

MATEMATIKA BSC ZÁRÓVIZSGA TÉTELSORA
Algebra, Analízis, Diszkrét matematika, Geometria és Valószínűségszámítás
Érvényes a 2026. júliusi záróvizsgáktól kezdve

ALGEBRA

1. Számelmélet

Oszthatóság, egység, legnagyobb közös osztó definíciója. Maradékos osztás tétele, euklideszi algoritmus. Felbonthatatlan szám, prímszám, számelmélet alaptétele. Kongruencia definíciója, elemi tulajdonságai, maradékosztály, teljes és redukált maradékrendszer. Euler–Fermat tétel.

2. Lineáris egyenletrendszerek és mátrixaik

Homogén és inhomogén lineáris egyenletrendszer, mátrix rangja, megoldhatóság feltétele, megoldások száma. $\mathbb{R}^n$, vektortér, altér, lineáris függetlenség, összefüggőség, bázis, dimenzió. Mátrix sor, oszlop és nulltere. Gauss-elimináció, elemi sorműveletek, lépcsős alak, redukált lépcsős alak. Mátrixműveletek és tulajdonságaik, mátrix inverze, transzponáltja, pszeudoinverze. LU és PLU felbontás létezése és használata.

3. Lineáris transzformációk, mátrixok

Lineáris leképezés fogalma, mátrix alakja, bázisátmenet. Sajátérték, sajátvektor, diagonalizáció. Cayley–Hamilton tétel és Jordan-féle normálalak. Az euklideszi skalárszorzat és norma. Ortogonális és szimmetrikus mátrixok. Kvadratikus alakok definitisége. Skalárszorzat a komplex számok és véges testek felett. Bilineáris formák, standard alak, főtengetyítél. Mátrixfelbontások: SVD, QR, spektrálfelbontás.

4. Csoportelmélet

Csoport, részcsoporth, normálosztó, faktorcsoport, homomorfizmus, homomorfizmustétel. Elem és csoport rendje, Lagrange-tétel, Cauchy-tétel. Ciklikus csoport részcsoporthjai. Véges Abel-csoportok alaptétele, p -csoportok, Sylow-részcsoporth, Sylow tételei.

5. Polinomgyűrűk és testek

Gyűrű, részgyűrű, ideál, faktorgyűrű. Test, karakterisztika, prímtest. $F[x]$ -ben és $\mathbb{Z}$ -ben: maradékos osztás, főideálgyűrű, maximális ideálok és ezekkel vett faktorok. Komplex számok, polinomok, az algebra alaptétele. Testbővítés foka, algebrai elem, egyszerű testbővítés.

ANALÍZIS

1. Differenciálás

Egyváltozós skalárfüggvény esetén: függvény deriváltja, differenciálási szabályok, középértéktételek (Rolle és Lagrange), monotonitás kapcsolata a deriválttal és a konvexitás kapcsolata a második deriválttal, Hölder- és Minkowski-egyenlőtlenség.

Többváltozós vektorértékű függvény esetén: parciális derivált, függvény deriváltja, differenciálási szabályok. Függvény Jacobi-mátrixa és Jacobi-determinánsa. Iránymenti derivált. Függvény gradiense, divergenciája, rotációja. Laplace operátor. Érintősíkh. Függvény lokális (szigorú) maximuma/minimuma. Függvény lokális szélsőértékének jellemzése a függvény deriváltjaival. Függvény lokális maximuma és minimuma adott feltétel mellett. A feltételes szélsőérték létezésének szükséges feltétele. Lagrange-multiplikátor.

2. Függvénysorok és integrálás

Valós sor konvergenciája. Konvergencia-kritériumok (majoráns/minoráns, gyök és hányados kritérium). Leibniz-sor. Függvénysor pontonkénti, egyenletes és lokálisan egyenletes konvergenciája. Hatványsorok és a hatványsorokra vonatkozó Cauchy–Hadamard-tétel. Skalár-skalár függvények esetén függvénysor tagonkénti integrálhatósága és differenciálhatósága. Taylor-sorfejtés.

Adott felosztáshoz tartozó közelítő összegek és oszcillációs összeg. Riemann integrálhatóság. Newton–Leibniz-tétel. Integrálszámítás alkalmazása (görbe ívhossza; síkidom területe; forgástest térfogata és felszíne). Polár, henger és gömbi koordináták. Sík, illetve térbeli tartományon vett integrálás szemléletes bevezetése. Integrálás normáltartományokon, két- és háromdimenziós integrálok felírása szukcesszív egydimenziós integrálokkal. Integrálok sorrendjének a felcserélése. Felület normálvektora és felszíne. Tértartomány térfogata. Gauss–Osztrogradszkij-tétel és Stokes-tétel.

3. Komplex függvénytan és Fourier-sorfejtés

Komplex függvény differenciálhatósága és deriváltja. Cauchy–Riemann-egyenletek. Görbementi integrál. Newton–Leibniz-tétel. Goursat-lemma. Görbe indexfüggvénye és az indexfüggvény tulajdonságai. Cauchy tétele kontúrhomotóp görbéken számolt integrálról. Cauchy integrálformulái. Holomorf függvény analitikussága. Liouville-tétel és az algebra alaptétele. Holomorf függvények gyökeinek tulajdonságai és a gyökök multiplicitása. Lokális maximum elve. Laurent-sorfejtés. Függvény szingularitása, n -ed rendű pólusa és lényeges szingularitása. Reziprocitás-tétel.

