $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ megoldásainak terét, vagyis a λ -hoz tartozó sajátalteret jelölje $\mathcal{N}_\lambda$. Ennek dimenzióját, vagyis $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ nullitását jelölje r .

Mivel $r > 0$, ezért a dimenziótétel miatt $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ oszlopterének dimenziója $n - r < n$. Jelölje az oszlopteret $\mathcal{O}_\lambda$. Az $\mathcal{O}_\lambda$ invariáns altere $\mathbf{A}$ -nak, azaz $\mathbf{A}(\mathcal{O}_\lambda) \subseteq \mathcal{O}_\lambda$, ugyanis $\mathcal{O}_\lambda$ elemei $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}$ alakúak, ahol $\mathbf{v}$ tetszőleges, és $\mathbf{A}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = (\mathbf{A}^2 - \lambda\mathbf{A})\mathbf{v} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})(\mathbf{A}\mathbf{v})$ ugyancsak eleme $\mathcal{O}_\lambda$ -nak. Az $\mathbf{A}$ mátrixleképezést szűkítsük le $\mathcal{O}_\lambda$ -ra, jelölje ennek mátrixát $\hat{\mathbf{A}}$.

Az $\hat{\mathbf{A}}$ mátrix $n - r$ méretű, ezért az indukciós feltevés szerint van Jordan-láncokból álló bázisa. A következő diagram a láncokat szemlélteti, és azt, hogy $\hat{\mathbf{A}} - \lambda\mathbf{I}$ hogy hat rajtuk. Mivel azonban a halmazon ez

megegyezik $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ hatásával, a nyilak fölé is ezt írjuk:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^1 & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}} & \dots & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}} & \mathbf{x}_{s_1}^1 \\ \mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^2 & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}} & \dots & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}} & \mathbf{x}_{s_2}^2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda_p \mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^p & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda_p \mathbf{I}} & \dots & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda_p \mathbf{I}} & \mathbf{x}_{s_p}^p \end{array}$$

Itt az $\mathbf{x}_k^j$ vektor felső indexe a lánc sorszámát jelöli.

Az $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ oszloptere és magtere metszetének dimenzióját jelölje q , azaz legyen $q = \dim(\mathcal{O}_\lambda \cap \mathcal{N}_\lambda)$. Mivel $\mathcal{N}_\lambda$ elemei az $\mathbf{A}$ sajátvektorai, azok $\mathcal{O}_\lambda$ -ba eső báziselemei pedig az $\mathbf{x}_1^j$ vektorok, ezért q közülük a λ sajátvektora, azaz q sajátérték megegyezik λ -val, pl. az első q , azaz $\lambda_k = \lambda$ ($k = 1, 2, \dots, q$). A láncok végén lévő $\mathbf{x}_{s_k}^k$ vektorok elemei $\mathcal{O}_\lambda$ -nak, tehát mindegyikhez van olyan $\mathbf{y}_k$ vektor, hogy $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{y}_k = \mathbf{x}_{s_k}^k$ ($k = 1, 2, \dots, q$).

Az $\mathcal{N}_\lambda$ altér r -dimenziós, annak q -dimenziós alteréhez találunk olyan $\mathcal{Z}$ alteret, mely $(r - q)$ -dimenziós, és minden vektora sajátvektor. Így a Jordan-láncok így alakulnak:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^1 & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} & \dots & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} & \mathbf{x}_{s_1}^1 & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} & \mathbf{y}_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^q & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} & \dots & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} & \mathbf{x}_{s_q}^q & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} & \mathbf{y}_q \\ \mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda_{q+1} \mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^{q+1} & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda_{q+1} \mathbf{I}} & \dots & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda_{q+1} \mathbf{I}} & \mathbf{x}_{s_{q+1}}^{q+1} & & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ \mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda_p \mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^p & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda_p \mathbf{I}} & \dots & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda_p \mathbf{I}} & \mathbf{x}_{s_p}^p & & \\ \mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} & \mathbf{z}_1 & & & & & & \\ \vdots & & \vdots & & & & & & \\ \mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}} & \mathbf{z}_{r-q} & & & & & & \end{array} \quad (4.9)$$

