2015-2016/1. Bevezető matematika, 2. zárthelyi, hétfő A

Munkaidő: 50 perc. A dolgozat megírásához semmilyen segédeszköz nem használható.

1. **(10 pont)** Oldja meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:

$$\frac{x^2-2x-15}{x^2-4}<0$$

2. **(10 pont)** Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$2^{4x-1}\cdot\frac{\sqrt{16^{x-14}}}{32^{3-2x}}=\left(\frac{1}{8}\right)^{3x-2}$$

3. **(10 pont)** Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\log_4\left(\frac{1}{3}\log_{16}(5-\log_2 x)\right)=-1$$

4. **(10 pont)** Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$2\cos^2 x-\sin x-1=0$$

5. **(10 pont)** Egy mértani sorozat első három tagjának összege 42. Ha az első taghoz 4-et adunk, a harmadikból 10-et kivonunk, akkor számtani sorozat egymás utáni tagjait kapjuk. Mi a mértani sorozat?

2015-2016/1. Bevezető matematika, 2. zárthelyi, hétfő B

Munkaidő: 50 perc. A dolgozat megírásához semmilyen segédeszköz nem használható.

1. **(10 pont)** Oldja meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:

$$\frac{x^2-2x-24}{x^2-9}<0$$

2. **(10 pont)** Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$3^{2x+1}\cdot\frac{\sqrt{81^{x-9}}}{27^{1-2x}}=\left(\frac{1}{9}\right)^{2x-4}$$

3. **(10 pont)** Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\log_4\left(\frac{1}{2}\log_{16}(6-\log_3 x)\right)=-1$$

4. **(10 pont)** Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$2\sin^2 x-\cos x-1=0$$

5. **(10 pont)** Egy mértani sorozat első három tagjának összege 21. Ha az első taghoz 5-öt adunk, a harmadikból 14-et kivonunk, akkor számtani sorozat egymás utáni tagjait kapjuk. Mi a mértani sorozat?

(A) hétfő 2. ZH

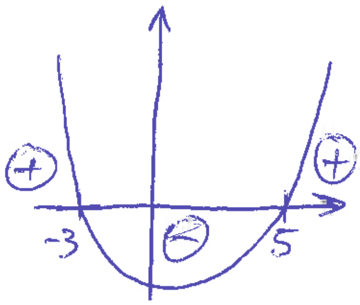
(1)

$$\frac{x^2-2x-15}{x^2-4} < 0$$

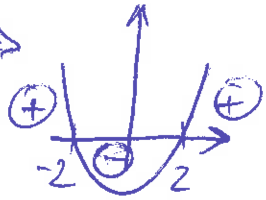
Ez akkor igaz, ha a számláló és a nevező előjele különbözik

$\boxed{K}$ $x^2-4 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 2$

$$x^2-2x-15=0 \Rightarrow x_{1;2}=\frac{2\pm\sqrt{4+60}^{\,8}}{2} \left< \begin{matrix} x_1=5 \\ x_2=-3 \end{matrix} \right. \Rightarrow$$



$$x^2-4=0 \Rightarrow x_1=2 \quad x_2=-2 \Rightarrow$$



Előjel ábra:

		-3		-2		0		2		5	
sz:	+		-		-		-		-		+
n:	+		+		-		-		+		+

$\Downarrow$

$$\boxed{-3<x<-2 \quad \text{vagy} \quad 2<x<5}$$

(2)

$$2^{4x-1}\cdot\frac{\sqrt{16^{x-14}}}{32^{3-2x}}=\left(\frac{1}{8}\right)^{3x-2}$$

$$2^{4x-1}\cdot 2^{2(x-14)}\cdot 2^{-5(3-2x)}=2^{-3(3x-2)}$$

Mivel az exponenciális függvény szig. mon.

$\Downarrow$

$$4x-1+2(x-14)+(-5)(3-2x)=-3(3x-2)$$

$$4x-1+2x-28-15+10x=-9x+6$$

$$25x=50$$

$$\underline{\underline{x=2}}$$

(3)

$$\log_4\left(\frac{1}{3}\log_{16}(5-\log_2 x)\right)=-1$$

$$\frac{1}{3}\log_{16}(5-\log_2 x)=\frac{1}{4}$$

$$\log_{16}(5-\log_2 x)=\frac{3}{4}$$

$$5-\log_2 x=8$$

$$-3=\log_2 x$$

$$2^{-3}=x \Rightarrow \underline{x=\frac{1}{8}}$$

(4)

$$2\cdot\cos^2 x-\sin x-1=0$$

$$2(1-\sin^2 x)-\sin x-1=0$$

$$2-2\sin^2 x-\sin x-1=0$$

$$2\sin^2 x+\sin x-1=0 \qquad y:=\sin x \Rightarrow -1\le y\le 1$$

$$2y^2+y-1=0 \Rightarrow y_{1/2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4} \quad y_1=\frac{1}{2},\quad y_2=-1$$

(i) $\sin x=\frac{1}{2}$ (ii) $\sin x=-1$

$$\boxed{x_1=\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi \qquad x_3=\frac{3\pi}{2}+k\cdot 2\pi \qquad k\in\mathbb{Z} \\ x_2=\frac{5\pi}{6}+k\cdot 2\pi}$$

(5)

