# A1 vizsga, m.o.

(A) Az $A,B$ halmazok metszete az a halmaz, melynek elemei azon elemek, melyek $A$-nak is és $B$-nek is elemei. Jele: $A \cap B$

(B) Ha $f$ integrálható $[a,b]$-n, és $F$ $f$ primitív függvénye $[a,b]$-n, akkor $\int_a^b f = F(b)-F(a)$.

(C) A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor Leibniz típusú, ha $\{a_n\}$ váltakozó előjelű, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ és $\{|a_n|\}$ monoton csökkenő.

(1) Legyen $z=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$. Ekkor $(\bar{z})^2-z=2 \iff (a-bi)^2-(a+bi)=2 \iff$
$a^2-2abi-b^2-a-bi=2 \iff \left.\begin{matrix} a^2-b^2-a=2 \\ -2ab-b=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow b=0$ vagy $a=-\frac{1}{2}$. Ha $b=0$, akkor

$a^2-a-2=0 \Rightarrow a_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}$ $\begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix}$. Ha $a=-\frac{1}{2}$, akkor $\frac{1}{4}-b^2+\frac{1}{2}=2 \Rightarrow b^2+\frac{5}{4}=0$ ↯.

Tehát a megoldások: $z_1=2$, $z_2=-1$.

(2) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-2}{3n+1}\right)^{2n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-3}{3n+1}\right)^{3n+1}\right)^{\frac{2n-1}{3n+1}} = \left(e^{-3}\right)^{2/3} = e^{-2},$$ mert $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}}=\frac{2}{3}$

(3) $D_f=\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)^2\cdot x$, tehát zh.: $1, 0$. Nem páros, nem páratlan, nem periodikus. Folytonos $\mathbb{R}$-en, $\lim_{x\to\infty}(x-1)^2\cdot x=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}(x-1)^2 x=-\infty$.

$f'(x)=3x^2-4x+1=(x-1)(3x-1) \Rightarrow x_1=1,\ x_2=\frac{1}{3}$.

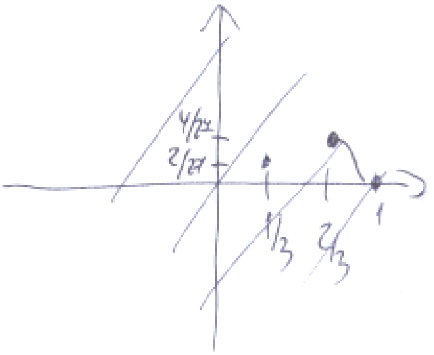
| | $x<\frac{1}{3}$ | $x=\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}<x<1$ | $x=1$ | $1<x$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | + | 0 | − | 0 | + |
| $f$ | ↑ | lok. max. | ↓ | lok. min. | ↑ |

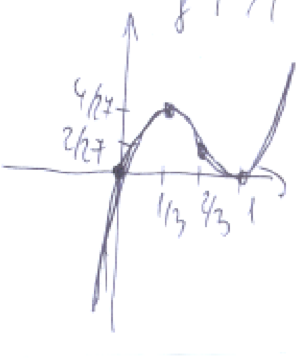
$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{27}$, $f(1)=0$

$f''(x)=6x-4$, $f''(x)=0 \Rightarrow x=\frac{2}{3}$.

| | $x<\frac{2}{3}$ | $x=\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}<x$ |
|---|---|---|---|
| $f''$ | − | 0 | + |
| $f$ | ∩ | infl. pont | ∪ |

$f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{27}$




$R_f=\mathbb{R}$

(4) $0/0$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{x\cdot \operatorname{ctg} x}{\frac{\pi}{2}-x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ctg} x - \frac{1}{\sin^2 x}\cdot x}{-1} = \frac{-\frac{\pi}{2}}{-1} = \frac{\pi}{2}$$

(5)

$$\int x\cdot e^{2x}\,dx = x\cdot\frac{e^{2x}}{2} - \int 1\cdot\frac{e^{2x}}{2}\,dx = \frac{1}{2}x\cdot e^{2x} - \frac{1}{4}\cdot e^{2x} + C$$

$f = x \quad f' = 1$

$g' = e^{2x} \quad g = \frac{e^{2x}}{2}$

(6)

$$\int \frac{x}{(x+3)^2}\,dx = \int \frac{x+3-3}{(x+3)^2}\,dx = \int \frac{1}{x+3} - \frac{3}{(x+3)^2}\,dx = \ln|x+3| - 3\cdot\frac{(x+3)^{-1}}{-1} + C$$

(alternatív m.o.: parciális törtekre bontás)

(7)

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \left[\operatorname{arctg} x\right]_a^0 = \lim_{a\to-\infty} (\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} a) = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$