Az $\mathbf{x}$ -vektorok száma $n - r$, az $\mathbf{y}$ -vektorok száma q , a $\mathbf{z}$ -vektorok száma $r - q$, ezek összege pedig $(n - r) + q + (r - q) = n$, tehát van elég vektor egy bázishoz. Már csak a függetlenségüket kell belátni. A konstrukció olyan volt, hogy az $\mathbf{x}$ - és $\mathbf{z}$ -vektorok mind függetlenek egymástól, csak az $\mathbf{y}$ -vektorok közülük való függetlenségét kell bizonyítani. Tegyük fel, hogy

$$\sum_{j,k} \xi_{j,k} \mathbf{x}_k^j + \sum_t \eta_t \mathbf{y}_t + \sum_r \zeta_r \mathbf{z}_r = \mathbf{0},$$

ahol nem minden η_t nulla. Szorozzuk meg az egyenlőséget (balról) az $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ mátrixszal. Mivel az első q lánc végén lévő $\mathbf{x}_{s_t}^t$ -vektorok kisebb indexűekbe mennek, másrészt $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{y}_t = \mathbf{x}_{s_t}^t$, ezért olyan összefüggéshez jutunk, amelyben már csak $\mathbf{x}$ -vektorok lesznek, de nem minden együttható nulla, hisz van nemnulla η együttható, és ez ellentmondás. ■

4.77. PÉLDA: NORMÁLALAKOK. Soroljuk fel az összes lehetséges Jordan normálalakját annak a mátrixnak, melyről csak annyit tudunk, hogy $(1 - \lambda)^4$ a karakterisztikus polinomja. Ne tekintsünk különbözőnek két normálalkot, ha azok csak a Jordan-blokkok sorrendjében különböznek egymástól!

MEGOLDÁS. A karakterisztikus polinom negyedfokú, így a mátrix 4×4 -es. Mivel minden sajátérték 1, ezért a Jordan-alak főátlójában csupa 1-es

szerepel. A lehetséges öt alak elemi leszámlálással megkapható:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nem tekintjük különbözőnek a blokkok cseréjével egymásból megkapható alakokat. Például az

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix a negyedik alakból a két blokk cseréjével megkapható. ■

A Jordan-alak egyértelműsége A $\mathbb{C}^{n \times n}$ -beli mátrixok a Jordan normálalakjuk szerint osztályokba sorolhatók. Egy osztályba azok a mátrixok kerülnek, melyek normálalakja azonos. Egy ilyen osztályozás azonban csak akkor létezik, ha minden mátrixnak csak egyetlen normálalakja van, azaz a normálalak egyértelmű. Ezt biztosítja a következő tétel.

4.78. TÉTEL: A JORDAN-ALAK EGYÉRTELMŰSÉGE. Egy mátrix Jordan normálalakja a Jordan-blokkok sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

BIZONYÍTÁS. A felbontás egyértelműségének bizonyításához elég belátni, hogy bármely két hasonló mátrix Jordan-alakjának meghatározó adatai a hasonlóságra nézve invariánsak.

A Jordan-blokkok, és így a Jordan-láncok száma megegyezik a független sajátvektorok maximális számával – ez invariáns.

Az egyszerűség kedvéért először tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ minden sajátértéke azonos, jelölje λ . A továbbiak könnyebb megértésére lássunk egy konkrét példát. Legyen az $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus polinomja $(\lambda - x)^{13}$, és tegyük fel, hogy Jordan-bázisa a következőképp néz ki:

$$\begin{array}{cccccccc} \mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^1 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_2^1 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_3^1 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_4^1 \\ \mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^2 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_2^2 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_3^2 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_4^2 \\ \mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^3 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_2^3 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_3^3 & & \\ \mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^4 & & & & & & \\ \mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^5 & & & & & & \end{array} \quad (4.10)$$

A leghosszabb blokk mérete 4, ami $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ ismeretében úgy kapható meg, hogy 4 az a legkisebb s kitevő, melyre $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^s = \mathbf{O}$. Általában is igaz, a legnagyobb blokk mérete az a legkisebb s , melyre $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^s = \mathbf{O}$. A mátrix hatványának zérus volta is invariáns, így hasonló mátrixokra a leghosszab lánc hossza is azonos.

