Vizsga, 2018.12.18.

m.o.

A) Legyen f értelmezve x_0 egy környezetében. Ha a $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ határérték létezik és véges, azt mondjuk, hogy f differenciálható x_0-ban, és a fenti határérték f x_0-beli differenciálhányadosa.

B) Legyen f folytonos $[a;b]$-n. Ha $f(a)<0$ és $f(b)>0$, akkor van van olyan $c\in(a;b)$, hogy $f(c)=0$.

C) Az $\underline{a}, \underline{b}$ vektorok vektoriális szorzata az $(\underline{a}\times\underline{b})$-vel jelölt vektor, melynek hossza $|\underline{a}|\cdot|\underline{b}|\cdot\sin\gamma$, ahol γ az $\underline{a}, \underline{b}$ által bezárt szög, $\underline{a}, \underline{b}$ síkjára merőleges, és $\underline{a}, \underline{b}, \underline{a}\times\underline{b}$ ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkot.

① $\frac{2}{z}+\frac{1}{1+2i}=1 \Rightarrow \frac{2}{z}=1-\frac{1}{1+2i}=\frac{2i}{1+2i}$ 2p $\Rightarrow \frac{1}{z}=\frac{i}{1+2i}$ 1p $\Rightarrow z=\frac{1+2i}{i}=2-i \Rightarrow \bar{z}=2+i$ 2p 1p

② $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{n+1}{n^2}}{1+\frac{-n+1}{n^2}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{\frac{n^2}{n+1}}\right)^n}{\left(1-\frac{1}{\frac{n^2}{n-1}}\right)^n}=$$ 1p 1p

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n^2}{n+1}}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n}}}{\left(\left(1-\frac{1}{\frac{n^2}{n-1}}\right)^{\frac{n^2}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{(e)^1}{(e^{-1})^1}=\frac{1}{e^2},$$ 2p 1p mert

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{1+\frac{1}{n}}=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{1-\frac{1}{n}}=\infty$, és $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1$ 1p

③ $D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$, zh.: $x=0$ 1p, nem páros, nem páratlan, nem periodikus 1p

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{1-\frac{1}{x}}=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{1-\frac{1}{x}}=-\infty$ 1p

$\lim\limits_{x\to1+0}\frac{x^2}{x-1}=\infty$, $\lim\limits_{x\to1-0}\frac{x^2}{x-1}=-\infty$

$$f'(x)=\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2} \qquad f'(x)=0 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=2$$

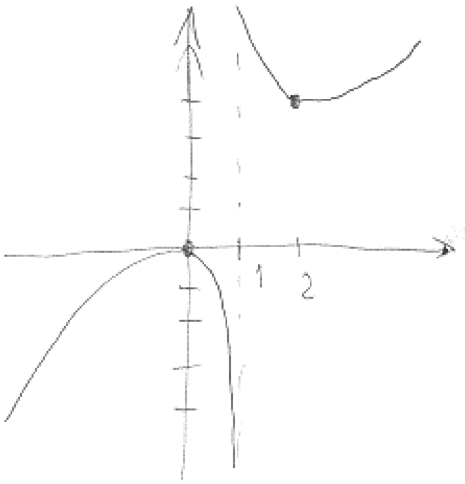
	$x<0$	0	$0<x<1$	$1<x<2$	2	$2<x$
f'	+	0	−	−	0	+
f	$\uparrow$	lok. max	$\downarrow$	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$

$f(0)=0$ 2p
$f(2)=4$

$$f''(x)=\frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{2(x-1)^2-2(x^2-2x)}{(x-1)^3}=\frac{2}{(x-1)^3}\neq 0$$

	$x<1$	$1<x$
f''	−	+
f	$\cap$	$\cup$

2p



1p

$R_f=(-\infty;0]\cup[4,\infty)$
1p

(4) Mivel az egyenes meredeksége $\frac{1}{2}$, azokat a pontokat kell megkeresni, ahol a görbe deriváltja $\frac{1}{2}$. 2p

$(\ln(x^2+4))'=\frac{1}{x^2+4}\cdot 2x=\frac{2x}{x^2+4}$ 1p $\frac{2x}{x^2+4}=\frac{1}{2} \Rightarrow 4x=x^2+4 \Rightarrow 0=(x-2)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=2$. 1p A görbe $x_0=2$ pontbeli érintője lesz párhuzamos a megadott egyenessel. $\ln(2^2+4)=\ln 8$, 1p így az érintő egyenlete:

$$y=\frac{1}{2}(x-2)+\ln 8 \quad 1p$$

(5) $\int e^{\sqrt{x}}dx=\int e^t 2t\,dt \overset{2p}{=} 2t\cdot e^t-\int 2e^t dt \overset{2p}{=} 2te^t-2e^t+C \overset{1p}{=} 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}-2e^{\sqrt{x}}+C$ 1p

$\sqrt{x}=t,\ x=t^2,\ dx=2t\,dt$ $\quad f=2t \quad f'=2$
$\quad g'=e^t \quad g=e^t$

(6) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx+\int_{0}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx \overset{1p}{=} \lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{1}{1+x^2}dx+\lim_{b\to\infty}\int_0^b\frac{1}{1+x^2}dx \overset{2p}{=}$

$=\lim_{a\to-\infty}[\mathrm{arctg}\,x]_a^0+\lim_{b\to\infty}[\mathrm{arctg}\,x]_0^b \overset{1p}{=} \lim_{a\to-\infty}(-\mathrm{arctg}\,a)+\lim_{b\to\infty}(\mathrm{arctg}\,b) \overset{1p}{=} \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$ 1p

(7) A háromszög területe: $T=\frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}|$ 2p $=\frac{1}{2}\left|\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3\\1\\-2\end{bmatrix}\right|$ 1p $=\frac{1}{2}\left|\begin{bmatrix}-4\\2\\-5\end{bmatrix}\right|$ 2p $=$

$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(-4)^2+2^2+(-5)^2}=\frac{\sqrt{45}}{2}$ 1p