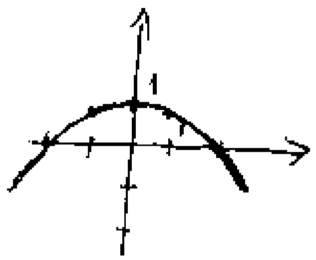
A csoport

(1) Legyen $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Ekkor az egyenlet:

$\sqrt{x^2+y^2} + y = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 2 - y$. Ebből $y \le 2$ és $x^2+y^2 = (2-y)^2$.

Ezt átrendezve és egyszerűsítve: $y = \frac{4-x^2}{4} = -\frac{1}{4}x^2 + 1$

A megoldáshalmaz a komplex számsíkon:



(2) Legyen $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Ekkor: $(x+yi)^2 + (x-yi)^2 = x + yi \Rightarrow$ ~~$(x+yi)(x-yi) + x + yi - 2(x-yi) \Rightarrow 0 \Rightarrow$~~

$\Rightarrow 2x^2 - 2y^2 = x + yi \Rightarrow y = 0$ és $2x^2 - 2y^2 = x$, azaz $2x^2 = x$.

Ennek megoldásai $x_1 = 0$ és $x_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow z_1 = 0$ és $z_2 = \frac{1}{2}$ a komplex megoldások.

(3) $n=1$ esetén $\sum_{k=1}^{1} k(k+1) = 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3}$

Tfh. az állítás $n = m$-re igaz, azaz $\sum_{k=1}^{m} k(k+1) = \frac{m(m+1)(m+2)}{3}$. Legyen $n = m+1$.

Ekkor $\sum_{k=1}^{m+1} k(k+1) = \sum_{k=1}^{m} k(k+1) + (m+1)(m+2) = \frac{m(m+1)(m+2)}{3} + (m+1)(m+2) = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{3}$,

azaz az egyenlőség $n = m+1$ esetén is teljesül.

(4) a)

Ha $n \ge 2$, akkor $\sqrt[2n]{\frac{n^2}{2}} \le \sqrt[2n]{n^2 - n + 2} \le \sqrt[2n]{3n^2}$. Másrészt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{n^2/2} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{\sqrt{2}}} = 1$ és $\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{3n^2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{3}} \cdot \sqrt[n]{n} = 1$, így a rendőr-elv

alapján $\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{n^2 - n + 2} = 1$.

b) $\lim_{x\to 0} \frac{3x + \sin(5x)}{5x - \sin(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{3 + \frac{\sin(5x)}{5x} \cdot 5}{5 - \frac{\sin(3x)}{3x} \cdot 3} = 4$, ahol általánosítottuk a

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ nevezetes határértéket.

c) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{2x - 2} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)}{(2x-2)(\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+3) - 4}{(2x-2)(\sqrt{x+3} + 2)} =$

$= \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{2(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{2(\sqrt{x+3} + 2)} = \frac{1}{8}$

⑤ A gyökkritérium alapján a $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{2n^2}$ sorra:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{2n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}\right)^2 = \left(\frac{e}{e^2}\right)^2 = \frac{1}{e^2} < 1,$$ tehát

a $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{2n^2}$ sor abszolút konvergens.