Legyen a λ sajátértékhez tartozó i -hosszú Jordan-láncok száma m_i . A 4.10. diagramon $m_1 = 2$, $m_2 = 0$, $m_3 = 1$, $m_4 = 2$. Látható, hogy $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ hatványainak rangjából megmondható, hogy vektor nem futott még a nullvektorba, innen pedig az m_i értékek is kiszámolhatók. Esetünkben

$$\begin{aligned} m_4 &= r((\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^3) = 2 \\ m_3 + 2m_4 &= r((\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^2) = 5 \\ m_2 + 2m_3 + 3m_4 &= r(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 8 \\ m_1 + m_2 + m_3 + m_4 &= n - r(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 13 - 8 = 5 \end{aligned}$$

és ez az egyenletrendszer egyértelműen megoldható. Általában

$$\begin{aligned}
 m_s &= r((\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{s-1}) \\
 m_{s-1} + 2m_s &= r((\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{s-2}) \\
 m_{s-2} + 2m_{s-1} + 3m_s &= r((\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{s-2}) \\
 &\vdots \\
 m_2 + 2m_3 + \cdots + (s-1)m_s &= r(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \\
 m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_{s-1} + m_s &= n - r(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})
 \end{aligned}$$

Ennek az egyenletrendszernek a jobb oldalán a hasonlóságra nézve invariáns értékek vannak, az együtthatómátrix háromszög alakú, így egyszerű visszahelyettesítéssel megoldható, főátlójában csupa egyes van, melynek következtében a megoldás egyértelmű, másrészt a megoldások mindegyike egész szám.

Ha a mátrixnak nem csak egy sajátértéke van, akkor sajátértékenként egy ilyen egyenletrendszert kapunk, mely annyiban változik az előzőhöz képest, hogy ha λ multiplicitása $m(\lambda)$, akkor $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ hatványainak rangjához az összes λ -tól különböző sor eggyel hozzájárul, így az egyenletrendszerek jobb oldalából $(n - m(\lambda))$ -t ki kell vonni. A legnagyobb blokk mérete ekkor $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ -nek az a legkisebb s hatványa, melynek rangja először éri el $n - m(\lambda)$ -t. Így az összes esetre általánosan érvényes egyenletrendszer:

$$\begin{aligned}
 m_s &= m(\lambda) - n + r((\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{s-1}) \\
 m_{s-1} + 2m_s &= m(\lambda) - n + r((\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{s-2}) \\
 m_{s-2} + 2m_{s-1} + 3m_s &= m(\lambda) - n + r((\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{s-2}) \\
 &\vdots \\
 m_2 + 2m_3 + \cdots + (s-1)m_s &= m(\lambda) - n + r(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \\
 m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_{s-1} + m_s &= n - r(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})
 \end{aligned}$$

Ennek egyértelmű megoldhatósága bizonyítja állításunkat. ■

4.79. PÉLDA: JORDAN-BLOKKOK MÉRETE. Egy 10×10 -es $\mathbf{A}$ mátrixnak λ 10-szeres algebrai multiplicitású sajátértéke. $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 5, 2, 1, 0. Írjuk fel a Jordan normálalakját!

MEGOLDÁS. A blokkok száma, ami megegyezik a Jordan-láncok számával 5, mivel $n - r(\mathbf{A}) = 10 - 5 = 5$. A leghosszabb lánc hossza 4, mivel $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ legkisebb zérusmátrixot adó hatványa a 4-dik. Az egyenletrendszer és megoldása, valamint a $\mathbf{J}$ Jordan-mátrix:

$$\begin{aligned}
 m_4 &= 1 & m_4 &= 1 \\
 m_3 + 2m_4 &= 2 & m_3 &= 0 \\
 m_2 + 2m_3 + 3m_4 &= 5 & m_2 &= 2 \\
 m_1 + m_2 + m_3 + m_4 &= 5 & m_1 &= 2
 \end{aligned}
 \Rightarrow \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & 1 & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{bmatrix}$$

4.80. PÉLDA: JORDAN-BLOKKOK MÉRETE. Egy 14×14 -es $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus polinomja $(3 - \lambda)^5(2 - \lambda)^5(1 - \lambda)^4$.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} - 3\mathbf{I} \text{ hatványainak rangja rendre: } & 12, 11, 10, 9; \\
 \mathbf{A} - 2\mathbf{I} \text{ hatványainak rangja rendre: } & 12, 10, 9; \\
 \mathbf{A} - \mathbf{I} \text{ hatványainak rangja rendre: } & 11, 10.
 \end{aligned}$$

Írjuk fel a Jordan normálalakját!

