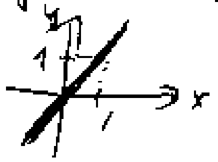
10. zh. megoldás, B csoport

1) Legyen $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$. Ekkor $\mathrm{Im}(z^2)=|z|^2 \Leftrightarrow 2xy=x^2+y^2 \Leftrightarrow 0=(x-y)^2 \Leftrightarrow y=x$.
Tehát a megoldás az $y=x$ egyenletű egyenes:



2) Legyen $z=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$. Ekkor $\dfrac{z-\mathrm{Re}(z)}{z-\mathrm{Im}(z)}=\bar z \Rightarrow \dfrac{a+bi-a}{a+bi-b}=a-bi \Rightarrow bi=(a^2-ab+b^2)+b^2i$

Ebből $a^2-ab+b^2=0$ és $b=b^2$. A 2. egyenletből $b=0$ vagy $b=1$. Ha $b=0$, akkor az első egyenletből $a=0$, de akkor $z=0 \Rightarrow z-\mathrm{Im}(z)=0$, ami ellentmondás.
Ha $b=1$, akkor $a^2-a+1=0$. ~~Tehát~~ Az egyenlet diszkriminánsa negatív, tehát nincs megoldás. ~~$a^2-a=0 \Rightarrow a=0$ vagy $a=1$. Tehát 2 megoldás van: $z_1=i$, $z_2=1+i$.~~

3) Ha $n=1$, akkor $\sum_{k=1}^{1} k\cdot 3^k=1\cdot 3^1=3=\frac{3}{4}\cdot(1\cdot 3^1+1)$. Tfh. $\sum_{k=1}^{n} k\cdot 3^k=\frac{3}{4}((2n-1)3^n+1)$. Belátjuk, hogy akkor $\sum_{k=1}^{n+1} k\cdot 3^k=\frac{3}{4}((2n+1)\cdot 3^{n+1}+1)$. ~~$\sum_{k=1}^{n+1} k\cdot 3^k = \sum_{k=1}^{n} k\cdot 3^k+(n+1)\cdot 3^{n+1}=\frac{3}{4}(n3^n+1)+(n+1)3^{n+1}=$~~

~~$=\frac{3}{4}\left(n\cdot 3^n+1+\frac{4}{3}\cdot(n+1)\cdot 3^{n+1}\right)=\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{n}{3}3^{n+1}+1+\frac{4(n+1)}{3}\cdot 3^{n+1}\right)=\frac{3}{4}\cdot$~~

$\sum_{k=1}^{n+1} k\cdot 3^k=\sum_{k=1}^{n} k\cdot 3^k+(n+1)3^{n+1}=\frac{3}{4}((2n-1)\cdot 3^n+1)+(n+1)3^{n+1}=\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{2n-1}{3}\cdot 3^{n+1}+1+\frac{4(n+1)}{3}\cdot 3^{n+1}\right)=\frac{3}{4}\cdot((2n+1)3^{n+1}+1)$

4) a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+\sqrt{n+1}}{n-\sqrt{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}{1-\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}=1$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{2x-1}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{2x-1})(1+\sqrt{2x-1})}{(x-1)(1+\sqrt{2x-1})}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-2x}{(x-1)(1+\sqrt{2x-1})}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-2}{1+\sqrt{2x-1}}=-1$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}3x-\sin 2x}{x-2\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\mathrm{tg}3x}{3x}\cdot 3-\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2}{1-2\cdot\frac{\sin x}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{3}{\cos 3x}-\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2}{1-2\cdot\frac{\sin x}{x}}=\dfrac{3-2}{1-2}=-1$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+1}$ divergens, a minoráns-elv alapján, mert $\frac{n+1}{n^2+1}\geq\frac{n}{2n^2}=\frac{1}{2n}$, és $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergens. Másrészt $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{n}}=0$, $\frac{n+2}{(n+1)^2+1}-\frac{n+1}{n^2+1}=$

$=\dfrac{(n+2)(n^2+1)-(n+1)((n+1)^2+1)}{((n+1)^2+1)(n^2+1)}=\dfrac{-n^2-3n}{((n+1)^2+1)(n^2+1)}<0$, tehát $\left\{\frac{n+1}{n^2+1}\right\}$ monoton csökkenő.

$(-1)^n\cdot\frac{n+1}{n^2+1}$ váltakozó előjelű, ezért $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n+1}{n^2+1}$ Leibniz típusú sor, és feltételesen konvergens.