Vizsga 2023.01.~~23~~ 13. m.o.

(A) Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ egy numerikus sor. Ha az sor részletösszegeinek $\{s_n\}$ sorozata konvergens, akkor azt mondjuk, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens, és összege a részletösszegek sorozatának határértéke.

(B) Legyen f folytonos $[a;b]$-n és deriválható $(a;b)$-n. Ekkor van olyan $c \in (a;b)$, melyre $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

(C) Legyen f integrálható az $[a;b]$ intervallumon minden $b>a$ esetén, ahol a egy rögzített valós szám. Ha a $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f$ határérték létezik és véges, azt mondjuk, hogy az $\int_a^{\infty} f$ improprius integrál konvergens, és értéke a fenti határérték.

(1) Legyen $z=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$. Ekkor $z=|z|^2 \iff a+bi=a^2+b^2 \iff a=a^2+b^2$ és $b=0$. Ebből $a=a^2$, azaz $a=0$ vagy $a=1$. Tehát a megoldások: $z_1=0$, $z_2=1$.

(2) $a_{n+1}-a_n=\frac{n-2}{2n+3}-\frac{n-3}{2n+1}=\frac{(n-2)(2n+1)-(n-3)(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)}=\frac{7}{(2n+3)(2n+1)}>0$, tehát $\{a_n\}\uparrow$.

$\inf\{a_n\}=a_1=-\frac{2}{3}$. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-2}{2n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-2/n}{2+3/n}=\frac{1}{2}$, tehát $\sup\{a_n\}=\frac{1}{2}$

(3) $f(x)=x\cdot e^{-x}$. $D_f=\mathbb{R}$, zérushelyek: $x=0$, mert $e^{-x}>0$. $f(-x)=-xe^{x}\neq\pm f(x)$, tehát f nem páros, nem páratlan. Nem is periodikus, és folytonos $\mathbb{R}$-en.

$\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot e^{-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}\overset{\infty/\infty}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0$, és $\lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot e^{-x}=-\infty$.

$f'(x)=1\cdot e^{-x}+x\cdot e^{-x}\cdot(-1)=(1-x)e^{-x}$. $f'(x)=0 \iff x=1$

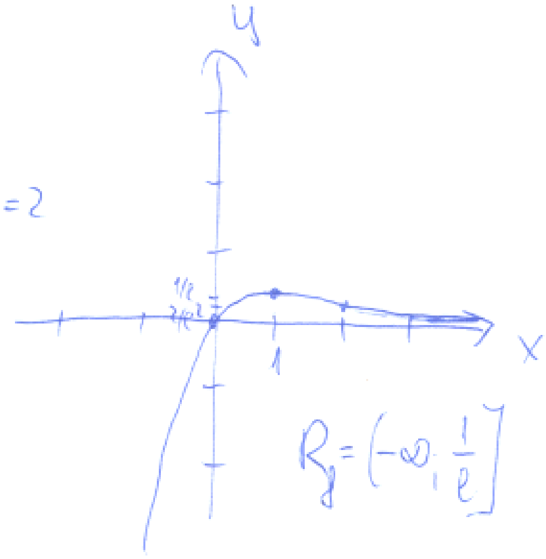
	$x<1$	$x=1$	$1<x$
f'	+	0	−
f	↑	abs. max.	↓

$f(1)=\frac{1}{e}$

$f''(x)=(-1)\cdot e^{-x}+(1-x)\cdot e^{-x}\cdot(-1)=(x-2)e^{-x}$. $f''(x)=0 \iff x=2$

	$x<2$	$x=2$	$2<x$
f''	−	0	+
f	∩	infl. p.	∪

$f(2)=\frac{2}{e^2}$



$R_f=(-\infty,\frac{1}{e}]$

④ Azon érintőket keressük, melyek meredeksége 2, tehát azon pontbeli érintőket, ahol a függvény deriváltja 2.

$\left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. $\quad \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 2 \iff x = 2\sqrt{x^2+1} \Rightarrow x \geq 0$ és négyzetre lehet emelni.

$x^2 = 4x^2+4 \Rightarrow 0 = 3x^2+4$, tehát nincs a feltételnek megfelelő érintő.

⑤ $\int \ln^2 x \, dx = x \ln^2 x - \int x \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x} dx = x\ln^2 x - \int 2\ln x \, dx = x\ln^2 x - \left(2x\ln x - \int 2x \cdot \frac{1}{x} dx\right) =$

$f = \ln^2 x \quad f' = 2\ln x \cdot \frac{1}{x}$

$g' = 1 \quad g = x$

$f = \ln x \quad f' = \frac{1}{x}$

$g' = 2 \quad g = 2x$

$= x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$

⑥ $\int \frac{x-1}{x(x+1)(x+2)} dx$

Parciális törtekre bontás: $\frac{x-1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$

Ebből $x-1 = A(x+1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x+1)$.

$x=0$: $-1 = 2A \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$

$x=-1$: $-2 = -B \Rightarrow B = 2$

$x=-2$: $-3 = 2C \Rightarrow C = -\frac{3}{2}$

$$\int \frac{x-1}{x(x+1)(x+2)} dx = \int \frac{-1/2}{x} + \frac{2}{x+1} + \frac{-3/2}{x+2} dx = -\frac{1}{2}\ln|x| + 2\ln|x+1| - \frac{3}{2}\ln|x+2| + C$$

⑦ $V = \pi \cdot \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx = \pi \cdot \int_{-1}^{1} 1-x^2 \, dx = \pi \cdot \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \pi \cdot \left(\left(1-\frac{1}{3}\right) - \left(-1+\frac{1}{3}\right)\right) =$

$= \pi \cdot \frac{4}{3}$