MEGOLDÁS. Most $n = 14$, $m(3) = 5$, $m(2) = 5$, $m(1) = 4$.

$\lambda = 3$ esetén a blokkok (Jordan-láncok) száma $n - r(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) = 14 - 12 = 2$. A leghosszabb lánc hossza $s = 4$, ugyanis ez a legkisebb s , melyre $r((\mathbf{A} - 3\mathbf{I})^s) = 14 - 5 = 9$. Az egyenletrendszer és megoldása

$$\begin{aligned} m_4 &= 5 - 14 + 10 = 1 & m_4 &= 1 \\ m_3 + 2m_4 &= 5 - 14 + 11 = 2 & \Rightarrow & m_3 = 0 \\ m_2 + 2m_3 + 3m_4 &= 5 - 14 + 12 = 3 & & m_2 = 0 \\ m_1 + m_2 + m_3 + m_4 &= 14 - 12 = 2 & & m_1 = 1 \end{aligned}$$

Hasonlóan járunk el a többi sajátérték esetén is (gondoljuk végig):

$$\begin{aligned} m_3 &= 5 - 14 + 10 = 1 & m_3 &= 1 \\ m_2 + 2m_3 &= 5 - 14 + 12 = 3 & \Rightarrow & m_2 = 1 \\ m_1 + m_2 + m_3 &= 14 - 12 = 2 & & m_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_2 &= 4 - 14 + 11 = 1 & \Rightarrow & m_2 = 1 \\ m_1 + m_2 &= 14 - 11 = 3 & & m_1 = 2 \end{aligned}$$

Összefoglalva:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & & & & & \\ & 3 & 1 & & & & \\ & & 3 & 1 & & & \\ & & & 3 & & & \\ & & & & 3 & & \\ & & & & & 2 & 1 \\ & & & & & 2 & 1 \\ & & & & & & 2 \\ & & & & & 2 & 1 \\ & & & & & & 2 \\ & & & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

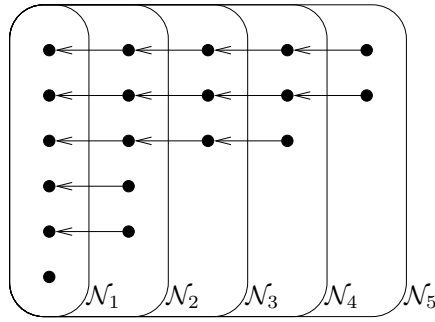
az $\mathbf{A}$ mátrix Jordan normálalakja. ■

A Jordan-bázis konstrukciója A Jordan-tétel bizonyításában megkonstruált bázist kis mátrixokra kézzel is ki lehet számolni. Az itt ismertetendő egyszerű naív algoritmus nem számítógépes megvalósításra való, ennél hatékonyabb is létezik.

Példaként tekintsünk egy 18-adrendű $\mathbf{A}$ mátrixot, melynek λ 18-szoros sajátértéke, és amelyre a Jordan-láncok hossza rendre $m_5 = 2$, $m_4 = 1$, $m_3 = 0$, $m_2 = 1$, $m_1 = 2$. Ennek alapján az $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ hatása a Jordan-bázison meghatározható, amit a 4.9. ábra szemléltet. Jelölje $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k$ nullterét $\mathcal{N}_k$. $\mathcal{N}_5$ a λ -hoz tartozó teljes általánosított sajátaltér – e példában $\mathbb{C}^{18}$. A nulltér meghatározása egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldását jelenti, ami nem okoz nehézséget, de az már nem teljesen mindegy, hogy a bázist hogy választjuk benne.

Az algoritmus – melyet a 4.10. ábra is szemléltet – lényege, hogy a nagyobb indexű terek felől indulva minden lépésben kiterjesztjük $\mathcal{N}_{i-1}$ bázisát $\mathcal{N}_i$ bázisává, majd a kiterjesztésnek vesszük az $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ általi képét, ami már $\mathcal{N}_{i-1}$ -be esik, és ezt $\mathcal{N}_{i-2}$ bázisához adva azt kiterjesztjük $\mathcal{N}_{i-1}$ új bázisává. . . . A konvenció az lesz, hogy a vektortér egy generátorának vektorait egyetlen mátrixba tesszük, és azt azonos, de félkövér betűvel jelöljük, tehát pl. $\mathcal{N}$ generátormátrixát $\mathbf{N}$ jelöli. Részletezve:

- Meghatározzuk $\mathcal{N}_i$ egy tetszőleges $\mathbf{N}_i$ bázismátrixát ($i = 1, 2, 3, 4, 5$).
- Kiegészítjük $\mathbf{N}_4$ -et $\mathcal{N}_5$ bázisává, az új báziselemek mátrixát jelölje $\mathbf{U}_5$, tehát $\mathcal{N}_5$ bázisa most $[\mathbf{N}_4 | \mathbf{U}_5]$.