(a_n) m.s. $\to S_3=42$

(b_n) sz.s. $b_1=a_1+4$, $b_2=a_2$, $b_3=a_3-10$

$(a_n)=?$

$$a_1+a_2+a_3=a_1+a_1q+a_1q^2=$$

$$=a_1(1+q+q^2)=42 \quad (i)$$

$$b_2=\frac{b_1+b_3}{2} \Rightarrow 2a_2=(a_1+4)+(a_3-10)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a_1q=a_1+4+a_1q^2-10 \Rightarrow a_1(1-2q+q^2)=6 \quad (ii)$$

$$(i),(ii)\Rightarrow \frac{42}{1+q+q^2}=\frac{6}{1-2q+q^2}\Rightarrow 42-84q+42q^2=6+6q+6q^2$$

$$36q^2-90q+36=0 \quad /:18$$

$$2q^2-5q+2=0$$

$$q_{1;2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4} \quad q_1=2,\quad q_2=\frac{1}{2}$$

Ha $q_1=2 \Rightarrow a_1 \overset{(i)}{=} \frac{42}{7}=6$, $a_2=12$, $a_3=24$

Ha $q_2=\frac{1}{2}\Rightarrow a_1=\frac{42}{\frac{7}{4}}=24$, $a_2=12$, $a_3=6$

Ⓑ hétfő 2. ZH

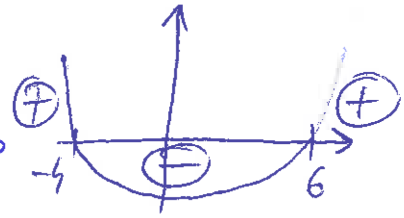
1.

$$\frac{x^2-2x-24}{x^2-9}<0$$

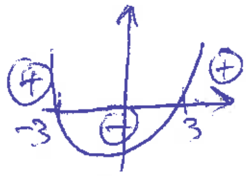
Ez akkor igaz, ha a számláló és a nevező előjele különbözik.

$\boxed{K}$ $x^2-9\neq 0 \Rightarrow x\neq \pm 3$

$$x^2-2x-24=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+96}^{\,10}}{2} \begin{cases} x_1=6 \\ x_2=-4 \end{cases} \Rightarrow$$



$$x^2-9=0 \Rightarrow x_1=3;\ x_2=-3 \Rightarrow$$



Előjel ábra:

	$x<-4$	$-4<x<-3$	$-3<x<3$ (0)	$3<x<6$	$x>6$
sz:	+	−	−	−	+
n:	+	+	−	+	+

$\Downarrow$

$\boxed{-4<x<-3 \text{ vagy } 3<x<6}$

2.

$$3^{2x+1}\cdot\frac{\sqrt{81^{x-9}}}{27^{1-2x}}=\left(\frac{1}{9}\right)^{2x-4}$$

$$3^{2x+1}\cdot 3^{2(x-9)}\cdot 3^{-3(1-2x)}=3^{-2(2x-4)}$$

Mivel az exponenciális $\Downarrow$ függvény szig. mon.

$$2x+1+2(x-9)-3(1-2x)=-2(2x-4)$$

$$2x+1+2x-18-3+6x=-4x+8$$

$$14x=28$$

$$\underline{\underline{x=2}}$$

③ $\log_4\left(\frac{1}{2}\log_{16}(6-\log_3 x)\right)=-1$

$$\frac{1}{2}\log_{16}(6-\log_3 x)=\frac{1}{4}$$

$$\log_{16}(6-\log_3 x)=\frac{1}{2}$$

$$6-\log_3 x=4$$

$$2=\log_3 x$$

$$3^2=x \Rightarrow \underline{\underline{x=9}}$$

④ $2\sin^2 x-\cos x-1=0$

$$2(1-\cos^2 x)-\cos x-1=0$$

$$2-2\cos^2 x-\cos x-1=0$$

$$2\cos^2 x+\cos x-1=0$$

$y:=\cos x \Rightarrow -1\le y\le 1$

$$2y^2+y-1=0$$

$$y_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}^{\,3}}{4} \begin{cases} y_1=\frac{1}{2} \\ y_2=-1 \end{cases}$$

(i) $\cos x=\frac{1}{2}$

(ii) $\cos x=-1$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1&=\frac{\pi}{3}+k\cdot 2\pi \\ x_2&=-\frac{\pi}{3}+k\cdot 2\pi \\ x_3&=\pi+k\cdot 2\pi \qquad k\in\mathbb{Z} \end{aligned}}$$

⑤ (a_n) m.s. $\to S_3=21 \longrightarrow a_1+a_2+a_3=a_1+a_1q+a_1q^2=a_1(1+q+q^2)=21$ (i)

(b_n) ar.s. $\quad b_1=a_1+5 \qquad b_2=\frac{b_1+b_3}{2}\Rightarrow 2a_2=(a_1+5)+(a_3-14)\Rightarrow$

$(a_n)=?\quad b_2=a_2$

$b_3=a_3-14 \qquad \Rightarrow 2a_1q=a_1+5+a_1q^2-14\Rightarrow a_1(1-2q+q^2)=9$ (ii)

(i), (ii) $\Rightarrow \frac{21}{1+q+q^2}=\frac{9}{1+q^2-2q}\Rightarrow 21+21q^2-42q=9+9q+9q^2$

$$12q^2-51q+12=0 \quad /:3$$

$$4q^2-17q+4=0$$

$$q_{1,2}=\frac{17\pm\sqrt{289-64}}{8},\quad \sqrt{225}=15 \qquad \begin{cases} q_1=4 \\ q_2=\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{На } q_1=4\Rightarrow a_1=\frac{21}{1+4+16}=1,\ a_2=4,\ a_3=16 \\ &\text{На } q_2=\frac{1}{4}\Rightarrow a_1=\frac{21}{\frac{16+4+1}{16}}=16,\ a_2=4,\ a_3=1 \end{aligned}}$$