Vizsga m.o. 2022.12.

A) Legyen f értelmezve x_0 egy környezetében. Ha a $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ határérték létezik és véges, akkor azt mondjuk, hogy f deriválható x_0-ban, és deriváltja a fenti határérték.

B) Legyen $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ egy pozitív tagú sor. Ha létezik olyan $q<1$, hogy $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le q$ minden pozitív egész n-re, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ konvergens. Ha létezik olyan $q>1$, hogy $\frac{a_{n+1}}{a_n}\ge q$ minden pozitív egész n-re, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ divergens. VAGY

Legyen $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ egy pozitív tagú sor. Ha $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ konvergens. Ha $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ divergens.

C) Ha f folytonos $[a,b]$-n, akkor itt integrálható VAGY

Ha f monoton és korlátos $[a,b]$-n, akkor itt integrálható.

1) A másodfokú egyenletek megoldóképlete alapján:

$$z_{1,2}=\frac{1+3i\pm\sqrt{(1+3i)^2-4\cdot1\cdot(-2+i)}}{2}=\frac{1+3i\pm\sqrt{1+6i-9+8-4i}}{2}=\frac{1+3i\pm\sqrt{2i}}{2}=$$

$$=\frac{1+3i\pm\sqrt{2(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})}}{2}=\frac{1+3i\pm\left(\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)}{2}=\frac{1+3i\pm(1+i)}{2}\begin{cases}1+2i\\ i\end{cases}$$

Tehát a megoldások: $z_1=1+2i$, $z_2=i$.

2) Mivel a sor pozitív tagú, ezért nem lehet feltételesen konvergens. Másrészt a majoráns elv alapján $\frac{\sqrt{n}+3}{n^2+n+1}<\frac{4\sqrt{n}}{n^2}=4\cdot\frac{1}{n^{3/2}}$, és $4\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ konvergens, mert $\frac{3}{2}>1$, ezért $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+3}{n^2+n+1}$ abszolút konvergens.

3) $f(x)=x\ln^2x$ $\quad D_f=(0,\infty)$, zérushelyek: $x=1$. Nem páros, nem páratlan, nem periodikus. D_f-en folytonos. $\lim\limits_{x\to\infty}x\ln^2x=\infty$

$$\lim_{x\to0+0}x\ln^2x=\lim_{x\to0+0}\frac{\ln^2x}{\frac{1}{x}}\ \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)=\lim_{x\to0+0}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{(-1)\cdot x^{-2}}=\lim_{x\to0+0}\frac{2\ln x}{-\frac{1}{x}}\ \left(\frac{-\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to0+0}\frac{2\cdot\frac{1}{x}}{x^{-2}}=\lim_{x\to0+0}2x=0$$

$f'(x)=1\cdot\ln^2x+x\cdot2\ln x\cdot\frac{1}{x}=\ln^2x+2\ln x\Rightarrow\ln x=0$ vagy $\ln x=-2\Rightarrow x=1$ vagy $x=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$.

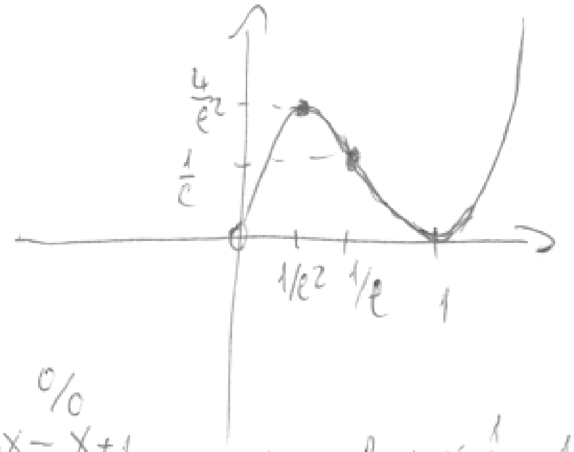
	$0<x<\frac{1}{e^2}$	$x=\frac{1}{e^2}$	$\frac{1}{e^2}<x<1$	$x=1$	$1<x$
f'	+	0	−	0	+
f	↑	lok. max.	↓	lok. min.	↑

$f\left(\frac{1}{e^2}\right)=\frac{4}{e^2}$, $f(1)=0$

$f''(x) = 2\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x} + 2\cdot\frac{1}{x} = \frac{2}{x}(\ln x + 1)$ $\quad f''(x) \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

	$0<x<\frac{1}{e}$	$x=\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e}<x$
f''	$-$	0	$+$
f	$\cap$	infl. pont	$\cup$

$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}$



$R_f = [0;\infty)$

4) $\lim\limits_{x\to 1+0}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = \lim\limits_{x\to 1+0}\frac{x\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} \overset{0/0}{=} \lim\limits_{x\to 1+0}\frac{\ln x + x\cdot\frac{1}{x} - 1}{\ln x + (x-1)\cdot\frac{1}{x}} =$

$= \lim\limits_{x\to 1+0}\frac{\ln x}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} \overset{0/0}{=} \lim\limits_{x\to 1+0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} - (-1)\cdot x^{-2}} = \lim\limits_{x\to 1+0}\frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$

5) $\int \cos^5 x\,dx = \int \cos x(1-\sin^2 x)^2\,dx = \int \cos x - 2\cos x\cdot\sin^2 x + \cos x\cdot\sin^4 x\,dx =$

$= \sin x - 2\cdot\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C$

6) $\int e^{\sqrt{x}}\,dx = \int e^t\,2t\,dt = 2te^t - \int 2e^t\,dt = 2te^t - 2e^t + C = 2\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C$

$\sqrt{x} = t,\ x = t^2,\ dx = 2t\,dt$ $\quad f = 2t \quad f' = 2$ $\quad g' = e^t \quad g = e^t$

7) Legyen γ a bezárt szög. Ekkor

$\cos\gamma = \frac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{|\underline{a}|\cdot|\underline{b}|} = \frac{(-\sqrt{3})\cdot(-2) + 1\cdot\sqrt{3} + 0\cdot(-\sqrt{2})}{\sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2 + 0^2}\cdot\sqrt{(-2)^2 + (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Ebből

$\gamma = \frac{\pi}{6}$