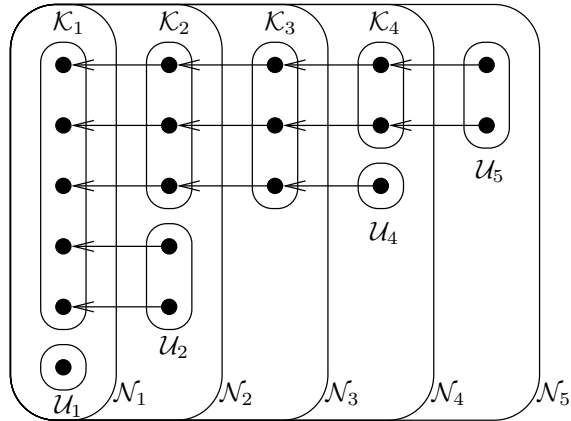


4.9. ábra. Az $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ hatványainak nullterei, és hatása az $\mathbf{A}$ mátrix Jordan-bázisán

- Legyen $\mathbf{K}_4$ az új elemek $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ általi képe, azaz $\mathbf{K}_4 = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{U}_5$. Mivel $\mathcal{K}_4 \subset \mathcal{N}_4$, de független az $\mathcal{N}_3$ altértől, ezért alkalmas arra, hogy bázisvektorait a Jordan-bázis $\mathcal{N}_4 \setminus \mathcal{N}_3$ -ba eső elemei közé vegyük.
- Ha szükséges, egészítsük ki a $[\mathbf{N}_3|\mathbf{K}_4]$ -et $\mathcal{N}_4$ bázisává új elemek hozzávételével, így $\mathcal{N}_4$ bázisa most $[\mathbf{N}_3|\mathbf{K}_4|\mathbf{U}_4]$.
- Vegyük a $[\mathbf{K}_4|\mathbf{U}_4]$ mátrix képét, azaz legyen $\mathbf{K}_3 = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})[\mathbf{K}_4|\mathbf{U}_4]$, és ha szükséges, egészítsük ki $[\mathbf{N}_2|\mathbf{K}_3]$ -at $\mathcal{N}_3$ bázisává új elemek hozzávételével (azaz $\mathcal{N}_3$ bázisa most $[\mathbf{N}_2|\mathbf{K}_3|\mathbf{U}_3]$ – most $\mathcal{U}_3 = \emptyset$). Hasonlóan folytatjuk $\mathcal{N}_i$ indexét csökkentve: $\mathbf{K}_2 = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})[\mathbf{K}_3|\mathbf{U}_3]$, új elemek hozzávételével előállítjuk $\mathcal{N}_2$ bázisát: $[\mathbf{N}_1|\mathbf{K}_2|\mathbf{U}_2]$.
- Végül legyen $\mathbf{K}_1 = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})[\mathbf{K}_2|\mathbf{U}_2]$, amit $\mathbf{U}_1$ -gyel kibővítünk $\mathcal{N}_1$ bázisává. A tér Jordan-bázisa a kép- és az új elemek egyesítése:

$$[\mathbf{K}_1|\mathbf{K}_2|\mathbf{K}_3|\mathbf{K}_4|\mathbf{U}_1|\mathbf{U}_2|\mathbf{U}_3|\mathbf{U}_4|\mathbf{U}_5].$$

- Végül a Jordan-bázis elemeit úgy rendezzük, hogy a láncokat egymás után, minden láncot a sajátvektorból indulva felsorolunk.



