Vizsga, 2023.01.20. m.o.

(A) Az F függvény primitív függvénye az I intervallumon, ha F deriválható I-n és $F'(x)=f(x)$ minden $x\in I$ esetén.

(B) Ha $x>-1$ és n egy ~~nemnegatív egé~~ pozitív egész, akkor $(1+x)^n \geq 1+nx$.

(C) Az $\underline{a}, \underline{b}$ vektorok skaláris szorzata az $|\underline{a}|\cdot|\underline{b}|\cdot\cos\gamma$ szám, ahol γ a vektorok által bezárt szög.

(1) Legyen $z=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$. Ekkor $z^2=(\bar z)^2 \Leftrightarrow (a+bi)^2=(a-bi)^2 \Leftrightarrow a^2+2abi-b^2=a^2-2abi-b^2 \Leftrightarrow ab=0 \Leftrightarrow a=0$ vagy $b=0$. Tehát a megoldások: $z=a$, $a\in\mathbb{R}$ és $z=bi$, $b\in\mathbb{R}$.

(2) $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$$

(3) $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, Zh.: -1. Nem páros, nem páratlan, nem periódikus. D_f-en folytonos.

$$\lim_{x\to\infty}\left(x+\frac{1}{x^2}\right)=\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{1}{x^2}\right)=-\infty,\quad \lim_{x\to 0}\left(x+\frac{1}{x^2}\right)=\infty.$$

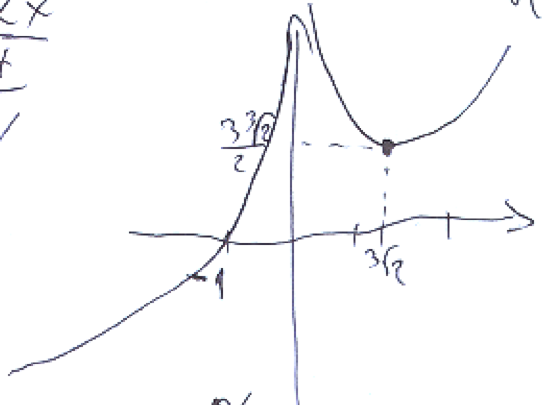
$f'(x)=1-\frac{2}{x^3} \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{2}$

	$x<0$	$0<x<\sqrt[3]{2}$	$x=\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2}<x$
f'	$+$	$-$	0	$+$
f	$\uparrow$	$\downarrow$	lok min	$\uparrow$

$f''(x)=\frac{6}{x^4}$ ~~>0~~ $f''(x)\neq 0$

	$x<0$	$0<x$
f''	$+$	$+$
f	$\cup$	$\cup$

$f(\sqrt[3]{2})=\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}=\frac{3\cdot\sqrt[3]{2}}{2}$



$R_f=\mathbb{R}$

(4) $$\lim_{x\to 0}\overset{0/0}{\frac{\sin x-x}{x^3}}=\lim_{x\to 0}\overset{0/0}{\frac{\cos x-1}{3x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{6x}=-\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=-\frac{1}{6}$$

(5)

$$\int \frac{3x}{\sqrt{x^2+2}}\,dx = \frac{3}{2}\cdot\int \underset{g'}{2x}\cdot\underset{f^a}{(x^2+2)^{-\frac{1}{2}}}\,dx = \frac{3}{2}\cdot\frac{(x^2+2)^{1/2}}{1/2}+C = 3\sqrt{x^2+2}+C$$

(6)

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{t}{t^2+1}\,\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg} e^x + C$$

$t=e^x$, $x=\ln t$, $dx=\frac{1}{t}\,dt$

(7)

$\underline{a}, \underline{b}$ merőlegesek $\Leftrightarrow$ $\underline{a}\cdot\underline{b}=0$

$\underline{a}\cdot\underline{b} = 2\cdot(-2)+(-1)(2t-1)+t\cdot 1 = -3-t$, tehát $\underline{a},\underline{b}$ pontosan akkor merőlegesek, ha $t=-3$.