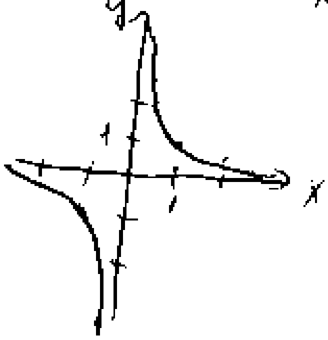
# B csoport

① Legyen $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$. Ekkor $\operatorname{Im}(z^2)=2 \Rightarrow \operatorname{Im}((x+yi)^2)=2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \operatorname{Im}(x^2-y^2+2xyi)=2 \Rightarrow 2xy=2 \Rightarrow y=\frac{1}{x}$ $(x\neq 0)$. A megoldások a komplex számsíkon:




② Legyen $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$. Ekkor $z\bar{z}+z+2\bar{z}=0 \Rightarrow (x+yi)(x-yi)+x+yi+2(x-yi)=0$
$\Rightarrow x^2+y^2+3x-yi=0 \Rightarrow x^2+y^2+3x=0$ és $y=0 \Rightarrow x^2+3x=0 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=-3$.
A komplex megoldások: $z_1=0$, $z_2=-3$.

③ $n=1$ esetén $\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1 = \left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2$. Tfh. az állítás $n=m$ esetén igaz, és legyen $n=m+1$. Ekkor $\sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \sum_{k=1}^{m} k^3 + (m+1)^3 = \left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2 + (m+1)^3 = \frac{(m+1)^2}{4}\cdot\left(m^2+(m+1)\cdot 4\right) = \frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4}$,
azaz az állítás $n=m+1$ esetén is igaz.

④ a) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{3n}}{1+\frac{2}{3n}}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(1+\frac{-1/3}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{2/3}{n}\right)^n}\right)^2 = \left(\frac{e^{-1/3}}{e^{2/3}}\right)^2 = \frac{1}{e^2}.$$

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{1+\cos x} = 0,$$
ahol használtuk a $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ nevezetes határértéket.

c) $$\lim_{x\to -1}\frac{3x+3}{\sqrt{x+5}-2} = \lim_{x\to -1}\frac{(3x+3)(\sqrt{x+5}+2)}{(\sqrt{x+5}-2)(\sqrt{x+5}+2)} = \lim_{x\to -1}\frac{3(x+1)(\sqrt{x+5}+2)}{x+5-4} = \lim_{x\to -1}\frac{3(\sqrt{x+5}+2)}{1} = 12$$

⑤ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{n^2+\text{[redacted]}}$ Mivel $\frac{2}{n^2+n}\le\frac{2}{n^2}$, és $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konvergens a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ alakú sorokra vonatkozó tétel miatt, ezért a majoráns-kritérium alapján $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2+n}$ konvergens, és $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{n^2+n}$ abszolút konvergens.