4.10. ábra. A Jordan-bázist megkonstruáló algoritmus

Ezek után lássunk egy konkrét példát, majd az algoritmust általánosan. A számolás kivitelezéséhez két megjegyzés:

- Ha $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ két altér, és $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$, illetve $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ ($m < n$) a bázisuk, akkor elemi sorműveletekkel konstruálhatunk $\mathcal{V}$ -nek egy olyan $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$ bázist, hogy $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m\}$ az $\mathcal{U}$ bázisa legyen. Ehhez írjuk $\mathcal{U}$, majd $\mathcal{V}$ bázisvektorait egyetlen

$$[\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_m \mid \mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_n]$$

mátrixba. Ennek lépcsős alakjában vezéregyesek lesznek az első m oszlopban, és $n-m$ további oszlopban. A nekik megfelelő vektorok az eredeti bázisokban (tehát $\mathcal{V}$ összes vektora és $\mathcal{U}$ -nak $n-m$ vektora) adják az új bázist.

► Emlékeztetünk rá, hogy ha egy mátrix redukált lépcsős alakja $[\mathbf{I}|\mathbf{S}]$ alakú, akkor $\begin{bmatrix} -\mathbf{S} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$ vagy $\begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix}$ oszlopvektorai a mátrix nulltere bázisát adják. Vigyázzunk, ha $\mathbf{I}$ nem az első oszlopokban van, akkor $\begin{bmatrix} -\mathbf{S} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$ sorait megfelelően permutálni kell.

4.81. PÉLDA: JORDAN-BÁZIS ELŐÁLLÍTÁSA. Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 6 & -2 & 4 \\ 4 & -5 & 9 & -3 & 5 \\ 4 & -5 & 8 & -2 & 5 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix Jordan normálalakját és Jordan-bázisát!

MEGOLDÁS. A karakterisztikus polinom

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = -\lambda^5 + 4\lambda^4 - 6\lambda^3 + 4\lambda^2 - \lambda = -\lambda(1 - \lambda)^4.$$

A 0-hoz tartozó sajátvektor a redukált lépcsős alakból kiszámítva:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mivel itt az algebrai és geometriai multiplicitás egyaránt 1, ez a Jordan-lánc egyelemű. A $\lambda = 1$ esetén a geometriai multiplicitás 2, ugyanis $\mathbf{A} - \mathbf{I}$ redukált lépcsős alakja és abból a nulltér bázisa:

$$\text{rref}(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$(\mathbf{A} - 1 \cdot \mathbf{I})^2$ nullterét gyorsabb úgy számolni, ha nem $\mathbf{A} - \mathbf{I}$ -t szorozzuk önmagával, hanem lépcsős alakját jobbról, és annak a szorzatnak vesszük a lépcsős alakját. A lépcsős alak kiszámolása ugyanis csak elemi mátrixokkal való balról szorzást jelent, így

$$(\text{rref}(\mathbf{A} - \mathbf{I}))(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \mathbf{E}(\mathbf{A} - \mathbf{I})(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \mathbf{E}(\mathbf{A} - \mathbf{I})^2$$

vagyis a szorzat az $(\mathbf{A} - \mathbf{I})^2$ -en végrehajtott elemi sorműveletek eredménye. Sokkal kevesebb viszont a számolnivaló, mivel a 0-sorok elhagyhatók:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\text{rref}(\mathbf{A} - \mathbf{I}))(\mathbf{A} - \mathbf{I}) \\ \text{a 0-sorok nélkül} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ahonnan a bázis vektorai:

$$\mathbf{N}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hasonlóan határozzuk meg $(\mathbf{A} - \mathbf{I})^3$ bázisát!

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ami már lépcsős alakú, és ahonnan a bázismátrix

$$\mathbf{N}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ezután határozzuk meg $\mathbf{U}_3$ vektorait, vagyis azokat, amelyek $\mathcal{N}_2$ bázisát ($\mathbf{N}_2$ -t) $\mathcal{N}_3$ bázisává egészítik ki. Ehhez az $[\mathbf{N}_2|\mathbf{N}_3]$ mátrixot kell redukált lépcsős alakra hozni, $\mathcal{U}_3$ elemei a $\mathbf{N}_3$ azon oszlopai lesznek, melyek függetlenek $\mathbf{N}_2$ -től, azaz melyek redukált lépcsős alakjában vezéregyes van.