Fourier-együtthatók és Fourier-sorfejtés. Integrálható függvény Fourier-együtthatóinak konvergenciája. Kétszer folytonosan differenciálható függvény Fourier-sorának konvergenciája.

4. Metrikus terek és normált terek

Nyílt, zárt, korlátos és kompakt halmazok és alaptulajdonságaik. Valós számokra: Borel–Lebesgue-tétel és Cauchy-kritérium. Metrikus téren: függvény folytonossága és határértéke, kompakt halmazokra vonatkozó Cantor-féle közösrész tétel, Borel–Lebesgue-tétel, Bolzano–Weierstrass-tétel; függvényekre vonatkozó Weierstrass-féle maximum-minimum elv, Heine-tétel és Banach-féle fixponttétel. Teljes metrikus tér, Banach-tér és Hilbert-tér fogalma. Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség, vektor kifejtése teljes ortonormált rendszerben, Parseval-egyenlőség. Operátornorma és tulajdonságai. Carl–Neumann-sor. Normák ekvivalenciája. Példa nem folytonos lineáris leképezésre és nem ekvivalens normákra.

5. Differenciálegyenletek

Kezdetiérték-probléma, Lipschitz-tulajdonság, egzisztencia- és unicitástétel. A megoldás létezése és folytonos függése a kezdeti értékektől. Explicit módon megoldható egyenlettípusok (szeparábilis, lineáris és egzakt differenciálegyenletek). Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek megoldása. Magasabb rendű lineáris differenciálegyenlet megoldása. A stabilitás és az aszimptotikus stabilitás fogalma. Stabilitásvizsgálat linearizálással. Ljapunov-tételek.

GEOMETRIA

1. Konvex poliéderek

- n dimenziós konvex poliéder definíciója (félterek metszete vs csúcspont halmaz konvex burka)
- n dimenziós szabályos poliéderek osztályozása
- 3 dimenziós Euler-tétel, Platoni testek létezése

2. Nemeuklideszi geometriák

- háromszög szögösszege és területe hiperbolikus és szférikus geometriában (Legendre-tételek)
- modelltavolságok (kettősszorzó)
- homogén koordináták és a valós projektív sík (Desargues-tétel, Pappos-tétel)

3. Görbék és felületek differenciálgeometriája a 3 dimenziós euklideszi térben

- A görbeelmélet alaptétele, a felületelmélet alaptétele, theoremata egregium és az ezekben szereplő fogalmak ismertetése.

DISZKRÉT MATEMATIKA ÉS ALGORITMUSOK

1. Adatrendezési módszerek. A keresés alapvető módszerei, adatszerkezetek

Kiválasztásos, beszúrásos, gyors, összefésülő rendezések, alsó becslés rendezésnél az összehasonlítások számára, ládarendezés, radix rendezés. Bináris fa bejárások, bináris keresőfák, {piros-fekete-fák, 2-3-fák. Vödörös hashelés, nyitott címzésű hashelés}.

2. Gráfalgoritmusok

Szélességi és mélységi bejárás (BFS és DFS), DAG. Dijkstra, Ford és Floyd algoritmusai. Minimális költségű feszítőfák fogalma, mohó algoritmus, Kruskal tétele. Páros gráfok fogalma, párosítás páros gráfban, Hall és Frobenius tétel, alternálóutas algoritmus. Hálózati folyamatok, Ford–Fulkerson-tétel, javítóutas algoritmus.

3. Gráfok színezései, síkgráfok

Gráfok színezése, kromatikus szám, klikkszám, alsó és felső korlátok a kromatikus számra. Élgráfok, élkromatikus szám, Vizing tétel, König tétel. Síkgráfok, Euler-formula, négyszíntétel, topológikus izomorfia, Kuratowski-tétel, Fáry–Wagner-tétel. Feltételek Hamilton-körök létezésére.

4. Az NP fogalma, nevezetes NP-beli feladatok. NP-teljesség.

Az NP nyelv osztály, Karp-redukció, NP-teljesség, Cook–Levin-tétel, nevezetes NP-teljes nyelvek: 3SAT, HAM, 3SZÍN, MAXKLIKK, MAXFTL, RH, PARTÍCIÓ.

VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

1. Valószínűségi számítás alapjai

Valószínűségi mező, valószínűség axiómái, szita formula. Felételes valószínűség, Bayes-tétel, függetlenség. Diszkrét és folytonos valószínűségi változók, eloszlásfüggvény, súlyfüggvény, sűrűségfüggvény, várható érték, szórás. Nevezetes eloszlások: binomiális, geometriai, Poisson, egyenletes, exponenciális, normális. De Moivre–Laplace-tétel.

2. Együttes eloszlások, nagy számok törvénye és centrális határeloszlástétel

Együttes eloszlások, peremeloszlások és feltételes eloszlások. Feltételes várható érték. Függetlenség, kovariancia és korreláció. Többdimenziós normális eloszlás. Független valószínűségi változók összegei, konvolúció. Markov és Csebisev egyenlőtlenség, Nagy Számok Gyenge Törvénye. Centrális határeloszlás-tétel és alkalmazásai.

A kapcsos zárójelbe tett anyagrészek nem minden évben szerepeltek a tananyagban.