$$[\mathbf{N}_2|\mathbf{N}_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Tehát $\mathbf{U}_3 = [-1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]^T$, és ebből $\mathbf{K}_2 = (\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{U}_3 = [-1 \ 3 \ 4 \ 4 \ 0]^T$. Mivel $\mathbf{K}_2$ egyetlen vektorból áll, és $\mathcal{N}_3$ és $\mathcal{N}_2$ dimenzióinak különbsége is 1, ezért itt nem kell számolnunk semmit, $\mathcal{U}_2 = \{\mathbf{0}\}$, azaz $\mathbf{U}_2$ üres. $\mathbf{K}_1 = (\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{K}_2 = [0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0]^T$, és mivel e vektor benn van $\mathcal{N}_1$ bázisában, $\mathbf{U}_1 = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ teret a másik bázisvektor generálja. A Jordan normálalak felírásához a Jordan-láncok vektorait egymás után fel kell sorolni, a belőlük képzett $\mathbf{P}$ mátrixszal lesz $\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$. E két mátrix

$$\mathbf{P} = \left[\begin{array}{c|ccc|c} 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad \mathbf{J} = \left[\begin{array}{c|cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Az algoritmus általánosan:

- Input: $\mathbf{A}$, $p(x)$ karakterisztikus polinom lineáris tényezőkre bontva,
- Minden λ sajátértékre
 - Határozzuk meg a leghosszabb lánc s hosszát, és $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^i$ nullterét ($\mathcal{N}_i$, $i = 1, 2, \dots, s$). Legyen $\mathcal{U}_{s+1} = \mathcal{K}_{s+1} = \mathcal{N}_0 = \{\mathbf{0}\}$, azaz e terek bázisa az üreshalmaz.
 - Minden i -re s -től 1-ig haladva:
 - * Legyen $\mathbf{K}_i = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})[\mathbf{K}_{i+1}|\mathbf{U}_{i+1}]$.
 - * Határozzuk meg $\mathbf{U}_i$ -t úgy, hogy $[\mathbf{N}_{i-1}|\mathbf{K}_i|\mathbf{U}_i]$ bázisa legyen $\mathcal{N}_i$ -nek. Ehhez az $[\mathbf{N}_{i-1}|\mathbf{K}_i|\mathbf{N}_i]$ mátrix redukált lépcsős alakja alapján válasszuk a vezéroszlopokat $\mathbf{N}_i$ -ből az $\mathbf{U}_i$ -be.
- Tegyük a Jordan-láncok vektorait balról jobbra egymás mellé minden láncot a sajátvektorral kezdve, az így kapott $\mathbf{P}$ mátrixszal $\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$.

Mátrixfüggvények

4.82. DEFINÍCIÓ: MÁTRIX EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNYE. Az $\mathbf{A}$ négyzetes mátrix exponenciális függvényét a következő sor definiálja:

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^n}{n!} + \cdots$$

4.83. ÁLLÍTÁS: EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY KISZÁMÍTÁSA. Ha $\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ az $\mathbf{A}$ mátrix Jordan normálalakja, akkor

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{P}e^{\mathbf{J}}\mathbf{P}^{-1},$$

ahol $e^{\mathbf{J}}$ blokkonként számolható, és

$$\mathbf{J}_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix} \text{ esetén } e^{\mathbf{J}_\lambda} = e^\lambda \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & \frac{1}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{1}{(n-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Általában mondható, hogy

$$f\left(\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{f(\lambda)}{0!} & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \\ 0 & \frac{f(\lambda)}{0!} & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \cdots & \frac{f^{(n-2)}(\lambda)}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{f(\lambda)}{0!} \end{bmatrix}.$$

4.84. PÉLDA: MÁTRIX EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNYE. Legyen

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

Határozzuk meg az $e^{\mathbf{A}}$ mátrixot!

MEGOLDÁS. $\mathbf{A}$ karakterisztikus polinomja

$$x^3 + 10x^2 + 32x + 32 = (x + 2)(x + 4)^2,$$

így

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{P}e^{\mathbf{J}}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{e^2+1}{e^4} & \frac{e^2-1}{e^4} & \frac{1}{2} \frac{e^2-1}{e^4} \\ \frac{1}{2} \frac{e^2-1}{e^4} & e^2 & \frac{1}{2} \frac{e^2-1}{e^4} \\ -\frac{1}{2} \frac{e^2-1}{e^4} & -\frac{e^2-1}{e^4} & -\frac{1}{2} \frac{e^2-1}{e^4} \end{bmatrix}$$